

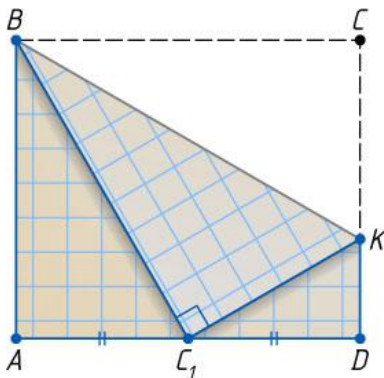


# Олімпіада геометричної творчості імені В.А. Ясінського

## Змагання з розв'язування геометричних задач

### 8–9 класи

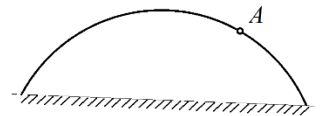
#### I тур



**Задача 1.** Прямокутний аркуш паперу  $ABCD$  зігнули так, як показано на рисунку. Знайдіть відношення  $DK : AB$ , якщо відомо, що  $C_1$  – середина  $AD$ .

**Задача 2.** Медіани  $AM$  і  $BE$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $O$ . Точки  $O, M, E, C$  лежать на одному колі. Знайдіть довжину  $AB$ , якщо  $BE = AM = 3$ .

**Задача 3.** Дано дугу кола, центр якого – недоступна точка;  $A$  – точка на цій дузі (див. рис.). Як з допомогою циркуля та лінійки без поділок побудувати дотичну до заданої дуги кола в точці  $A$ ?



**Задача 4.** Діагоналі трапеції  $ABCD$  взаємно перпендикулярні, а середня лінія трапеції дорівнює 5. Знайдіть довжину відрізка, що з'єднує середини основ трапеції.

#### II тур

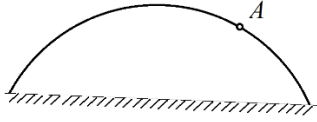
**Задача 1.** Чотири точки кола розташовані в такому порядку:  $A, B, C, D$ . Продовження хорди  $AB$  за точку  $B$  і хорди  $CD$  за точку  $C$  перетинаються в точці  $E$ , причому кут  $AED$  дорівнює  $60^\circ$ . Величина кута  $ABD$  втричі більша за величину кута  $BAC$ . Доведіть, що  $AD$  – діаметр кола.

**Задача 2.** Дано трапецію  $ABCD$  з основами  $BC$  і  $AD$ , причому  $AD = 2BC$ . Нехай  $M$  – середина  $AD$ ,  $E$  – точка перетину бічних сторін  $AB$  і  $CD$ ,  $O$  – точка перетину  $BM$  і  $AC$ ,  $N$  – точка перетину  $EO$  і  $BC$ . У якому відношенні точка  $N$  ділить відрізок  $BC$ ?

## 8–9 класи (з поглибленим вивченням математики)

### I тур

*Задача 1.* Медіани  $AM$  і  $BE$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $O$ . Точки  $O$ ,  $M$ ,  $E$ ,  $C$  лежать на одному колі. Знайдіть довжину  $AB$ , якщо  $BE = AM = 3$ .



*Задача 2.* Дано дугу кола, центр якого – недоступна точка;  $A$  – точка на цій дузі (див. рис.). Як з допомогою циркуля та лінійки без поділок побудувати дотичну до заданої дуги кола в точці  $A$ ?

*Задача 3.* Дві сторони трикутника дорівнюють 10 і 15. Доведіть, що довжина бісектриси кута між ними менше 12.

*Задача 4.* В рівнобічній трапеції одна з основ втричі більша за іншу. Кут при більшій основі дорівнює  $45^\circ$ . Покажіть, як розрізати цю трапецію на три частини і скласти з них квадрат. Обґрунтуйте своє розв'язання.

### II тур

*Задача 1.* Чотири точки кола розташовані в такому порядку:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Продовження хорди  $AB$  за точку  $B$  і хорди  $CD$  за точку  $C$  перетинаються в точці  $E$ , причому кут  $AED$  дорівнює  $60^\circ$ . Величина кута  $ABD$  втричі більша за величину кута  $BAC$ . Доведіть, що  $AD$  – діаметр кола.

*Задача 2.* Дано трапецію  $ABCD$  з основами  $BC$  і  $AD$ , причому  $AD = 2BC$ . Нехай  $M$  – середина  $AD$ ,  $E$  – точка перетину бічних сторін  $AB$  і  $CD$ ,  $O$  – точка перетину  $BM$  і  $AC$ ,  $N$  – точка перетину  $EO$  і  $BC$ . У якому відношенні точка  $N$  ділить відрізок  $BC$ ?

## 10-11 класи

### I тур

*Задача 1.* В рівнобічну трапецію з площею 28 вписано коло радіуса 2. Знайдіть довжину бічної сторони трапеції.

*Задача 2.* Доведіть, що якщо усі грані тетраедра – рівні трикутники (такий тетраедр називається рівногранним), то його розгорткою на площину грані є трикутник.

*Задача 3.* Дано коло  $\omega$  і точка  $D$  зовні цього кола. Знайдіть такі точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  на колі  $\omega$ , щоб чотирикутник  $ABCD$  був опуклим і мав максимально можливу площу. Відповідь обґрунтуйте.

*Задача 4.* На площині дано три точки. З допомогою циркуля і лінійки побудуйте пряму в цій площині, яка буде рівновіддаленою від цих трьох точок. Дослідіть, скільки розв'язків має задача.

### **II тур**

*Задача 1.*  $ABCD$  – прямокутник. Відрізок  $MA$  перпендикулярний до площини  $ABC$ .  $MB = 15$ ,  $MC = 24$ ,  $MD = 20$ . Знайдіть довжину  $MA$ .

*Задача 2.* В трикутнику  $ABC$  бісектриса  $AD$  ділить сторону  $BC$  у відношенні  $BD:DC = 2:1$ . В якому відношенні медіана  $CE$  ділить цю бісектрису?

## **10-11 класи (з поглибленим вивченням математики)**

### **I тур**

*Задача 1.* Дано коло  $\omega$  і точка  $D$  зовні цього кола. Знайдіть такі точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  на колі  $\omega$ , щоб чотирикутник  $ABCD$  був опуклим і мав максимально можливу площу. Відповідь обґрунтуйте.

*Задача 2.* В тетраедрі  $DABC$   $AB = BC$ ,  $\angle DBC = \angle DBA$ . Доведіть, що  $AC \perp DB$ .

*Задача 3.* В колі проведено хорди  $AB$  і  $BC$ , причому  $AB = \sqrt{3}$ ,  $BC = 3\sqrt{3}$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ . Знайдіть довжину тієї хорди кола, яка ділить кут  $ABC$  навпіл.

*Задача 4.* Медіана  $AM$  і бісектриса  $CD$  прямокутного трикутника  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) перетинаються в точці  $O$ . Знайдіть площу трикутника  $ABC$ , якщо  $CO = 9$ ,  $OD = 5$ .

### **II тур**

*Задача 1.* Знайдіть площу перерізу одиничного куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  площиною, яка проходить через середини ребер  $AB$ ,  $AD$  і  $CC_1$ .

*Задача 2.* Дано коло  $\omega$  радіуса  $r$  і точка  $A$ , яка віддалена від центра кола на відстань  $d < r$ . Знайти геометричне місце вершин  $C$  всіх можливих прямокутників  $ABCD$ , де точки  $B$  і  $D$  лежать на колі  $\omega$ .