

Задачі для екзаменаційних білетів

1. Розв'язати рівняння:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x-5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Знайти матрицю X з рівняння:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Знайти ранг матриці

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

6. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

7. Встановити, чи є система векторів лінійно-незалежною:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

8. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ до базису $\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_2, \vec{e}_1$.

9. Дано матрицю

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

переходу від базису \vec{e}_1, \vec{e}_2 до базису \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 . Знайти координати векторів \vec{e}_1, \vec{e}_2 в базисі \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 .

10. Вектор \vec{x} в базисі \vec{e}_1, \vec{e}_2 має координати $(1, -2)$. Знайти координати цього вектора в базисі $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

11. В базисі \vec{e}_1, \vec{e}_2 дано вектори $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Довести, що вектори \vec{a}, \vec{b} утворюють базис і знайти координати вектора \vec{c} в цьому базисі.

12. Дано вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, що утворюють ортонормований базис. Знайти $\vec{x} \cdot \vec{y}, |\vec{x}|$, якщо

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \quad \vec{y} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3.$$

13. Знайти матрицю лінійного перетворення, яке переводить довільний вектор $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $f(\vec{x}) = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_3, 2\alpha_2 + 5\alpha_3)$.

14. В деякому базисі дано матрицю A лінійного оператора f та вектори \vec{x}, \vec{y} . Знайти в тому ж базисі вектор $f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha = -1, \beta = 2.$$

15. В деякому базисі \vec{e}_1, \vec{e}_2 дано матрицю A лінійного оператора f . Знайти матрицю цього ж лінійного оператора в базисі \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 , якщо:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}'_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.$$

16. Знайти власні вектори лінійного оператора, що задано в деякому базисі матрицею

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. Звести (якщо це можливо) матрицю до діагонального виду:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

18. Ортогонально діагоналізувати симетричну матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

19. Знайти ортогональне перетворення, яке зводить до канонічного виду квадратичну форму

$$f(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 3x_2^2 + 6\sqrt{5}x_1x_2.$$

20. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = 14. \end{cases}$$