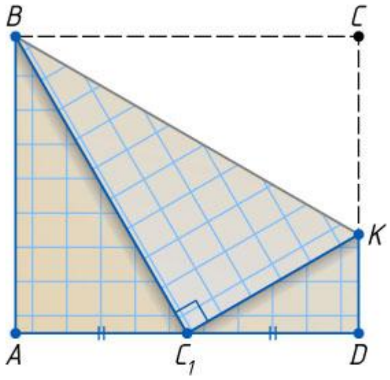
Олімпіада геометричної творчості імені В.А. Ясінського

Змагання з розв’язування геометричних задач

8–9 класи

І тур

Задача 1. Прямокутний аркуш паперу $ABCD$ зігнули так, як показано на рисунку. Знайдіть відношення $DK : AB$, якщо відомо, що C_1 – середина AD.

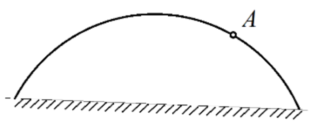


Вказівка. Використайте той факт, що якщо у прямокутному трикутнику катет вдвічі менший за гіпотенузу, то гострі кути цього трикутника – $30°$ *і* $60°$.

Задача 2. Медіани AM і BE трикутника ABC перетинаються в точці O. Точки O, M, E, C лежать на одному колі. Знайдіть довжину AB, якщо $BE = AM = 3$.

Вказівка. Доведіть, що CO є бісектрисою кута C трикутника і потім те, що трикутник ABC – рівносторонній.

Задача 3. Дано дугу кола, центр якого – недоступна точка; A – точка на цій дузі (див. рис.). Як з допомогою циркуля та лінійки без поділок побудувати дотичну до заданої дуги кола в точці A?



Вказівка. Використайте,наприклад, властивість кута між дотичною і хордою, проведеної з точки дотику.

Задача 4. Діагоналі трапеції $ABCD$ взаємно перпендикулярні, а середня лінія трапеції дорівнює 5. Знайдіть довжину відрізка, що з'єднує середини основ трапеції.

Вказівка. Розгляньте властивості чотирикутника, що з’єднує середини сторін трапеції $ABCD$.

II тур

Задача 1. Чотири точки кола розташовані в такому порядку: A, B, C, D. Продовження хорди AB за точку B і хорди CD за точку C перетинаються в точці E, причому кут AED дорівнює $60°$. Величина кута ABD втричі більша за величину кута BAC. Доведіть, що AD – діаметр кола.

Вказівка. Використайте властивості вписаних кутів і доведіть, що кут $BAC = 30°$.

Задача 2. Дано трапецію $ABCD$ з основами BC і AD, причому $AD = 2BC$ Нехай M – середина AD, E – точка перетину бічних сторін AB і CD, O – точка перетину BM і AC, N – точка перетину EO і BC. У якому відношенні точка N ділить відрізок BC?

Вказівка. Доведіть, що $ABCM$ – паралелограм, а BC – середня лінія трикутника AED.

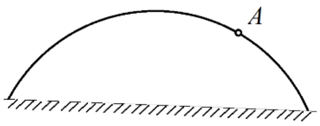
8–9 класи (з поглибленим вивченням математики)

I тур

Задача 1. Медіани AM і BE трикутника ABC перетинаються в точці O. Точки O, M, E, C лежать на одному колі. Знайдіть довжину AB, якщо $BE = AM = 3$.

Вказівка. Доведіть, що трикутник ABC – рівносторонній.

Задача 2. Дано дугу кола, центр якого – недоступна точка; A – точка на цій дузі (див. рис.). Як з допомогою циркуля та лінійки без поділок побудувати дотичну до заданої дуги кола в точці A?



Вказівка. Використайте властивість кута між дотичною і хордою, проведеної з точки дотику.

Задача 3. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 і 15. Доведіть, що довжина бісектриси кута між ними менше 12.

Вказівка. Через основу бісектриси проведіть пряму, яка паралельна одній із сторін трикутника; скористайтесь властивістю бісектриси трикутника.

Задача 4. В рівнобічній трапеції одна з основ втричі більша за іншу. Кут при більшій основі дорівнює $45°$. Покажіть, як розрізати цю трапецію на три частини і скласти з них квадрат. Обґрунтуйте своє розв'язання.

II тур

Задача 1. Чотири точки кола розташовані в такому порядку: A, B, C, D. Продовження хорди AB за точку B і хорди CD за точку C перетинаються в точці E, причому кут AED дорівнює $60°$. Величина кута ABD втричі більша за величину кута BAC. Доведіть, що AD – діаметр кола.

Вказівка. Використайте властивості вписаних кутів і доведіть, що кут $BAC = 30°$.

Задача 2. Дано трапецію $ABCD$ з основами BC і AD, причому $AD = 2BC$ Нехай M – середина AD, E – точка перетину бічних сторін AB і CD, O – точка перетину BM і AC, N – точка перетину EO і BC. У якому відношенні точка N ділить відрізок BC?

Вказівка. Доведіть, що $ABCM$ – паралелограм, а BC – середня лінія трикутника AED.

10-11 класи

I тур

Задача 1. В рівнобічну трапецію з площею 28 вписано коло радіуса 2. Знайдіть довжину бічної сторони трапеції.

Вказівка. Використайте умову, за якої в чотирикутник можна вписати коло.

Задача 2. Доведіть, що якщо усі грані тетраедра – рівні трикутники (такий тетраедр називається рівногранним), то його розгорткою на площину грані є трикутник.

Вказівка. Розгляньте розгортку тетраедра, скористайтесь методом доведення від супротивного.

Задача 3. Дано коло ω і точка D зовні цього кола. Знайдіть такі точки A, B і C на колі ω, щоб чотирикутник $ABCD$ був опуклим і мав максимально можливу площу. Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка. Скористайтесь формулою, яка виражає площу чотирикутника через довжини діагоналей і кут між ними.

Задача 4. На площині дано три точки. З допомогою циркуля і лінійки побудуйте пряму в цій площині, яка буде рівновіддаленою від цих трьох точок. Дослідіть, скільки розв’язків має задача.

Вказівка. Розгляньте випадки розміщення точок: коли точки лежать на одній прямій і коли є вершинами трикутника. Подумайте про можливе розташування шуканої прямої відносно трикутника.

II тур

Задача 1. $ABCD$ – прямокутник. Відрізок MA перпендикулярний до площини ABC. $MB = 15$, $MC = 24$, $MD = 20$. Знайдіть довжину MA.

Вказівка. Доведіть, що трикутник MBC – прямокутний.

Задача 2. В трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $BD:DC = 2:1$. В якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?

Вказівка. Через вершину A проведіть пряму, паралельно BC і продовжіть медіану CE до перетину з цією прямою.

10-11 класи (з поглибленим вивченням математики)

I тур

Задача 1. Дано коло ω і точка D зовні цього кола. Знайдіть такі точки A, B і C на колі ω, щоб чотирикутник $ABCD$ був опуклим і мав максимально можливу площу. Відповідь обґрунтуйте.

Вказівка. Скористайтесь формулою, яка виражає площу чотирикутника через довжини діагоналей і кут між ними.

Задача 2. В тетраедрі $DABC$ $AB = BC$, $\angle DBC = \angle DBA$. Доведіть, що $AC \perp DB$.

Вказівка. Розгляньте площину (DBM), де M – середина AC.

Задача 3. В колі проведено хорди AB і BC, причому $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60°$. Знайдіть довжину тієї хорди кола, яка ділить кут ABC навпіл.

Вказівка. Скористайтесь теоремою косинусів.

Задача 4. Медіана AM і бісектриса CD прямокутного трикутника ABC $(\angle B = 90°)$ перетинаються в точці O. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $CO = 9$, $OD = 5$.

Вказівка. Добудуйте трикутник до паралелограма.

II тур

Задача 1. Знайдіть площу перерізу одиничного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, AD і CC_1.

Вказівка. Побудуйте переріз. Скористайтесь формулою площі ортогональної проекції многокутника.

Задача 2. Дано коло ω радіуса r і точка A, яка віддалена від центра кола на відстань $d < r$. Знайти геометричне місце вершин C всіх можливих прямокутників $ABCD$, де точки B і D лежать на колі ω.

Вказівка. Доведіть і використайте той факт, що якщо $ABCD$ – прямокутник, M – точка в площині цього прямокутника, то $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.