Перелік питань, що виносяться на екзамен з дисципліни «Лінійна алгебра»

1. Ін'єктивні, сюр'єктивні та бієктивні відображення між множинами.
2. Поняття лінійного відображення векторних просторів, найпростіші властивості.
3. Операції над лінійними відображеннями.
4. Ядро і образ лінійного відображення.
5. Ранг і дефект лінійного відображення та зв'язок між ними.
6. Поняття лінійного оператора векторного простору. Найпростіші властивості.
7. Зв'язок між координатами вектора і його образу при лінійному операторі.
8. Зв'язок між матрицями лінійного оператора у різних базисах.
9. Ядро і образ лінійного оператора.
10. Ранг і дефект лінійного оператора та зв'язок між ними.
11. Вироджені і невироджені лінійні оператори.
12. Власні вектори і власні значення лінійного оператора.
13. Характеристичне рівняння матриці та лінійного оператора.
14. Теорема про власні вектори, яким відповідають попарно різні власні значення.
15. Діагоналізація матриць. Умови, при яких матриця зводиться до діагонального виду.
16. Симетричні матриці. Властивість власних векторів симетричної матриці.
17. Подібні матриці та їхні властивості.
18. Транспоновані матриці та їхні властивості.
19. Лінійний оператор, спряжений до заданого, та його властивості.
20. Властивості матриць з ортонормованими стовпцями.
21. Ортогональні матриці та їхні властивості.
22. Поняття ортогонально діагоналізуємої матриці. Необхідні і достатні умови.
23. Поняття білінійної форми. Матриця білінійної форми.
24. Поняття квадратичної форми. Приклади. Матриця квадратичної форми. Ранг квадратичної форми.
25. Зведення квадратичної форми до канонічного виду. Теорема про головні осі квадратичної форми.
26. Метод Лагранжа зведення квадратичної форми до канонічного виду.
27. Класифікація квадратичних форм (додатно визначені, від'ємно визначені та невизначені квадратичні форми). Критерій Сильвестра.

Приблизні задачі, що будуть на екзамені

1. З'ясувати, чи є оператор f, який заданий в просторі $\mathbb{R}^3$ координатами вектора $f(\vec{x})$ як функція координат вектора $\vec{x}$, лінійним. У випадку лінійності знайти його матрицю в тому самому базисі, в якому задано координати векторів $\vec{x}$ і $f(\vec{x})$, якщо:
$$f(\vec{x}) = ...$$
2. Знайти всі власні вектори лінійного оператора T векторного простору W_3, якщо T є ортогональним проектуванням на площину xOy.
3. Звести матрицю до діагонального виду, якщо це можливо.
4. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду методом Лагранжа.
5. Знайти матрицю лінійного оператора T векторного простору W_3 в одиничному базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, якщо T є ортогональним проектуванням на площину, яка проходить через вектор $\vec{k}$, і ділить кут між векторами $\vec{i}, \vec{j}$ навпіл.
6. Чи існує лінійний оператор простору $\mathbb{R}^3$, який відображає вектори $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (5, 1, 0)$ у вектори $\vec{b}_1 = (4, 2, -1)$, $\vec{b}_2 = (0, 0, 3)$, $\vec{b}_3 = (0, -1, 1)$ відповідно?
7. Ортогонально діагоналізувати, якщо це можливо, симетричну матрицю
$$A = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}.$$
8. Нехай у векторному просторі $\mathbb{R}^3$ задано лінійні оператори $f(x_1, x_2, x_3) = (*, *, *)$ та $g(x_1, x_2, x_3) = (*, *, *)$. Задати аналітично оператори $f + g$ та $f \circ g$ та знайти їх матриці в одиничному базисі.
9. Які підпростори простору W_3 є інваріантними щодо лінійного оператора ортогонального проектування на координатну вісь вектора $\vec{i}$?
10. Побудувати ядро та знайти дефект лінійного оператора T простору $\mathbb{R}^3$, який задано своєю стандартною матрицею A...
11. Знайти діагональну матрицю, яка подібна над полем дійсних чисел матриці $A = \begin{bmatrix} * & * \\ & * \end{bmatrix}$.
12. Лінійний оператор f арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^3$ задано так: $f((x_1, x_2, x_3)) = (*, *, *)$. Знайти ранг і дефект, ядро і образ цього лінійного оператора.
13. Звести квадратичну форму
$$F(x_1, x_2) = ...$$
до канонічного виду і вказати відповідне ортогональне перетворення. Дослідити її на знаковизначеність.