

БАНК ЗАДАЧ

з елементарної математики до державного екзамену

«Шкільний курс математики і методика навчання математики в старшій школі»

I. Обчислення і тотожні перетворення

Розкласти на множники:

1. $a(b-2c)^2 + b(a-2c)^2 - 2c(a+b)^2 + 8abc$

2. $a^4 - 2a^3b - 8a^2b^2 - 6ab^3 - b^4$

3. $a^2b^2(b-a) + b^2c^2(c-b) + a^2c^2(a-c)$

4. $(a-b)c^3 - (a-c)b^3 + (b-c)a^3$

5. $2(a^2+2a-1)^2 + 5(a^2+2a-1)(a^2+1) + 2(a^2+1)^2$

6. $a^3(a^2-7)^2 - 36a$

7. Довести, що якщо $a \in N$, то $(a^5 - 5a^3 + 4a):120$

8. Довести, що якщо $a \in N$, то $\frac{a^5}{120} + \frac{a^4}{12} + \frac{7a^3}{24} + \frac{5a^2}{12} + \frac{a}{5}$ - число ціле.

Спростити вирази:

9. $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)} + \frac{1}{(a+4)(a+5)}$

10. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$

11. $\sqrt{(\sqrt{a}+2)^2 - 8\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a}-2)^2 + 8\sqrt{a}}$

12. $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{a-\sqrt{ab}} - \frac{a}{\sqrt{ab}+b} \right)$

13. $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-4\sqrt{a^{-1}}} - \frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{64a}} \right)^{-2} - \sqrt{a^2+8a+16}$

14. $\left(\sqrt{ab} - ab(a+\sqrt{ab})^{-1} \right) : \frac{2\sqrt{ab}-2b}{a-b}, \quad a > 0, b > 0$

15. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

16. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}} \right)^{2 \log_{10} (a+b)}$

17. $\sqrt{\sqrt{\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2} + 2} - \log_b a - \log_a b$

18. $\frac{\sin^2(x+y) - \sin^2 x - \sin^2 y}{\sin^2(x+y) - \cos^2 x - \cos^2 y}$

19. $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2x\right) - \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2x\right)$

20. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma)$

Спростити вирази та знайти їх значення:

21. $\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}}, \text{ якщо } a = 0,5$

$$22. \sqrt{(1-y\sqrt{y}) \frac{1-\sqrt{y}}{y+\sqrt{y}+1}} - \sqrt{y}, \text{ якщо } y=2$$

$$23. \frac{\sqrt{a-2\sqrt{3a-6}+1}}{\sqrt{a-2}-\sqrt{3}}, \quad a=2,1$$

$$24. \sqrt{\log_2^2(8a)-\log_2 a^{12}} + \sqrt{\log_2^2\left(\frac{a}{2}\right)+\log_2 a^4}, \quad a=7,3$$

Довести рівності:

$$25. \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{12})=8$$

$$26. a^2 \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)} = d^2$$

$$27. \frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)} = 0$$

$$28. \frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \cdot \left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right) \cdot \frac{c(1+c)-a}{bc} = \frac{1}{a+c}$$

$$29. \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a^2-4}{a}}} + \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{a^2-4}{a}}} = \frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}, \text{ якщо } a \geq 2$$

$$30. \log_a k \cdot \log_b k + \log_b k \cdot \log_c k + \log_c k \cdot \log_a k = \frac{\log_a k \cdot \log_b k \cdot \log_c k}{\log_{abc} k}$$

Позбутися ірраціональності в знаменнику дробу:

$$31. \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{21} + \sqrt{15} + \sqrt{10}}$$

$$32. \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}$$

Порівняти числа:

$$33. \sqrt{2} + \sqrt{5} \text{ та } \sqrt{3} + 2$$

$$34. 2 \text{ та } \log_3 7 + \log_7 3$$

$$35. \log_3 108 \text{ та } \log_5 375$$

$$36. \text{ Знайти } \log_{121} 147, \text{ якщо } \log_{21} 33 = a, \quad \log_{\sqrt{21}} 63 = b$$

$$37. \text{ Знайти } \log_{28} 35, \text{ якщо } \log_7 14 = a, \quad \log_{14} 140 = b$$

$$38. \text{ Знайти } \log_{30} 12, \text{ якщо } \log_{24} 3 = a, \quad \log_{24} 5 = b$$

$$39. \text{ Знайти } \log_{150} 200, \text{ якщо } \log_{20} 50 = a, \quad \log_3 20 = b$$

Обчислити:

$$40. \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$$

$$41. 2^{\log_5 5} - 5^{\log_3 2}$$

II. Рівняння

Розв'язати рівняння:

$$1. (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$$

$$2. (x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$$

$$3. (x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$$

$$4. 27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$$

5. $\frac{4x}{x^2+x+4} + \frac{5x}{x^2-5x+4} = -\frac{3}{2}$
7. $4x^4 + 12x^3 - 47x^2 + 12x - 4 = 0$
9. $\frac{x}{x^2-3x+2} - \frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{12x+18}{(x^2-1)(x^2-4)}$
11. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x}$
13. $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$
15. $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+6} = 6$
17. $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4} = \sqrt{3x+1}$
19. $x^2 + |x+3| + |3-x| = 4,5|x| + 6$
21. $|x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2$
23. $4^x - 2 \cdot 6^x = 9^{x+\frac{1}{2}}$
25. $11^{3x-2} + 13^{3x-2} = 13^{3x-1} - 11^{3x-1}$
27. $\sqrt{1+3^x-9^x} = \sqrt{4-3 \cdot 3^x}$
29. $5^x + 12^x = 13^x$
31. $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$
33. $\lg(x-1) = x - 2$
35. $\log_5^3 x + \log_{5x} \frac{5}{x} = 1$
37. $x^{\log_2 x+2} = 256$
39. $x^{x+3} = x^5, x > 0$
41. $\frac{\lg x + 5}{x^3} = 10^{5+\lg x}$
43. $\frac{1 + \sqrt{2 \log_2 x + 1}}{\log_2 x} = 1$
45. $5^{3x+2} \cdot 3^{2x-1} = \frac{9}{5} \cdot 3^{3x} \cdot 5^{2x}$
6. $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$
8. $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1)$
10. $\frac{x}{x^2-x-2} - \frac{x}{x^2+x-2} = \frac{2x+12}{(x^2-1)(x^2-4)}$
12. $\sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} - 6\sqrt{x+1} = 1$
14. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$
16. $x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3x + 7$
18. $\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2} + \sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2} = x-3$
20. $|x-1| + |x-2| + |x-3| = 6$
22. $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4-\sqrt{15}})^x = 8$
24. $9^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 16^{\frac{1}{x}}$
26. $9^x - (14-x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0$
28. $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$
30. $3^x + 4^x = 5^x$
32. $\lg^2(x+1) = \lg(x+1) \cdot \lg(x-1) + 2 \lg^2(x^2-1)$
34. $\lg(-x) = x^2$
36. $|x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$
38. $x^{1+\log_3 x} = 9x^2$
40. $4^{\log_3 x^2} - 4^{\log_3 x+1} + 4^{\log_3 x-1} = 0$
42. $\frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x| \cdot (x-2)} = 2$
44. $\frac{\sqrt{5 - \lg^2 x}}{1 + \lg x} = 1$
46. $\log_2(9-2^x) = 3-x$

Розв'язати системи рівнянь:

1.
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial} - \frac{\acute{o}}{\partial} = \frac{5}{6} \\ \partial^2 + \acute{o}^2 = 5 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x} + 2 + \frac{x}{y}} = \frac{5}{2} \\ |x+y| = 5 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2} = 3 \\ \sqrt{(x-y)^2} = 1 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x^2 - 2xy = -3 \end{cases}$$
- 6.

7.
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3 \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5 \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ (x-1)^3 + (y+2)^3 + (z-3)^3 = 7 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 3y + 5 = 0 \\ 3x^2 - 11x + 3y^2 - 7y + 10 = 0 \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3) \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} 3|x| + 5y + 9 = 0 \\ 2x - |y| - 7 = 0 \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y+4} + \sqrt[3]{y+7} = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{3}{2} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3 \\ y + 2x = 7 \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{xy} \\ x + y = 5 \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} x^4 + 16y^4 = 32 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78, \quad x > 0, y > 0 \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3} \\ \lg(y-4x) = 2 \cdot \lg(2+2x-y) - \lg y \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} \log_3 y - \log_3 x = 1 \\ x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 27 \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} 9^{x-y} + 6 \cdot 3^{x-y} = 27 \\ \log_3(x^3 + y^3) - \log_3(x^2 - xy + y^2) = 2 \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} 3^{2x-y} = 81 \\ \lg xy = 1 + \lg 3 \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 \sin y = -2 \\ \log_3 \cos x + \log_3 \cos y = 1 - \log_3 4 \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6 \\ 3^x \cdot 4^y = 12 \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ y \cdot x^2 = 1 \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} (2^{x+1} - 3) \cdot 2^{y-1} = 1 \\ \sqrt{3x + y^2} = x + y \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} \lg(xy) = 3, \\ \lg x \cdot \lg y = 2 \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_2(x + y - 3) = 1 \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3} \\ xy = 16 \end{cases}$$

III. Нерівності

Розв'язати нерівності:

1. $5x - 20 \leq x^2 \leq 8x$
2. $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2 - 9$
3. $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$
4. $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 < 0$
5. $(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0$
6. $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} > \sqrt{x}$
7. $4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x+x}} + 4^{1+\sqrt{x}}$
8. $3 \cdot \sqrt{6+x-x^2} > 4x - 2$
9. $\frac{1}{3x-2-x^2} > \frac{3}{7x-4-3x^2}$
10. $\frac{(x^2-x-2)(x^2+x-6)}{(x^2-2x-3)(x^2-5x+4)} \geq 0$

11. $\frac{(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 4x + 3)}{(x^2 + x - 2)(x^2 - 5x + 6)} \geq 0$
12. $\frac{10}{3} \cdot \frac{5-x}{x-4} - \frac{11}{3} \cdot \frac{6-x}{x-4} \geq \frac{5(6-x)}{x-2}$
13. $\left| \frac{3x+1}{x-3} \right| < 3$
14. $\log_{0,25} \left| \frac{2x+1}{x+3} + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}$
15. $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| - 1 \leq 0$
16. $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leq 0$
17. $||x|-1| < 1-x$
18. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$
19. $9^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 4^{x+1} \leq 0$
20. $\frac{2}{2^x - 4} < \frac{1}{3 \cdot 2^{x+1} - 2}$
21. $x(x-1)(x+2)(x-3) \leq 7$
22. $\sqrt{\lg x} + \sqrt{25 - \lg x} \leq 7$
23. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$
24. $(x-1)^3 \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)^5 \cdot (x-4) > 0$
25. $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_4 x > 1$
26. $\log_3(\log_2(2 - \log_4 x) - 1) < 1$
27. $27 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 9^x \geq 0$
28. $\log_{3x}(x^2 - 6x + 8) \leq 1$
29. $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} \leq 3$
30. $\log_x \sqrt{x+12} > 1$

Розв'язати системи нерівностей:

1. $\begin{cases} (x^2 - x - 11)^{x^2 + x - 12} > 1, \\ |2x - 1| > \sqrt{45} \end{cases}$
2. $\begin{cases} (x^2 - 3x - 9)^{x^2 - 5x - 6} > 1, \\ |2x - 3| > \sqrt{45} \end{cases}$
3. $\sqrt{x^2 - 9x + 20} \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2 - 13}$
4. $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4 \end{cases}$

Довести нерівності:

1. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 - 2x - 12y - 6z > 0$
2. $\left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{z}{y}\right) \left(1 + \frac{x}{z}\right) \geq 8, \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$
3. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$
4. $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \quad (a > 0, b > 0)$
5. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
6. $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+1} > \frac{2}{5}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

IV. Тригонометрія

Довести справедливість рівності:

1. $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$
2. $\cos \frac{\pi}{33} \cos \frac{2\pi}{33} \cos \frac{4\pi}{33} \cos \frac{8\pi}{33} \cos \frac{16\pi}{33} = \frac{1}{32}$
3. $\sin^2 \frac{\pi}{7} \sin^2 \frac{2\pi}{7} \sin^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{7}{64}$
4. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2})$
5. $1 - \cos \alpha + \sin \alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$
6. $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$
7. $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$

Розв'язати рівняння:

- | | | | |
|----|---------------------------------|----|--|
| 1 | $\cos x = \cos 3x \cos 2x$ | 2 | $\frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x) = \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x$ |
| 3 | $3 \sin x - 4 \cos x = 5$ | 4 | $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin 2x$ |
| 5 | $\cos^5 2x + 2 \sin^2 x = 1$ | 6 | $2 + 4 \cos 4x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ |
| 7 | $2 \sin^2 2x = 3 \cos 2x$ | 8 | $\sin^3 x + \sin^4 x = \cos^3 x + \cos^4 x$ |
| 9 | $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$ | 10 | $5 \sin 2x - 11(\sin x + \cos x) + 7 = 0$ |
| 11 | $ \cos 2x = \sin 2x - 1$ | 12 | $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 5x$ |

Довести нерівності:

- | | | | |
|----|--|----|---|
| 1. | $-\sqrt{2} \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$ | 2. | $4 \sin 3\alpha + 5 \geq 4 \cos 2\alpha + 5 \sin \alpha$ |
| 3. | $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha < n$ | 4. | $\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi \geq 0,25$ |
| 5. | $\cos^2 2\alpha - \cos^2 \alpha + 7 \geq 0$ | 6. | $3(\operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \beta) - 8(\operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} \beta) + 10 \geq 0$ |

Розв'язати нерівності:

- | | | | |
|-----|---|-----|--|
| 1. | $\sin \frac{4x}{3} + \cos \frac{4x}{3} \leq \frac{5}{8}$ | 2. | $11 \sin x + 2 \cos x \geq 6$ |
| 3. | $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \sin x$ | 4. | $4 \cos x + 3 < 4 \sin^2 x$ |
| 5. | $\cos 2x + \cos x + 1 \geq 0$ | 6. | $3 \cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x \leq 0$ |
| 7. | $\sin 3x \leq \sin x \cos 2x$ | 8. | $\cos 2x - 3 \cos x > 4 \cos^2 \frac{x}{2}$ |
| 9. | $1 - \cos x \geq \sin x \sin \frac{x}{2}$ | 10. | $2\sqrt{3} \sin 3x \geq \cos 6x - \frac{5}{2}$ |
| 11. | $\sqrt{3}\left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \leq \sin 2x$ | 12. | $\sin 2x \cdot \sin 3x - \cos 2x \cdot \cos 3x > \sin 10x$ |
| 13. | $\sin^3 x \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos^3 x \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) > \frac{3\sqrt{3}}{8}$ | 14. | $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$ |

Спростити вирази:

- | | | | |
|---|--|---|----------------------------------|
| 1 | $\operatorname{tg}(\arcsin x + \arcsin y)$ | 2 | $\cos(2 \operatorname{arctg} x)$ |
| 3 | $\sin(2 \operatorname{arctg} x)$ | | |

Розв'язати системи тригонометричних рівнянь

- | | | | |
|----|--|----|--|
| 1. | $\begin{cases} \sin x \cos y = -0,5, \\ \cos x \sin y = 0,5; \end{cases}$ | 2. | $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3} \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ | 4. | $\begin{cases} \cos x \cos y = 0,25, \\ \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 0,5 \end{cases}$ |
| 5. | $\begin{cases} \cos^2 y + 3 \sin x \sin y = 0 \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10 \end{cases}$ | 6. | $\begin{cases} \sin x \sin y = 0,75 \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$ |

V Текстові задачі

Задачі на числові залежності:

1. Знайти всі числа виду $\overline{71x1y}$, що діляться на 45.
2. Число 9 записати у вигляді добутку двох додатних чисел, сума квадратів яких була б найменшою.
3. Сума квадратів цифр двозначного числа дорівнює 10. Якщо від шуканого числа відняти 18, то отримаємо число, яке записане тими ж цифрами, але в зворотному порядку. Знайти це число.
4. Знайти двозначне число яке в чотири рази більше суми своїх цифр і в три рази більше добутку своїх цифр.
5. Знайдіть два цілих числа, сума яких дорівнює 1244. Якщо до першого числа приписати справа цифру 3, а в другому числі відкинути останню цифру 2, то отримані числа будуть рівні.
6. Тризначне число закінчується цифрою 3. Якщо цю цифру перенести на початок числа, то нове число буде більше потроєного попереднього числа на 1. Знайти це число.
7. Знаменник звичайного дробу на 4 більший за його чисельник. Якщо чисельник цього дробу збільшити на 6, а знаменник – на 5, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{2}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

Задачі на прогресії:

8. Перший член арифметичної прогресії дорівнює -5 , а різниця дорівнює 6. Скільки треба взяти перших членів прогресії, щоб їх сума дорівнювала 1040?
9. Дано рівносторонній трикутник із стороною 1 см. Середини його сторін – вершини другого трикутника, середини сторін другого – вершини третього трикутника і т.д. Знайти суму периметрів усіх цих трикутників.
10. Терміновий вклад, внесений в ощадний банк, щороку збільшується на 3%. Чому дорівнюватиме вклад через 3 роки, якщо спочатку він дорівнював 800 грн.?
11. Скільки членів геометричної прогресії потрібно додати, щоб отримати суму 3069, якщо $u_1 + u_5 = 51$, $u_2 + u_6 = 102$?
12. При діленні дев'ятого члена арифметичної прогресії на другий її член в частці отримаємо 5, а при діленні тринадцятого члена цієї прогресії на її шостий член в частці отримаємо 2 і в остачі 5. Знайти суму 20 членів цієї прогресії.
13. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 4, а сума кубів її членів дорівнює 192. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії.
14. При діленні дев'ятого члена арифметичної прогресії на другий її член в частці отримаємо 5, а при діленні тринадцятого члена цієї прогресії на її шостий член в частці отримаємо 2 і в остачі 5. Знайти суму 20 членів цієї прогресії.
15. Сума другого і третього членів геометричної прогресії дорівнює 30, а різниця четвертого і другого дорівнює 90. Знайдіть перший член прогресії.

Задачі на сумісну роботу:

16. Один робітник виготовляє 96 деталей на 2 години швидше, ніж другий 112 деталей. Скільки деталей виготовляє щогодини кожен робітник, якщо перший робить за годину на 2 деталі більше, ніж другий?
17. Перший насос перекачує 90 м^3 води на 1 год швидше, ніж другий 100 м^3 . Скільки води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 м^3 води більше ніж другий?
18. Двоє робітників виконують деяку роботу за 12 годин. Якщо б з початку перший робітник зробив половину цієї роботи, а потім другий решту, то вся робота була б виконана за 25 год. За який час міг би виконати цю роботу кожен робітник окремо?
19. Для прокладки траншеї виділено 2 екскаватори різних типів. Час необхідний першому екскаватору для прокладки траншеї, на 3 години менший за час, який потрібен другому екскаватору для прокладки цієї ж траншеї. Скільки годин потрібно кожному екскаватору для прокладки траншеї, якщо сума їхнього часу в $\frac{144}{35}$ раз більше часу необхідного для прокладки траншеї при спільній роботі?

20. В котлован рівномірно надходить вода. 10 однакових насосів, працюючи одночасно, можуть відкачати воду за 12 год, а 15 таких насосів за 6 год. За скільки часу можуть відкачати воду з заповненого котловану 25 таких насосів при спільній роботі ?
21. Два маляра, працюючи разом можуть пофарбувати фасад будинку за 16 годин. За скільки годин може виконати цю роботу кожен з них, працюючи самостійно, якщо одному для цього потрібно на 24 год менше, ніж другому?
22. Одна бригада працювала на ремонті дороги 9 год, після чого до неї приєдналась друга бригада. Через 6 год спільної роботи виявилось, що відремонтовано $\frac{1}{2}$ дороги. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій бригаді на це потрібно на 9 год більше, ніж другій?

Задачі на рух:

23. На шлях із села до міста, що дорівнює 90 км, один мотоцикліст витрачає на 18 хв більше, ніж другий, оскільки його швидкість на 10 км/год менша від швидкості другого. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста.
24. Катер пропливає 4 км проти течії річки і 15 км за течією за такий самий час, який потрібен плоту, щоб проплисти 2 км по цій річці. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 18 км/год.
25. Туристу потрібно пройти відстань від села до станції. Проїшовши 3 км/год, він зрозумів, що спізниться на потяг, і почав рухатись із швидкістю 4 км/год. На станцію він прийшов за 45 хв до відходу потягу. Якщо б він йшов з попередньою швидкістю, то спізнився б на потяг на 40 хв. Визначте відстань від села до станції.
26. Пасажир знаходиться в поїзді який рухається з швидкістю 40 км/год помічає, що повз вікно в протилежному напрямку за 3 секунди пройшов зустрічний поїзд, довжина якого 75 м. Яка швидкість зустрічного поїзда?
27. Велосипедист повинен був проїхати 48 км з певною середньою швидкістю. Але по деяким причинам першу половину шляху він їхав із швидкістю, яка на 20% менша запланованої, а другу частину шляху із швидкістю, яка на 2 км більша запланованої. На весь шлях велосипедист витратив 5 годин. Знайти заплановану швидкість.
28. Літак летів спочатку із швидкістю 220 км/год. Коли йому залишалось летіти на 385 км менше, ніж він пролетів, швидкість його стала дорівнювати 330 км/год. Середня швидкість літака на всьому шляху дорівнює 250 км/год. Яку відстань пролетів літак?
29. Мікроавтобус запізнився на 12 хв. Для того щоб прибути у пункт призначення вчасно, він за 144 км від цього пункту збільшив свою швидкість на 8 км/год. Знайдіть початкову швидкість мікроавтобуса.

Задачі на сплави і суміші:

29. Після того як змішали 60-відсотковий і 30- відсотковий розчини кислоти, отримали 600 г 40-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину змішали?
30. Сплав важить 2 кг і складається з срібла і міді, причому маса срібла складає $14\frac{2}{7}\%$ маси міді. Скільки срібла в сплаві?
31. Є 735 г 16% - ного розчину йоду в спирті. Потрібно отримати 10% - ний розчин йоду. Скільки грамів спирту потрібно додати до розчину який є?
32. З 40 тон руди виплавляють 20 тон металу, який містить 6% суміші. Який відсоток суміші в руді?
33. Бджоли, переробляючи квітковий нектар в мед, звільняють його від значної частини води. Скільки кілограмів нектару потрібно переробити бджолам для отримання 1 кг меду, якщо відомо, що нектар містить 70% води, а отриманий з нього мед – 17% води?
34. З 38 т сировини другого сорту, яка містить 25% домішок, після переробки отримують 30 т сировини першого сорту. Який відсоток домішок в сировині першого сорту?
35. Змішали 30-відсотковий розчин соляної кислоти з 10-відсотковим і отримали 600 г 15-відсоткового розчину. Скільки взяли грамів кожного розчину?
36. Скільки кілограмів 20-відсоткового і скільки кілограмів 50-відсоткового сплавів міді треба взяти, щоб отримати 30 кг 30-відсоткового сплаву?

VI. Стереометрія

1. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює a . Бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди.
2. Бічною гранню правильної зрізаної чотирикутної піраміди є трапеція, більша основа якої дорівнює 8см. А менша основа і бічні сторони по 4 см. Знайдіть об'єм даної зрізаної піраміди.
3. В основі паралелепіпеда лежить квадрат, а бічне ребро утворює з сторонами основи рівні кути по 60° . Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо довжина бічного ребра 12см.
4. В основі піраміди лежить прямокутник. Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші нахилені до неї під кутами α і β ($\alpha > \beta$). Визначте бічну поверхню піраміди, якщо висота піраміди дорівнює h .
5. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і бічною стороною b . Визначте об'єм піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до основи під кутом β .
6. В основі піраміди лежить ромб, більша діагональ якого дорівнює d , а гострий кут – α . Бічні грані нахилені до основи під кутом β . Знайти об'єм піраміди.
7. В основі піраміди лежить трикутник з кутами α і β . Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ . Точку висоти піраміди, що знаходиться на відстані b від сторони основи піраміди, рівновіддалена від її бічної грані і площини основи. Визначити об'єм піраміди.
8. В основі трикутної піраміди $SABC$ лежить прямокутний трикутник ABC , ребро SB перпендикулярне площині основи. Дано: $AB=BC=a$, $SB=h$. Знайти радіус вписаної в піраміду кулі.
9. В основі чотирикутної піраміди лежить квадрат з стороною a , одне бічне ребро перпендикулярне площині основи, а більше бічне ребро нахилене до площини основи під кутом β . Знайти радіус кулі, вписаної в цю піраміду.
10. В правильній трикутній піраміді висота, опущена на основу, рівна h , а відстань від центра основи до бічної грані рівна b . Визначити радіус вписаної в піраміду кулі.
11. В правильній трикутній піраміді площа бічної поверхні рівна S , а кут між бічною гранню і основою рівний α . Знайти висоту піраміди, опущену на основу.
12. В трикутній піраміді всі бічні ребра і дві сторони основи дорівнюють b . Кут між рівними сторонами основи дорівнює α . Обчислити об'єм піраміди.
13. Всі ребра правильної трикутної призми дорівнюють a . Знайти площу перерізу, проведеного через сторону основи під кутом β до площини основи.
14. Двогранний кут при ребрі основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює β , а відстань від центра основи до бічної грані – d . Знайдіть об'єм конуса, вписаного в дану піраміду.
15. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює d і нахилена під кутом φ до площини основи. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в цю призму.
16. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною однієї бічної грані кут α , а іншої – кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
17. З точки до площини проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути по 30° . Знайдіть кут між проекціями похилих на цю площину, якщо кут між похилими дорівнює 60° .
18. Знайдіть площу поверхні тіла, яке утворюється при обертанні трикутника зі сторонами 25см, 29см і 36см навколо меншої сторони.
19. Кут між діагоналями двох бічних граней правильної трикутної призми, проведеними з однієї вершини, дорівнює α . Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ бічної грані дорівнює d .
20. Кут між діагоналями двох бічних граней правильної чотирикутної призми, проведеними з однієї вершини, дорівнює α . Знайдіть об'єм призми, якщо діагональ бічної грані дорівнює d .
21. Обчисліть об'єм і повну поверхню правильного тетраедра, якщо радіус кола, описаного навколо його грані, дорівнює R .
22. Основа піраміди – квадрат. Дві суміжні бічні грані перпендикулярні до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом γ . Рівні бічні ребра піраміди дорівнюють b . Знайти об'єм піраміди.

23. Основа піраміди – прямокутник, одна із сторін якого дорівнює a і утворює з діагоналлю прямокутника кут α . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Знайдіть бічну поверхню конуса, описаного навколо даної піраміди.
24. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут β . Знайдіть висоту конуса, описаного навколо даної піраміди.
25. Основа піраміди – ромб, зі стороною a і гострим кутом – α . Бічні грані нахилені до основи під кутом β . Знайти бічну поверхню піраміди.
26. Основа похилої призми - правильний трикутник зі стороною 10 см. Бічне ребро призми дорівнює 12 см і утворює із суміжними сторонами основи кути по 60° . Знайдіть об'єм призми.
27. Основа прямої призми - рівнобедрений трикутник з бічною стороною 8 см і кутом 120° при вершині. Кут між діагоналями рівних бічних граней, які проведено з однієї вершини верхньої основи, дорівнює 90° . Обчисліть площу бічної поверхні призми.
28. Основа прямої призми - ромб з більшою діагоналлю d і гострим кутом α . Через меншу діагональ нижньої основи і вершину гострого кута верхньої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм призми.
29. Основа прямої призми – ромб з гострим кутом α , площа якого дорівнює S . У призмі проведено діагональний переріз, що проходить через меншу діагональ основи. Діагональ цього перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
30. Основа прямої призми - ромб з гострим кутом α . Діагональний переріз призми, що проходить через більшу діагональ основи, має площу S . Знайдіть площу бічної поверхні призми.
31. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом α . Висота піраміди дорівнює h . Кожне бічне ребро утворює з її основою кут β . Знайти об'єм піраміди.
32. Повна поверхня правильної трикутної піраміди рівна s , а кут між бічними ребрами рівний α . Знайти висоту піраміди, опущену на основу.
33. Прямий круговий конус вписано в кулю. Знайти відношення об'єму конуса до об'єму кулі, якщо твірна конуса нахилена до його основи під кутом α .
34. Прямокутний трикутник з катетом a і протилежним кутом α обертається навколо прямої, що містить його гіпотенузу. Знайдіть об'єм тіла обертання.
35. Ребро куба дорівнює b . Знайти об'єм прямого кругового конуса, вершина якого співпадає з вершиною куба A , а коло основи проходить через центри граней куба, які не проходять через вершину A .
36. Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює a . Знайдіть площу його перерізу, який проходить через вершину D і середини ребер AB і BC .
37. Ребро правильного тетраедра рівне a . Знайти радіус сфери, яка дотикається до бічних граней тетраедра, якщо центр цієї сфери лежить на основі тетраедра.
38. Рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює b , а кут при вершині - β , обертається навколо прямої, що проходить через вершину трикутника паралельно його основі. Знайдіть об'єм тіла обертання.
39. Ромб, площа якого дорівнює S , обертається навколо своєї сторони. Знайдіть площу поверхні отриманого тіла обертання.
40. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , висота піраміди h . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
41. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 3 см і 9 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут 45° . Знайдіть об'єм даної зрізаної піраміди.
42. У конус вписано кулю, радіус якої дорівнює r . Твірну конуса видно із центра кулі під кутом α . Знайдіть об'єм конуса.
43. У кулю вписано правильну чотирикутну призму, висота якої дорівнює h , а діагональ нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть радіус кулі.
44. У кулю з радіусом R вписано правильну чотирикутну призму, діагональ якої нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть сторону основи призми.

45. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює m , а плоский кут при вершині $-\beta$. Визначте об'єм конуса, вписаного в піраміду.
46. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус описаної кулі дорівнює R .
47. У правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . Через одну із сторін основи проведено переріз, площина якого перпендикулярна до протилежного бічного ребра. Площа перерізу дорівнює Q . Визначити об'єм піраміди.
48. У правильній трикутній піраміді з висотою h через сторону основи a проведено площину, яка перетинає протилежне бічне ребро під прямим кутом. Знайдіть площу перерізу.
49. У правильній трикутній піраміді кут між бічними гранями дорівнює φ . Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.
50. У правильній трикутній піраміді радіус вписаної кулі дорівнює r , а плоский кут при вершині $-\alpha$. Знайдіть об'єм піраміди.
51. У правильній чотирикутній піраміді бічна грань нахилена до площини основи під кутом β . Відрізок, що сполучає середину висоти піраміди з серединою апофеми, дорівнює m . Визначте об'єм піраміди.
52. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a , двогранний кут при ребрі основи -2α . Знайдіть площу перерізу, який ділить цей двогранний кут навпіл.
53. У правильній чотирикутній піраміді через середини двох суміжних бічних ребер проведено переріз, який паралельний висоті піраміди. Знайдіть площу перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює 8см , а висота піраміди -12см .
54. У правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основи дорівнює $8\sqrt{2}\text{см}$, а бічне ребро -3см . Через діагональ BD нижньої основи і середину сторони $B_1 C_1$ верхньої проведено площину. Знайдіть площу перерізу.
55. У правильному тетраедрі кожне ребро дорівнює a . Знайдіть відстань між мимобіжними ребрами.
56. У просторі задано точки $M(1; 5; -2)$, $N(2; 3; -1)$ і $K(3; 4; -1)$. Чи рівні відрізки MN і MK ? Знайдіть площу трикутника $M N K$.
57. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ діагональ AC_1 утворює з ребрами AB і AD кути α і β відповідно. Знайдіть косинус кута $C_1 A C$.
58. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено переріз $AB_1 C_1 D$. Відомо, що площі чотирикутників $ABCD$ і $AB_1 C_1 D$ дорівнюють 12см^2 і 20см^2 відповідно. Знайдіть площу грані $BB_1 C_1 C$.
59. Через гіпотенузу прямокутного рівнобедреного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 45° . Знайдіть кути, які утворюють катети трикутника з цією площиною.
60. Через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи правильної трикутної призми проведено переріз під кутом 60° до площини основи. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює $8\sqrt{3}\text{см}^2$.
61. Через сторону нижньої основи і середину протилежного бічного ребра правильної трикутної призми проведено переріз під кутом 45° до площини основи. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює $16\sqrt{6}\text{см}^2$.
62. Через сторону правильного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 30° . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.
63. Через сторону правильного трикутника проведено площину, яка утворює з двома іншими сторонами трикутника кути по 45° . Знайдіть кут між площиною трикутника і проведеною площиною.
64. Чи колінеарні вектори $\vec{m}(8; -10; 6)$ і $\vec{n}(-4; 5; -3)$? знайдіть координати вектора \vec{k} , колінеарного вектору \vec{n} , модуль якого у три рази більший за модуль вектора \vec{n} .
65. Чи рівні вектори \vec{AB} і \vec{CD} , якщо $A(1; 6; 4)$, $B(3; 2; 5)$, $C(0; -1; 1)$, $D(2; -5; 2)$? Чи належить точка C прямій AB ?

66. Доведіть, що відрізки, які сполучають точки перетину медіан протилежних бічних граней довільної чотирикутної піраміди проходять через одну точку і діляться нею пополам.
67. Знайдіть усі значення параметра m , при яких вектори $\vec{a}(1; \lg m; \lg m)$ і $\vec{b}(1; \lg m; -2)$ будуть перпендикулярними.
68. Квадрати відстаней від точки M до осі абсцис, осі ординат та осі аплікату відповідно дорівнюють 20, 65 і 53. Знайдіть квадрат відстані від точки M до початку координат.
69. На осі абсцис знайдіть точку X , сума квадратів відстаней від якої до точок $A(12; -6)$ і $B(-2; 8)$ буде найменшою.