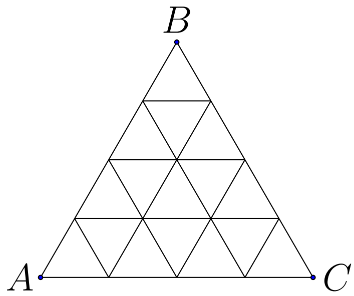
Завдання
II Турніру студентів-математиків
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

1. «Паралелограми на трикутній сітці». Розглянемо рівносторонній трикутник ABC зі стороною довжини n, який поділено на маленькі рівносторонні трикутники зі стороною 1 (приклад для $n = 4$ показано на рисунку нижче).

1) Знайдіть кількість ромбів зі стороною 1, які при цьому утворились (тобто сторони яких належать лініям сітки).

2) Знайдіть кількість паралелограмів, які при цьому утворились (тобто сторони яких належать лініям сітки).



2. «Прості числа і арифметичні прогресії». Розглянемо такий нескінченний масив натуральних чисел:

4	7	10	13	16	19	…
7	12	17	22	27	32	…
10	17	24	31	38	45	…
13	22	31	40	49	58	…
…						

Цей масив конструюється так: кожний його ряд є арифметичною прогресією, а i-ий стовпчик є таким же як i-ий рядок для всіх натуральних i. Доведіть, що для кожного n число $2n + 1$ є простим тоді і тільки тоді, коли n відсутнє в цьому масиві.

3. «Цікавий прямокутник». Дано прямокутник $HOMF$ зі сторонами $HO = 11$ і $OM = 5$. Трикутник ABC такий, що H — його точка перетину висот, O — центр описаного кола, M — середина BC і F — основа висоти, проведеної з вершини A. Обчисліть довжину сторони BC.

4. «Розрізаємо куб». Дослідіть, які правильні многокутники можуть утворитись при перетині куба площиною?

5. «Дивна послідовність». Визначте, скільки додатних чисел міститься серед перших 100 членів послідовності $\sin 1°, \sin 10°, \sin 100°, \ldots$.

6. «Парабола і чотири прямі». На площині дано чотири точки: $A(0;0)$, $B(2015;2015)$, $C(0;2015)$, $D(-2015;0)$. Знайдіть усі такі пари цілих чисел $(b;c)$, для яких графік квадратного тричлена $y = x^2 + bx + c$ перетинає кожну із прямих AB, BC, CD та DA, причому усі точки перетину мають цілі координати.

7. «Маніпуляції з матрицею». Задано матрицю $m \times n$, елементами якої є цілі числа. Дозволяється одночасно змінювати знак у всіх чисел одного рядка або одного стовпчика цієї матриці. Доведіть, що за допомогою таких перетворень можна отримати матрицю, у якій сума чисел довільного рядка невід'ємна і сума чисел довільного стовпчика невід'ємна.

8. «Складне рівняння». Знайдіть усі дійсні корені рівняння:

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

9. «Детермінант Паскаля». Припустимо, що трикутник Паскаля записано у вигляді такої нескінченної матриці:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \ldots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \ldots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

Перший рядок і перший стовпчик цієї матриці складаються з одиниць, а кожний інший елемент матриці є сумою двох своїх «сусідів» — того, що зліва, і того, що вгорі. Доведіть, що для кожного натурального n детермінант матриці, яка отримується з перших n рядків та перших n стовпців цієї матриці, дорівнює 1.

10. «Останні цифри квадратів». Дослідіть, на яку максимальну кількість однакових ненульових цифр може закінчуватися квадрат натурального числа. Знайдіть найменше натуральне число, яке є квадратом і закінчується на таку максимальну послідовність однакових цифр.