В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко

Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад.

Геометрія

Навчально-методичний посібник

Електронна версія розміщена на сайті кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського:
amnm.vspu.edu.ua

Вінниця
ТОВ «Нілан-ЛТД»
2014

УДК 514.112
ББК 22.151.0
Я 81

Рекомендовано до друку Вченою радою
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського (протокол №3 від 23.10.2014 р.)

Рецензенти:

Працьовитий М. В., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова

Матяш О. І., доктор педагогічних наук, доцент кафедри математики і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Ясінський В. А.

Я81 Ясінський В. А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Геометрія / В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко. — Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2014. — 224 с.
ISBN 978-966-2770-72-8

В посібнику описано деякі методи розв'язування геометричних задач олімпіадного характеру та наведено добірку задач республіканських і Міжнародних математичних олімпіад, що проводились у 2012 та 2013 роках. Усі запропоновані задачі супроводжуються повним розв'язанням. Посібник призначений для вчителів математики, учнів загальноосвітніх шкіл, студентів педагогічних університетів, які навчаються за спеціальністю «Математика», та всіх, хто цікавиться елементарною геометрією.

УДК 514.112
ББК 22.151.0

ISBN 978-966-2770-72-8

Зміст

Передмова

Олімпіадна математика з року в рік активно розвивається. З'являються нові тенденції, змінюються деякі традиції. Аналіз результатів математичних олімпіад України свідчить про потребу у вдосконаленні методів навчання розв'язувати геометричні задачі високого рівня складності.

Автори цього навчально-методичного посібника ставили перед собою за мету розкрити кращі сучасні прийоми розв'язування олімпіадних задач. Вперше у вітчизняній методичній літературі досліджено специфіку методів розв'язування та рівень складності задач, пропонованих різними країнами на національних олімпіадах.

Посібник складається з двох частин. У першій частині допитливий читач знайде нові красиві використання опорних задач-фактів і задач-методів олімпіадної геометрії, теоретичні новинки до розв'язування планіметричних задач на обчислення, а також сучасні доведення класичних теорем планіметрії та їх використання. У другій частині наведено з повними розв'язаннями 70 олімпіадних задач, які у 2012 та 2013 роках пропонувалися учням на математичних олімпіадах найвищого рівня.

Фактично усі задачі і твердження посібника супроводжуються рисунком. Виконуючи рисунок, ми прагнули зробити його максимально відповідним до умови задачі та способу її розв'язування. Працюючи над посібником, ми радимо читачам робити кілька рисунків до задачі: спочатку такий, який відповідає безпосередньо умові, потім послідовно виконувати усі необхідні добудови. Рисунки до задач, які пропонуємо ми, є орієнтиром для цього. При цьому пам'ятайте, що якісно виконаний рисунок — це зручний для сприйняття наочний спосіб запису умови задачі, часто він є помічником при розв'язуванні задачі, «підказує» правильний хід міркувань.

Посібник безперечно буде корисним творчо працюючим вчителям математики, обдарованим учням загальноосвітніх шкіл та ліцеїв, студентам педагогічних університетів, які навчаються за спеціальністю «Математика», та всім тим, хто цікавиться вічно молодою *геометрією*.

Успіх на захоплюючому та тернистому шляху вивчення улюбленої науки супроводжує тих, хто не дозволяє задачам звалюватися на голову зненацька! ☺

Вересень 2014 року

В'ячеслав Ясінський
Олексій Панасенко

Частина 1

Вибрані методи розв’язування олімпіадних задач з геометрії

Опорні задачі-факти олімпіадної геометрії

Теоретична частина шкільного курсу геометрії містить в основному теореми, які є необхідними для подальшого вивчення цієї теорії. Із неї виключені багато фактів, які не працюють на саму теорію, а існують у ній окремо від усіх інших. Але шкільний курс геометрії — це не тільки аксіоми і теореми, які розглянуті у підручнику. Шкільна геометрія — це також (а може, й насамперед) мистецтво розв'язувати геометричні задачі. Мистецтво ж розв'язувати геометричні задачі ґрунтується на гарному знанні теоретичної частини курсу, знанні достатньої кількості геометричних фактів, що не увійшли в цей курс, і володінні певним арсеналом прийомів і методів розв'язання геометричних задач. Тому представляється корисним виділити деяку множину задач (будемо називати їх **опорними**), в яких формулюється якийсь факт, що досить часто використовується в задачах, або ілюструється якийсь метод або прийом розв'язування геометричних задач. Відповідно, ми будемо розрізняти два різновиди опорних задач: **задача-факт** (**задача-теорема**) і **задача-метод**. У цьому розділі ми розглянемо опорні задачі першого типу. Задачі другого типу — матеріал наступного розділу.

В якості прикладів, що ілюструють поняття «опорна задача-факт», можна навести багато теорем елементарної геометрії, що не увійшли в діючий курс шкільної геометрії.

1.1. Про метричні співвідношення для дотичних кіл

Взаємне розташування двох кіл вивчається в курсі геометрії 7 класу, зокрема дотик двох кіл, а от метричні співвідношення відрізків, пов'язаних з колом, вивчаються в курсі геометрії 8 класу, у темі: «Подібність трикутників». Розрізняють два способи дотику: *внутрішній* та *зовнішній*. Для обох випадків: *точка дотику і центри обох кіл —* ***колінеарні****, тобто лежать на одній прямій*. У цій лекції ми зупинимося на **зв'язці** двох кіл, які дотикаються внутрішнім чи зовнішнім чином, вивчимо метричні співвідношення цієї зв'язки кіл та продемонструємо їх застосування для розв'язування олімпіадних задач.

Розглянемо на площині два кола ω_1 і ω_2 з центрами O_1 і O_2 та радіусами r_1 і r_2 відповідно, причому $r_1 < r_2$. Нехай ці кола дотикаються в точці S (внутрішнім чи зовнішнім чином).

Лема 1.1. *Через точку S провели пряму, яка перетинає вдруге коло ω_1 в точці A_1, а коло ω_2 — в точці A_2. Тоді:*

а) $O_1A_1 \parallel O_2A_2$;

б) $\dfrac{SA_1}{SA_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$.

Доведення. а) Для обох способів дотику точки O_1, O_2 і S — лежать на одній прямій, тому $\angle A_2SO_2 = \angle A_1SO_1$ (див. рис. 1.1).

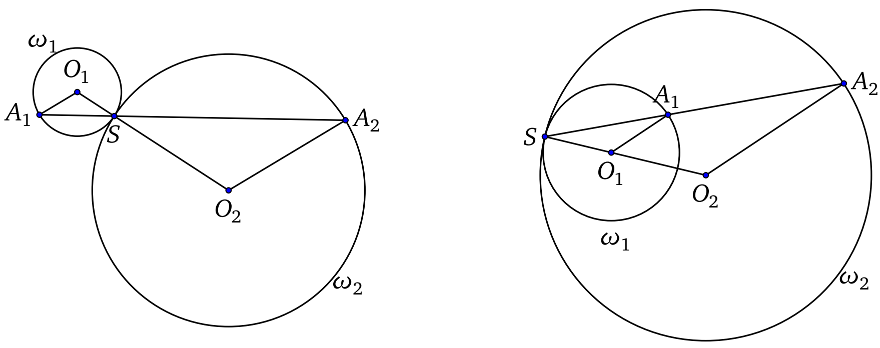


Рис. 1.1.

Трикутники SO_2A_2 і SO_1A_1 рівнобедрені, тому $\angle A_2SO_2 = \angle SA_2O_2$ і $\angle A_1SO_1 = \angle SA_1O_1$. Звідки слідує, що $\angle SA_2O_2 = \angle SA_1O_1$, тобто $O_1A_1 \parallel O_2A_2$.

б) Оскільки трикутники SO_1A_1 і SO_2A_2 — подібні (за двома кутами), то

$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SO_1}{SO_2},$$

тобто

$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

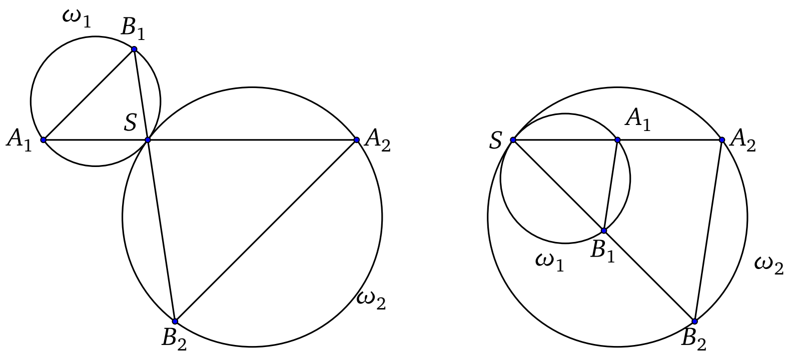
що і треба було довести. □

Лема 1.2. *Через точку S провели дві різні прямі a і b, які відповідно перетинають вдруге коло ω_1 в точках A_1 і B_1, а коло ω_2 — в точках A_2 і B_2. Тоді $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.*

Доведення. Для обох способів дотику (див. рис. 1.2) за результатом леми 1.1, маємо:

$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{і} \quad \frac{SB_1}{SB_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

тобто
$$\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{SB_1}{SB_2}.$$



а) б)

Рис. 1.2.

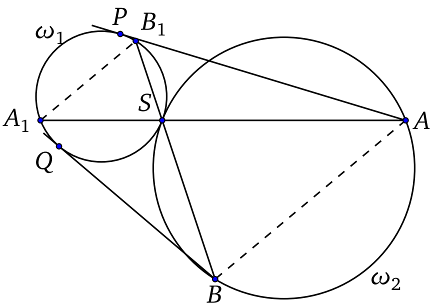
Оскільки $\angle A_1SB_1 = \angle A_2SB_2$, то трикутники A_1SB_1 і A_2SB_2 — подібні (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає, що $\angle SA_1B_1 = \angle SA_2B_2$, тобто $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, що і треба було довести. $\square$

Лема 1.3. *Через точку S провели дві різні прямі a і b, які відповідно перетинають вдруге коло ω_2 в точках A і B. Нехай AP і BQ — дотичні до кола ω_1 (P і Q — точки дотику). Тоді має місце співвідношення*
$$\frac{AP}{BQ} = \frac{SA}{SB}.$$

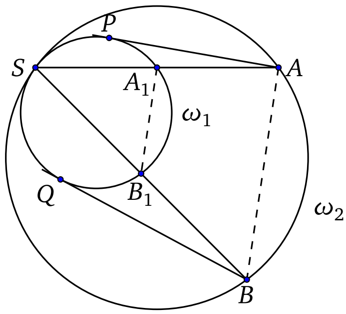
Доведення. Нехай прямі SA і SB перетинають вдруге коло ω_1 відповідно в точках A_1 і B_1 (див. рис. 1.3). Тоді за результатом попередньої леми маємо: $AB \parallel A_1B_1$ і трикутники SAB та SA_1B_1 — подібні.

За теоремою про дотичну і січну, одержуємо: $AP^2 = AS \cdot AA_1$ і $BQ^2 = BS \cdot BB_1$. Поділивши першу рівність на другу, одержимо:
$$\frac{AP^2}{BQ^2} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{AA_1}{BB_1}.$$

Оскільки $AB \parallel A_1B_1$, то за узагальненою теоремою Фалеса:
$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA_1}{SB_1},$$
а з подібності трикутників SAB та SA_1B_1, одержуємо:
$$\frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA}{SB}.$$



а)



б)

Рис. 1.3.

З останніх трьох рівностей, маємо:

$$\frac{AP^2}{BQ^2} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{SA_1}{SB_1} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{SA}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2},$$

тобто

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{SA}{SB},$$

що і треба було довести. □

Олімпіадні задачі

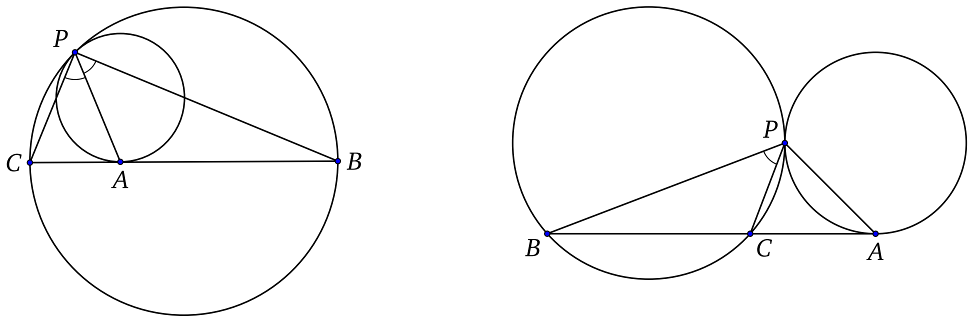
Задача 1.1. *Два кола дотикаються одне одного в точці P. Пряма, яка дотикається меншого кола в точці A, перетинає більше в точках B і C. Доведіть, що промінь PA є бісектрисою кута BPC або суміжного з ним.*

(Міжнародне математичне змагання, Люксембург, 1980 р.)

Розв'язання. Виконаємо рисунок, що відповідає умові задачі; при цьому можливі два варіанти дотику кіл: внутрішній і зовнішній (див. рис. 1.4). Використовуючи лему 1.3, одержуємо, що $\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{PB}{PC}$.

Доведемо, що коли виконується це співвідношення, то PA — бісектриса кута BPC або суміжного з ним. Для цього опустимо перпендикуляри AM і AN на прямі PB і PC відповідно. Нехай PH — висота трикутника BPC. Для кожного з випадків малюнки зробіть самостійно. Тоді трикутники BHP і BMA — подібні (вони прямокутні і мають спільний гострий кут). Аналогічно, подібними будуть трикутники CHP і CNA. З подібності першої пари трикутників, одержуємо:

$$\frac{BA}{BP} = \frac{AM}{PH}.$$



а) б)

Рис. 1.4.

З подібності другої пари трикутників, одержуємо:

$$\frac{CA}{CP} = \frac{AN}{PH}.$$

З того, що $\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{PB}{PC}$, одержуємо $\dfrac{BA}{BP} = \dfrac{CA}{CP}$. Тому

$$\frac{AM}{PH} = \frac{AN}{PH}$$

і $AM = AN$, тобто точка A рівновіддалена від прямих PB і PC. А це і означатиме, що PA — бісектриса кута BPC або суміжного з ним, що і завершує доведення. □

Задача 1.2. *Нехай Ω — описане коло трикутника ABC, ω — вписане коло цього трикутника. Центр кола ω позначено через I, а через D — точку дотику вписаного кола зі стороною BC. Розглянемо коло ρ, яке дотикається внутрішнім чином кола Ω в точці T, а кола ω — в точці D. Доведіть, що $\angle ATI = 90°$.*

(В'єтнамська математична олімпіада, 2007 р.)

Розв'язання. Нехай E і F — точки дотику вписаного кола ω зі сторонами AC і AB відповідно (див. рис. 1.5). Використовуючи лему 1.3, одержуємо:

$$\frac{TB}{TC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE}.$$

Отже, $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{BF}{CE}$ і $\angle TBF = \angle TCE$ (бо $\angle TBA = \angle TCA$ як вписані, що спираються на спільну дугу кола).

Тоді трикутники TBF і TCE — подібні (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає, що їх зовнішні кути при вершинах F і E — рівні, тобто $\angle TFA = \angle TEA$. Ця рівність кутів означатиме циклічність точок T, F, E і A. Крім того, точки F, I, E, A також

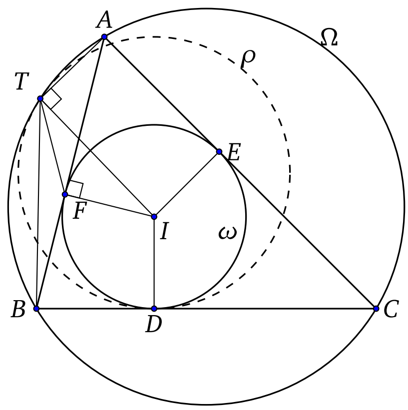


Рис. 1.5.

циклічні, бо $\angle AFI = 90^\circ = \angle AEI$ (радіуси, проведенні в точки дотику, перпендикулярні до дотичних). Тому усі п'ять точок T, F, I, E і A є циклічними, тобто лежать на одному колі. Звідки, за властивістю вписаних кутів маємо: $\angle ATI = \angle AFI = 90^\circ$, що і треба було довести. □

Задача 1.3. *Нехай Ω — описане коло чотирикутника $ABCD$, ω — коло, яке дотикається внутрішнім чином кола Ω в точці T, а відрізків BD і AC в точках E і F відповідно. Позначимо через P — точку перетину прямих EF і AB. Доведіть, що TP — бісектриса кута ATB.*

(Математична олімпіада Південної Кореї, 2006 р.)

Розв'язання.

Нехай AK і BL — перпендикуляри, опущені з точок A і B на пряму EF, O — точка перетину діагоналей AC і BD даного чотирикутника (див. рис. 1.6).

Для того, щоб довести, що TP — бісектриса кута ATB, достатньо довести, що

$$\frac{AT}{BT} = \frac{AP}{BP}.$$

Застосуємо лему 1.3 до точок A і B кола Ω:

$$\frac{AT}{BT} = \frac{AF}{BE}.$$

Залишилося довести, що

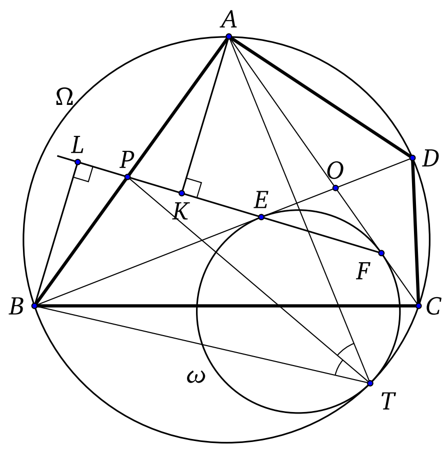


Рис. 1.6.

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AP}{BP}.$$

Оскільки $OE = OF$, як відрізки дотичних, що проведені до кола ω із точки O, то $\angle AFK = \angle OFE = \angle OEF = \angle BEL$, тобто $\angle AFK = \angle BEL$. Це означає, що прямокутні трикутники AKF і BLE подібні. З подібності цих трикутників, одержуємо:

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AK}{BL}.$$

Оскільки $\angle APK = \angle BPL$, як вертикальні, то прямокутні трикутники AKP і BLP подібні. З подібності цих трикутників, одержуємо:

$$\frac{AK}{BL} = \frac{AP}{BP}.$$

З останніх двох пропорцій одержуємо, що

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AP}{BP},$$

що і треба було довести. □

Задача 1.4. *Нехай Ω — описане коло трикутника ABC, ω — коло, яке дотикається внутрішнім чином кола Ω в точці T, а сторін AB і AC в точках P і Q відповідно. Нехай S — точка перетину прямих AT і PQ. Доведіть, що $\angle SBA = \angle SCA$.*

(Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, Молдова, 2007 р.)

Розв'язання.

Опустимо перпендикуляри SM, SL, TK з точок S і T на прямі AC, AB, BC відповідно (див. рис. 1.7). Застосуємо лему 1.3 до точок C і B кола Ω:

$$\frac{BP}{CQ} = \frac{BT}{CT}.$$

Оскільки P і Q — точки дотику, то $AP = AQ$, тобто трикутник рівнобедрений. А це означає, що $\angle BPS = \angle CQS$ і трикутники SLP і SMQ — подібні.

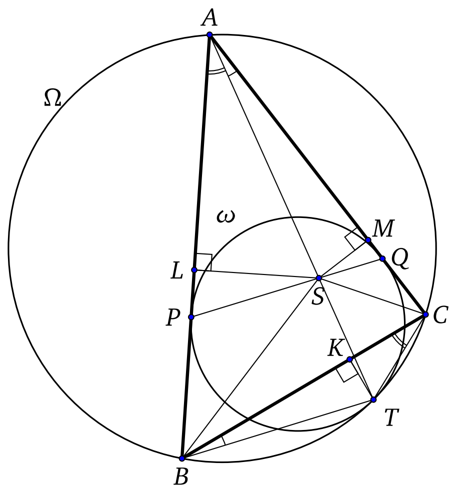


Рис. 1.7.

Крім того, $\angle TBC = \angle TAC$ і $\angle TCB = \angle TAB$, як вписані, що спираються на одну і ту ж саму дугу кола. Це означає, що

$$\Delta BKT \sim \Delta AMS \quad \text{і} \quad \Delta CKT \sim \Delta ALS.$$

Тому

$$\frac{PS}{QS} = \frac{SL}{SM} = \frac{SL/TK}{SM/TK} = \frac{AS/TC}{AS/TB} = \frac{TB}{TC} = \frac{BP}{CQ},$$

тобто $\frac{PS}{QS} = \frac{PB}{QC}$. Оскільки $\angle BPS = \angle CQS$, то трикутники BPS і CQS — подібні. Звідки й слідує, що $\angle PBS = \angle QCS$. □

Задача 1.5. *Коло ω проходить через вершини B і C заданого трикутника ABC так, що точка A знаходиться всередині цього кола. Коло δ дотикається внутрішнім чином до кола ω в точці T, а до сторін AB і AC в точках P і Q відповідно. Нехай M — середина дуги BC, яка містить точку T. Доведіть, що прямі PQ, BC і MT перетинаються в одній точці.*

Розв'язання. Нехай K — точка перетину прямих PQ і BC, а K' — точка перетину прямих MT і BC (рис. 1.8). Застосуємо теорему Менелая[1] для трикутника ABC і прямої PQK:

$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

Оскільки $AP = AQ$, то із цього співвідношення матимемо:

$$\frac{KB}{KC} = \frac{BP}{CQ}.$$

Далі, оскільки M — середина дуги BTC кола ω, то TK' — бісектриса зовнішнього кута трикутника BTC при вершині T (це випливає із результату **задачі 1.1**). Тому має місце співвідношення

$$\frac{K'B}{K'C} = \frac{TB}{TC}.$$

Оскільки за результатом леми 1.3 виконується співвідношення

$$\frac{BP}{CQ} = \frac{TB}{TC},$$

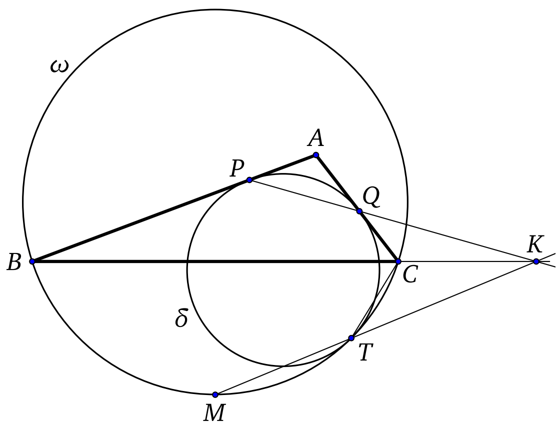


Рис. 1.8.

то $\frac{K'B}{K'C} = \frac{KB}{KC}$, тобто точки K і K' — співпадають. □

Задача 1.6. *Два кола ω_1 і ω_2 дотикаються внутрішнім чином до кола ω в точках M і N відповідно. Дві внутрішні спільні дотичні до кіл ω_1 і ω_2 перетинають коло ω в чотирьох точках. Нехай B і C — дві із них, які лежать по один бік від прямої MN. Доведіть, що пряма BC паралельна одній із зовнішніх спільних дотичних до кіл ω_1 і ω_2.*

[1] Теорема 4.6 на сторінці 115.

Розв'язання. Нехай спільна зовнішня дотична кіл ω_1 і ω_2, яка лежить між MN і BC, перетинає коло ω в точках P і Q, дотикається кіл ω_1 і ω_2 в точках E і F відповідно. Також, внутрішні спільні дотичні кіл ω_1 і ω_2, які перетинають ω в точках B і C, дотикаються до кіл ω_1 і ω_2 в точках G і H та L і K відповідно (рис. 1.9).

Тоді за результатом задачі 1.1, ME і NF перетинають ω в точці A, яка є серединою дуги PQ, а чотирикутник $MEFN$ — циклічний. Для доведення паралельності PQ і BC нам треба довести, що A — середина дуги BC, тобто, що $AB = AC$.

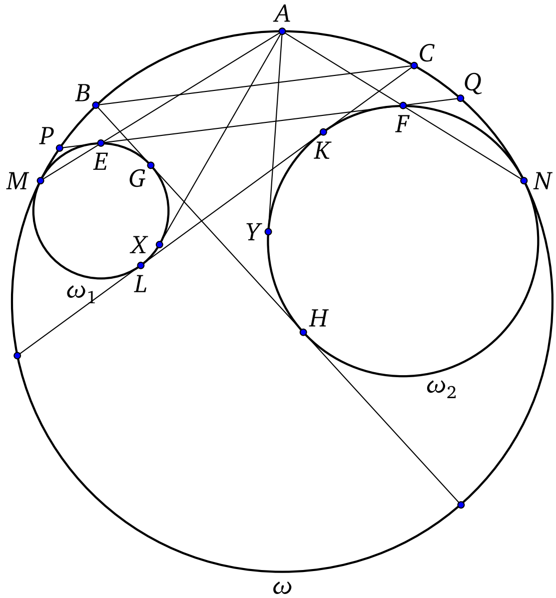


Рис. 1.9.

Для цього проведемо дотичні AX і AY із точки A до кіл ω_1 і ω_2. Тоді, за теоремою про дотичну і січну, маємо:

$$AX^2 = AM \cdot AE = AN \cdot AF = AY^2,$$

тобто $AX = AY$. Далі, за результатом леми 1.3, виконуються співвідношення:

$$\frac{MA}{AX} = \frac{MB}{BG} = \frac{MC}{CL},$$

а за теоремою Птоломея для чотирикутника $MBAC$ (див. теорему 4.3 на сторінці 101), виконується й таке співвідношення:

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB.$$

Одержуємо:

$$AX \cdot BC = BG \cdot AC + CL \cdot AB.$$

Аналогічно, одержуємо:

$$AY \cdot BC = BH \cdot AC + CK \cdot AB.$$

Враховуючи, що $AX = AY$, із останніх двох рівностей одержуємо:

$$BG \cdot AC + CL \cdot AB = BH \cdot AC + CK \cdot AB,$$

тобто

$$(CL - CK) \cdot AB = (BH - BG) \cdot AC,$$
$$LK \cdot AB = GH \cdot AC.$$

Оскільки $LK = GH$, то $AB = AC$, що і треба було довести. □

1.2. Леми Карно

Серед багатьох олімпіадних геометричних задач, є такі, що містять вимогу: «Довести, що три прямі перетинаються в одній точці». Основна трудність полягає у вдалому виборі способу розв'язування. Пропонуємо один із них, який, на наш погляд, дозволяє зняти цю проблему. Суть його полягає у використанні наступних тверджень.

Теорема 1.1. *Нехай A, B, C, D — чотири різні точки площини. Прямі AB і CD будуть взаємно перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли виконується така рівність*

$$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2.$$

Доведення. Одне із доведень цієї теореми може бути, наприклад, таким. Маємо

$$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2 \Leftrightarrow \left(CA^2 - CB^2\right) - \left(DA^2 - DB^2\right) = 0$$

Але

$$\begin{aligned}\left(CA^2 - CB^2\right) - \left(DA^2 - DB^2\right) &= \left(\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2\right) - \left(\overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{DB}^2\right) = \\ &= \left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) - \left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}\right)\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}\right) = \\ &= \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) - \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}\right) = \\ &= \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}\right) = \\ &= \overrightarrow{BA}\left(\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA}\right) + \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}\right)\right) = \\ &= \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}\right) = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}.\end{aligned}$$

Таким чином, $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB \perp CD$, що і треба було довести. □

Теорема 1.2 (Про точку в площині прямокутника). *Для довільного прямокутника $ABCD$ і довільної точки M виконується рівність*

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Доведення. Довести цю теорему можна аналогічно. Дійсно,

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \Leftrightarrow \left(MA^2 - MB^2\right) + \left(MC^2 - MD^2\right) = 0.$$

Нехай O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Тоді

$$\begin{aligned}\left(MA^2 - MB^2\right) + \left(MC^2 - MD^2\right) &= \left(\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2\right) + \left(\overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MD}^2\right) = \\ &= \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) + \overrightarrow{DC}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) = \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) - \overrightarrow{BA}\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right) =\end{aligned}$$

$$=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{BA}\cdot 2\overrightarrow{CB}=0,$$

що і треба було довести. □

Справедливість цих лем можна легко довести за допомогою методу координат.

Олімпіадні задачі

Задача 1.7. *На сторонах трикутника ABC зовні його побудовані прямокутники AA_2B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_1A. Доведіть, що серединні перпендикуляри відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в одній точці.*

(Всеукраїнська олімпіада, 1987 р.)

Розв'язання. Нехай M — точка перетину серединних перпендикулярів відрізків A_1A_2 і B_1B_2 (доведіть, що вона існує). Тоді $MA_1 = MA_2$ і $MB_1 = MB_2$. Треба довести, що $MC_1 = MC_2$ (див. рис. 1.10).

Отже, за теоремою 1.2 одержуємо:

$$MA^2 + MB_1^2 = MA_2^2 + MB^2,$$
$$MB^2 + MC_1^2 = MB_2^2 + MC^2,$$
$$MA^2 + MB_1^2 = MA_2^2 + MB^2$$

Додамо ці три рівності і врахуємо, що $MA_1 = MA_2$ і $MB_1 = MB_2$. Дістанемо $MC_1^2 = MC_2^2$. Звідки $MC_1 = MC_2$. Отже, серединний перпендикуляр відрізка проходить через точку M, що і треба було довести. □

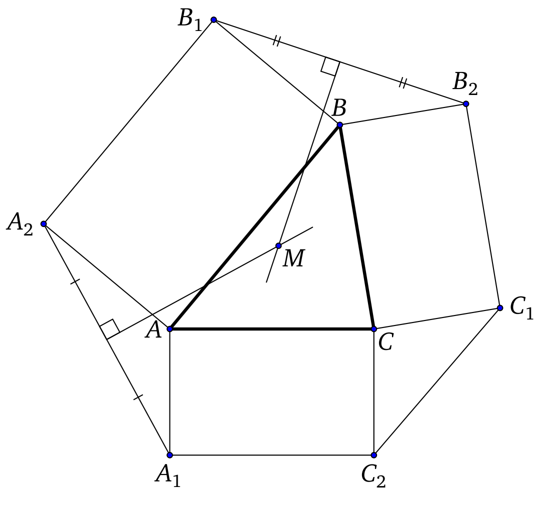


Рис. 1.10.

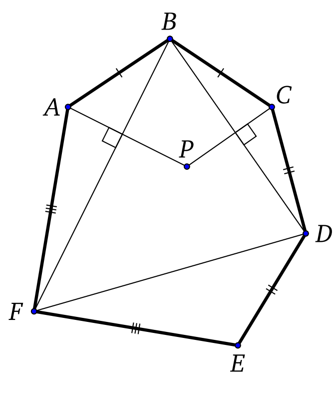


Рис. 1.11.

Задача 1.8. *Нехай $ABCDEF$ — опуклий шестикутник, в якому $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Доведіть, що прямі, які проходять через точки A, C, E*

перпендикулярно до прямих FB, BD, DF відповідно, перетинаються в одній точці.

(Ірландія, 1999 р.)

Розв'язання. Нехай P — точка перетину прямих, що проходять через точки A і C відповідно перпендикулярно до прямих FB і BD (рис. 1.19). Тоді за теоремою 1.1 маємо:

$$AP \perp FB \Leftrightarrow PF^2 - PB^2 = AF^2 - AB^2,$$
$$CP \perp BD \Leftrightarrow PB^2 - PD^2 = CB^2 - CD^2.$$

Додавши ці дві рівності і врахувавши рівності $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = EA$, одержимо:

$$PF^2 - PD^2 = EF^2 - ED^2 \Leftrightarrow PE \perp DF,$$

що і треба було довести. □

Задача 1.9. *Дано чотирикутник $ABCD$, в якому $AB = AD$ і $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах BC і CD вибрані точки F і E відповідно так, що $DF \perp AE$. Доведіть, що $AF \perp BE$.*

(Румунія, 1994 р.)

Розв'язання.

Застосовуючи теорему 1.1 (див. рис. 1.12), одержимо:

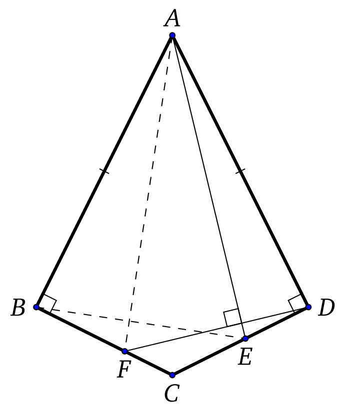


Рис. 1.12.

$$AE \perp DF \Leftrightarrow AF^2 - AD^2 = EF^2 - ED^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB^2 + BF^2 - AD^2 = EF^2 - AE^2 + AD^2.$$

(тут ми скористалися теоремою Піфагора для прямокутних трикутників ABF і ADE). Оскільки $AB = AD$, то остаточно матимемо:

$$AE \perp DF \Leftrightarrow BF^2 - AB^2 = EF^2 - AE^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB^2 - AE^2 = FB^2 - FE^2$$
$$\Leftrightarrow AF \perp BE,$$

що і треба було довести. □

Задача 1.10. *Дано опуклий п'ятикутник $ABCDE$, в якому $AB = BC$ і $\angle BAE = \angle BCD = 90°$. Всередині його відмітили таку точку X, що $AX \perp BE$ і $CX \perp BD$. Доведіть, що $BX \perp DE$.*

(Польща, 1994 р.)

Розв'язання.

Застосовуючи теорему 1.1 (див. рис. 1.13), одержимо:

$AX \perp BE \Leftrightarrow AB^2 - AE^2 = XB^2 - XE^2 \Leftrightarrow$

$CX \perp BD \Leftrightarrow XB^2 - XD^2 = CB^2 - CD^2.$

Додавши ці дві одержані рівності і врахувавши, що $BA = BC$, після спрощення ми одержуємо:

$$-XD^2 - AE^2 = XE^2 - CD^2,$$

тобто

$$XE^2 - XD^2 = AE^2 - CD^2.$$

Далі, за теоремою Піфагора з трикутників BAE і BCD, одержимо таку рівність:

$$XE^2 - XD^2 = \left(BE^2 - BA^2\right) - \left(BD^2 - BC^2\right),$$

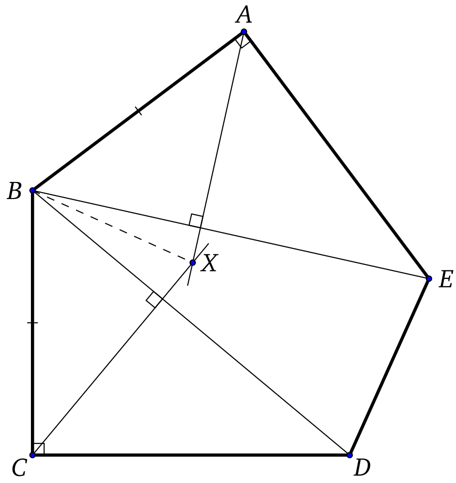


Рис. 1.13.

тобто

$$XE^2 - XD^2 = BE^2 - BD^2 \quad \Leftrightarrow \quad BX \perp DE,$$

що і треба було довести. □

Задача 1.11. *У гострокутному трикутнику ABC $\angle A < 45°$. Точка D лежить всередині трикутника AB так, що $BD = CD$ і $\angle BCD = 4\angle A$. Точка E симетрична до точки C відносно прямої AB, а точка F симетрична до точки B відносно прямої AC. Доведіть, що $AD \perp EF$.*

(США, 2007 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 1.14).

Нехай $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ — довжини сторін трикутника ABC. Оскільки точка E симетрична до точки C відносно прямої AB, то $AE = AC = b$. Аналогічно $AF = AB = c$. Крім того, $BE = BC = a$ і $CF = CB = a$, тобто $BE = BC = CF = a$. Тому

$$AE^2 - AF^2 = b^2 - c^2.$$

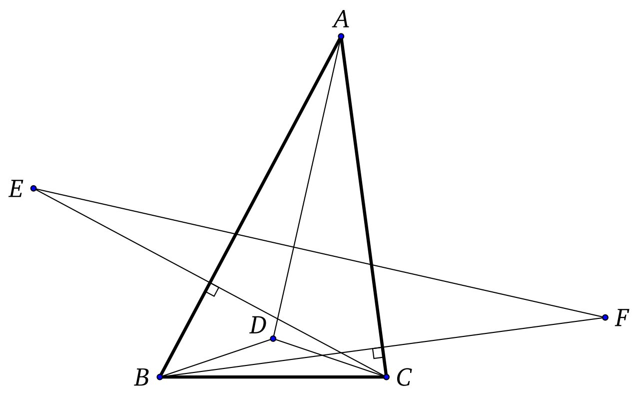


Рис. 1.14.

Обчислимо таку різницю квадратів: $DE^2 - DF^2$. Для цього позначимо кути трикутника ABC: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Тоді $\angle BDC = 4\alpha$, де $0° < \alpha < 45°$.

Оскільки трикутник BDC — рівнобедрений, то $\angle DBC = \angle DCB = 90^\circ - 2\alpha$, а із заданої симетрії випливає, що $\angle CBE = 2\beta$. Тоді

$$\angle DBE = \angle CBE - CBD = 2\beta - (90^\circ - 2\alpha) = 2\alpha + 2\beta - 90^\circ.$$

Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то остаточно $\angle DBE = 270^\circ - 2\gamma$. Аналогічно, $\angle DCF = 270^\circ - 2\beta$. Тому, використовуючи теорему косинусів, можна обчислити шукану різницю квадратів:

$$\begin{aligned} DE^2 - DF^2 = BE^2 + BD^2 - 2 \cdot BE \cdot BD \cdot \cos(270^\circ - 2\gamma) - \\ - CF^2 - CD^2 + 2 \cdot CF \cdot CD \cdot \cos(270^\circ - 2\beta) = \\ = 2 \cdot a \cdot BD \cdot (\sin 2\gamma - \sin 2\beta). \end{aligned}$$

Оскільки $BD = \dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$, то шукана різниця квадратів:

$$DE^2 - DF^2 = a^2 \cdot \frac{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$$

Теорема 1.1 забезпечить потрібну перпендикулярність $AP \perp EF$, якщо ми доведемо таку рівність:

$$\frac{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}.$$

Використовуючи формулу для синуса подвійного аргументу та теореми синусів і косинусів для трикутника ABC, матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha} &= \frac{2\sin\gamma\cos\gamma - 2\sin\beta\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \\ &= \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \\ &= \frac{c}{a} \cdot \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} - \frac{b}{a} \cdot \frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \\ &= \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2} - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2} = \\ &= \frac{a^2c^2 + b^2c^2 - c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 + b^4}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \\ &= \frac{b^4 - c^4 + a^2c^2 - a^2b^2}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \\ &= \frac{\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2\right) - a^2\left(b^2-c^2\right)}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \\ &= \frac{\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}{a^2(b^2+c^2-a^2)} = \frac{b^2-c^2}{a^2}, \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

1.3. Теорема про діаметри вписаного і зовнівписаного кіл трикутника

В олімпіадній геометрії з'явилися задачі, для розв'язання яких потрібно використовувати результат однієї олімпіадної задачі, у якої вже досить довге історичне минуле.

Теорема 1.3. *Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається сторони BC у точці D, DT — його діаметр. Якщо X — точка перетину прямої AT зі стороною BC, то точка X — точка дотику зовнівписаного кола трикутника ABC і $BD = CX$.*

Доведення.

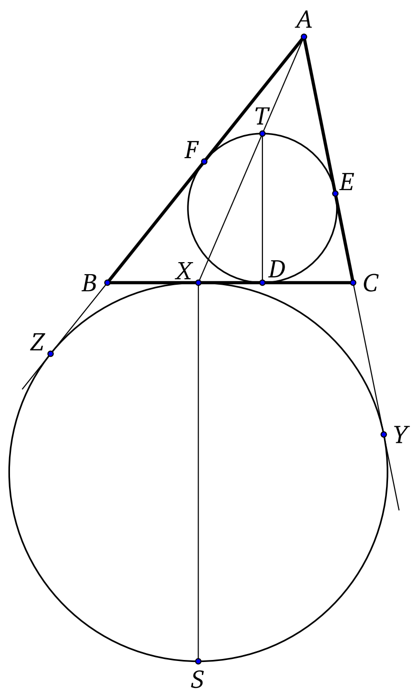


Рис. 1.15.

Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $AB \geqslant AC$. Розглянемо гомотетію з центром у точці A і коефіцієнтом $k = \dfrac{r_a}{r}$. При цій гомотетії вписане коло трикутника ABC відображається в зовнівписане коло цього трикутника, яке дотикається сторони BC (див. рис. 1.15). Відрізок DT, який є діаметром вписаного кола і перпендикулярний BC, відображається в діаметр зовнівписаного кола, який також буде перпендикулярний до BC, а тому кінцем цього діаметра буде точка дотику, яка разом із точками A і T лежить на одній прямій, тобто SX — діаметр зовнівписаного кола, де S — точка, у яку відображається точка D.

Тепер залишається довести, що $BD = CX$. Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається сторін AB і AC відповідно в точках F і E, а розглянуте зовнівписане коло дотикається продовжень сторін AB і AC відповідно в точках Z і Y. Тоді, за теоремою про рівність дотичних до кола, що проведені із однієї точки, матимемо:

$$\begin{aligned} 2BD &= BF + BX + XD = BF + BZ + XD = FZ + XD = \\ &= EY + XD = EC + CY + XD = DC + XC + XD = \\ &= 2CX. \end{aligned}$$

Таким чином, обидва твердження теореми 1.3 доведено. □

Олімпіадні задачі

Задача 1.12. *Нехай $ABCD$ — рівнобедрена трапеція, $AB \parallel CD$. Коло ω вписане в трикутник BCD і дотикається сторони CD в точці E. Нехай F — точка, яка лежить на бісектрисі кута DAC так, що $FE \perp CD$. Описане коло трикутника ACF перетинає пряму CD у двох точках C і G. Доведіть, що трикутник AFG рівнобедрений.*

(США, 1999 р.)

Розв'язання.

Розглянемо коло з центром I, яке вписане в трикутник ADC, яке дотикається до сторони DC у точці K (див. рис. 1.16). Тоді точка I належить бісектрисі AF кута DAC. Оскільки трапеція $ABCD$ — рівнобедрена, то $DK = CE$, тобто $DE = CK$.

Оскільки $IK \perp CD$ і $FE \perp CD$, то за результатом леми 1.3 одержуємо, що F — центр зовнівписаного кола трикутника DAC, яке дотикається сторони CD. Нехай це коло дотикається до прямої AC у точці T. Тоді трикутники FEG і FTA — рівні між собою, бо вони прямокутні, $FE = FT$ і $\angle FAT = \angle FGE$ (адже за властивістю вписаних кутів: $\angle FAC = \angle FGC$). З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних сторін, тобто $FA = FG$, що і треба було довести.

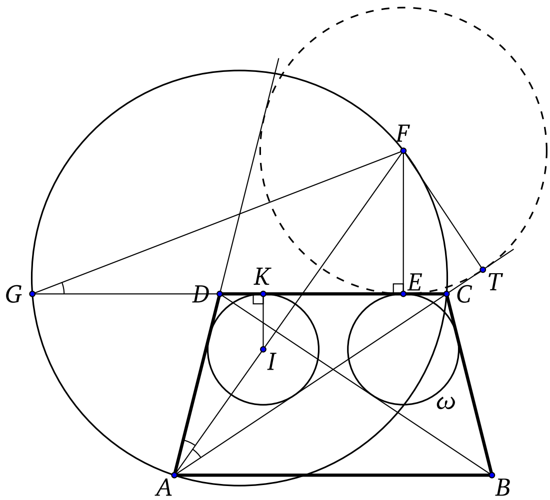


Рис. 1.16.

□

Задача 1.13. *На площині задано коло ω, пряма l, яка дотикається до ω, та точка M, яка лежить на l. Знайдіть множину усіх точок P, що задовольняють таку умову: існують дві точки Q і R, які лежать на l, такі, що M — середина QR, а коло ω вписане в трикутник PQR.*

(Міжнародна математична олімпіада, 1992 р.)

Розв'язання.

Нехай B — точка дотику кола ω і прямої l, A — точка, діаметрально протилежна точка до B (див. рис. 1.17).

Нехай P — шукана точка. Зрозуміло, що точка P лежить разом із точкою A в одній півплощині відносно прямої l, причому зовні кола ω. Нехай K — точка перетину прямої PA з прямою l.

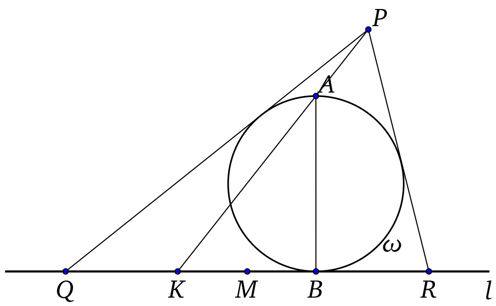


Рис. 1.17.

За результатом теореми 1.3 матимемо, що $QB = RK$. Оскільки $MQ = MR$, то M — середина відрізка BK. Звідси випливає, що коли задану точку B симетрично відобразити відносно заданої точки M, то точка P буде лежати на продовженні відрізка KA за точку A. Залишилося довести, що кожна точка P цього продовження задовольняє умові задачі. Дійсно, нехай P — одна із точок цього продовження. Нехай Q і R точки перетину дотичних до кола ω з прямою l, проведених із точки P. Утворився трикутник PQR, у який вписано коло ω, яке дотикається до сторони QR у точці B. За результатом теореми 1.3 маємо, що $QB = RK$. Залишилося довести, що задана точка M — середина відрізка QR. Дійсно, оскільки за побудовою $MK = MB$ і $QB = RK$, то

$$QM = QB - BM = KR - BM = KM + BR = KM + MR - MB = MR,$$

що і треба було довести.

Таким, чином, шуканою множиною точок P буде продовження відрізка KA за точку A. □

Задача 1.14. *У трикутнику ABC, що задовольняє умову $AB + BC = 3AC$, вписане коло з центром I, яке дотикається до сторін AB і BC у точках D і E відповідно. Нехай K і L — точки, що симетричні відповідно до точок D і E відносно точки I. Доведіть, що чотирикутник $ACKL$ — циклічний, тобто вписаний в деяке коло.*

(Запропонована від Греції на Міжнародну математичну олімпіаду, 2005 р.)

Розв'язання. З умови задачі випливає, що точки K і L — діаметрально протилежні до точок D і E відповідно (див. рис. 1.18).

Враховуючи умову задачі на сторони трикутника, за теоремою про дотичні відстані до вписаного кола, матимемо:

$$BD = BC = \frac{AB + BC - AC}{2} =$$
$$= \frac{3AC - AC}{2} = AC$$

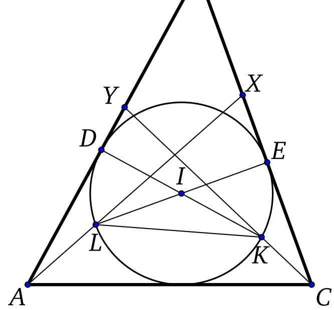


Рис. 1.18.

Нехай X та Y — точки перетину прямих AL і CK зі сторонами BC і AB відповідно. Тоді, за результатами теореми 1.3, одержуємо, що $CX = BE = AC$ і $AY = BD = AC$. Звідси випливає, що

$$\angle LAC = \angle XAC = \angle AXC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

і

$$\angle KCA = \angle YCA = \angle CYA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

де $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ — кути трикутника ABC. Оскільки $LE \perp BC$, то $\angle XLE = 90^\circ - \angle LXE = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}$. Крім того, навколо чотирикутника $BDIE$ можна описати коло, бо $\angle BDI + \angle BEI = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Оскільки BI — бісектриса кута ABC, то за властивістю вписаних кутів, матимемо:

$$\angle KLE = \angle KDE = \angle IDE = \angle IBE = \frac{\beta}{2}.$$

Тому $\angle KLX = \angle KLE + \angle ELX = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle KCA$, тобто чотирикутник $ACKL$ — вписаний, що і треба було довести. □

Задача 1.15. *У трикутнику ABC точка H — ортоцентр, точка I — центр вписаного кола, а точка O — центр описаного кола. Усі ці точки попарно різні. Нехай K — точка дотику вписаного кола зі стороною BC. Відомо, що $OI \parallel BC$. Доведіть, що $AO \parallel HK$.*

(Болгарія, 2003 р.)

Розв'язання. Нехай M — середина BC, KL — діаметр вписаного кола трикутника ABC, T — точка перетину прямої AL зі стороною BC (див. рис. 1.20).

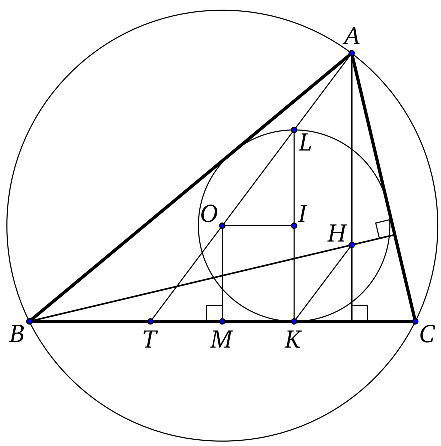


Рис. 1.19.

Тоді за результатом теореми 1.3 матимемо, що $BK = CT$ і $TM = MK$. Тому, з одного боку точка O лежить на серединному перпендикулярі до відрізка BC та відрізка TK, а з другого боку, за умовою задачі, точка O лежить на серединному перпендикулярі до відрізка KL. Звідси випливає, що точка O — центр описаного кола трикутника ABC, буде серединою відрізка TL. За теоремою про середню лінію трикутника, одержуємо: $OM = \frac{1}{2}KL$ і $OM \parallel KL$. Крім того, за теоремою про відстані від точки O до сторони BC і від точки H до вершини A, маємо: $OM = \frac{1}{2}AH$ і $OM \parallel AH$. Звідси випливає, що $KL = HA$ і $KL \parallel HA$, тобто чотирикутник $KLAH$ — паралелограм. Тому $KH \parallel OA$, що і треба було довести. □

Задача 1.16. *Нехай ω — вписане коло трикутника ABC, яке дотикається сторін BC і AC у точках D_1 і E_1 відповідно. На сторонах BC і AC відмітили точки D_2 і E_2 відповідно так, що $CD_2 = BD_1$ і $CE_2 = AE_1$. Нехай P — точка перетину відрізків AD_2 і BE_2. Коло ω перетинає відрізок AD_2 у двох точках, найближчу до A із яких позначено Q. Доведіть, що $AQ = D_2P$.*

(США, 2001 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 1.20). Оскільки $CD_2 = BD_1$ і $CE_2 = AE_1$, то за результатом теореми 1.3 одержуємо, що точки Q і R — діаметрально протилежні до точок D_1 і E_1 у колі ω, яке вписане в трикутник ABC. Рівність відрізків AQ і D_2P будемо доводити за допомогою обчислення їх довжини. Нехай $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ — довжини сторін трикутника ABC, h_a, h_b, h_c — їх відповідні висоти, а r — радіус кола ω. Тоді, з подібності відповідних трикутників, одержуємо:

$$\frac{AQ}{AD_1} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{ah_a - 2ar}{ah_a} = \frac{2pr - 2ar}{2pr} = \frac{p-a}{p}$$

тобто

$$\frac{AQ}{AD_2} = \frac{p-a}{p}. \qquad (1)$$

Використовуючи формулу для обчислення дотичної відстані, матимемо: $BD_1 = p - b$, $CD_1 = CE_1 = p - c$, $AE_1 = p - a$. Далі, застосуємо теорему Менелая для трикутника AD_2C і прямої $\overline{BPE}$:

$$\frac{AP}{PD_2} \cdot \frac{D_2B}{BC} \cdot \frac{CE_2}{E_2A} = 1.$$

Підставляючи значення відомих відрізків, матимемо:

$$\frac{AP}{PD_2} \cdot \frac{p-c}{a} \cdot \frac{p-a}{p-c} = 1,$$

тобто

$$\frac{AP}{PD_2} = \frac{a}{p-a}.$$

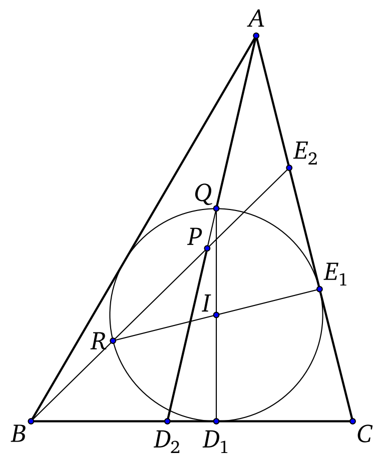


Рис. 1.20.

Звідси випливає, що

$$\frac{AP}{PD_2} + 1 = \frac{a}{p-a} + 1 \Leftrightarrow \frac{AD_2}{PD_2} = \frac{p}{p-a} \Leftrightarrow \frac{D_2P}{AD_2} = \frac{p-a}{p}. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) випливає, що $AQ = D_2P$.

□

1.4. Задача Віктора Тебо та її застосування

У цьому параграфі ми розглянемо оригінальну задачу, автором якої є **Віктор Тебо** — видатний французький геометр минулого століття. Десь між 1930 і 1940 роками вперше з'явився досить оригінальний геометричний шедевр, який нині називають **задачею Віктора Тебо**. Ось її формулювання:

Нехай ABC — довільний трикутник, D — довільна точка на стороні AC, I_1 — центр кола, яке дотикається відрізків AD, BD і описаного кола трикутника ABC, I_2 — центр кола, яке дотикається відрізків CD, BD і описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що відрізок I_1I_2 проходить через центр I вписаного кола трикутника ABC, причому

$$\frac{I_1I}{I_2I} = tg^2\frac{\varphi}{2},$$

де $\varphi = \angle BDA$.

Розв'язання цієї задачі базуватиметься на таких допоміжних твердженнях.

Теорема 1.4 (Лема Архімеда). *Якщо коло ω_2 дотикається внутрішнім чином кола ω_1 у точці M і хорди AB кола ω_1 у точці N, то промінь MN проходить через середину дуги, яка доповнює дугу AMB до кола ω_1.*

Доведення. Нехай O_1 і O_2 — центри кіл ω_1 і ω_2. Оскільки M — точка дотику кіл, то точки M, O_1 і O_2 лежать на одній прямій. Нехай промінь MN перетинає ω_1 у точці C. Доведемо, що C — середина дуги AB кола ω_1 (рис. 1.21, а).

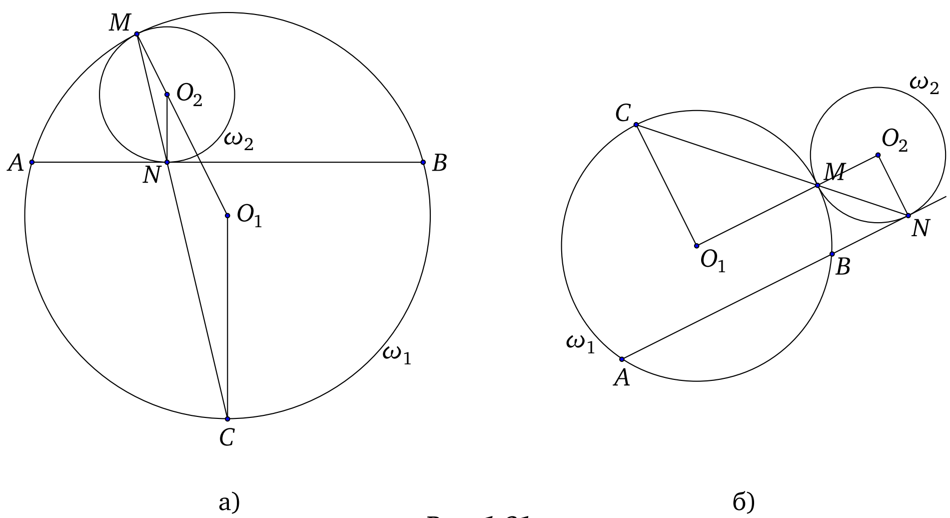


Рис. 1.21.

Дійсно, рівнобедрені трикутники MO_1N і MO_2C мають спільний кут M при основах. Тому, їх інші два кути при їх основах рівні між собою. Звідси випливає, що $O_1N \parallel O_2C$. Оскільки $O_1N \perp AB$, то і $O_2C \perp AB$, тобто пряма O_2C —

серединний перпендикуляр до хорди AB. А це означає, що C — середина дуги AB кола ω_1.

У випадку, коли ω_1 і ω_2 дотикаються зовнішнім чином у точці M, то промінь NM проходить через середину дуги AMB кола ω_1 (рис. 1.21, б). Доведення аналогічне. $\square$

Теорема 1.5 (Теорема про «тризуб»). *Якщо I та I_C — центри вписаного і зовнівписаного кіл трикутника ABC, а W — точка перетину продовження бісектриси кута C з описаним колом трикутника ABC, то $WI = WI_C = WA = WB$.*

Доведення. Нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ — кути трикутника ABC. Оскільки точка I — точка перетину бісектрис трикутника ABC, то за теоремою про зовнішній кут трикутника матимемо:

$$\angle AIW = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

За теоремою про вписані кути матимемо:

$$\angle WAI = \angle WAB + \angle BAI = \angle WCB + \angle BAI = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

З цих двох останніх рівностей кутів, отримуємо: $\angle AIW = \angle WAI$, тобто трикутник AWI — рівнобедрений. Звідси $WI = WA$ (див. рис. 1.22). Оскільки CW — бісектриса вписаного кута ACB, то $\smile AW = \smile WB$, а з рівності дуг випливає рівність відповідних хорд, що їх стягують: $WA = WB$.

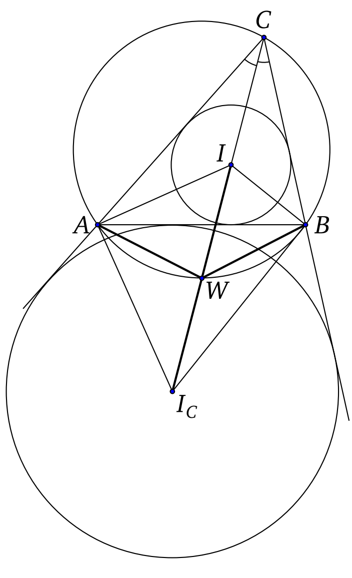


Рис. 1.22.

Далі, оскільки I_C — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, то AI_C і BI_C — бісектриси зовнішніх кутів при вершинах A і B відповідно. Тому, відповідні обчислення кутів дають:

$$\angle I_CAW = \angle I_CAB - \angle WAB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2},$$
$$\angle AWC = \angle ABC = \beta,$$
$$\angle AI_CW = \angle AWC - \angle I_CAW = \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Таким чином, $\angle AI_CW = \angle I_CAW$, тобто трикутник AWI_C — рівнобедрений. Звідки $WI_C = WA$, що і завершує доведення теореми. $\square$

Теорема 1.6. *Якщо I — центр вписаного кола трикутника ABC, W — точка перетину продовження бісектриси кута C з описаним колом трикутника ABC, а пряма, що проходить через W, перетинає хорду AB у точці P і описане коло — у точці Q ($Q \neq W$), то $WI^2 = WP \cdot WQ$ і $\angle CIQ = \angle IPQ$.*

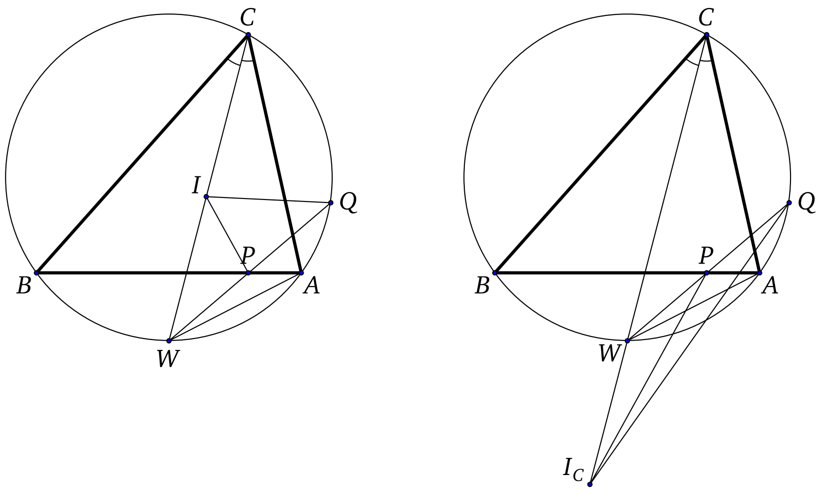
Доведення. Розглянемо два подібних трикутники WAP і WQA (за двома кутами: $\angle W$ — спільний, $\angle WAP = \angle WQA$). Дійсно, (див. рис. 1.23)

$$\angle WAP = \angle WAB = \angle WCB = \angle WCA = \angle WQA.$$

Тому, з подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

$$\frac{WB}{WQ} = \frac{WP}{WB},$$

тобто $WB^2 = WP \cdot WQ$. Оскільки за теоремою про «тризуб» $WI = WB$, то $WI^2 = WP \cdot WQ$, тобто першу частину теореми доведено.



а) б)

Рис. 1.23.

Оскільки $WI^2 = WP \cdot WQ$, то

$$\frac{WI}{WP} = \frac{WQ}{WI}.$$

Звідси випливає, що трикутники WIQ та WPI (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle WIQ = \angle WPI$. З рівності цих кутів випливає рівність суміжних до них кутів: $\angle CIQ = \angle IPQ$, що і завершує доведення всієї теореми.

У випадку, коли замість точки I розглянути точку I_C – центр зовнівписаного кола трикутника ABC, то ${WI_C}^2 = WP \cdot WQ$ і $\angle CI_CQ = \angle I_CPW$ (див. рис. 1.23). □

Теорема 1.7. *Нехай D — точка на стороні AC трикутника ABC. Розглянемо коло, яке дотикається відрізків BD, CD у точках M і K відповідно, і описаного кола трикутника ABC. Тоді пряма MK проходить через центр I вписаного кола трикутника ABC.*

Доведення. Нехай коло, яке дотикається відрізків BD і CD відповідно у точках M і K, дотикається описаного кола трикутника ABC у точці N внутрішнім чином. Тоді, за теоремою 1.4, промінь NK перетинає описане коло трикутника ABC у точці W, яка є серединою дуги AC (див. рис. 1.24, а). Тоді BW — бісектриса кута A, а тому проходить через I.

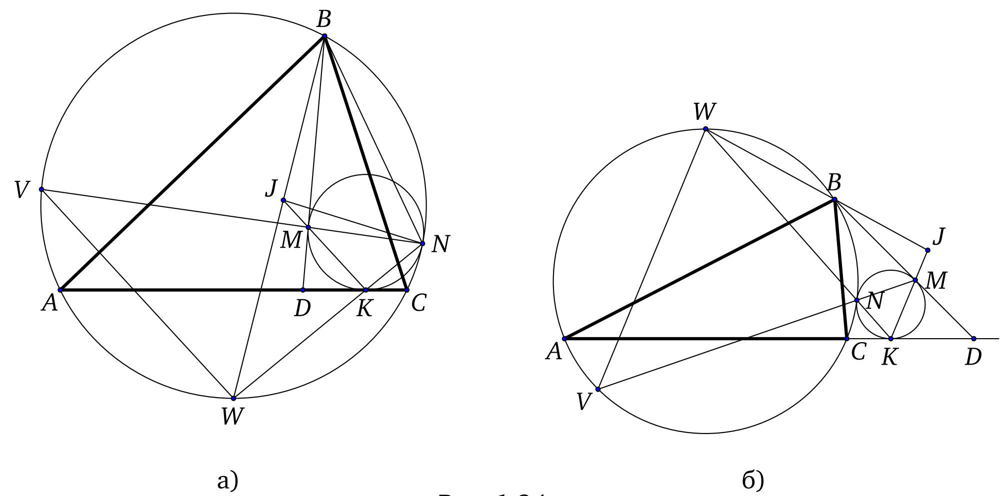


Рис. 1.24.

Нехай промінь NM перетинає описане коло трикутника ABC у точці V, а пряма MK перетинає BW у точці J. Оскільки описані кола трикутників ABC і MKN дотикаються у точці N, то $MK \parallel VW$. Тому $\angle KMN = \angle WVN = \angle WBN$, тобто точки B, J, M, N — циклічні. Звідси випливає, що $\angle BJN = \angle BMN$. За теоремою про кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, маємо, що $\angle MKN = \angle BMN$, тобто $\angle BJN = \angle MKN$. Звідси випливає, що $\angle WJN = \angle WKJ$, як суміжні до кутів у попередній рівності. Далі, трикутники WJN і WKJ подібні (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що їхні відповідні сторони пропорційні:

$$\frac{WJ}{WK} = \frac{WN}{WJ}.$$

Звідси випливає, що $WJ^2 = WK \cdot WN$. Але за теоремою 1.6 виконується така рівність: $WI^2 = WK \cdot WN$. Тому, з останніх двох рівностей випливає, що $WJ = WI$, тобто точки J та I — співпадають, що і завершує доведення теореми.

У випадку, коли точка D лежить на продовженні AC за точку C, то пряма MK проходить через центр I_A зовнівписаного кола трикутника ABC, що дотикається сторони BC (дивіться рис. 1.24, б). $\square$

А тепер перейдемо до розв'язання задачі Віктора Тебо. Згадаємо ще раз її формулювання.

Нехай ABC — довільний трикутник, D — довільна точка на стороні AC, I_1 — центр кола, яке дотикається відрізків AD, BD і описаного кола трикутника ABC, I_2 — центр кола, яке дотикається відрізків CD, BD і описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що відрізок I_1I_2 проходить через центр I вписаного кола трикутника ABC, причому

$$\frac{I_1I}{I_2I} = tg^2\frac{\varphi}{2},$$

де $\varphi = \angle BDA$.

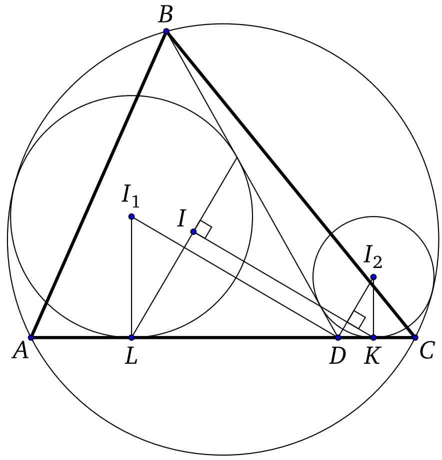


Рис. 1.25.

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 1.25).

Нехай коло з центром I_1 дотикається AD у точці L, а коло з центром I_2 дотикається DC у точці K. За теоремою 1.7 $IL \perp DI_1$, а $IK \perp DI_2$. Оскільки бісектриси суміжних кутів взаємно перпендикулярні, то $DI_1 \parallel KI$ і $DI_2 \parallel LI$.

Продовжимо KI та LI до перетину з LI_1 і KI_2 в точках P і Q відповідно (рис. 1.26).

Тоді отримуємо:

$$\frac{PI_1}{I_1L} = \frac{KD}{DL} = \frac{KI_2}{I_2Q},$$

тобто точки I_1 та I_2 ділять основи PL і KQ подібних трикутників PIL та KIQ (від вершин P і K) в однаковому відношенні. А це означає, що $\angle PII_1 = \angle KII_2$ (бо у подібних фігур відповідні кути рівні), тобто пряма I_1I_2 проходить через точку I. Крім того,

$$\frac{I_1I}{II_2} = \frac{PL}{KQ} = \frac{KL\cdot \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}{KL\cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}} = \mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2},$$

що і треба було довести.

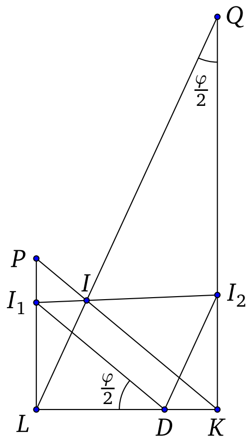


Рис. 1.26.

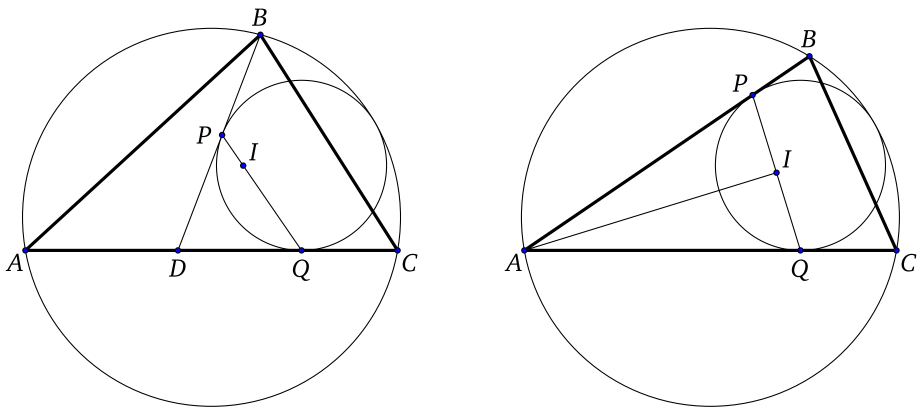
$\square$

Олімпіадні задачі

Задача 1.17. *Коло дотикається внутрішнім чином, описаного кола навколо рівнобедреного трикутника ABC, а також його бічних сторін AB і AC в точках P і Q відповідно. Доведіть, що середина відрізка PQ є центром кола, вписаного в трикутник ABC.*

(20-та Міжнародна математична олімпіада, Румунія, 1978 р.)

Розв'язання. Умова рівнобедреності трикутника ABC є зайвою. Твердження задачі буде справедливим і при умові $AB \neq AC$. Зробимо рисунок до задачі (див. рис. 1.27, а).



а) б)

Рис. 1.27.

Нехай точка D розташована на стороні AC. Будемо розглядати коло, яке дотикається внутрішнім чином до описаного кола трикутника ABC, а також до відрізків AD і CD у точках P і Q відповідно. Тоді, за теоремою 1.7 пряма PQ проходить через точку I — центр вписаного кола трикутника ABC. Цей факт буде справедливим і у випадку, коли точка D співпаде з точкою A (див. рис. 1.27, б).

Трикутник PAQ — рівнобедрений, бо $AP = AQ$ (як дотичні), AI — його бісектриса, бо I — центр вписаного кола в трикутник ABC. Отже, AI — медіана трикутника PAQ, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 1.18. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, I — центр його вписаного кола. Коло k дотикається внутрішнім чином описаного кола навколо трикутника ABC у точці T, а також його сторін AB і AC в точках P і Q відповідно. Пряма TI перетинає вдруге описане коло трикутника ABC у точці S. Доведіть, що $SB = SC$.*

(Відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, США, 1998 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати її, виходячи з нього (рис. 1.28).

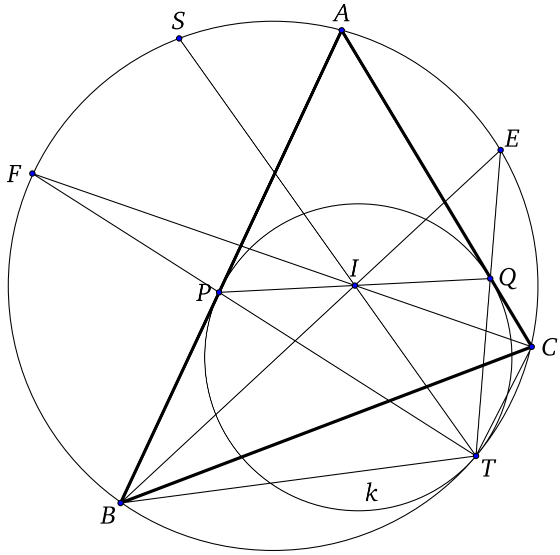


Рис. 1.28.

За попередньою задачею точка I — середина PQ. Далі, за теоремою 1.4 (лемою Архімеда) промінь TP проходить через середину F дуги AB описаного кола трикутника ABC, а промінь TQ проходить через середину E дуги CA цього кола. Оскільки I — точка перетину бісектрис трикутника ABC, то BE і CF перетинаються у точці I.

Нехай $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ — кути трикутника ABC, тоді $\angle PBI = \angle CBI = \dfrac{\beta}{2}$ і $\angle QCI = \angle BCI = \dfrac{\gamma}{2}$. За властивістю вписаних кутів маємо: $\angle CTE = \angle CBE = \dfrac{\beta}{2}$ і $\angle BTF = \angle BCF = \dfrac{\gamma}{2}$. За теоремою про дотичні, $AP = AQ$. Звідси слідує, що

$$\angle APQ = \angle AQP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Оскільки ці кути є зовнішніми для трикутників BPI і CQI, то $\angle BIP = \dfrac{\gamma}{2}$ і $\angle CIQ = \dfrac{\beta}{2}$.

Оскільки $\angle BTP = \dfrac{\gamma}{2} = \angle BIP$, то точки B, T, I, P — циклічні. Аналогічно, $\angle CTQ = \dfrac{\beta}{2} = \angle CIQ$, тобто точки C, T, I, Q також циклічні.

Таким чином,

$$\angle BTS = \angle BTI = \angle API = \angle AQI = \angle CTI = \angle CTS,$$

тобто $\angle BTS = \angle CTS$. А це означає, що $SB = SC$, що і треба було довести. □

Задача 1.19. *Розглянемо два кола k_1 і k_2, які дотикаються зовнішнім чином у точці T. Пряма лінія дотикається до кола k_2 у точці X і перетинає кола k_1 у двох точках A і B. Нехай S — друга точка перетину прямої XT з колом k_1. На дузі TS кола k_1, яка не містить точок A і B, довільно відмітили точку C. Із точки C до кола k_2 провели дотичну CY (Y — точка дотику),* *яка не перетинає відрізка ST. Нехай J — точка перетину прямих SC та XY. Доведіть, що:*

а) точки C, T, Y, J — циклічні;

б) точка J — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається сторони BC.

(Болгарія, 2005 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 1.29).

а) За теоремою про вписаний кут маємо:

$$\angle TYX = \frac{1}{2} \smile TX$$

і

$$\angle TBS = \frac{1}{2} \smile YS.$$

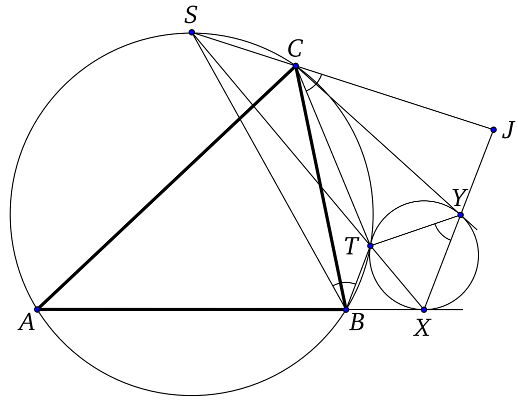


Рис. 1.29.

Оскільки кола k_1 і k_2 дотикаються зовнішнім чином у точці T, то пряма SX, яка проходить через точку T відтинає від цих кіл дуги, що мають однакову кутову міру, тобто $\smile TX = \smile TS$. Тому, $\angle TYX = \angle TBS$. Оскільки чотирикутник $TCSB$ — вписаний, то $\angle TBS = \angle TCJ$. Таким чином, $\angle TYX = \angle TCJ$, тобто чотирикутник $CTYJ$ — вписаний, що і треба було довести.

б) Оскільки J — точка перетину SC та XY, то за теоремою 1.7 (див. рис. 1.24, б) пряма XY проходить через центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається сторони BC. Далі, за лемою Архімеда, пряма XT ділить дугу $\smile BCA$ навпіл, тобто точка S — середина цієї дуги. А тому, пряма SC містить бісектрису зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C. Отже, I_A — центр зовнівписаного кола трикутника ABC з одного боку лежить на прямій SC, бо вона містить бісектрису зовнішнього кута при вершині C, а з другого боку лежить на прямій XY (за теоремою 1.7), тобто $J = I_A$, що і треба було довести. □

Задача 1.20. *Нехай ABC — трикутник, вписаний в коло k. На стороні BC відмічають точку D і розглядають два кола: коло k_1, яке дотикається відрізків AD, BD і внутрішнім чином кола k, та коло k_2, яке дотикається відрізків AD, CD і внутрішнім чином кола k. Доведіть, що кола k_1 і k_2 дотикаються тоді і тільки тоді, коли $\angle BAD = \angle CAD$.*

(Румунія, 1997 р.)

Розв'язання.

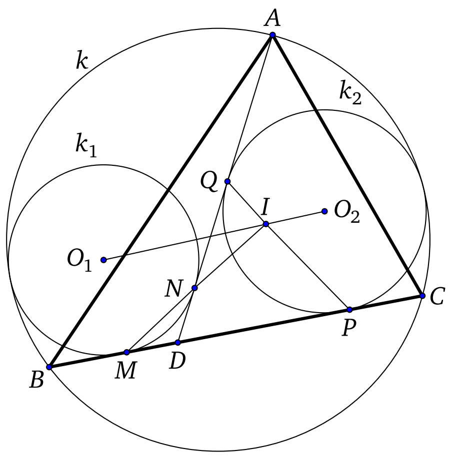


Рис. 1.30.

Нехай O_1 і O_2 — центри кіл k_1 і k_2 відповідно, I — центр вписаного кола трикутника ABC. Використовуючи результат задачі Віктора Тебо, одержуємо, що відрізок O_1O_2 проходить через точку I. (див. рис. 1.30).

Теорема 1.7 дає нам, що MN і PQ проходять через I. Тому, кола k_1 і k_2 будуть дотикатися тоді і тільки тоді, коли їх точки дотику N і Q до відрізка AD — спільної внутрішньої дотичної, співпадатимуть, тобто коли $I = N = Q$, коли AD проходить через I. А це означає, що AD — бісектриса трикутника ABC, тобто $\angle BAD = \angle CAD$, що і треба було довести. □

Задача 1.21. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, у якому $AB \neq AC$. Нехай AD — висота трикутника ABC, k — описане навколо нього коло. Нехай k_1 — коло, яке дотикається до відрізків AD, BD і кола k, а k_2 — коло, яке дотикається до відрізків AD, CD і кола k. Відомо, що внутрішня дотична кіл k_1 і k_2, яка відмінна від AD, перетинає сторону BC в точці M. Доведіть, що точка M буде серединою сторони BC тоді і тільки тоді, коли $AB + AC = 2BC$.*

(Відбір на ММО, Румунія, 2006 р.)

Розв'язання.

Нехай O_1, O_2 — центри кіл k_1, k_2, а r_1, r_2 — їх радіуси відповідно. Позначимо через P і Q точки дотику k_1 і k_2 з AD, через U і V точки дотику k_1 і k_2 з BC (рис. 1.31). Тоді за задачею Віктора Тебо прямі UP і VQ перетинаються в точці I — центрі вписаного кола трикутника ABC, яка лежить на відрізку O_1O_2 і ділить його у відношенні

$$O_1I : O_2I = \operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ}{2} = 1.$$

Нехай вписане коло трикутника ABC дотикається до сторони BC у точці T, а r — радіус цього кола. Тоді $O_1U \perp BC$, $IT \perp BC$ і $O_2V \perp BC$. Це означає, що $O_1U \parallel IT \parallel O_2V$, тобто O_1UVO_2 — прямокутна трапеція, а IT — її середня лінія. Крім того, O_1UDP і O_2VDQ — квадрати зі сторонами r_1 і r_2 відповідно.

Тоді,

$$UV = UD + DV = r_1 + r_2,$$

$$UT = TV = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

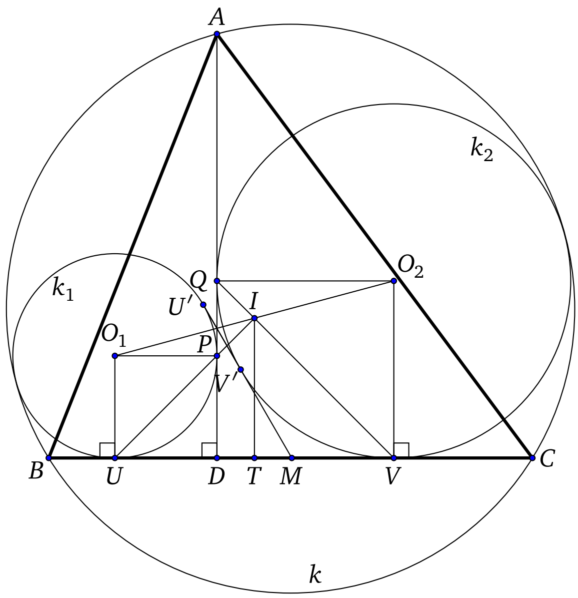


Рис. 1.31.

Нехай $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, причому $b > c$, тоді за теоремою про дотичні відстані матимемо, що

$$BT = p - b = \frac{a - b + c}{2}. \tag{1}$$

Крім того, $BD = c\cos\angle B$, і за теоремою косинусів, одержуємо, що

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Таким чином,

$$BT = BU + UT = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} - r_1 + \frac{r_1 + r_2}{2}. \tag{2}$$

З рівностей (1) і (2) одержуємо:

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} - r_1 + \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{a - b + c}{2}.$$

$$r_2 - r_1 = \frac{b^2 - c^2 - ab + ac}{a}. \tag{3}$$

Нехай друга внутрішня дотична, відмінна від AD, дотикається до кіл k_1 і k_2 у точках U' і V' відповідно. Тоді, $MU + MV = UV = r_1 + r_2$ і $MU - MV = MU' - MV' = U'V' = PQ = r_2 - r_1$. Звідки $MU = r_2$ і $MV = r_1$. Далі, точка M буде серединою сторони BC тоді і тільки тоді, коли $BM = \frac{a}{2}$, тобто коли $BD - UD + UM = \frac{a}{2}$. Це еквівалентно таким співвідношенням:

$$c\cos\angle B - r_1 + r_2 = \frac{a}{2},$$

$$r_2 - r_1 = \frac{a}{2} - c\cos\angle B,$$

$$r_2 - r_1 = \frac{a}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

$$r_2 - r_1 = \frac{b^2 - c^2}{2a}. \tag{4}$$

Із рівностей (3) і (4) випливає:

$$\frac{b^2 - c^2 - ab + ac}{a} = \frac{b^2 - c^2}{2a},$$

тобто

$$\frac{(b-c)(b+c-a)}{a} = \frac{(b-c)(b+c)}{2a}.$$

Оскільки $b > c$, то $b - c > 0$. Після скорочення, знаходимо, що $b + c = 2a$, що і треба було довести. $\square$

Розділ 2

Опорні задачі-методи олімпіадної геометрії

Цей розділ є продовженням відомостей про опорні задачі олімпіадної геометрії. Опорна задача-метод ілюструє деякий метод розв'язування геометричних олімпіадних задач, прийом або конструкцію, які часто зустрічаються. При цьому мова в основному буде йти про методи, які не потребують спеціальних теоретичних обґрунтувань. Таким чином, задача-метод обов'язково розглядатиметься разом з розв'язанням: тим розв'язанням, що пропонуємо ми. Це означає, що, якщо в процесі роботи над відповідною задачею ви розв'язали її інакше, розв'язання, запропоноване нами, має бути детально вивчено і відповідним чином осмислено.

2.1. Опорна задача-метод про симедіану трикутника

Нехай AM — медіана трикутника ABC, а пряма AN симетрична до прямої AM відносно бісектриси кута A цього трикутника (точка N лежить на стороні BC). При цьому $\angle BAM = \angle CAN$. Тоді відрізок AN називають *A-симедіаною* трикутника ABC. Іноді A-симедіаною називають промінь AN.

Серед багатьох олімпіадних геометричних задач, є такі, що містять вимогу: «Довести, що деякі два кути рівні між собою або для них виконується деяке співвідношення». Основна складність розв'язання таких задач полягає у вдалому виборі способу розв'язування. Пропонуємо один із них, який, на наш погляд, дозволяє зняти цю проблему. Суть його полягає у використанні наступних тверджень.

Лема 2.1. *Нехай AM довільна чевіана трикутника ABC (точка M лежить на прямій BC). Має місце співвідношення*

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB \cdot \sin\angle BAM}{AC \cdot \sin\angle CAM}$$

Доведення. Скористаємося теоремою синусів і умовою, що $\sin\angle AMB = \sin\angle AMC$, бо ці кути, в залежності розташування точки M на прямій BC, рівні або в сумі дають $180°$. З трикутників AMB та AMC за теоремою синусів знаходимо, що

$$BM = \frac{AB \cdot \sin\angle BAM}{\sin\angle AMB} \text{ і } CM = \frac{AC \cdot \sin\angle CAM}{\sin\angle AMC}.$$

Розділивши одержані рівності і врахувавши рівність $\sin\angle AMB = \sin\angle AMC$, одержимо співвідношення, яке потрібно було довести. Іноді лему 2.1 називають *основним співвідношенням чевіани*. □

Коли чевіана AM є бісектрисою трикутника ABC, тоді одержуємо відоме нам співвідношення

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}.$$

Лема 2.2 (про ізогональність променів всередині кута). *Нехай M і N — точки, які лежать всередині заданого кута $\angle BAC$. Промені AM і AN будуть ізогональними (тобто симетричними відносно бісектриси кута $\angle BAC$) тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення*

$$\frac{d(M;AB)}{d(M;AC)} = \frac{d(N;AC)}{d(N;AB)}.$$

Іншими словами,

$$\angle MAB = \angle NAC \Leftrightarrow \frac{d(M;AB)}{d(M;AC)} = \frac{d(N;AC)}{d(N;AB)}.$$

Доведення.

Нехай X та Y, P та Q — проекції точок M та N на прямі AB і AC відповідно. Тоді $\angle XMY = 180° - \angle BAC = \angle QNP$.

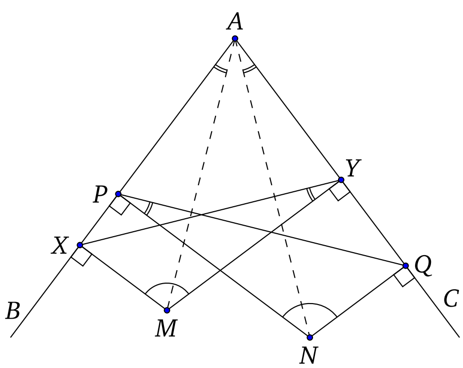


Рис. 2.1.

Далі одержуємо,

$$\angle XMY = \angle QNP \text{ і } \frac{MX}{MY} = \frac{NQ}{NP};$$

$$\Updownarrow$$

$$\triangle XMY \sim \triangle QNP;$$

$$\Updownarrow$$
$$\angle MYX = \angle NPQ;$$
$$\Updownarrow$$
$$\angle MAB = \angle NAC,$$

бо чотирикутники $AXMY$ і $AQNP$ — циклічні, що і треба було довести. □

Зауваження. Із цієї леми легко отримати такий критерій колінеарності точок всередині кута. Нехай M і N — точки, які лежать всередині заданого кута $\angle BAC$. Точки A, M, N будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли
$$\frac{d(M;AB)}{d(M;AC)} = \frac{d(N;AB)}{d(N;AC)}.$$

Лема 2.3. *Нехай прямі AM і AN симетричні відносно бісектриси кута A трикутника ABC (точки M і N лежать на прямій BC), в якому $BC = a$, $CA = b$ і $AB = c$. Має місце співвідношення*
$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{c^2}{b^2}.$$
У випадку, коли AM — медіана трикутника ABC, то для ***симедіани*** *трикутника виконується співвідношення*
$$\frac{BN}{CN} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Доведення. Оскільки AM і AN симетричні відносно бісектриси кута A трикутника ABC, то $\angle BAM = \angle CAN$ і $\angle BAN = \angle CAM$. За *основним співвідношенням чевіани* (лема 2.1) одержуємо:
$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB \cdot \sin\angle BAM}{AC \cdot \sin\angle CAM} \cdot \frac{AB \cdot \sin\angle BAN}{AC \cdot \sin\angle CAN} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2},$$
що і треба було довести. У випадку, коли AM — медіана трикутника, то $BM = CM$ і AN — його симедіана, а тому одержуємо, що
$$\frac{BN}{CN} = \frac{c^2}{b^2}.$$
□

Далі, застосувавши теорему Чеви (див. теорему 4.4 на сторінці 108), з цієї леми випливає такий наслідок: *симедіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці*. Цю точку називають **точкою Лемуана**.

Наступна лема вказує на конструкцію знаходження симедіани трикутника, а методи її доведення можуть бути використаними як методи розв'язування олімпіадних задач з геометрії.

Лема 2.4. *Нехай ABC — трикутник, вписаний в коло k. P — точка перетину дотичних до кола k у точках B і C. Тоді пряма AP містить A-симедіану трикутника ABC.*

Доведення. Наведемо три способи доведення цієї леми.

1-й спосіб. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї леми та способу її доведення (рис. 2.2).

Нехай пряма, яка симетрична прямій AP відносно бісектриси кута BAC перетинає сторону BC у точці M'. Тоді за теоремою синусів із трикутників ABM' і ACM' одержуємо:

$$BM' = \frac{AM' \cdot \sin\angle BAM'}{\sin\angle ABC},$$

$$CM' = \frac{AM' \cdot \sin\angle CAM'}{\sin\angle ACB}.$$

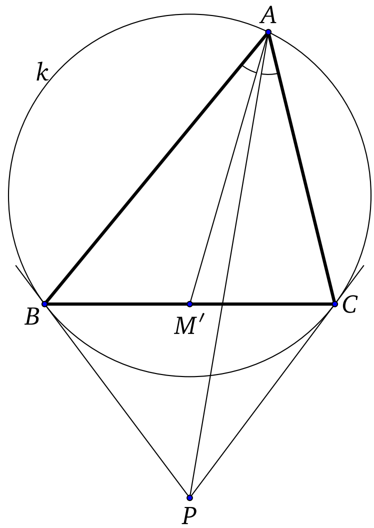


Рис. 2.2.

Розділивши одержані співвідношення, отримуємо:

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{\sin\angle BAM' \cdot \sin\angle ACB}{\sin\angle CAM' \cdot \sin\angle ABC}. \qquad (\star)$$

Враховуючи, що кут між дотичною і хордою, що проведена у точку дотику, вимірюється половиною кутової міри дуги кола, яка лежить всередині цього кута, то, з того, що PB — дотична, випливає, що $\angle ACB = 180^\circ - \angle ABP$, тобто $\sin\angle ACB = \sin\angle ABP$. Аналогічно, $\sin\angle ABC = \sin\angle ACP$. Тому, співвідношення $(\star)$ перепишеться так:

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{\sin\angle BAM' \cdot \sin\angle ABP}{\sin\angle CAM' \cdot \sin\angle ACP}.$$

Скориставшись побудовою точки M', одержуємо, що $\angle BAM' = \angle CAP$ і $\angle CAM' = \angle BAP$. Тому, останнє співвідношення перепишеться так:

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{\sin\angle CAP \cdot \sin\angle ABP}{\sin\angle BAP \cdot \sin\angle ACP}.$$

За теоремою синусів із трикутників ABP і ACP одержуємо:

$$\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle BAP} = \frac{AP}{BP} \quad \text{і} \quad \frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle CAP} = \frac{AP}{CP}.$$

Розділивши перше співвідношення на друге, одержимо:

$$\frac{\sin\angle CAP \cdot \sin\angle ABP}{\sin\angle BAP \cdot \sin\angle ACP} = \frac{AP \cdot CP}{AP \cdot BP} = \frac{CP}{BP}.$$

За теоремою про дотичні маємо: $BP = CP$. Таким чином, одержуємо:

$$\frac{BM'}{CM'} = \frac{\sin\angle CAP \cdot \sin\angle ABP}{\sin\angle BAP \cdot \sin\angle ACP} = \frac{CP}{BP} = 1,$$

тобто M' співпадає з серединою M сторони BC. Враховуючи побудову точки M', одержуємо, що AP містить A-симедіану трикутника ABC, що і треба було довести.

2-й спосіб. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї леми та способу її доведення (рис. 2.13).

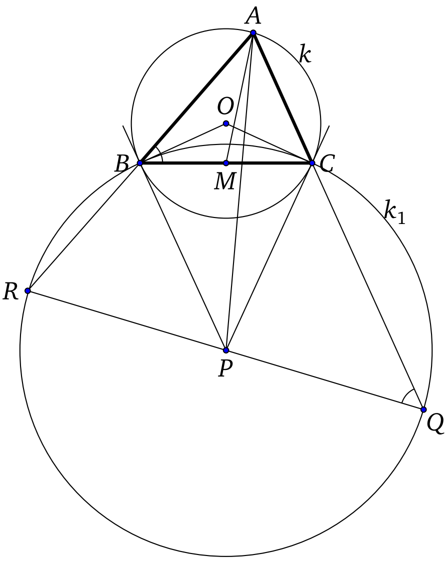


Рис. 2.3.

Нехай O — центр описаного кола k навколо трикутника ABC, а k_1 — коло з центром у точці P і радіусом $r = PB = PC$. Нехай прямі AB і AC перетинають коло k_1 у точках R і Q відповідно. Оскільки $\angle ABC = \angle AQR$, то трикутники ABC і AQR подібні (за двома кутами). Ідея доведення полягає в тому, що композиція симетрії відносно бісектриси кута A трикутника ABC і гомотетії з центром A та коефіцієнтом $\kappa = \dfrac{AB}{AQ}$ відображає трикутник QAR на трикутник ABC. Оскільки $\angle RBQ = \angle BQA + \angle BAC = \frac{1}{2}(\angle BPC + \angle BOC) = 90^\circ$, то QR — діаметр кола k_1 (тут ми скористалися тим, що BP і PC — дотичні до кола k, тобто $\angle PBO = 90^\circ$ і $\angle PCO = 90^\circ$). Таким чином, оскільки P — середина QR, то при вказаній композиції точка P, що є серединою QR, відображається у точку M — середину BC. Оскільки при симетрії та гомотетії величина кутів зберігається, то $\angle QAP = \angle BAM$, тобто пряма AP симетрична прямій AM відносно бісектриси кута A трикутника ABC. Тому AP містить A-симедіану трикутника ABC, що і треба було довести.

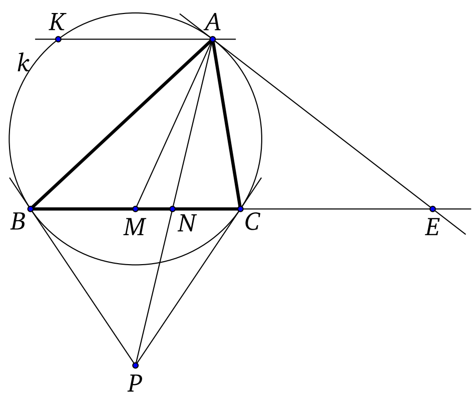


Рис. 2.4.

3-й спосіб. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї леми та способу її доведення (рис. 2.14).

Проведемо дотичну до кола k у точці A. Нехай ця дотична перетинає пряму BC у точці E, тоді точка E — полюс прямої AP, бо полярою точки P є пряма BC, а полярою точки P є пряма BC. Нехай AP перетинає BC у точці N. Тоді $(B,C;N,E) = -1$, бо четвірка точок B, N, C і E — гармонічна. Звідси випливає, що $(AB,AC;AN,AE) = -1$, тобто четвірка прямих AB, AN, AC і AE

буде гармонічною. Розглянемо образи цих чотирьох прямих при симетрії відносно бісектриси кута A трикутника ABC, які, як відомо, також будуть гармонічними. Легко перевірити, що при такій симетрії пряма AE відображається на пряму, яка проходить через точку A, паралельно до BC (нехай ця пряма перетинає вдруге коло k у точці K); пряма AB відображається на пряму AC, а пряма AC відображається на пряму AB. Нехай пряма AN відображається на пряму AM (точка M лежить на BC), тоді $(AC,AB;AM,AK) = (AB,AC;AN,AE) = -1$. З того, що $AK \parallel BC$ і $(AC,AB;AM,AK) = -1$, то точка M — середина BC, бо будь-яка пряма перетинає четвірку гармонічних прямих у чотирьох точках, що також гармонічні, тобто $(C,B;M,\infty) = -1$. Звідси й випливає, що AN — A-симедіана трикутника ABC, що і треба було довести. □

Із цієї леми одразу слідує справедливість такого твердження: *якщо вписане коло трикутника ABC дотикається його сторін BC, CA, AB у точках D, E, F відповідно, то прямі DA, EB і FC містять симедіани трикутника DEF.*

Лема 2.5. *Нехай AX — довільна чевіана трикутника ABC, а Y — довільна точка прямої AX $(Y \neq A)$. AX буде симедіаною трикутника ABC тоді і тільки тоді, коли виконується наступне співвідношення:*

$$\frac{d(Y,AB)}{d(Y,AC)} = \frac{AB}{AC}.$$

Тут через $d(Y,AB)$ і $d(Y,AC)$ позначено відстані від точки Y до прямих AB і AC відповідно.

Доведення. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї леми, і будемо доводити її, виходячи з нього (рис. 2.5).

Використовуючи співвідношення у прямокутному трикутнику, одержуємо:

$$\frac{d(Y,AB)}{d(Y,AC)} = \frac{AY \cdot \sin\angle YAB}{AY \cdot \sin\angle YAC} = \frac{\sin\angle XAB}{\sin\angle XAC}.$$

За лемою 2.1 одержуємо, що

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin\angle XAB}{\sin\angle XAC},$$

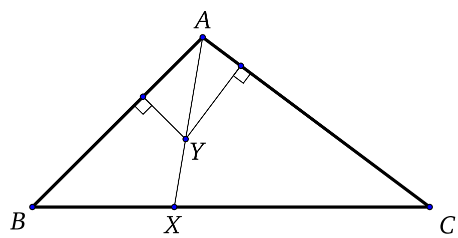


Рис. 2.5.

звідки випливає, що

$$\frac{\sin\angle XAB}{\sin\angle XAC} = \frac{BX}{CX} \cdot \frac{AC}{AB}.$$

Далі, за лемою 2.4, AX буде симедіаною трикутника ABC тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{BX}{CX} = \frac{AB^2}{AC^2},$$

тобто коли

$$\frac{\sin\angle XAB}{\sin\angle XAC} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC}.$$

Таким чином, AX буде симедіаною трикутника ABC тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{d(Y,AB)}{d(Y,AC)} = \frac{\sin\angle XAB}{\sin\angle XAC} = \frac{AB}{AC},$$

що і треба було довести. □

Останню лему можна довести, використовуючи лему про ізогональність променів всередині кута (лему 2.2). Пропонуємо читачам це як вправу.

Наступні леми вказують на конструкції знаходження симедіани трикутника, а методи їх доведення можуть бути використаними як методи розв'язування олімпіадних задач з геометрії.

Лема 2.6. *Нехай $ABEF$ і $ACST$ — квадрати, що побудовані на сторонах AB і AC трикутника ABC, які лежать зовні його. Якщо X — центр описаного кола трикутника AFT, то пряма AX містить симедіану AN трикутника ABC.*

Доведення. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї леми (рис. 2.6).

Оскільки X — центр описаного кола трикутника AFT, то X — точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків AF і AT. Звідси випливає, що

$$d(X,AB) = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}AB$$

і

$$d(X,AC) = \frac{1}{2}AT = \frac{1}{2}AC.$$

Тому,

$$\frac{d(X,AB)}{d(X,AC)} = \frac{AB}{AC}.$$

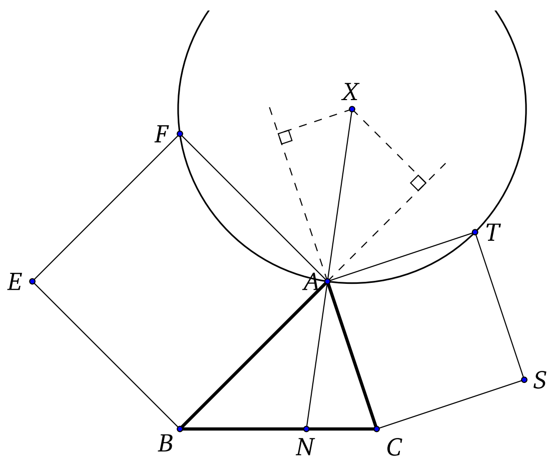


Рис. 2.6.

За лемою 2.5, ця рівність означає, що пряма AX містить симедіану AN трикутника ABC, що і треба було довести. □

Лема 2.7. *На сторонах AB і AC трикутника ABC відмітили точки E і F відповідно так, що відрізок EF паралельний до сторони BC. Нехай P — точка перетину відрізків BF і CE. Позначимо через Q другу точку перетину описаних кіл трикутників BEP і CFP. Тоді пряма AQ містить симедіану AN трикутника ABC.*

Доведення. Зробимо рисунок до цієї леми (рис. 2.7).

Скористаємося властивістю вертикальних кутів і властивістю вписаних кутів, що спираються на одну і ту ж саму дугу:

$$\angle EQB = \angle EPB = \angle FPC = \angle FQC,$$

$$\angle QBE = \angle QPC = \angle QFC.$$

Оскільки $\angle BQE = \angle FQC$ і $\angle QBE = \angle QFC$, то трикутники QBE та QFC подібні (за двома кутами). Тому

$$\frac{d(Q, BE)}{d(Q, FC)} = \frac{BE}{FC}.$$

А враховуючи, що $EF \parallel BC$, одержуємо:

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}.$$

Із цих двох співвідношень одержуємо, що

$$\frac{d(Q, BE)}{d(Q, FC)} = \frac{AB}{AC}.$$

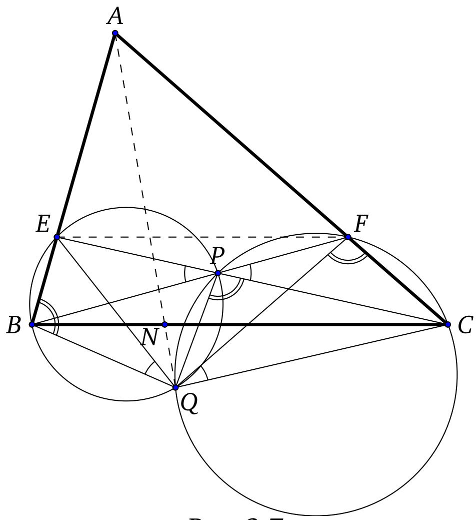


Рис. 2.7.

За лемою 2.5 одержане співвідношення означає, що пряма AQ містить симедіану AN трикутника ABC. □

Лема 2.8. *а) Нехай K — точка Лемуана трикутника ABC. Тоді точка K є точкою перетину медіан педального трикутника цієї точки відносно трикутника ABC.*

б) Нехай K — точка перетину медіан педального трикутника цієї точки відносно трикутника ABC. Тоді точка K — точка Лемуана трикутника ABC.

Доведення. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї леми, і будемо доводити її, виходячи з нього (рис. 2.8).

а) Нехай K — точка Лемуана трикутника ABC, тобто K — точка перетину симедіан трикутника ABC. Опустимо перпендикуляри KD, KE і KF на сторони BC, CA і AB відповідно, тоді трикутник DEF — педальний трикутник точки K відносно трикутника ABC. Нам треба довести, що K — точка перетину медіан трикутника DEF. Нехай пряма DK перетинає EF у точці X. Нам достатньо довести, що точка X — середина відрізка EF. Дійсно, за лемою 2.1, одержуємо:

$$\frac{XE}{XF} = \frac{KE}{KF} \cdot \frac{\sin\angle XKE}{\sin\angle XKF}.$$

Оскільки точка K належить A-симедіані трикутника ABC, то за лемою 2.5, одержуємо:

$$\frac{KE}{KF} = \frac{d(K, AC)}{d(K, AB)} = \frac{AC}{AB}.$$

Оскільки чотирикутник $CDKE$ — вписаний ($\angle KDC + \angle KEC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$), то $\angle XKE = \angle C$. Аналогічно доводиться, що $\angle XKF = \angle B$. Тому,

$$\frac{\sin\angle XKE}{\sin\angle XKF} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}.$$

За теоремою синусів, з трикутника ABC, знаходимо, що

$$\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B} = \frac{AB}{AC}.$$

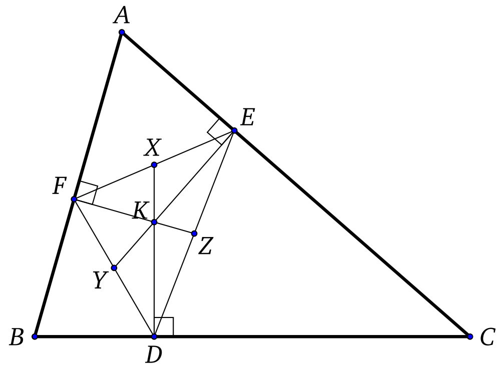


Рис. 2.8.

Таким чином,

$$\frac{XE}{XF} = \frac{KE}{KF}\cdot\frac{\sin\angle XKE}{\sin\angle XKF} = \frac{AC}{AB}\cdot\frac{AB}{AC} = 1,$$

тобто $XE = XF$, що і треба було довести.

б) Нехай K — точка перетину медіан AX, BY, CZ педального трикутника цієї точки відносно трикутника ABC, тобто трикутника DEF, де D, E, F — проекції точки K на сторони BC, CA, AB. Треба довести, що точка K — точка перетину симедіан трикутника ABC. Для цього потрібно довести, що точка K належить A-симедіані трикутника ABC. Дійсно,

$$\frac{d(K,AB)}{d(K,AC)} = \frac{KF}{KE}.$$

Оскільки

$$1 = \frac{XF}{XE} = \frac{KF}{KE}\cdot\frac{\sin\angle XKF}{\sin\angle XKE} = \frac{KF}{KE}\cdot\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C} = \frac{KF}{KE}\cdot\frac{AC}{AB}.$$

Звідки випливає, що

$$\frac{KF}{KE} = \frac{AB}{AC},$$

тобто

$$\frac{d(K,AB)}{d(K,AC)} = \frac{KF}{KE} = \frac{AB}{AC}.$$

Тому, за лемою 2.5, одержуємо, що K належить A-симедіані трикутника ABC, що і треба було довести. □

Лема 2.9. *а) Нехай точка P лежить на дузі BC описаного кола трикутника ABC так, що точки P і A розділені прямою BC і*

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Тоді пряма AP містить A-симедіану трикутника ABC.

б) Нехай A— симедіана трикутника ABC перетинає вдруге описане навколо нього коло у точці P. Виконується наступне співвідношення:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Доведення. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї леми та способу її доведення (рис. 2.9).

а) Нехай виконується співвідношення

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

Оскільки чотирикутник $ABPC$ — вписаний в коло, то $\angle ABP + \angle ACP = 180°$, тобто $\sin\angle ABP = \sin\angle ACP$. Таким чином,

$$\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{PB \cdot \sin\angle ABP}{PC \cdot \sin\angle ACP} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC},$$

тобто $\dfrac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \dfrac{AB}{AC}$. За лемою 2.5 із цього співвідношення випливає, що AP містить A-симедіану трикутника ABC.

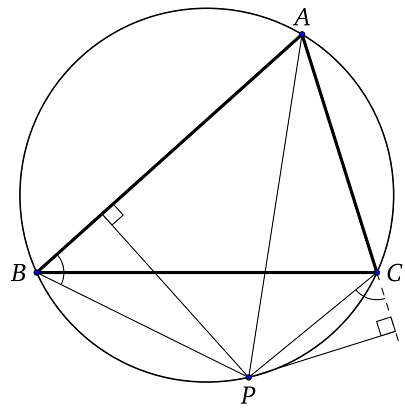


Рис. 2.9.

б) Нехай AP містить A-симедіану трикутника ABC. Тоді за лемою 2.5 виконується співвідношення

$$\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{AB}{AC}.$$

Крім того, використовуючи вище зазначені факти, одержуємо:

$$\frac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \frac{PB \cdot \sin\angle ABP}{PC \cdot \sin\angle ACP} = \frac{PB}{PC}.$$

Із цих двох співвідношень одержуємо, що

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC},$$

що і треба було довести. □

Відрізок XY, де точки X і Y лежать на променях AB і AC відповідно так, що $\angle AXY = \angle ACB$ і $\angle AYX = \angle ABC$, називають *антипаралельним* до відрізка BC.

Лема 2.10. *Симедіана AN трикутника ABC ділить навпіл довільний відрізок, антипаралельний до сторони BC.*

Доведення. Зробимо рисунок (рис. 2.10).

Оскільки $\angle AXY = \angle ACB$ і $\angle AYX = \angle ABC$, то навколо чотирикутника $BXYC$ можна описати коло. Нехай симедіана AN перетинає відрізок XY у точці M. Оскільки точка M лежить на симедіані AN трикутника ABC, то за лемою 2.5 виконується співвідношення:

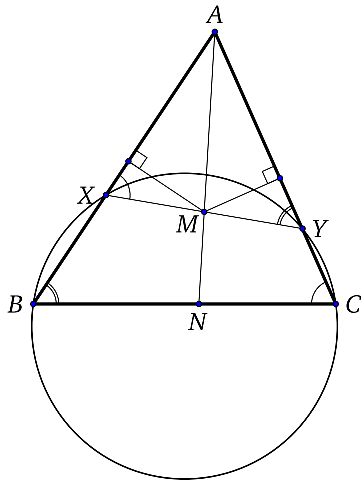


Рис. 2.10.

$$\frac{d\,(M, AB)}{d\,(M, AC)} = \frac{AB}{AC}.$$

Але тоді

$$\frac{XM}{YM} = \frac{d\,(M, AX) \cdot \sin \angle AYM}{d\,(M, AY) \cdot \sin \angle AXM} =$$
$$= \frac{d\,(M, AB)}{d\,(M, AC)} \cdot \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle ACB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1.$$

Тут при розрахунках ми скористалися теоремою синусів для трикутника ABC. Оскільки

$$\frac{XM}{YM} = 1,$$

то $XM = YM$, що і треба було довести. □

Лема 2.11. *Всередині кута BAC трикутника ABC відмітили точку Q так, що $\angle QAB = \angle QCA$ і $\angle QAC = \angle QBA$. Тоді обрана точка Q лежить на A-симедіані трикутника ABC.*

Доведення. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї леми (рис. 2.11).

Оскільки $\angle QAB = \angle QCA$ і $\angle QAC = \angle QBA$, то $\triangle\, QAB \sim \triangle\, QCA$ (за двома кутами). Нехай QM і QN — висоти цих трикутників. Оскільки відповідні елементи подібних трикутників пропорційні між собою, то $\dfrac{QM}{QN} = \dfrac{AB}{AC}$. Таким чином,

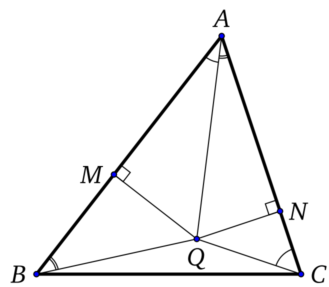


Рис. 2.11.

$$\frac{d\,(Q, AB)}{d\,(Q, AC)} = \frac{QM}{QN} = \frac{AB}{AC},$$

тобто

$$\frac{d\,(Q, AB)}{d\,(Q, AC)} = \frac{AB}{AC}.$$

Отже, за лемою 2.5, точка Q належить A-симедіані трикутника ABC, що і треба було довести. □

Олімпіадні задачі.

Задача 2.1. *Нехай ABC — рівнобедрений трикутник, в якому $AC = BC$, точка P лежить всередині його так, що $\angle PAB = \angle PBC$, а точка M — середина AB. Доведіть, що $\angle APM + \angle BPC = 180°$.*

(Польща, 2000 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї задачі і будемо розв'язувати її виходячи з нього (рис. 2.12).

Нехай CP перетинає основу AB у точці N. Для того, щоб довести рівність $\angle APM + \angle BPC = 180°$, потрібно довести таку рівність $\angle APM = \angle BPN$, тобто, що PN — симедіана трикутника APB. Для цього, опустимо перпендикуляри CX і CY із точки C на прямі AP і BP відповідно. Тоді

$$\frac{d(C, PA)}{d(C, PB)} = \frac{CX}{CY} = \frac{CA \cdot \sin\angle CAP}{CB \cdot \sin\angle CBP}.$$

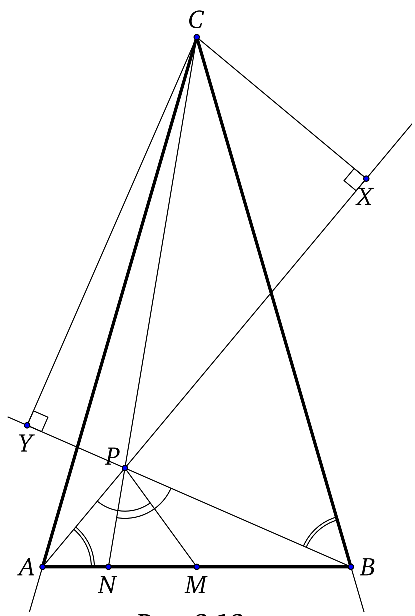


Рис. 2.12.

Оскільки трикутник ACB — рівнобедрений і $\angle PAB = \angle PBC$, то і $\angle PBA = \angle PAC$. Тому,

$$\frac{d(C, PA)}{d(C, PB)} = \frac{\sin\angle PBA}{\sin\angle PAB} = \frac{PA}{PB}.$$

В останній рівності ми використали теорему синусів для трикутника APB. Отже,

$$\frac{d(C, PA)}{d(C, PB)} = \frac{PA}{PB}.$$

Тоді, за лемою 2.5, одержуємо, що пряма CP містить P-симедіану трикутника APB, що і треба було довести. □

Задача 2.2. *Три різні точки A, B, C фіксуються на заданій прямій у вказаному порядку. Нехай k — коло, яке проходить через точки A і C, має центр, що не лежить на заданій прямій. Дотичні до кола k у точках A і C перетинаються в точці P. Нехай Q — точка перетину відрізка PB з колом k. Доведіть, що точка перетину бісектриси кута AQC з прямою AC не залежить від вибору кола k.*

(Рекомендована Грецією на Міжнародну математичну олімпіаду, 2003 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (див. рис. 2.13).

Нехай бісектриса кута AQC перетинає AC в точці K, тоді за властивістю бісектриси трикутника (див. наслідок з леми 2.1), одержуємо: $\dfrac{AK}{CK} = \dfrac{QA}{QC}$.

Далі, оскільки PA і PC — дотичні до кола k, то за лемою 2.4 відрізок QB — Q-симедіана трикутника AQC. Тоді за лемою 2.3 одержуємо:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{QA^2}{QC^2}.$$

З цих двох співвідношень випливає, що

$$\frac{AK}{KC} = \sqrt{\frac{AB}{BC}}.$$

Оскільки AB і BC — задані відрізки, то останнє співвідношення показує, що точка K ділить відрізок AC у фіксованому відношенні, тобто положення точки K на відрізку AC не залежить від вибору кола k, що і треба було довести. □

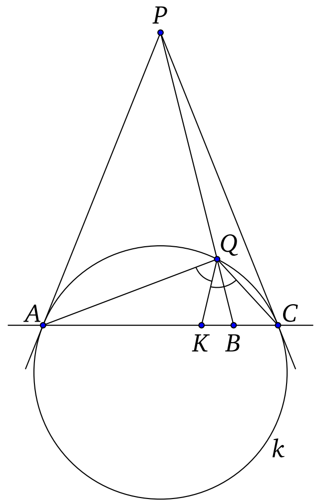


Рис. 2.13.

Задача 2.3. *На площині два кола k_1 і k_2 перетинаються у двох точках A і B. Спільна зовнішня дотична дотикається до k_1 у точці P, а до кола k_2 — у точці Q. Нехай S — точка перетину дотичних до описаного кола трикутника PAQ у точках P і Q, а C — точка, симетрична до точки B відносно прямої PQ. Доведіть, що точки C, A і S — колінеарні.*

(Відбір до Міжнародної математичної олімпіади, В'єтнам, 2001 р.)

Розв'язання. Нехай R — точка перетину прямих AB і PQ, k_3 — коло, описане навколо трикутника PAQ, а пряма SA перетинає вдруге коло k_3 у точці C' (див. рис. 2.14).

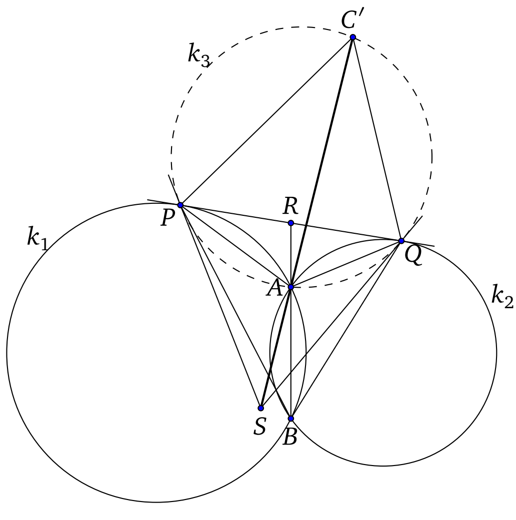


Рис. 2.14.

За теоремою про дотичну і січну одержуємо: $RP^2 = RA \cdot RB$ і $RQ^2 = RA \cdot RB$. Звідси випливає, що R — середина PQ. Далі, за лемою 2.4 SA містить A-симедіану трикутника PAQ. Тому $\angle QAC' = \angle PAR$. Таким чином, за властивістю вписаних кутів та кутів між дотичною і хордою, що проведена у точку дотику, одержуємо:

$$\angle QPC' = \angle QAC' = \angle PAR = \angle QPB,$$

тобто $\angle QPC' = \angle QPB$. Аналогічно доводиться, що $\angle PQC' = \angle PQB$. Таким чином, трикутники $PC'Q$ і PBQ симетричні відносно прямої PQ, тобто точка C' співпадає з точкою C, що і завершує доведення. □

Задача 2.4. *Трикутник ABC вписаний в коло k. Дотичні до кола k у точках B і C перетинаються в точці T. На промені BC відмітили точку S таку, що $AS \perp AT$. Точки B_1 і C_1 лежать на промені ST (C_1 між S і T) так, що $B_1T = BT = CT = C_1T$. Доведіть, що трикутники ABC і AB_1C_1 подібні.*

(Відбір до Міжнародної математичної олімпіади, США, 2007 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (див. рис. 2.15).

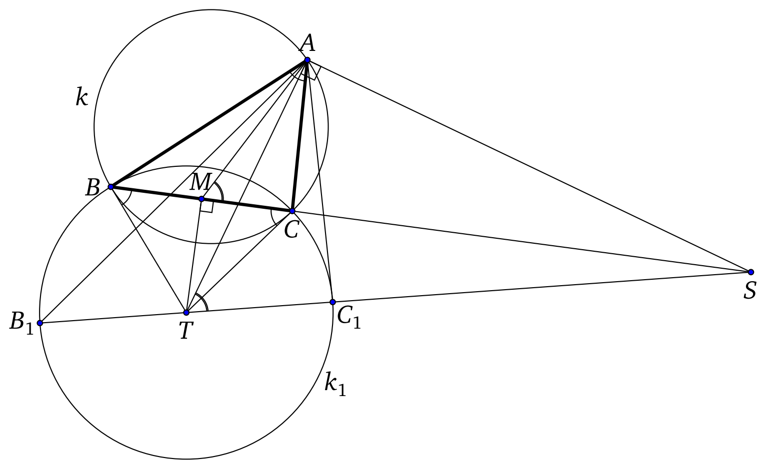


Рис. 2.15.

Проведемо коло k_1 з центром у точці T і радіусом $r = TB$. Оскільки $TB = TC$ як дотичні, що проведені до кола k, і за умовою задачі, одержуємо, що точки B_1, B, C, C_1 лежать на колі k_1. Нехай кути трикутника ABC відповідно рівні: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ і $\angle C = \gamma$, тоді $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Нехай M — середина BC, тоді $TM \perp BC$, бо трикутник BTC рівнобедрений. Далі, з того, що $\angle SAT = 90^\circ = \angle SMT$, то навколо чотирикутника $SAMT$ можна описати коло. Звідки випливає, що

$$\angle AMS = \angle ATS. \tag{1}$$

Оскільки TB і TC — дотичні до кола k, то за лемою 2.4 AT містить A-симедіану трикутника ABC. Враховуючи, що AM — медіана трикутника ABC, то за властивістю симедіани, одержуємо:

$$\angle BAT = \angle CAM. \tag{2}$$

За властивістю кута між дотичною і хордою, що проведена у точку дотику, одержуємо, що $\angle TBC = \angle TCB = \angle BAC = \alpha$. Крім того,

$$\angle ABT = \angle ABC + \angle CBT = \beta + \alpha = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - \angle ACB,$$

тобто $\sin\angle ABT = \sin\angle ACB$. За теоремою синусів з трикутників ABT і ACM, враховуючи (2), знаходимо:

$$\frac{BT}{TA} = \frac{\sin\angle BAT}{\sin\angle ABT} = \frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle ACM} = \frac{CM}{AM},$$

тобто $\dfrac{BT}{AT} = \dfrac{CM}{AM}$. Оскільки $BT = C_1T$, то $\dfrac{C_1T}{AT} = \dfrac{CM}{AM}$. Враховуючи це співвідношення і співвідношення (1), одержуємо, що трикутники ATC_1 і AMC подібні. З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle ACM = \angle AC_1T$, тобто $\angle ACB = \angle AC_1B_1$. Аналогічно доводиться подібність трикутників AMB і ATB_1. Звідки слідує, що $\angle ABM = \angle AB_1T$, тобто $\angle ABC = \angle AB_1C_1$. Оскільки $\angle ACB = \angle AC_1B_1$ і $\angle ABM = \angle AB_1T$, то трикутники ABC і AB_1C_1 подібні (за двома кутами), що і треба було довести. □

Задача 2.5. *Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, в якому $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Доведіть, що пряма, симетрична до прямої AC відносно бісектриси кута BCD, ділить діагональ BD навпіл.*

(Румунія, 1997 р.)

Розв'язання.

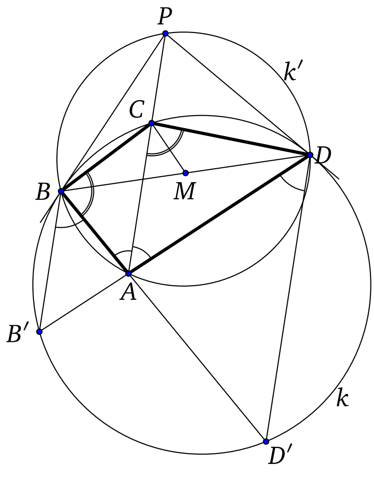


Рис. 2.16.

1-ий спосіб. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї задачі, і будемо розв'язувати, її виходячи з нього (див. рис. 2.16).

Опишемо коло k навколо трикутника BCD. Проведемо через точки B і D прямі, паралельні до прямої AC. Нехай ці прямі перетинають вдруге коло k у точках B' і D' відповідно. Нехай кути трикутника ABC дорівнюють: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Оскільки трикутники ABC і ACD подібні, то $\angle CAD = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, $\angle ADC = \gamma$. Оскільки внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих рівні, то $\angle ADD' = \angle DAC = \alpha$ і $\angle ABB' = \angle BAC = \alpha$. Оскільки відповідні кути при паралельних прямих рівні, то $\angle AB'B = \angle DAC = \alpha$ і $\angle AD'D = \angle BAC = \alpha$.

Нехай P — точка перетину дотичних до кола k у точках B і D. Тоді за теоремою про дотичні $PB = PD$. Крім того, за теоремою про кут між дотичною і хордою, що проведена у точку дотику, матимемо: $\angle PDB = \angle DB'B = \alpha$ і $\angle PBD = \angle BD'D = \alpha$. З рівнобедреного трикутника BPD знаходимо: $\angle BPD = 180^\circ - 2\alpha$. Таким чином, $\angle BAD + \angle BPD = 2\alpha + (180^\circ - 2\alpha) = 180^\circ$, тобто навколо чотирикутника $ABPD$ можна описати коло. Позначимо його через k'. Оскільки $PB = PD$, то будуть рівними дуги $\smile BP$ і $\smile PD$ кола k', а це означає, що $\angle BAP = \angle PAD$, тобто AP — бісектриса кута BAD. Крім того, AC також бісектриса кута BAD. А це означає, що точки A, C, P — колінеарні.

Таким чином, за лемою 2.4 містить C-симедіану трикутника BCD. Це означає, що прямі CA і CM, де M — середина BD, симетричні відносно бісектриси кута BCD, що і треба було довести.

2-ий спосіб. Щоб розв'язати цю задачу потрібно довести, що пряма CA містить C-симедіану трикутника BCD. Оскільки $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, то їх відповідні елементи пропорційні. Тому,

$$\frac{d(A, BC)}{d(A, CD)} = \frac{BC}{CD}.$$

Тоді, за лемою 2.5, пряма CA містить C-симедіану трикутника BCD, що і треба було довести. □

Задача 2.6. *В трикутнику ABC проведена бісектриса BD (точка D лежить на стороні AC). Пряма BD перетинає коло k, описане навколо трикутника ABC, у двох точках B і E. Коло ω, яке побудоване на відрізку DE як на діаметрі, перетинає коло k у двох точках E і F. Доведіть, що пряма, яка симетрична прямій BF відносно прямої BD, містить медіану трикутника ABC.*

(Всеросійська математична олімпіада, 2009 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до цієї задачі (див. рис. 2.17).

Для того, щоб довести твердження задачі, потрібно довести, що пряма BF містить B-симедіану трикутника ABC.

Оскільки BD — бісектриса кута ABC, вона перетинає дугу AC кола k в її середині. Нехай коло ω перетинає сторону AC у двох точках D і M. Так як DE — діаметр кола ω, то $\angle DME = 90^\circ$. Враховуючи, що E — середина дуги AFC кола k і $EM \perp AC$, то M — середина AC. Далі, використовуючи властивості вписаних кутів, одержуємо:

$$\angle ABF = \angle ACF,$$
$$\angle FAB = 180^\circ - \angle FCB = 180^\circ - \angle FEB =$$
$$= 180^\circ - \angle FED = 180^\circ - \angle FMD = \angle FMC,$$

тобто $\angle FAB = \angle FMC$. Тому, $\triangle FAB \sim \triangle FMC$ (за двома кутами). Аналогічно доводиться, що $\triangle FBC \sim \triangle FAM$. Відомо, що відповідні елементи подібних трикутників пропорційні, тому

$$\frac{d(F, AB)}{d(F, MC)} = \frac{AB}{MC} \text{ і } \frac{d(F, BC)}{d(F, AM)} = \frac{BC}{AM}.$$

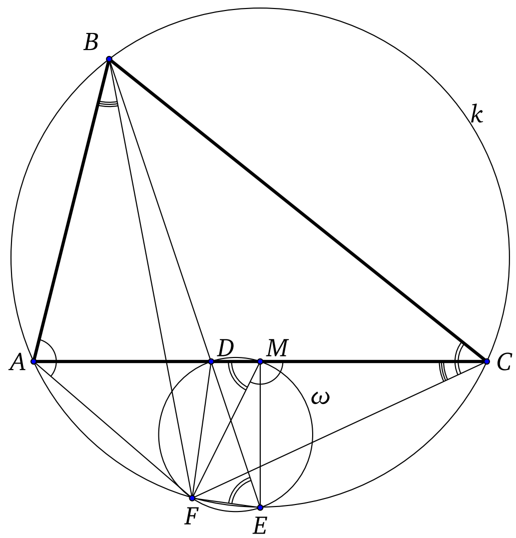


Рис. 2.17.

Оскільки $d(F, MC) = d(F, AM)$ і $MC = AM$, то

$$\frac{d(F,AB)}{d(F,MC)} : \frac{d(F,BC)}{d(F,AM)} = \frac{AB}{MC} : \frac{BC}{AM},$$

тобто $\dfrac{d(F,AB)}{d(F,BC)} = \dfrac{AB}{BC}$. Тоді за лемою 2.5, одержуємо, що пряма BF містить B-симедіану трикутника ABC, що і треба було довести. □

Задача 2.7. *Нехай ABC — трикутник, у якого G — точка перетину медіан. Нехай P — рухома точка на відрізку BC. Точки Q і R лежать на сторонах AC і AB відповідно такі, що $PQ \parallel AB$ і $PR \parallel AC$. Доведіть, що, коли P рухається вздовж відрізка BC, то описане коло трикутника AQR проходить через фіксовану точку X таку, що $\angle BAG = \angle CAX$.*

(Відбір до Міжнародної математичної олімпіади, США, 2008 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 2.18).

Нехай X — така точка всередині трикутника ABC, що $\angle ABX = \angle CAX$ і $\angle ACX = \angle BAX$. Потім ми покажемо, що така точка існує і вона єдина. А зараз ми покажемо, що описане коло трикутника AQR проходить через точку X. Дійсно, з умов $\angle ABX = \angle CAX$ і $\angle ACX = \angle BAX$ випливає, що $\Delta AXB \sim \Delta CXA$ (за двома кутами). Крім того, оскільки $PQ \parallel AB$ і $PR \parallel AC$, то за узагальненою теоремою Фалеса матимемо:

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CP}{PB} = \frac{AR}{RB}.$$

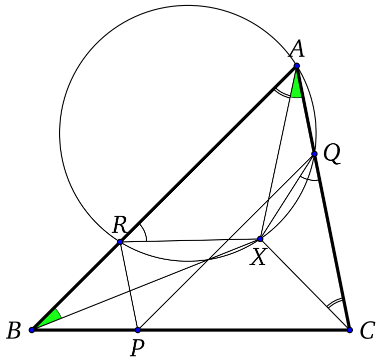


Рис. 2.18.

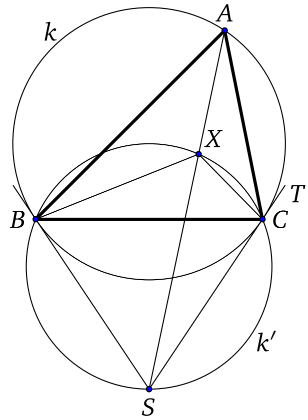


Рис. 2.19.

Звідси випливає, що

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{AR}{RB}.$$

Враховуючи цю умову і подібність трикутників AXB і CXA, приходимо до висновку, що $\angle ARX = \angle CQX$. З рівності цих кутів випливає циклічність точок A, Q, X і R, тобто, що описане коло трикутника QAR проходить через фіксовану точку X. Залишилося довести існування такої фіксованої точки X.

Розглянемо описане коло k навколо заданого трикутника ABC (рис. 2.19). Проведемо до кола k дотичні в точках B і C. Нехай S — точка перетину цих дотичних. Нехай k' — описане коло трикутника BSC. Доведемо, що шуканою точкою X буде точка перетину відрізка AS з колом k'.

Нехай $\angle ABX = \varphi$, а $\angle ABC = \beta$, тоді $\angle XBC = \beta - \varphi$. За властивістю вписаних кутів одержуємо:

$$\angle CSX = \angle CBX = \beta - \varphi,$$

тобто $\angle CSA = \beta - \varphi$, а за теоремою про кут між дотичною і хордою, що проведена у точку дотику, $\angle ACT = \angle ABC = \beta$. З трикутника ACS за теоремою про зовнішній кут трикутника, матимемо:

$$\angle CAS = \beta - (\beta - \varphi) = \varphi,$$

тобто $\angle ABX = \angle CAX$. Аналогічно доводиться, що $\angle ACX = \angle BAX$, тобто існування і єдність точки X доведено.

За лемою 2.4 матимемо, що промінь AX містить A-симедіану AN трикутника ABC. Нехай M — точка перетину AG і BC. Оскільки G — точка перетину медіан трикутника ABC, то M — середина BC, тобто AM — медіана трикутника ABC. За означенням симедіани трикутника одержуємо, що

$$\angle BAG = \angle BAM = \angle CAN = \angle CAX,$$

тобто $\angle BAG = \angle CAX$, що і треба було довести. □

2.2. Опорна задача-метод про центр спіральної подібності

Спіральною подібністю з центром O (або *поворотною гомотетією*) називають композицію гомотетії і повороту, що мають спільний центр. Порядок, в якому здійснюється композиція, є не суттєвим, бо $\mathbb{R}_O^{\varphi} \circ \mathbb{H}_O^{k} = \mathbb{H}_O^{k} \circ \mathbb{R}_O^{\varphi}$. Коефіцієнт спіральної подібності можна вважати додатним, бо $\mathbb{R}_O^{180^\circ} \circ \mathbb{H}_O^{k} = \mathbb{H}_O^{-k}$, а кут повороту відкладатиметься за рухом годинникової стрілки (див. рисунок 2.20).

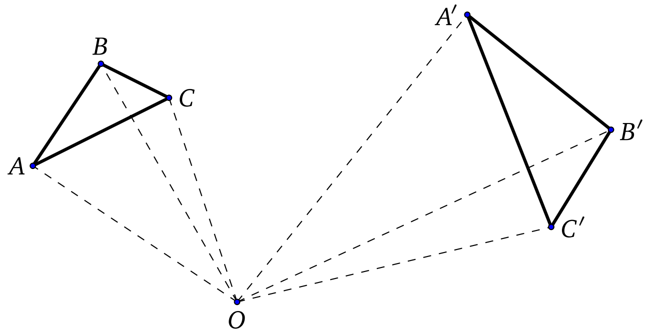


Рис. 2.20.

Лема 2.12. *Нехай P — точка перетину відрізків AB і A_1B_1. Якщо точки A, B, A_1, B_1 і P — різні, то друга точка перетину описаних кіл трикутників PAA_1 і PBB_1 є центром спіральної подібності, яка відображає точку A в точку A_1, а точку B в точку B_1, причому така спіральна подібність єдина.*

Доведення. Нехай O — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок AB у відрізок A_1B_1 (див. рис. 2.21, а).

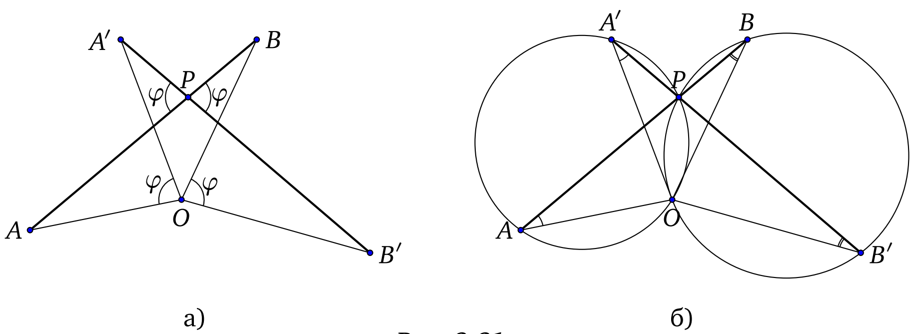


Рис. 2.21.

Тоді, якщо φ — кут повороту цієї спіральної подібності, то $\angle AOA_1 = \varphi$, $\angle BOB_1 = \varphi$ і $\angle(AB, A_1B_1) = \varphi$, тобто $\angle APA_1 = \angle BPB_1 = \varphi$. З того, що $\angle AOA_1 = \angle APA_1$ випливає, що чотирикутник $AOPA_1$ — вписаний, а з того, що $\angle BOB_1 = \angle BPB_1$ випливає, що чотирикутник $BPOB_1$ — вписаний, тобто точка O — це друга точка перетину описаних кіл трикутників PAA_1 і PBB_1.

Навпаки, нехай O — друга точка перетину описаних кіл трикутників PAA_1 і PBB_1 (див. рис. 2.21, б).

Тоді $\angle OAP = \angle OA_1P$ (як вписані, що спираються на одну і ту ж саму дугу) і, аналогічно, $\angle OBP = \angle OB_1P$. Тому $\angle OAB = \angle OA_1B_1$ і $\angle OBA = \angle OB_1A_1$, а це означає, що $\Delta OBP \sim \Delta OA_1B_1$, тобто O — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок AB у відрізок A_1B_1, що і завершує доведення леми. □

Лема 2.13. *Центром спіральної подібності, яка відображає відрізок AB у відрізок BC, буде точка перетину кола, що проходить через точку A і дотикається прямої BC у точці B, і кола, що проходить через точку C і дотикається прямої AB у точці B.*

Доведення.

Нехай O — друга точка перетину вказаних кіл (див. рис. 2.22).

За теоремою про кут між дотичною і хордою, одержуємо:

$$\angle OAB = \angle OBC \text{ і } \angle OBA = \angle OCB.$$

Це означає, що $\Delta AOB \sim \Delta BOC$, тобто O — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок AB у відрізок BC, що і завершує доведення леми. □

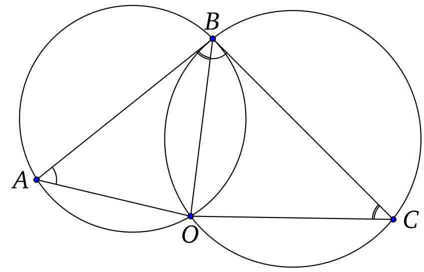


Рис. 2.22.

Лема 2.14. *Центр спіральної подібності, яка відображає відрізок AB у відрізок A_1B_1 співпадає з центром спіральної подібності, яка відображає відрізок AA_1 у відрізок BB_1.*

Доведення. Нехай P — точка перетину відрізків AB і A_1B_1. Позначимо через O — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок AB у відрізок A_1B_1, тоді за лемою 2.12 точка O — друга точка перетину описаних кіл трикутників PAA_1 і PBB_1 (див. рис. 2.23).

Тоді $\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$, тобто $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ і $OA\colon OA_1 = OB\colon OB_1$. Тому $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ і $OA\colon OB = OA_1\colon OB_1$. А це означає, що $\Delta OAA_1 \sim \Delta OBB_1$, тобто точка O є центром спіральної подібності, яка відображає відрізок AA_1 у відрізок BB_1. Випадок, коли відрізки AB і A_1B_1 не перетинаються, доводиться аналогічно, що і завершує доведення леми. □

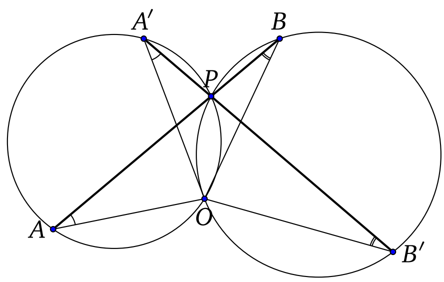


Рис. 2.23.

Олімпіадні задачі.

Задача 2.8. *Нехай $ABCDE$ опуклий п'ятикутник, в якому $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ і $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$. Діагоналі BD і CE перетинаються у точці P. Доведіть, що пряма AP — ділить відрізок CD навпіл.*

(Рекомендована США для Міжнародної математичної олімпіади, 2006 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї задачі (рис. 2.24).

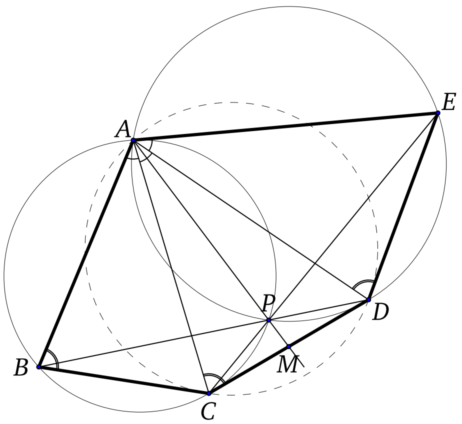


Рис. 2.24.

Так як $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ і $\angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$, то $\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta ADE$ (за двома кутами). Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, тоді точка A — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок BC у відрізок CD. За лемою 2.13, коло, описане навколо трикутника ABC, дотикається до CD у точці C, а коло, описане навколо трикутника ACD, дотикається до BC у точці C. Аналогічно доводиться, що A — центр спіральної подібності (тієї ж самої), яка відображає відрізок CD у відрізок DE. За лемою 2.13 коло, описане навколо трикутника ACD, дотикається до DE у точці D, а коло, описане навколо трикутника ADE, дотикається до CD у точці D.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, то A — центр спіральної подібності, яка відображає BC у відрізок DE. За лемою 2.14 точка A буде центром спіральної подібності, яка відображає відрізок AD у відрізок CE, а за лемою 2.12, їх точка перетину P буде другою точкою перетину описаних кіл трикутників ABC і ADE. Причому, CD — спільна зовнішня дотична цих кіл.

Нехай M — точка перетину AP і CD, тоді за теоремою про дотичну і січну, матимемо: $MC^2 = MP \cdot MA$ і $MD^2 = MP \cdot MA$. Звідки слідує, що $MC^2 = MD^2$, тобто $MC = MD$, що і треба було довести. □

Задача 2.9. *Опуклий чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло k з центром O. Його діагоналі AC і BD перетинаються в точці P. Кола k_1 і k_2, описані навколо трикутників ABP і CDP, перетинаються у двох різних точках P і Q, які не співпадають з точкою O. Доведіть, що $\angle OQP = 90°$.*

(Китай, 1992 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (див. рис. 2.25). Нехай O_1 і O_2 — центри кіл, описаних навколо трикутників ABP і CDP відповідно.

Оскільки лінія центрів двох кіл перпендикулярна до радикальної осі цих кіл, то $OO_1 \perp AB$, $OO_2 \perp CD$ і $O_1O_2 \perp PQ$.

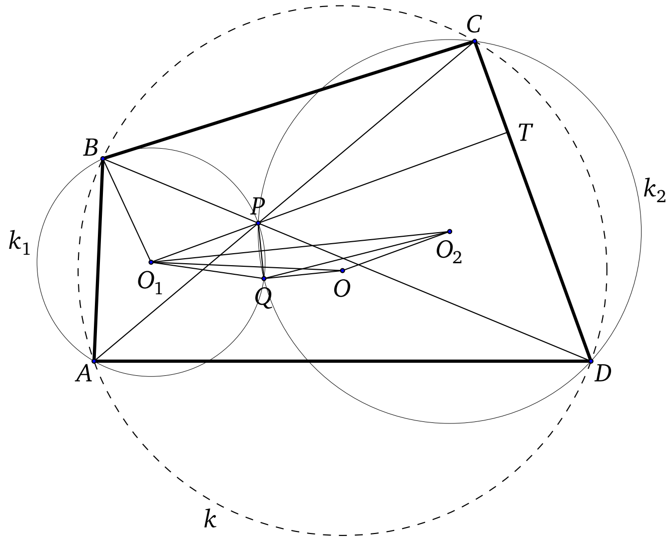


Рис. 2.25.

За лемою 2.12 точка Q — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок AB у відрізок CD. Оскільки точка Q при цьому перетворенні залишається на місці, то це перетворення відображає коло k_1 на коло k_2, тобто O_1 на точку O_2. А це означає, що $\angle O_1QO_2 = \varphi$, де φ — кут повороту. Оскільки при цьому відрізок AB відображається у відрізок CD, то φ — кут між прямими AB і CD, а із перпендикулярності $OO_1 \perp AB$ і $OO_2 \perp CD$ випливає, що $\angle O_1OO_2 = \varphi$. Дійсно, нехай S — точка перетину прямих AB і CD, тоді з того, що φ — кут повороту випливає, що $\angle ASD = 180^\circ - \varphi$, а із перпендикулярності $OO_1 \perp AB$ і $OO_2 \perp CD$ випливає, що $\angle O_1OO_2 = \varphi$.

Таким чином, $\angle O_1QO_2 = \angle O_1OO_2$, а це означає циклічність точок O_1, Q, O і O_2, тобто чотирикутник O_1QOO_2 — вписаний. Нехай T — точка перетину прямих O_1P і CD, а $\angle BAC = \alpha$. Оскільки кути BAC і BDC — вписані в коло k, то $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$, а $\angle BO_1P = 2\alpha$ (як центральний кут в колі k_1). З рівнобедреності трикутника BO_1P випливає, що $O_1PB = 90^\circ - \alpha$, а з вертикальності кутів O_1PB і TPD випливає, що $\angle TPB = 90^\circ - \alpha$. Тому з трикутника PTD знаходимо, що $\angle PTD = 90^\circ$, тобто $O_1P \parallel OO_2$. Аналогічно доводиться, що $Q_2P \parallel O_1O$. Тому O_1OO_2P — паралелограм, звідки слідує, що $QO_1 = O_1P = OO_2$. Так як чотирикутник O_1QOO_2 — вписаний і $QO_1 = OO_2$, то цей чотирикутник — трапеція, бо $OQ \parallel O_1O_2$ (рівні хорди стягують рівні дуги). Оскільки $OQ \parallel O_1O_2$ і $O_1O_2 \perp PQ$, то $OQ \perp PQ$, тобто $\angle OQP = 90^\circ$, що і треба було довести. □

Задача 2.10. *Нехай P — точка перетину діагоналей AC і BD опуклого чотирикутника $ABCD$, O_1 і O_2 — центри описаних кіл трикутників APD і BCP відповідно. Позначимо через M, N і O — середини відрізків AC, BD і O_1O_2 відповідно. Доведіть, що O — центр описаного кола трикутника MPN.*

(Відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, Корея, 2003 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові цієї задачі (рис. 2.26).

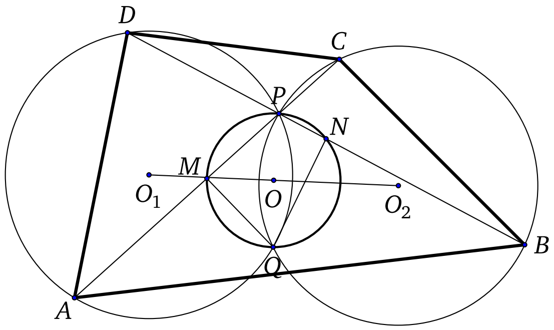


Рис. 2.26.

Нехай Q — друга точка перетину описаних кіл трикутників APD і BPC. Тоді, за лемами 2.12 і 2.14 точка Q є центром спіральної подібності, яка відображає відрізок AD у відрізок CD. Оскільки при цьому точка Q відображається сама в себе, то ця спіральна подібність відображає коло (O_1), яке описане навколо трикутника AQD, у коло (O_2), яке описане навколо трикутника CQB, тобто точки A, D, Q і O_1 цією спіральною подібністю відображаються у точки C, B, Q і O_2 відповідно. Це означає, що трикутники AQC, DBQ і O_1QO_2 — подібні. Оскільки N, M і O — середини AC, DB і O_1O_2, то з подібності вказаних трикутників випливає, що $\angle QMC = \angle QNB = \angle QOO_2$, тобто $\angle QMP = \angle QNP = \angle QOO_2$. Так як $\angle QMP = \angle QNP$, то це означає, що точки Q, M, N, P — циклічні. Оскільки O_1O_2 — серединний перпендикуляр до відрізка PQ, то точка O, яка є серединою O_1O_2 також лежить на O_1O_2 і рівновіддалена від кінців відрізка PQ. Так як серединний перпендикуляр до відрізка є віссю симетрії цього відрізка, то $\angle QOO_2 = \angle POO_2$. Отже,

$$\angle QMP = \angle QNP = \frac{1}{2}\angle QOP,$$

тобто O — центр описаного кола трикутника MPN, що і потрібно було довести. □

Задача 2.11. *Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, у якому сторони BC і AD рівні і не паралельні. Точки E і F — внутрішні точки сторін BC і AD. Вони рухаються по цих сторонах так, що $BE = DF$. Нехай P — точка перетину діагоналей AC і BD, Q — точка перетину BD і EF, а R — точка перетину AC і EF. Доведіть, що усі описані кола трикутників PQR проходять через фіксовану точку в площині чотирикутника, відмінну від точки P.*

(Міжнародна математична олімпіада, 2005 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 2.27).

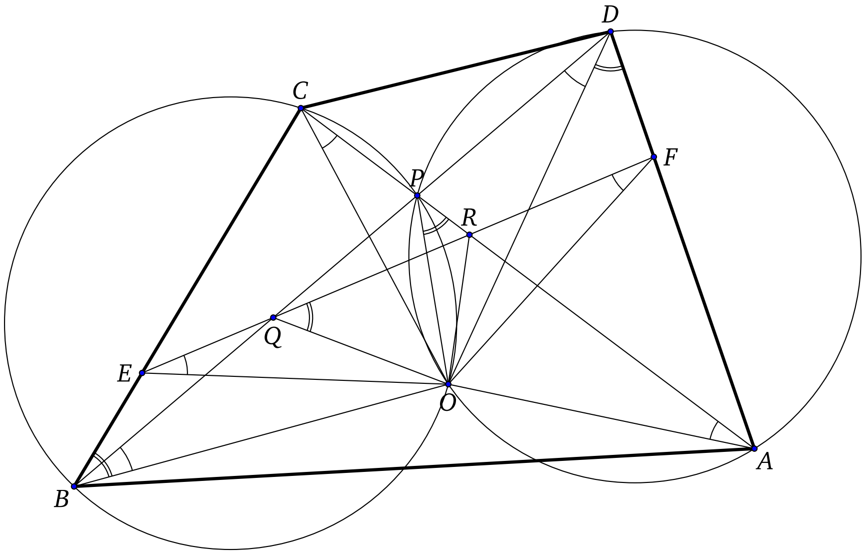


Рис. 2.27.

Нехай O — друга точка перетину описаних кіл трикутників PBC і PDA, тоді за лемами 2.12 і 2.14 точка O — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок BC у відрізок DA відповідно, тобто точку B відображає в точку D, а точку C — у точку A. Коефіцієнт подібності k цього перетворення дорівнює: $k = \dfrac{DA}{BC} = 1$. Це означає, що розглянута спіральна подібність є лише поворотом з центром O і кутом повороту φ. Оскільки відрізок BC відображається у відрізок DA, то $\angle BOD = \angle COA = \varphi$. Так як $BE = DF$, то це перетворення відображає точку E у точку F. При цьому, $\angle EOF = \varphi$. Крім того, $OB = OD$, $OC = OA$ і $OE = OF$ — як радіуси повороту. Це означає, що рівнобедрені трикутники BOD, COA і EOF — подібні, бо у них кути при вершині рівні куту повороту. Звідси випливає, що кути при їх основах рівні і дорівнюють $90° - \frac{\varphi}{2}$. Тому, з того, що $\angle OBQ = \angle OEQ = 90° - \frac{\varphi}{2}$, то чотирикутник $BEQO$ — вписаний. Звідси випливає, що $\angle OQR = \angle OBC = \beta$. Оскільки при нашому повороті трикутник OBC відображається у трикутник ODA, то ці трикутники рівні, а тому $\angle ODA = \angle OBC = \beta$. За властивістю вписаних кутів, одержуємо: $\angle OPR = \angle OPA = \angle ODA = \beta$. Тому $\angle OQR = \angle OPR$, тобто чотирикутник $PQOR$ — вписаний, а це означає, що описане коло трикутника PQR проходить через фіксовану точку O — точку перетину описаних кіл трикутників PBC і PDA, відмінну від точки P, що і треба було довести. □

Задача 2.12. *Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, а E і F — точки на його сторонах AD і BC розташовані так, що $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Відомо, що промінь FE*

перетинається з променем BA у точці S, а з променем CD — у точці T. Доведіть, що описані кола трикутників SAE, SBF, TCF і TDE перетинаються в одній точці.

(США, 2006 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 2.28).

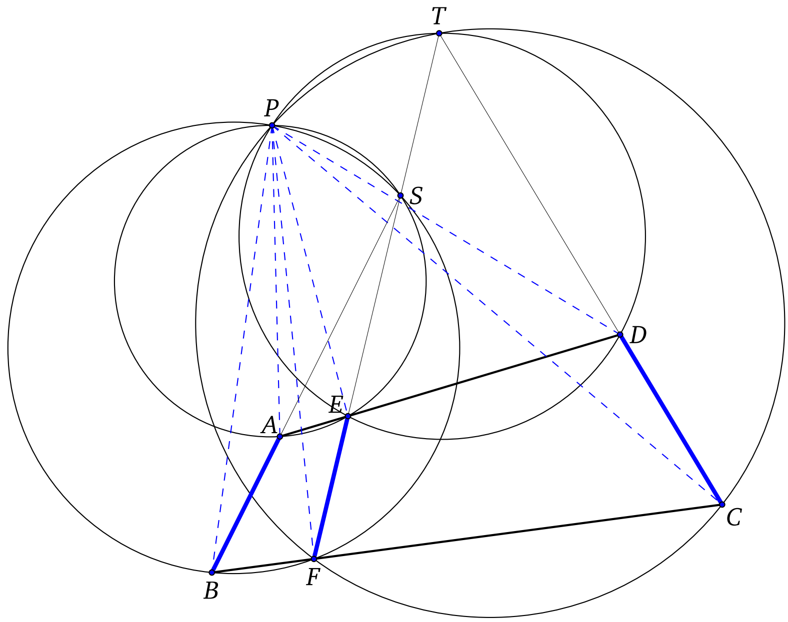


Рис. 2.28.

Нехай P — друга точка перетину описаних кіл трикутників TCF і TDE. Тоді за лемами 2.12 і 2.14 точка P — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок CD у відрізок FE, тобто точку C відображає у точку F, а точку D — у точку E. Тому $\Delta PDC \sim \Delta PEF$. Звідси випливає, що

$$\angle CPD = \angle FPE \quad \text{і} \quad \frac{PC}{PF} = \frac{PD}{PE}.$$

А тому

$$\angle FPC = \angle FPE + \angle EPC = \angle CPD + \angle EPC = EPD$$

і

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PF}{PE},$$

тобто $\Delta PCF \sim \Delta PDE$ (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). Ця подібність означає, що точка P — центр спіральної подібності, яка відображає відрізок CF у відрізок DE. З того, що $\dfrac{BF}{FC} = \dfrac{AE}{ED}$ і точки A і B є продовженнями сторін DE і CF подібних трикутників PDE і PCF випливає, що ця спіральна подібність відображає відрізок CB у відрізок DA, тобто

$\Delta PCB \sim \Delta PDA$. Звідси випливає, що $\angle CPB = \angle DPA$ і $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{PB}{PA}$. А тому

$$\angle BPA = \angle BPC - \angle APC = \angle APD - \angle APC = \angle CPD$$

і

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC},$$

тобто $\Delta PAB \sim \Delta PDC$ (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). Оскільки $\Delta PAB \sim \Delta PDC$ і $\Delta PDC \sim \Delta PEF$, то $\Delta PAB \sim \Delta PEF$. Це означає, що існує спіральна подібність з центром у точці P, яка відрізок AB відображає у відрізок EF, тобто описані кола трикутників PAE і PBF вдруге перетинаються у точці перетину прямих AB і EF, тобто у точці S (див. доведення леми 2.12).

Таким чином, описані кола трикутників SAE, SBF, TCF і TDE перетинаються у точці P, що і треба було довести. $\square$

Розділ 3

Планіметричні задачі на обчислення

У цьому розділі в систематичному вигляді викладено основний теоретичний матеріал, необхідний для розв'язання олімпіадних задач на обчислення. Він дозволяє оригінально розв'язувати олімпіадні планіметричні задачі підвищеної складності.

3.1. Вимірювання кутів, пов'язаних з колом

Згадаємо, що з колом пов'язані центральні і вписані в нього кути. Центральний кут вимірюється відповідною кутовою мірою дуги кола, на яку він спирається, а вписаний — половиною відповідної кутової міри дуги кола, яка відтинається на колі сторонами кута і розташована всередині вписаного кута. Розглянемо ще три випадки взаємного розташування кута та кола.

Лема 3.1 (Про кут з вершиною всередині кола). *Кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою двох дуг цього кола, одна з яких розміщена між його сторонами, а інша — між їх продовженнями.*

Доведення.

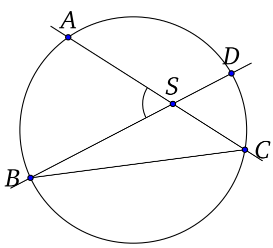


Рис. 3.1.

Нехай вершина S кута ASB лежить всередині кола, а його сторони перетинають коло в точках A і B (рис. 3.1).

Нехай промені, доповняльні до променів SA і SB, перетинають коло в точках C і D. Знайдемо залежність між градусною мірою кута ASB і кутовими мірами дуг AB і CD. Кут ASB є зовнішнім кутом трикутника SBC. За теоремою про зовнішній кут трикутника $\angle ASB = \angle ACB + \angle DBC$. Але ці кути вимірюються відповідно половинами кутових мір дуг AB і CD. Таким чином, одержуємо: $\angle ASB = \frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$. □

Лема 3.2 (Про кут між двома січними з вершиною зовні кола). *Якщо вершина кута лежить поза колом, а його сторони перетинають це коло,* *то він вимірюється піврізницею дуг, що відтинаються сторонами кута і розташованих всередині нього.*

Доведення.

Дійсно, нехай сторони кута ASB перетинають це коло вдруге в точках C і D (рис. 3.2).

Тоді для зовнішнього кута CBD трикутника SBC маємо $\angle CBD = \angle ASB + \angle ACB$, звідки, переходячи до дуг CD і AB, на які спираються вписані кути CBD і ACB, отримуємо співвідношення, яке і треба довести:

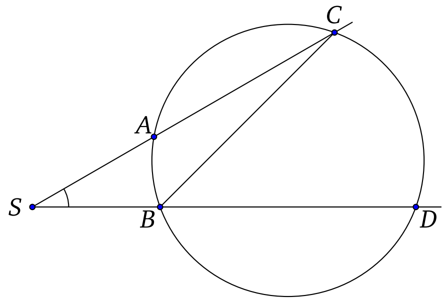


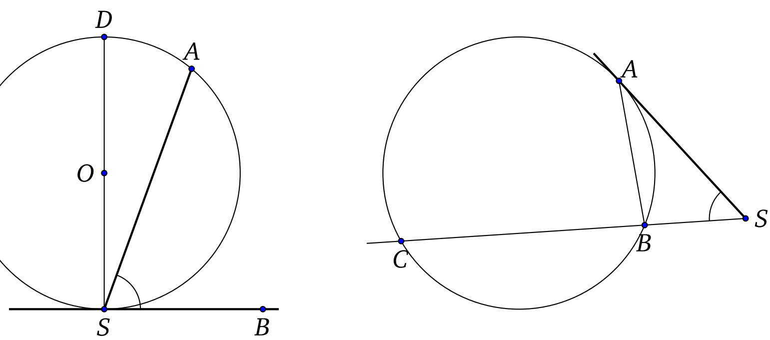
Рис. 3.2.

$$\angle ASB = \frac{1}{2}(\smile DC - \smile AB).$$

□

Лема 3.3 (Про кут між січною і дотичною). *Кут з вершиною на колі між її хордою і дотичною вимірюється половиною кутової міри дуги цього кола, що розташована всередині даного кута. Якщо січна до кола не проходить через точку дотику іншої прямої з цим колом, то кут між ними вимірюється піврізницею дуг, на які ділиться точкою дотику дуга, яка розташована всередині цього кута.*

Доведення. Кут між січною і дотичною може мати вершину на колі (рис. 3.3, а) або ж поза ним (рис. 3.3, б).



а) б)

Рис. 3.3.

У першому випадку, якщо цей кут ASB — гострий, то він дорівнює різниці прямого кута BSD і вписаного кута ASD. Отже,

$$\angle ASB = 90^\circ - \angle ASD = 90^\circ - \frac{1}{2}\smile AD = \frac{1}{2}\smile SD - \frac{1}{2}\smile AD = \frac{1}{2}\smile SA.$$

Якщо кут тупий, то аналогічними міркуваннями отримуємо той самий результат. Отже, доведено, що кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, вимірюється половиною кутової міри дуги кола, яка лежить всередині цього кута.

Використовуючи доведений факт $\left(\angle SAB = \frac{1}{2} \smile BA\right)$, для другого випадку одержуємо:

$$\angle ASB = \angle ABC - \angle SAB = \frac{1}{2} \smile AC - \frac{1}{2} \smile BA = \frac{1}{2} (\smile AC - \smile BA).$$

Отже, *якщо січна до кола не проходить через точку дотику іншої прямої з цим колом, то кут між ними вимірюється піврізницею дуг, на які ділиться точкою дотику дуга, що розташована всередині цього кута.* □

3.2. Пропорційні відрізки

При розв'язуванні олімпіадних задач з планіметрії на обчислення слід опанувати і використовувати властивості пропорцій.

Лема 3.4 (Про основну властивість рівних відношень). *Якщо маємо ряд рівних відношень*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k,$$

то для будь-яких дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, що $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n \neq 0$, виконується співвідношення:

$$\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n}{x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n} = k = \frac{a_i}{b_i}, \quad \text{де } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доведення. З умови випливає, що $a_i = k b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тоді $x_1 a_1 = k x_1 b_1$, $x_n a_n = k x_n b_n$, $\ldots$, $x_n a_n = k x_n b_n$, а

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = k x_1 b_1 + k x_2 b_2 + \ldots + k x_n b_n.$$

Звідки слідує, що

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = k (x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n),$$
$$\frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n}{x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots + x_n b_n} = k.$$

□

Лема 3.5 (Про пропорційні відрізки на сторонах кута). *Якщо сторони кута перетнути паралельними прямими, то відрізки, що відтинаються ними на одній стороні цього кута, пропорційні відповідним відрізкам, що відтинаються ними на іншій його стороні.*

Доведення. Зробимо рисунок до цієї леми (рис. 3.4).

Нам треба довести, що

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots$$

Для доведення побудуємо відрізки AB_2, BC_2, ..., паралельні до сторони OA_1 заданого кута з вершиною O. Трикутники OAA_1, ABB_2, BCC_2, ... подібні між собою, бо рівними є відповідні кути при паралельних OA_1, AB_2, BC_2, ... і рівними є відповідні кути при паралельних AA_1, BB_1, CC_1, ... Звідси випливає, що

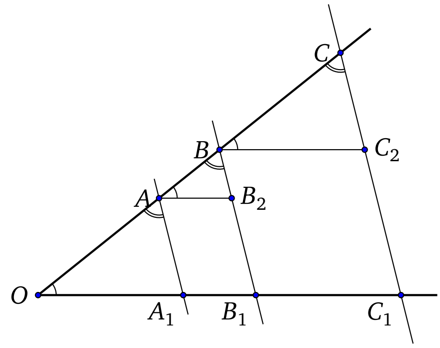


Рис. 3.4.

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{BC_2} = \dots.$$

Оскільки $AA_1B_1B_2$, $BB_1C_1C_2$, ... — паралелограми, то $AB_2 = A_1B_1$, $BC_2 = B_1C_1$, ..., тобто потрібне відношення доведено.

Зокрема, якщо $OA = AB = BC = \dots$, то $OA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = \dots$. Тому, має місце і таке твердження: якщо на одній стороні кута відкладено рівні відрізки і через їхні кінці проведені паралельні прямі, що перетинають іншу сторону цього кута, то на ній відтинаються також рівні відрізки (**теорема Фалеса**). □

Лема 3.6 (Обернена до леми 3.5)**.** *Якщо на одній стороні кута від його вершини O відкладені відрізки OA, AB, BC, ... і на іншій його стороні також від вершини O відкладені відповідно пропорційні їм відрізки OA_1, A_1B_1, B_1C_1, ...:*

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots,$$

то прямі AA_1, BB_1, CC_1, ... паралельні.

Доведення. Дійсно, на основі леми 3.4

$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{OA + AB}{OA_1 + A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1},$$

тобто $\dfrac{OB}{OB_1} = \dfrac{OA}{OA_1}$. Отже, трикутники OAA_1 і OBB_1 — гомотетичні і тому $AA_1 \parallel BB_1$. Аналогічно доводиться, що $AA_1 \parallel CC_1$. Зокрема, якщо $OA = AB = BC = \dots$ і $OA_1 = A_1B_1 = B_1C_1 = \dots$, то прямі $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel \dots$ (**обернена теорема Фалеса**). □

Лема 3.7 (Про пропорційні відрізки на паралельних прямих)**.** *Якщо дві паралельні прямі перетнути прямими, які проходять через одну точку, то на даних паралельних прямих відтинаються відповідні пропорційні відрізки.*

Доведення. Зробимо рисунок до цієї леми і будемо доводити її, виходячи з нього (рис. 3.5).

Нам треба довести, що

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \dots.$$

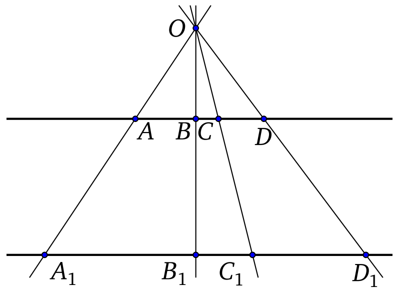


Рис. 3.5.

Дійсно, задамо гомотетію з центром O — точці перетину січних, і парою відповідних точок: $A \to A_1$. Оскільки прямі паралельні, то ця гомотетія відображає точки: $B \to B_1$, $C \to C_1$, $D \to D_1, \dots$. За властивістю гомотетії розглянуті відношення дорівнюють коефіцієнту гомотетії.

Інше доведення можна одержати, розглянувши подібні трикутники: $\Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1$, $\Delta OBC \sim \Delta OB_1C_1$, $\Delta OCD \sim \Delta OC_1D_1, \dots$. □

Лема 3.8 (Про властивість бісектриси трикутника). *Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам трикутника.*

Доведення. Зробимо рисунок до цієї леми (рис. 3.6).

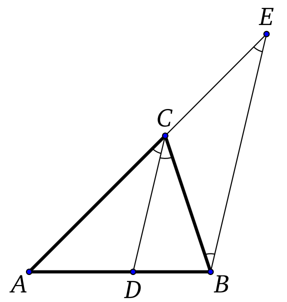


Рис. 3.6.

Нехай CD — бісектриса трикутника ABC. Побудуємо $BE \parallel CD$ (див. рис. 3.6). Тоді $\angle ACD = \angle AEB$ і $\angle BCD = \angle CBE$, а оскільки $\angle ACD = \angle BCD$, то $\angle AEB = \angle CBE$ і тому $BC = CE$. За лемою 3.6 одержуємо:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE},$$

тобто

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB},$$

що і треба було довести. □

Розглянемо тепер бісектрису зовнішнього кута трикутника. У рівнобедреному трикутнику бісектриса зовнішнього кута при вершині рівних сторін паралельна третій стороні (основі) трикутника. В інших випадках бісектриса зовнішнього кута перетинає пряму, що містить протилежну сторону. Точка перетину володіє властивістю, аналогічною, що доведено вище.

Лема 3.9 (Про бісектрису зовнішнього кута трикутника). *Якщо бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC перетинає пряму, яка містить його протилежну сторону, то відстані від точки перетину до кінців цієї сторони пропорційні прилеглим сторонам трикутника.*

Доведення.

Нехай CD — бісектриса зовнішнього кута при вершині C в трикутнику ABC. Нам треба довести співвідношення (див. рис. 3.7):

$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}.$$

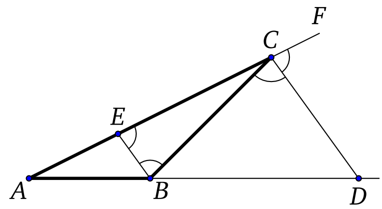


Рис. 3.7.

Проведемо $BE \parallel CD$, тоді $\angle BEC = \angle DCF$ (як відповідні при паралельних BE і CD), а $\angle CBE = \angle BCD$ (як внутрішні різносторонні при цих самих паралельних). Отже, трикутник BCE — рівнобедрений, тобто $CB = CE$. Далі, за лемою 3.6 одержуємо:

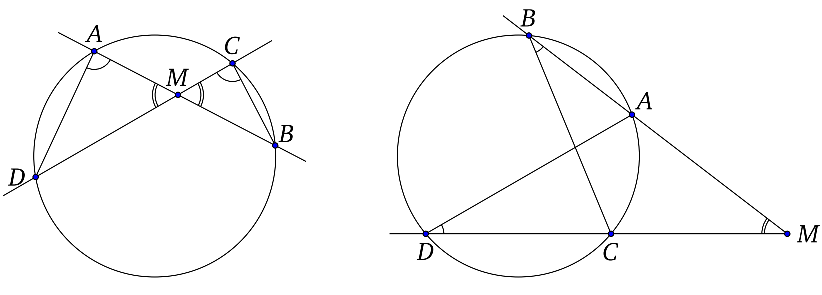
$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CE} = \frac{CA}{CB},$$

тобто $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA}{CB}$, що і треба було довести. □

Пряма, що має з колом дві різні спільні точки називається *січною* цього кола.

Лема 3.10. *Якщо через дану точку, що не належить даному колу, проведена до цього кола довільна січна, то добуток відрізків січної, що з'єднують цю точку із точками її перетину з колом, не залежить від вибору січної.*

Доведення.



а) б)

Рис. 3.8.

Для доведення проведемо через цю точку M дві довільні січних AB і CD (див. рисунок 3.8). Трикутники MAD і MCN подібні, так як $\angle A = \angle C$ (за властивістю вписаних кутів), і $\angle M$ — спільний (як вертикальні). У випадку, коли точка M поза колом, $\angle MDA = \angle MBC$ (за властивістю вписаних кутів), а $\angle M$ — спільний. З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

або $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, що і треба було довести. □

Лема 3.11 (Про січну і дотичну). *Якщо із деякої точки проведені до кола дотична і січна, то відрізок, що сполучає дану точку з точкою дотику, є середнім геометричним відрізків, що з'єднують цю ж точку з точками перетину січної і кола.*

Доведення. Зробимо рисунок до цієї леми і будемо доводити її, виходячи з нього (рис. 3.9).

Нехай з точки M, що лежить поза колом, проведені до неї січна AB і дотична MC. Тоді

$$MC^2 = MA \cdot MB.$$

Дійсно, трикутники MAC і MBC подібні: вони мають спільний кут M і рівні кути ACM та ABC (обидва вимірюються половиною дуги AC). З їх подібності слідує потрібне співвідношення. □

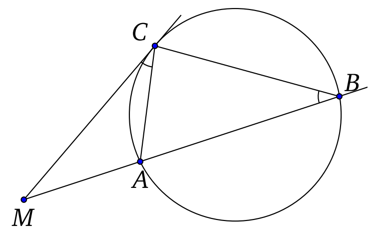


Рис. 3.9.

Лема 3.12 (Про квадрат бісектриси). *Квадрат бісектриси кута трикутника дорівнює добутку його сторін без добутку відрізків, на які бісектриса ділить третю сторону трикутника.*

Доведення.

Зробимо рисунок до цієї леми (див. рис. 3.10).

Нехай бісектриса кута C трикутника ABC перетинає сторону AB у точці D, а описане навколо трикутника коло — в точці E. Якщо $AD = m$, $DB = n$, $CD = l$, то за лемою 3.10

$$mn = l \cdot DE = l(CE - l) = l \cdot CE - l^2.$$

З подібних трикутників ACE і CDB отримуємо: $l \cdot CE = ab$. Тому $mn = ab - l^2$, звідки

$$l^2 = ab - mn,$$

що і треба було довести. □

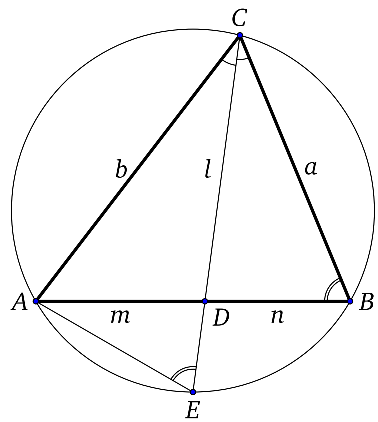


Рис. 3.10.

Лема 3.13 (Про подвійне відношення чотирьох колінеарних точок). *Дано дві прямі l і l_1. Чотири прямі, що проходять через одну точку O, перетинають пряму l в точках A, B, C, D, а пряму l_1 — відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Довести, що*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}} : \frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{D_1B_1}}.$$

Доведення. Зробимо рисунок до цієї леми і будемо доводити її, виходячи з нього (див. рис. 3.11).

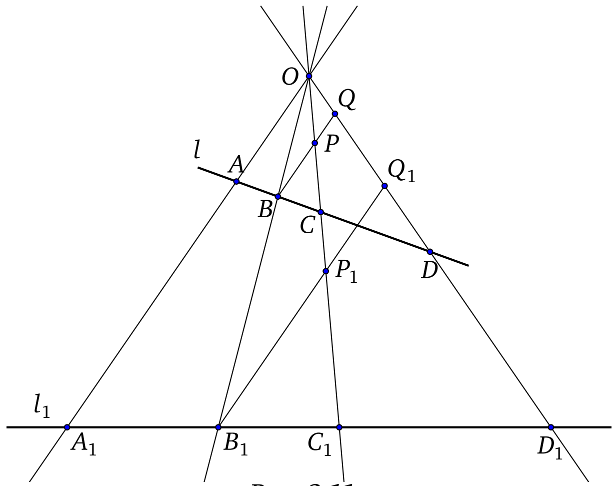


Рис. 3.11.

Проведемо через точки B і B_1 прямі, паралельні прямій OA (див. рис.3.11). Нехай перша перетинає прямі OC та OD в точках P і Q, а друга — в точках P_1 і Q_1. Тоді

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{PB}} \text{ і } \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{QB}}.$$

Поділивши почленно ці рівності, одержуємо:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{PB}}.$$

На тих же підставах

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1B_1}} : \frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{D_1B_1}} = \frac{\overline{Q_1B_1}}{\overline{P_1B_1}}.$$

Але за лемою 3.6 одержуємо:

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{Q_1B_1}}{\overline{P_1B_1}},$$

що і завершує доведення. □

Відношення $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ називають **подвійним відношенням чотирьох колінеарних точок** A, B, C, D і позначають $(AB; CD)$.

Доведений результат можна сформулювати коротко: *подвійне відношення чотирьох точок прямої не змінюється при центральному проектуванні прямої на пряму, тобто* $(AB; CD) = (A_1B_1; C_1D_1)$.

У випадку паралельного проектування одержаний результат також має місце.

3.3. Основні метричні співвідношення в трикутнику та чотирикутнику

При розв'язуванні олімпіадних задач з планіметрії на обчислення слід опанувати і використовувати наступні співвідношення для довільного трикутника і чотирикутника.

Нехай в трикутнику ABC: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ — довжини його сторін, α, β, γ — величини його кутів, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — його півпериметр, r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола, h_a — довжина висоти, опущеної на сторону a, r_a — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається сторони BC, S_{ABC} — площа трикутника ABC.

Теорема 3.1 (Теорема синусів). *Для трикутника ABC виконується співвідношення:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорема 3.2 (Теорема косинусів). *Для трикутника ABC виконуються співвідношення:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Теорема 3.3 (Формули для обчислення площі трикутника). *Для обчислення площі трикутника ABC можна використовувати одну із наступних формул:*

1) $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$;
2) $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$;
3) $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;
4) $S_{ABC} = pr$;
5) $S_{ABC} = (p-a)r_a$;
6) $S_{ABC} = \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$.

Справедливість цих усіх формул доведено в шкільних підручниках з геометрії для 9-го класу. Тому ми опускаємо їх доведення, сподіваючись на те, що читач самостійно відновить ці доведення.

Зауважимо, що формула $S = pr$ має місце для довільного многокутника з півпериметром p, описаного навколо кола радіусом r.

Теорема 3.4 (Рівність паралелограма). *Для будь-якого паралелограма $ABCD$ виконується таке співвідношення:*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Доведення.

Розглянемо паралелограм $ABCD$ (див. рисунок 3.12).

Оскільки протилежні сторони паралелограма паралельні, то $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$ і $\cos\angle BAD = -\cos\angle ADC$. Тому за лемою 3.2 одержуємо:

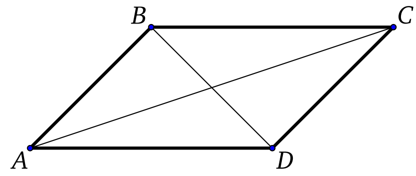


Рис. 3.12.

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot ABAD \cdot \cos\angle BAD$$

і

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\angle ADC.$$

Враховуючи, що протилежні сторони паралелограма рівні і $\cos\angle BAD = -\cos\angle ADC$, після додавання цих двох рівностей, одержимо рівність:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

□

Олімпіадні задачі

Задача 3.1. *Точка D лежить на стороні AC трикутника ABC, в якому $\angle C < \angle A < 90^\circ$, причому $BD = BA$. Вписане коло трикутника ABC дотикається його сторін AB і AC в точках K і L відповідно. Нехай J — центр вписаного кола в трикутник BCD. Доведіть, що пряма KL ділить відрізок AJ навпіл.*

(Shortlisted Problems for IMO – 2006)

Розв'язання.

Позначимо через P точку перетину AJ і KL (рис. 3.13). Відмітимо на AC таку точку M, що $JM \parallel KL$. Точка P буде серединою AJ тоді і тільки тоді, коли $AM = 2 \cdot AL$, що і будемо доводити.

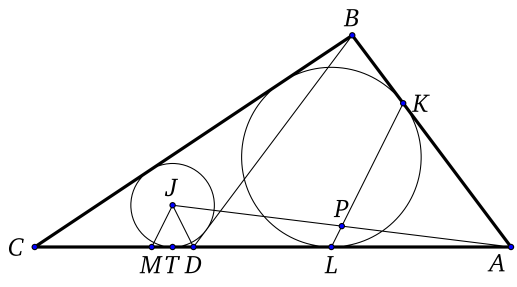


Рис. 3.13.

Позначимо $\angle BAC = 2\alpha$, тоді з рівностей $BA = BD$ і $AK = AL$ випливає, що $\angle ADB = 2\alpha$ і $\angle ALK = 90^\circ - \alpha$. Оскільки DJ бісектриса $\angle BDC$, то одержуємо

$$\angle CDJ = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle ADB) = 90^\circ - \alpha.$$

Але $\angle DMJ = \angle ALK = 90^\circ - \alpha$, бо $JM \parallel KL$. Тому $JD = JM$.

Нехай вписане коло трикутника BCD дотикається сторони AC в точці T. Тоді $JT \perp CD$, тобто JT — висота рівнобедреного трикутника MJD. Звідки

слідує, що $MT = TD$, а це означає, що
$$DM = 2DT = BD + CD - BC.$$
Таким чином,
$$\begin{aligned} AM &= AD + DM = AD + (BD + CD - BC) = \\ &= AD + AB + DC - BC = \\ &= AC + AB - BC = 2 \cdot AL, \end{aligned}$$
що і треба було довести. □

Задача 3.2. *Нехай J — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторони BC в точці A_1, а до продовжень сторін AC і AB в точках B_1 і C_1 відповідно. Припустимо, що прямі A_1B_1 і AB взаємно перпендикулярні, і перетинаються в точці D. Нехай E — основа перпендикуляра, опущеного із точки C_1 на пряму DJ. Знайдіть величину кутів $\angle BEA_1$ і $\angle AEB_1$.*

(Shortlisted Problems for IMO – 2006)

Розв'язання. *Спосіб 1.* Нехай K — точка перетину прямих JC і A_1B_1 (рис. 3.14). Оскільки $JC_1 \perp AB$ і $A_1B_1 \perp AB$, то відрізки JK і C_1D паралельні і рівні. З прямокутного трикутника B_1CJ знаходимо $JC_1{}^2 = JB_1{}^2 = JC \cdot JK = JC \cdot C_1D$, тобто
$$\frac{DC_1}{C_1J} = \frac{C_1J}{JC}.$$

А це означає, що прямокутні трикутники DC_1J і C_1JC подібні. Звідси слідує, що $\angle C_1DJ = \angle JC_1C$, тобто прямі DJ і C_1C взаємно перпендикулярні, що забезпечує колінеарність точок C_1, E, C.

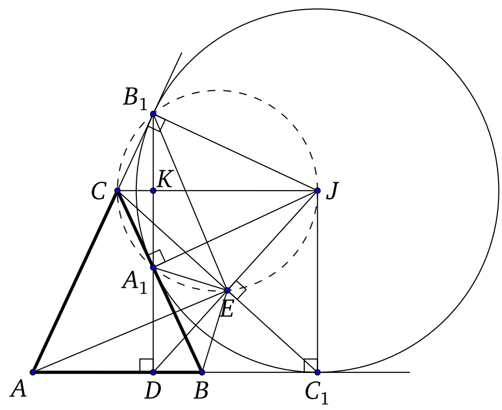


Рис. 3.14.

Оскільки $\angle CA_1J = \angle CB_1J = \angle CEJ = 90°$, то точки A_1, B_1 і E лежать на колі з діаметром CJ. Тому
$$\angle DBA_1 = \angle A_1CJ = \angle DEA_1,$$
що забезпечує циклічність чотирикутника BEA_1D. Звідси й слідує, що $\angle A_1EB = 180° - \angle A_1DB = 90°$.

Оскільки $\angle EB_1A = \angle EJC = \angle EDC_1$, то чотирикутник $ADEB_1$ також циклічний. Звідки слідує, що $\angle AEB_1 = \angle ADB = 90°$, що і треба було знайти.

Спосіб 2. Нехай ω_1, ω_2 і ω_3 — кола з діаметрами C_1D, A_1B і AB_1 відповідно (рис. 3.15).

Відрізки JC_1, JA_1 і JB_1 є дотичними до цих кіл відповідно, а два суміжні прямі кути з вершиною D вписані в кола ω_2 і ω_3. Оскільки $\angle C_1ED$ прямий, то точка E належить колу ω_1, причому $JC_1{}^2 = JD \cdot JE$.

Оскільки $JA_1 = JB_1 = JC_1$, як радіуси зовнівписаного кола, то

$$JA_1{}^2 = JD \cdot JE \quad \text{і} \quad JB_1{}^2 = JD \cdot JE.$$

Ці рівності еквівалентні тому, що точка E належить колам ω_2 і ω_3, що забезпечує рівності

$$\angle BEA_1 = \angle AEB_1 = 90^\circ.$$

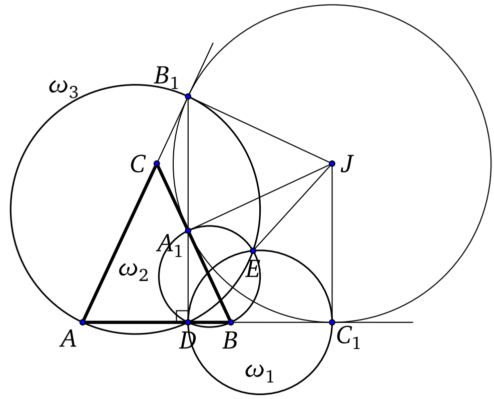


Рис. 3.15.

□

Задача 3.3. *Два кола з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. На колі O_1 відмітили таку точку D, що промінь DO_1 дотикається до кола O_2 в точці C. При цьому, пряма CA дотикається кола O_1 у точці A. Нехай AE хорда кола O_1, яка перпендикулярна до прямої CD. Із точки A опустимо перпендикуляр AF на пряму DE. Доведіть, що пряма BD ділить відрізок AF навпіл.*

(Китай, 2005)

Розв'язання. Нехай AE перетинає CD в точці H, а BD перетинає AF у точці G. Проведемо відрізки AB, BC, BH, BE, CE і GH. В силу симетрії CE також дотична до кола O_1 і H — середина AE (рис. 3.16).

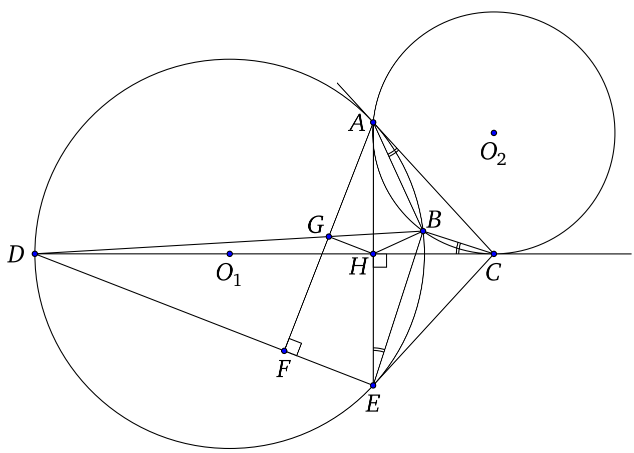


Рис. 3.16.

З того, що $\angle HCB = \angle BAC$ і $\angle BAC = \angle BEH$, випливає $\angle HCB = \angle HEB$, тобто точки H, B, C, E — циклічні. Тому, $\angle BHC = \angle BEC$.

Далі, з рівності кутів $\angle BEC = \angle BDE$, одержуємо рівність

$$\angle BHC = \angle BDE. \tag{1}$$

З того, що $AF \perp DE$, випливає

$$\angle AGB = 90^\circ - \angle BDE, \tag{2}$$

а з того, що $AE \perp DC$, випливає

$$\angle AHB = 90^\circ - \angle BHC. \tag{3}$$

З рівностей (1), (2) і (3) випливає рівність $\angle AGB = \angle AHB$. Ця рівність забезпечує циклічність точок A, G, H, B. Тому $\angle AHG = \angle ABG = \angle AED$, тобто $GH \parallel DE$. Оскільки H — середина AE, то за теоремою Фалеса G — середина AF, що і треба було довести. □

Задача 3.4. *Із точки P, яка знаходиться зовні кола ω, провели дві дотичні PA, PB (A і B — точки дотику) і січну, яка перетинає ω в точках C і D (C лежить між P і D). Пряма, яка проходить через точку B паралельно до AP, перетинає прямі AC і AD в точках E і F відповідно. Доведіть, що B — середина відрізка EF.*

(Китай, 2005)

Розв'язання. Проведемо відрізки BC, BA і BD (рис. 3.17), тоді $\angle ABC = \angle PAC = \angle AEF$. Звідси випливає, що трикутники ABC і AEB — подібні (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{AC}{AB}$. Звідки знаходимо, що

$$BE = \frac{AB \cdot BC}{AC}. \tag{1}$$

Оскільки $\angle ABF = \angle PAB = \angle ADB$, то трикутники ABF і ADB також будуть подібними (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін: $\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{AB}{AD}$. Звідки знаходимо, що

$$BF = \frac{AB \cdot BD}{AD}. \tag{2}$$

З іншого боку, так як трикутник PBC подібний трикутнику PDB і трикутник PCA подібний трикутнику PAD, то

$$\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{PB} \quad \text{і}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{PC}{PA}.$$

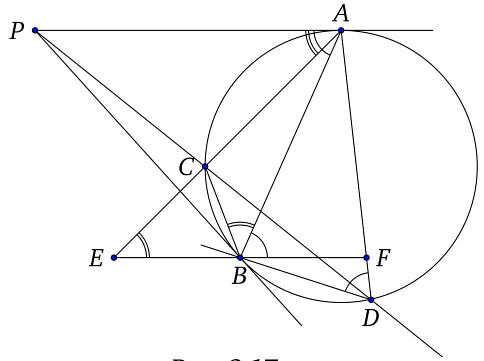


Рис. 3.17.

Оскільки $PA = PB$ (як дотичні), то одержуємо:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD},$$

тобто

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}. \tag{3}$$

Таким чином, з рівностей (1), (2) і (3) одержуємо, що $BE = BF$, що і треба було довести. □

Задача 3.5. *Нехай $2p$ — периметр гострокутного трикутника ABC, який не є рівностороннім. Нехай P — довільна точка, яка лежить всередині трикутника ABC, D, E і F — основи перпендикулярів, опущених із P на сторони BC, CA і AB відповідно. Доведіть, що точка P лежить на прямій, яка проходить через центри вписаного і описаного кіл трикутника ABC.*

(Китай, 2006)

Розв'язання.

Нехай $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Не порушуючи загальності будемо вважати, що $b \neq c$. Скористаємося методом координат. Нехай трикутник ABC розташований на координатній площині так, як це вказано на рисунку 3.18. Тоді наступні точки матимуть координати: $A(m,n)$, $B(0,0)$, $C(a,0)$ і $P(x,y)$. Оскільки $PF \perp AB$, то

$$AF^2 - BF^2 = AP^2 - BP^2,$$

тобто

$$AF^2 - (c - AF)^2 = AP^2 - BP^2.$$

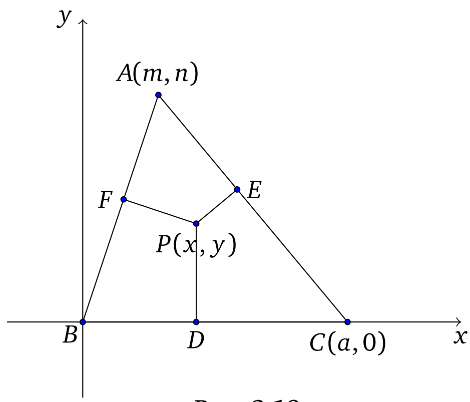


Рис. 3.18.

Використовуючи формулу для обчислення відстані між двома точками координатної площини, одержимо:

$$2c \cdot AF - c^2 = (x - m)^2 + (y - n)^2 - x^2 - y^2,$$

тобто

$$AF = \frac{m^2 + n^2 - 2mx - 2ny}{2c} + \frac{c}{2}.$$

Оскільки $PE \perp AC$, то

$$CE^2 - AE^2 = PC^2 - AP^2,$$

тобто

$$CE^2 - (b - CE)^2 = PC^2 - AP^2.$$

Використовуючи формулу для обчислення відстані між двома точками координатної площини, одержимо:

$$2b \cdot CE - b^2 = (x - a)^2 + y^2 - (x - m)^2 - (y - n)^2,$$

тобто
$$CE = \frac{2mx + 2ny - m^2 - n^2 - 2ax + a^2}{2b} + \frac{b}{2}.$$
Оскільки $AF + BD + CE = p$, то
$$\frac{m^2 + n^2 - 2mx - 2ny}{2c} + \frac{c}{2} + x + \frac{2mx + 2ny - m^2 - n^2 - 2ax + a^2}{2b} + \frac{b}{2} = p,$$
тобто
$$\left(\frac{m}{b} - \frac{a}{b} - \frac{m}{c} + 1\right)x + \left(\frac{n}{b} - \frac{n}{c}\right)y + \frac{a^2}{2b} + \frac{b+c}{2} + \frac{m^2+n^2}{2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) - p = 0.$$
Це лінійне рівняння відносно x та y і воно задає на координатній площині фіксовану пряму l. Оскільки $b \neq c$ і $n \neq 0$, то точка P буде лежати на l.

Залишилося довести, що точка O — центр описаного кола трикутника ABC і точка I — центр вписаного кола трикутника ABC також лежить на l. Для цього треба довести, що для них виконується рівність $AF + BD + CE = p$, бо вона рівносильна рівнянню прямої l.

Для точки O її проекції D, E і F будуть серединами сторін BC, CA і AB (рис. 3.19, а). Тому,
$$AF + BD + CE = \frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = p.$$

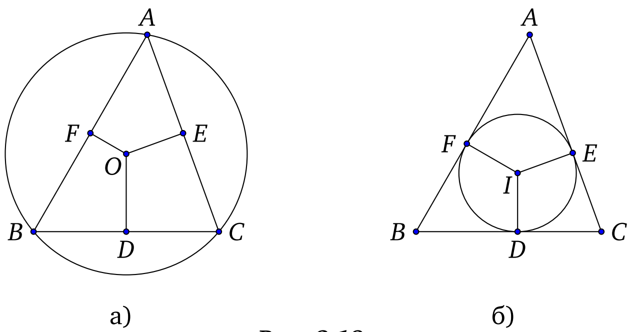


Рис. 3.19.

Для точки I її проекції D, E і F будуть точками дотику (рис. 3.19, б). Тому, використовуючи формули для дотичних відрізків трикутника ABC, матимемо:
$$AF + BD + CE = (p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - (a+b+c) =$$
$$= 3p - 2p = p.$$
□

Задача 3.6. *Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, I_1 та I_2 — центри вписаних кіл трикутників ABC і BCD відповідно. Пряма I_1I_2 перетинає прямі AB і CD в точках E і F відповідно. Нехай P — точка перетину променів AB і DC. Доведіть, що коли $PE = PF$, то чотирикутник $ABCD$ — вписаний.*

Розв'язання. З'єднаємо точки I_1 та I_2 з вершинами відповідних трикутників (див. рисунок 3.20).

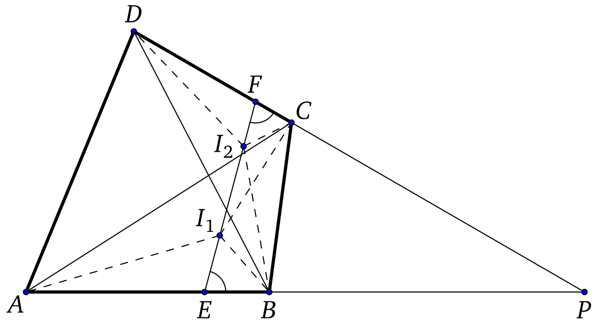


Рис. 3.20.

Оскільки $PE = PF$, то $\angle PEF = \angle PFE$. Але

$$\angle PEF = \angle I_2I_1B - \angle EBI_1 = \angle I_2I_1B - \angle I_1BC,$$
$$\angle PFE = \angle I_1I_2C - \angle FCI_2 = \angle I_1I_2C - \angle I_2CB.$$

Звідси впливає, що

$$\angle I_2I_1B - \angle I_1BC = \angle I_1I_2C - \angle I_2CB,$$

тобто

$$\angle I_2I_1B + \angle I_2CB = \angle I_1I_2C + \angle I_1BC.$$

З іншого боку,

$$\angle I_2I_1B + \angle I_2CB + \angle I_1I_2C + \angle I_1BC = 360°,$$

тому

$$\angle I_2I_1B + \angle I_2CB = 180°,$$

тобто точки I_1, I_2, C, B — циклічні. З циклічності цих чотирьох точок випливає, що

$$\angle BI_1C = \angle BI_2C.$$

Тому одержуємо, що

$$\angle I_1BC + \angle I_1CB = \angle I_2BC + \angle I_2CB,$$
$$\angle ABC + \angle ACB = \angle DBC + \angle DCB.$$

Звідси випливає, що $\angle BAC = \angle BDC$, тобто чотирикутник $ABCD$ — вписаний, що і треба було довести. □

Задача 3.7. *В чотирикутник $ABCD$ вписане коло, яке дотикається до його сторін AB, BC, CD, DA в точках A_1, B_1, C_1, D_1 відповідно. Нехай E, F, G, H — середини відрізків A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 відповідно. Доведіть, що чотирикутник $EFGH$ — прямокутник тоді і тільки тоді, коли $ABCD$ є вписаним чотирикутником.*

(Китай, 2003)

Розв'язання. Нехай I — центр вписаного кола чотирикутника $ABCD$ (рис. 3.21).

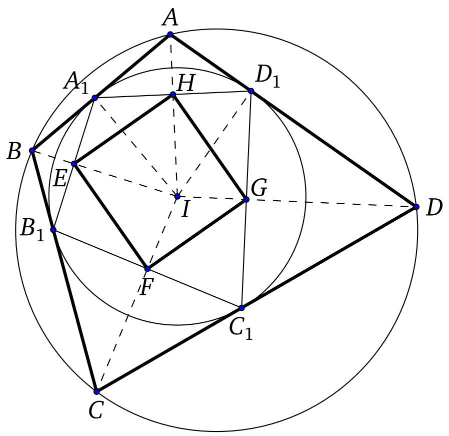


Рис. 3.21.

Так як H — середина A_1D_1 і AA_1, AD_1 — дві дотичні до вписаного кола, що проведені із точки A, то точка H лежить на AI, причому $AI \perp A_1D_1$. Так як $ID_1 \perp AD_1$, то з прямокутного трикутника AD_1I, враховуючи, що D_1H його висота, знаходимо, що $IH \cdot IA = ID_1{}^2 = r^2$, де r — радіус вписаного кола чотирикутника $ABCD$. Аналогічно доводиться, що $IE \cdot IB = r^2$, тому $IE \cdot IB = IH \cdot IA$, тобто точки A, H, E, B — циклічні. Звідси випливає, що $\angle EHI = \angle ABE$. Аналогічно доводиться, що $\angle IHG = \angle ADG$, $\angle IFE = \angle CBE$ і $\angle IFG = \angle CDG$. Додавши ці чотири рівності, одержимо:

$$\angle EHG + \angle EFG = \angle ABC + \angle ADC.$$

Одержана рівність означає, що чотирикутник $ABCD$ буде вписаним тоді і тільки тоді, коли чотирикутник $EFGH$ також буде вписаним. Проте чотирикутник $EFGH$ — паралелограм Варіньйона чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, а тому чотирикутник $EFGH$ буде вписаний тоді і тільки тоді, коли $EFGH$ — прямокутник, що і завершує розв'язання. □

Задача 3.8. *Нехай сума відстаней від точки P, що знаходиться всередині опуклого чотирикутника $ABCD$, до прямих AB, BC, CD і DA є сталою величиною. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.*

Розв'язання. Нехай $d\,(P, l)$ означає відстань від точки P до прямої l. Спочатку доведемо наступне твердження.

Лема. *Нехай точка P лежить всередині заданого кута SAT, величина якого дорівнює α. Якщо сума відстаней від точки P до прямих AS і AT дорівнює додатному числу d, то ГМТ P буде відрізок BC, кінець B якого знаходиться на промені AS, а кінець C якого — на промені AT, причому $AB = AC = \frac{d}{\sin\alpha}$. Крім того, якщо точка Q знаходиться всередині трикутника ABC, то сума відстаней від точки Q до прямих AS і AT буде меншою за число d, а коли точка Q знаходиться зовні трикутника ABC і всередині кута SAT, то ця сума буде більшою за d.*

Доведення. Для $AB = AC = \frac{d}{\sin\alpha}$ і будь-якої точки P, що лежить на відрізку BC (див. рисунок 3.22) матимемо:

$$S_{ABP} + S_{ACP} = S_{ABC},$$

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d\left(P,AS\right)+\frac{1}{2}\cdot AC\cdot d\left(P,AT\right)=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\alpha.$$

Після скорочення одержимо:

$$d\left(P,AS\right)+d\left(P,AT\right)=d.$$

Якщо точка Q лежить всередині трикутника ABC, то

$$S_{ABQ}+S_{ACQ}<S_{ABC},$$

тобто $d\left(P,AS\right)+d\left(P,AT\right)<d$.

Якщо точка Q лежить зовні трикутника ABC і всередині кута SAT, то

$$S_{ABQ}+S_{ACQ}>S_{ABC},$$

тобто $d\left(P,AS\right)+d\left(P,AT\right)>d$. □

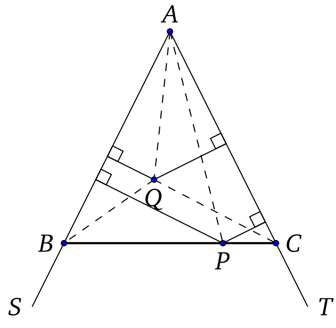


Рис. 3.22.

А тепер перейдемо до розв'язання запропонованої задачі. Розглянемо два випадки.

1. Нехай протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ — не паралельні. Тоді, не порушуючи загальності, можна вважати, що чотирикутник $ABCD$ такий, як це зображено на рисунку 3.23: причому E — точка перетину BA і CD, F — точка перетину AD і BC.

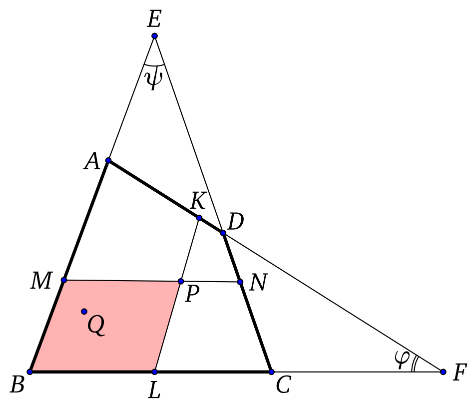


Рис. 3.23.

Припустимо, що для такого чотирикутника твердження задачі виконується, тобто для будь-яких двох точок P і Q, що лежать всередині його, виконується рівність:

$$d\left(P,AB\right)+d\left(P,BC\right)+d\left(P,CD\right)+d\left(P,DA\right)=$$
$$=d\left(Q,AB\right)+d\left(Q,BC\right)+d\left(Q,CD\right)+d\left(Q,DA\right).\quad(\star)$$

Проведемо через точку P відрізки MN і KL так, що $EM=EN=e$ і $FK=FL=f$. Тоді за лемою

$$d\left(P,AB\right)+d\left(P,CD\right)=e\sin\psi,$$

а

$$d\left(P,AD\right)+d\left(P,BC\right)=f\sin\varphi.$$

тобто

$$d\left(P,AB\right)+d\left(P,BC\right)+d\left(P,CD\right)+d\left(P,DA\right)=e\sin\psi+f\sin\varphi.$$

Виберемо точку Q в частині чотирикутника $ABCD$, яка заштрихована, тоді для такої точки, за лемою, матимемо:

$$d(Q,AB) + d(Q,CD) > e\sin\psi$$

і

$$d(Q,AD) + d(Q,BC) > f\sin\varphi$$

тобто

$$d(Q,AB) + d(Q,BC) + d(Q,CD) + d(Q,DA) > e\sin\psi + f\sin\varphi =$$
$$= d(P,AB) + d(P,BC) + d(P,CD) + d(P,DA),$$

що суперечить ($\star$).

2. Нехай $ABCD$ — трапеція, тобто $AD \parallel BC$, а BA і CD перетинаються в точці E так, як це вказано на рисунку 3.24.

Припустимо, що для такого чотирикутника твердження задачі виконується, тобто для будь-яких двох точок P і Q, що лежать всередині його, виконується рівність ($\star$).

Проведемо через точку P відрізок MN так, що $EM = EN = e$. Тоді за лемою матимемо:

$$d(P,AB) + d(P,CD) = e\sin\psi.$$

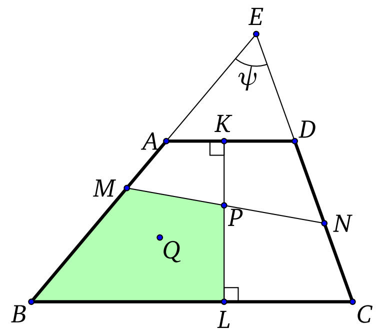


Рис. 3.24.

Крім того,

$$d(P,AD) + d(P,BC) = PK + PL = h,$$

де h — довжина висоти трапеції $ABCD$. Тому

$$d(P,AB) + d(P,BC) + d(P,CD) + d(P,DA) = e\sin\psi + h.$$

Виберемо точку Q в частині чотирикутника $ABCD$, яка заштрихована, тоді для такої точки, за лемою, матимемо:

$$d(Q,AB) + d(Q,CD) > e\sin\psi$$

і

$$d(Q,AD) + d(Q,BC) = h,$$

тобто

$$d(Q,AB) + d(Q,BC) + d(Q,CD) + d(Q,DA) > e\sin\psi + h =$$
$$= d(P,AB) + d(P,BC) + d(P,CD) + d(P,DA),$$

що суперечить ($\star$). Таким чином, ($\star$) буде виконуватися лише для паралелограма $ABCD$, що і треба було довести. □

Задача 3.9. *Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Нехай P — довільна точка, що лежить всередині трикутника AOB,* *а D, E, F — її проекції на сторони BC, CA, AB відповідно. Доведіть, що паралелограм $DFEG$ лежить всередині трикутника ABC.*

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 3.25).

Нехай H — проекція точки O на сторону BC, тоді H — середина BC. Для доведення твердження задачі потрібно довести, що $\angle FEG < \angle FEC$ і $\angle FDG < \angle FDC$. Це еквівалентно таким нерівностям: $\angle BFD < \angle BAC$ і $\angle AFE < \angle ABC$.

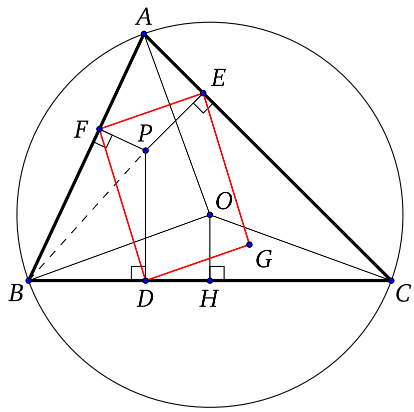


Рис. 3.25.

Оскільки $PD \perp BC$ і $PF \perp AB$, то навколо чотирикутника $PDBF$ можна описати коло. Звідси випливає, що $\angle BFD = \angle BPD$. Але $\angle PBD > \angle OBH$, тоді

$$90^\circ - \angle PBD < 90^\circ - \angle OBH.$$

І тому $\angle BPD < \angle BOH$. Крім того, оскільки O — центр описаного кола трикутника ABC, то

$$\angle BOH = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC.$$

Тому $\angle BFD = \angle BPD < \angle BOH = \angle BAC$, тобто $\angle BFD < \angle BAC$. Аналогічно доводиться, що $\angle AFE < \angle ABC$, тобто твердження задачі доведено. □

Задача 3.10. *Задано трапецію $ABCD$, в якій $AD \parallel BC$. Нехай E — довільна точка бічної сторони AB, O_1 і O_2 — центри описаних кіл трикутників AED і BEC відповідно. Доведіть, що довжина відрізка O_1O_2 не змінюватиметься, якщо точка E рухатиметься по стороні AB.*

Розв'язання.

Зробимо рисунок до задачі (рис. 3.26).

З'єднаємо точку E з точками O_1 і O_2, і використаємо зв'язок між вписаними і центральними кутами, одержимо:

$$\angle AEO_1 = 90^\circ - \angle ADE$$

і

$$\angle BEO_2 = 90^\circ - \angle BCE.$$

Тому

$$\angle O_1EO_2 = \angle ADE + \angle ECB.$$

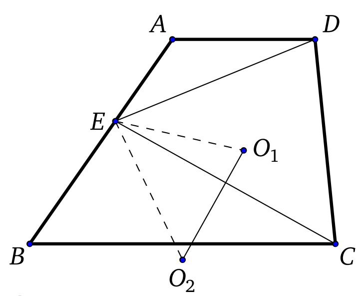


Рис. 3.26.

Оскільки $AD \parallel BC$, то провівши через точку E пряму паралельну до AD, одержимо:

$$\angle DEC = \angle ADE + \angle BCE.$$

Таким чином, $\angle O_1EO_2 = \angle DEC$.

За теоремою синусів із трикутників EAD і EBC одержуємо:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{2 \cdot O_1E \cdot \sin\angle A}{2 \cdot O_2E \cdot \sin\angle B} = \frac{O_1E}{O_2E}.$$

Тому, за пропорційністю двох сторін і кутом між ними, одержуємо подібність трикутників CED і O_2EO_1. З подібності цих трикутників випливає:

$$\frac{O_1O_2}{CD} = \frac{EO_1}{ED} = \frac{EO_1}{2 \cdot EO_1 \cdot \sin\angle A} = \frac{1}{2\sin\angle A},$$

тобто $O_1O_2 = \dfrac{CD}{2\sin\angle A}$ і не залежить від положення точки E на стороні AB. □

Зауваження. Оскільки проекція O_1O_2 на AB дорівнює $\frac{1}{2}AB$, то все залежить від кута між O_1O_2 і AB. Отже, кут між O_1O_2 і AB не залежить від положення точки E на стороні AB.

Задача 3.11. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторін BC і AC в точках M і N відповідно. Нехай E і F — середини сторін AB і AC відповідно. Позначимо через D — точку перетину прямих BI і EF. Доведіть, що точки M, N і D — колінеарні.*

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 3.27).

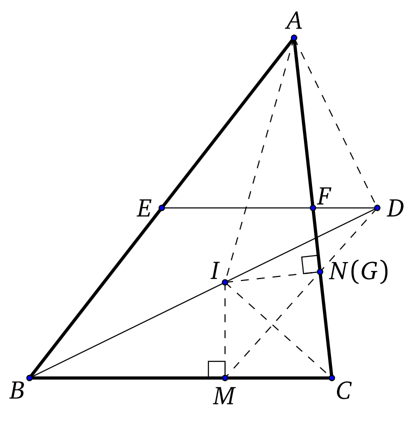


Рис. 3.27.

Проведемо відрізок AD і доведемо, що $\angle ADB = 90°$. Дійсно, так як BI — бісектриса кута B трикутника ABC, а $EF \parallel BC$ (як середня лінія), то $\angle EBD = \angle DBC = \angle BDE$, тобто $AE = BE = ED$. Це означає, що E — центр описаного кола трикутника ADB, причому AB — діаметр цього кола. Отже, $\angle ADB = 90°$ (як вписаний кут, що спирається на діаметр).

Далі проведемо відрізки AI, IM і DM. Нехай відрізок DM перетинає сторону AC в точці G. Так як $\angle ABI = \angle DBM$, то прямокутні трикутники BDA і BMI будуть подібними (за двома кутами). Звідси отримаємо, що $\dfrac{AB}{AI} = \dfrac{BD}{BM}$, тобто $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BI}{BM}$. Отже, трикутники ABI і DBM подібні (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів:

$$\angle GMB = \angle DMB = \angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

(остання рівність записана за формулою, що пов'язує кут між бісектрисами трикутника з протилежним кутом самого трикутника).

Оскільки трикутник MCN — рівнобедрений, то $\angle NMC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$, тобто $\angle BMN = 180^\circ - \angle NMC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB = \angle BMG$. Звідси випливає, що $\angle BMN = \angle BMD$, тобто точки M, N і D — колінеарні. □

Задача 3.12. *Пряма l перетинає продовження сторін AB і AC трикутника ABC в точках D і E відповідно (D ближче до B, ніж до A, і E ближче до C, ніж до A). Пряма l', яка симетрична до l відносно серединного перпендикуляра до сторони BC, перетинає вказані продовження відповідно в точках D' і E'. Відомо, що $BD + CE = DE$. Доведіть, що $BD' + CE' = D'E'$.*

(Іран, 2011 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 3.28).

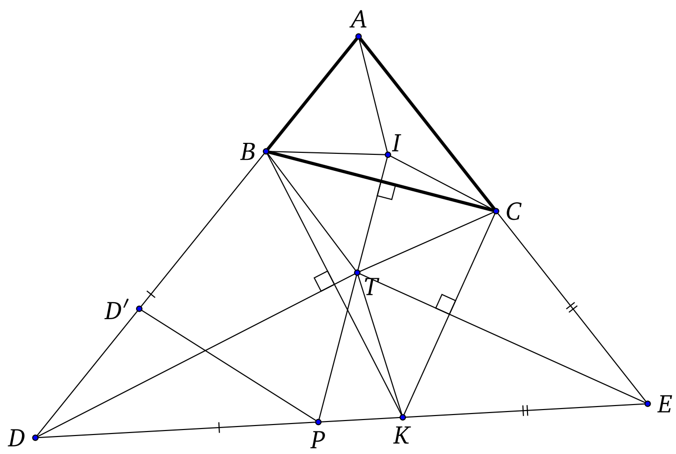


Рис. 3.28.

Нехай K — точка на відрізку DE, така, що $DK = DB$. Тоді за умовою $EK = EC$. Нехай T — точка перетину бісектрис трикутника ADE. Оскільки трикутник BDK — рівнобедрений, то DT — серединний перпендикуляр відрізка BK. Аналогічно, ET — серединний перпендикуляр відрізка CK. Тому $TB = TK$ і $TK = TC$, тобто $TB = TC$, а це означає, що точка T лежить на серединному перпендикулярі відрізка BC і T — центр описаного кола навколо трикутника BKC.

Далі знаходимо:

$$\angle BKC = 180^\circ - \angle BKD - \angle CKE = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle ADE}{2} - \frac{180^\circ - \angle AED}{2} =$$
$$= \frac{\angle ADE + \angle AED}{2} = \frac{180^\circ - \angle DAE}{2}.$$

За теоремою про вписаний і центральний кут, одержуємо:

$$\angle BTC = 2\angle BKC = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - \angle BAC,$$

звідки випливає, що $\angle BTC + \angle BAC = 180^\circ$, тобто навколо чотирикутника $ABTC$ можна описати коло, причому точка T — середина дуги BC цього кола. Оскільки AT — бісектриса кута BAC, то точка I — центр описаного кола чотирикутника $ABTC$ — лежить на AT, і за теоремою про «тризуб» (див. теорему 1.5 на сторінці 28) матимемо, що $TI = TB = TC$. Оскільки $TI = TB = TC = TK$, то навколо чотирикутника $BKCI$ також можна описати коло, з центром у точці T.

Нехай P — точка перетину відрізка DE і серединного перпендикуляра до відрізка BC, який проходить через точку T. Тоді за умовою задачі, $\angle TPD = \angle TPE'$ і $\angle TPE = \angle TPD'$.

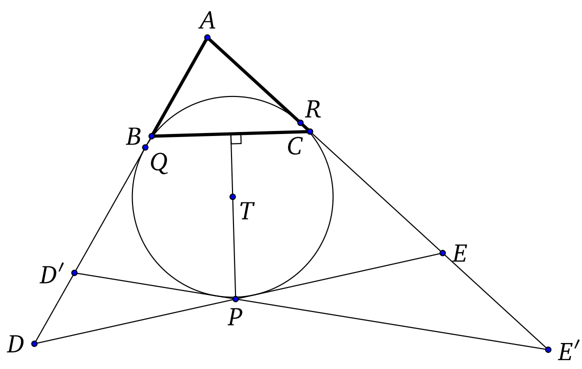


Рис. 3.29.

Розглянемо чотирикутник $AEPD'$. Точка T — точка перетину бісектрис його кутів при вершинах A, E і P. А це означатиме, що бісектриса його четвертого кута (при вершині D') також проходитиме через точку T, тобто в цей чотирикутник можна вписати коло і центром цього кола буде точка T.

Таким чином, трикутники DAE і $D'AE'$ мають спільне вписане коло з центром у точці T. Нехай Q і R — точки дотику вписаного кола трикутника DAE зі сторонами AD і AE відповідно. Тоді, як відомо, $DE = DQ + ER$. Оскільки $DE = DB + EC$, то $DQ + ER = DB + EC$. Звідки випливає, що $DQ - DB = EC - ER$, тобто $BQ = CR$. Оскільки вписане коло в трикутник $D'AE'$ співпадає із вписаним колом трикутника DAE і це коло дотикається сторін AD' і AE' також у точках Q і R відповідно, то аналогічно:

$$D'E' = D'Q + E'R = D'Q - BQ + E'R - CR = D'B + E'C.$$

тобто $BD' + CE' = D'E'$, що і треба було довести. □

Задача 3.13. *Нехай E — точка перетину діагоналей AC і BD вписаного чотирикутника $ABCD$, який не є трапецією. Позначимо через F і G — середини сторін AB і CD відповідно, а через l — пряму, яка проходить через G паралельно до AB. Також позначимо через H і K — основи перпендикулярів, опущених із точки E на прямі l і CD відповідно. Доведіть, що $EF \perp HK$.*

(Балканіада, 2011 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 3.30).

Точки E, K, H, G лежать на одному колі з діаметром EG, бо $\angle EKG = \angle EHG = 90°$. Звідси, за властивістю вписаних кутів, випливає, що $\angle EHK = \angle EGK$.

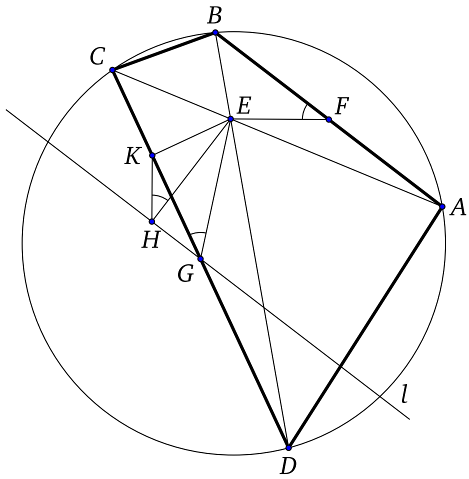


Рис. 3.30.

Далі, $\angle DCA = \angle DBA$ (як вписані, що спираються на одну і ту ж саму дугу кола) і $\angle CED = \angle BEA$ (як вертикальні). Тому, $\Delta CED \sim \Delta BEA$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle BFE = \angle CGE$, бо $EG = EF$ відповідні медіани подібних трикутників.

Так як $HE \perp l$ і $l \parallel BF$, то $HE \perp BF$. Оскільки $HE \perp BF$ і $\angle BFE = \angle EHK$, то $FE \perp HK$. Це випливає з того, що кути із взаємно перпендикулярними сторонами рівні. □

Задача 3.14. *У гострокутному різносторонньому трикутнику ABC відомо, що $AB < AC$. Нехай O — центр описаного кола, H — точка перетину висот AG і CF трикутника ABC, а M — середина сторони AC. На прямій AB відмітимо точку P (відмінну від A) так, що $AF = FP$. Позначимо через X точку перетину BC і PH, через Y — точку перетину прямих MO і FX, а через Z — точку перетину прямих AC і FO. Доведіть, що точки F, M, Y і Z — циклічні.*

(Балканіада, 2008 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 3.31).

Для доведення циклічності точок F, M, Y і Z, достатньо довести, що $OF \perp FX$.

Нехай $OE \perp AB$, тоді E — середина AB і, як відомо, $CH = 2OE$. Оскільки $PF = AF$, то $PB = PF - BF$, тобто $PB = AF - BF$. Так як CF — серединний перпендикуляр відрізка AP, то $\angle XPB = \angle HPA = \angle HAP$, а за властивістю вписаних кутів $\angle HAP = \angle HCX$. Тому $\angle BPH = \angle BCH$, тобто точки P, B, H і C — циклічні. Звідси випливає, що $\Delta PBX \sim \Delta CHX$. Нехай $XD \perp AB$ і $XL \perp CH$. З подібності вказаних вище трикутників випливає пропорційність відповідних їхніх елементів:

$$\frac{XD}{XL} = \frac{PB}{CH},$$

а використовуючи попередні рівності, одержимо

$$\frac{XD}{XL} = \frac{AF - BF}{2OE} = \frac{FE}{OE}.$$

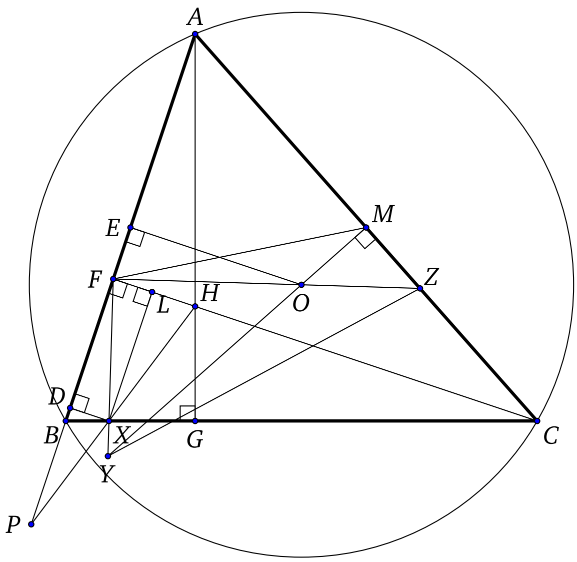


Рис. 3.31.

Звідси слідує, що

$$\frac{XD}{FD} = \frac{FE}{OE}.$$

Оскільки трикутники XDF і FEO — прямокутні, то, враховуючи попередню пропорцію, робимо висновок, що вони подібні. Тому, їх відповідні кути рівні: $\angle FXD = \angle OFE$ і $\angle XFD = \angle FOE$, причому їх сума дорівнює $90°$.

Отже,

$$\angle YFZ = \angle XFO = 180° - \angle DFX - \angle OFE = 180° - 90° = 90°.$$

Таким чином, $\angle YFZ = \angle YMZ = 90°$, тобто точки F, M, Y і Z — циклічні, що і треба було довести. □

Задача 3.15. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, H — точка перетину його висот AA_1, BB_1 і CC_1, M — середина сторони AC. Позначимо через H_1 точку, симетричну до точки H відносно AB, а через P, Q і R — основи перпендикулярів, опущених із точки C_1 на прямі AH_1, AC і BC відповідно. Нехай M_1 — точка, яка симетрична до точки M відносно центра описаного кола трикутника PQR. Доведіть, що точка M_1 лежить на прямій BH_1.*

(Балканіада, 2010 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 3.32).

З рисунку видно, що коло з центром W, яке проходить через точки P, Q і R, проходить через точки M і M_1, а W — середина відрізка MM_1. Доведемо це.

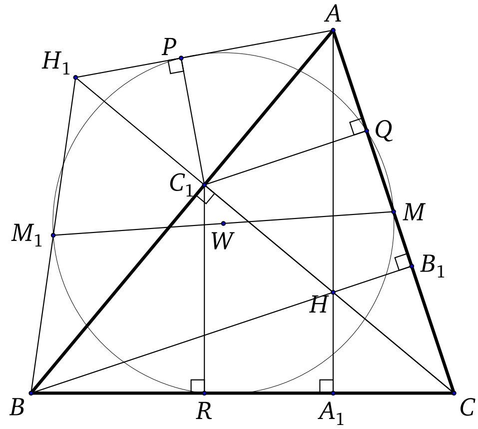


Рис. 3.32.

Оскільки точка H_1 — симетрична до точки H відносно прямої AB, то

$$\angle AH_1B = \angle AHB = \angle A_1HB_1 = \\ = 180^\circ - \angle ACB,$$

тобто $\angle AH_1B + \angle ACB = 180^\circ$. Звідси випливає, що чотирикутник $ACBH_1$ — вписаний і його діагоналі AB і CH_1 взаємно перпендикулярні.

Вписаний чотирикутник з перпендикулярними діагоналями володіє низкою властивостей.

Теорема Брахмагупти. *Якщо E — точка перетину діагоналей AC і BD вписаного чотирикутника $ABCD$, $AC \perp BD$, а M — середина його сторони AB, то $EM \perp CD$.*

Доведення.

Нехай N — точка перетину ME і CD (рис. 3.33). Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині, то $ME = MA = MB$. Нехай $\angle BAC = \varphi$, тоді $\angle MEA = \varphi$ і $\angle CEN = \angle AEM = \varphi$.

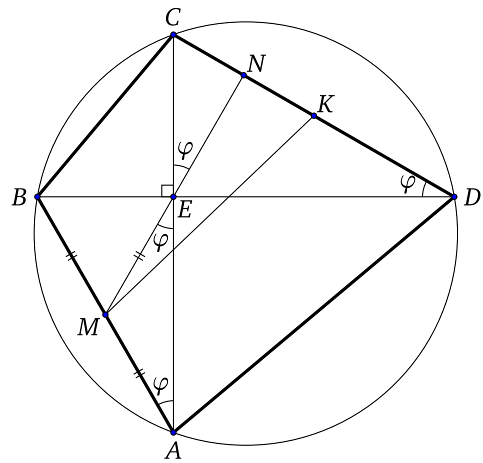


Рис. 3.33.

Крім того,

$$\angle NED = \angle CED - \angle CEN = 90^\circ - \varphi.$$

Таким чином,

$$\angle END = 180^\circ - \angle NED - \angle NDE = \\ = 180^\circ - (90^\circ - \varphi) - \varphi = 90^\circ,$$

що і треба було довести. □

Лема. *Якщо E — точка перетину діагоналей AC і BD вписаного чотирикутника $ABCD$, причому $AC \perp BD$, то середини сторін цього чотирикутника і проекції точки E на ці сторони лежать на одному колі.*

Доведення. Середини сторін заданого чотирикутника $ABCD$ є вершинами прямокутника, тому вони лежать на одному колі з центром у точці перетину середніх ліній чотирикутника $ABCD$. Нехай M і K — середини сторін AB і CD. За теоремою Брахмагупти, пряма MT перпендикулярна до CD і перетинає CD в точці N, тобто N — проекція точки E на сторону CD. Оскільки $\angle MNK = 90^\circ$, то точка N лежить на колі з діаметром MK, який є середньою лінією чотирикутника $ABCD$. Для інших проекцій доведення аналогічне. □

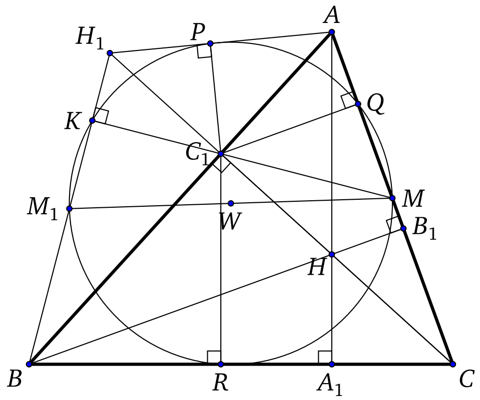


Рис. 3.34.

А тепер переходимо до розв'язання задачі. З доведених властивостей вписаного чотирикутника з перпендикулярними діагоналями випливає, що коло, яке проходить через точки P, Q і R, які є проекціями точки C_1 — точки перетину діагоналей AB і CH_1 вписаного чотирикутника $ACBH_1$, то це коло проходить через середини усіх сторін чотирикутника $ACBH_1$ і через проекції точки C_1 на усі сторони чотирикутника $ACBH_1$.

Нехай $QC_1 \cap BH_1 = N$, $MC_1 \cap BH_1 = K$ (рис. 3.34), тоді за теоремою Брахмагупти матимемо, що N — середина сторони BH_1, а K — проекція точки C_1 на сторону BH_1, причому (за лемою) MN — діаметр кола, описаного навколо трикутника PQR. Це означає, що точка N симетрична точці M відносно точки W, тобто $N = M_1$. Оскільки N лежить на BH_1, то і M_1 лежить на BH_1, що і треба було довести. □

Задача 3.16. *В коло ω вписаний трикутник ABC. Відомо, що $\angle BAC = 90^\circ$, E — середина дуги BC кола ω, яка не містить точку A. На продовженні відрізка EC за точку C відмітили таку точку F, що $\angle EAC = \angle CAF$. Нехай пряма BF перетинає вдруге коло ω в точці D. Позначимо через K — центр кола, описаного навколо трикутника DEF. Доведіть, що точки A, C і K лежать на одній прямій.*

(Китай, 2009 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 3.35).

Оскільки K — центр описаного кола трикутника DEF, то $\angle EKF = 2(180^\circ - \angle EDF)$. Далі, використовуючи властивості суміжних і вписаних кутів, одержуємо: $180^\circ - \angle EDF = \angle BDE = \angle BAE$.

Оскільки $\angle BAC = 90^\circ$ і E — середина дуги BC, то $\angle BAE = \angle EAC = 45^\circ$. За умовою $\angle EAC = \angle CAF$, тому $\angle CAF = 45^\circ$. Крім того, $\angle BDE = \angle BAE = 45^\circ$.

Отже,

$$\angle EKF = 2(180^\circ - \angle EDF) = \\ = 2\angle EDB = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ.$$

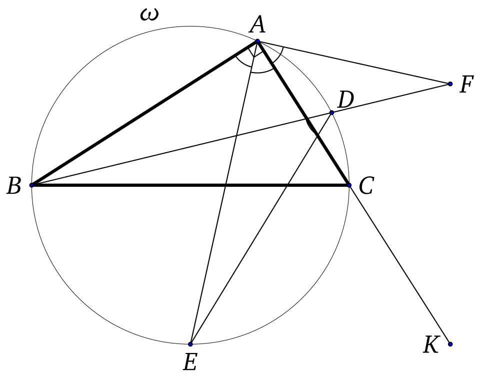


Рис. 3.35.

Оскільки $\angle EAF = 90^\circ = \angle EKF$, то навколо чотирикутника $AEKF$ можна описати коло. З умови задачі випливає, що $KE = KF$ (як радіуси описаного кола трикутника EDF). Оскільки KE і KF — рівні хорди кола $(AEKF)$, то будуть рівними дуги $\smile KE$ і $\smile KF$ кола $(AEKF)$. Звідси, за властивістю вписаних кутів, одержуємо, що AK — бісектриса кута EAF. За умовою задачі, AC — також бісектриса кута EAF. Це означає, що точки A, C і K — колінеарні, що і треба було довести. □

Задача 3.17. *В гострокутному трикутнику ABC сторона AC більша за сторону AB. Нехай M — середина BC, BE і CD — висоти трикутника ABC, K і L — середини відрізків ME і MD відповідно, а T — точка перетину прямої KL з прямою, що проходить через вершину A паралельно до сторони BC. Доведіть, що $TA = TM$.*

(Іран, 2011 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 3.36).

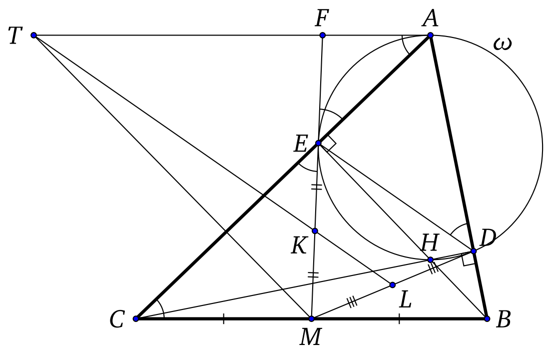


Рис. 3.36.

Оскільки $CD \perp AB$ і $BE \perp AC$, то чотирикутник $BDEC$ — вписаний в коло з центром M, тобто $MB = MD = ME = MC$. Звідси випливає, що $\angle ADE = \angle BCE = \angle BCA = \angle CAT$, бо $AT \parallel BC$ за умовою задачі. Це означає, що коло ω, яке описане навколо трикутника ADE, дотикається до прямої AT в точці A, бо $\angle ADE = \angle TAE$. Крім цього, точка H — точка перетину висот трикутника ABC — лежить на колі ω. Оскільки $MC = ME$, то $\angle MCE = \angle MEC = \angle AEF$, де F — точка перетину прямих ME і AT. Тому $\angle ADE = \angle AEF$, тобто пряма MF дотикається кола ω в точці E. Таким чином, ME і MD — дотичні до кола ω, що проведені із точки M.

Оскільки K і L — середини ME і MD, то пряма KL є радикальною віссю точки M і кола ω. Так як TA — дотична до ω, то $TA = AM$, що і треба було довести. $\square$

Задача 3.18. *Нехай H — точка перетину висот AD, BE і CF гострокутного різностороннього трикутника ABC, AP і HQ — перпендикуляри, що опущені із точок A і H на пряму EF відповідно. Позначимо через R — точку перетину прямих PD і HQ. Доведіть, що $HQ = HR$.*

(США, 2011 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 3.37).

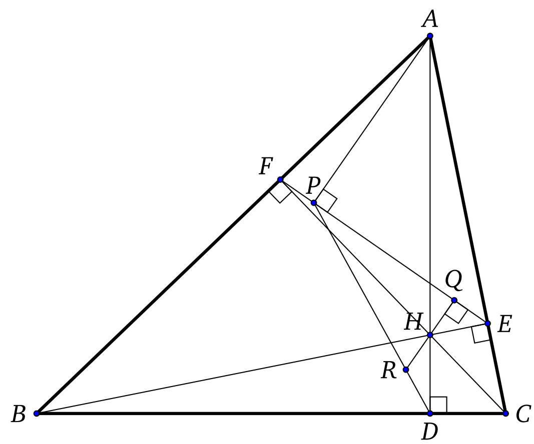


Рис. 3.37.

Оскільки $\angle HFA = 90^\circ = \angle HEA$, то чотирикутник $AEHF$ — вписаний. Звідси випливає, що $\angle HEF = \angle HAF$. Тому, $\Delta EQH \sim \Delta AFH$. Звідки випливає, що

$$\frac{HQ}{HF} = \frac{HE}{HA}. \qquad (1)$$

Далі, оскільки $HR \parallel AP$, то $\Delta DHR \sim \Delta DAP$. Тому

$$\frac{HD}{HR} = \frac{AD}{AP}.$$

Оскільки чотирикутник $BFEC$ — вписаний (бо $\angle BFC = 90^\circ = \angle BEC$), то $\angle AEF = \angle ABC$ і $\angle AFE = \angle ACB$, тобто $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ (за двома кутами). Тому

$$\frac{AD}{AP} = \frac{AB}{AE}.$$

Оскільки $\angle ABE = \angle ACF = \angle HCE$, то $\Delta ABE \sim \Delta HCE$. Тому

$$\frac{AB}{AE} = \frac{HC}{HE}.$$

Із останніх трьох рівностей випливає, що

$$\frac{HD}{HR} = \frac{HC}{HE}. \qquad (2)$$

Далі, $\angle BAD = \angle BCF$, тобто $\Delta AFH \sim \Delta CDH$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{HF}{HD} = \frac{HA}{HC}. \qquad (3)$$

Перемножуючи рівності (1), (2) і (3), одержуємо:

$$\frac{HQ}{HF} \cdot \frac{HD}{HR} \cdot \frac{HF}{HD} = \frac{HE}{HA} \cdot \frac{HC}{HE} \cdot \frac{HA}{HC}$$

$$\frac{HQ}{HR} = 1.$$

Звідки слідує, що $HQ = HR$. □

Розділ 4

Застосування класичних теорем планіметрії

У цьому розділі в систематичному вигляді викладено основний теоретичний матеріал, необхідний для розв'язання олімпіадних задач на доведення перетину трьох прямих в одній точці, на колінеарність трьох точок і циклічність чотирьох точок. Теореми, які дозволяють це зробити, називають **класичними теоремами** планіметрії. Їх застосування, у багатьох випадках, є оригінальним розв'язуванням багатьох олімпіадних планіметричних задачі підвищеної складності.

4.1. Коло дев'яти точок та наслідки з нього

Для будь-якого трикутника існують *описане коло, вписане коло* і три *зовнівписаних кола*, які вивчаються у шкільному курсі геометрії. Однак, існує ще одне коло, яке називають **колом дев'яти точок трикутника**.

Теорема 4.1. *У будь-якому трикутнику ABC основи висот, середини сторін, середини відрізків, що з'єднують ортоцентр H з вершинами, лежать на одному колі, з центром у середині E відрізка OH і радіусом $\frac{1}{2}R$, де O — центр описаного кола трикутника ABC і R — його радіус.*

Доведення. *1-й спосіб.* Нехай A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, CA, AB трикутника ABC, H_1, H_2, H_3 — основи відповідних висот і A_2, B_2, C_2 — середини відрізків AH, BH, CH відповідно (рис. 4.1).

Тоді чотирикутники $B_1C_1B_2C_2$ і $C_1A_1C_2A_2$ є прямокутниками. Справді, відрізки B_1C_1 і B_2C_2 як середні лінії трикутників ABC і HBC паралельні BC і дорівнюють її половині. Тому, чотирикутник $B_1C_1B_2C_2$ — паралелограм. Крім того, в ньому $B_1C_2 \parallel AH$, але $AH \perp BC$, тому $B_1C_2 \perp B_2C_2$. Для чотирикутника $C_1A_1C_2A_2$ доведення аналогічне. Ці прямокутники мають спільну діагональ C_1C_2. Тому, їх діагоналі рівні і перетинаються в одній точці E.

Отже, точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежать на одному колі з центром E. Так як з точок H_1, H_2, H_3 діаметри цього кола видно під прямими кутами , то і ці точки йому належать. Трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом подібності $k = \frac{1}{2}$, внаслідок чого, радіус описаного біля нього

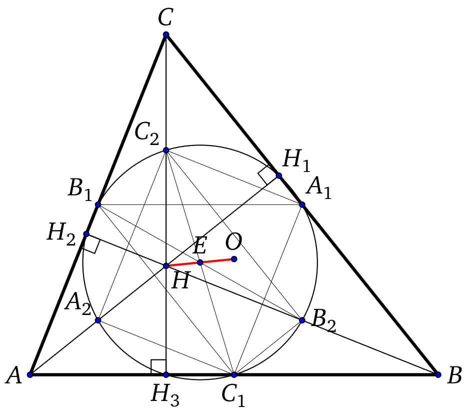


Рис. 4.1.

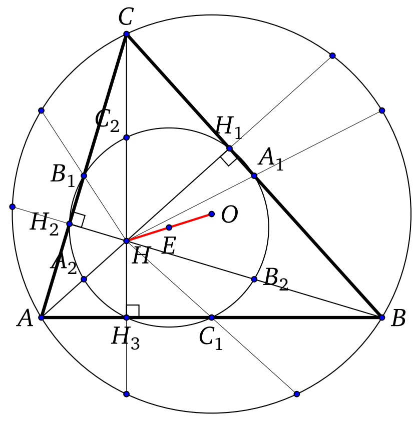


Рис. 4.2.

кола вдвічі менший радіуса R описаного кола навколо трикутника ABC. Трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ симетричні відносно точки E. Отже, їх ортоцентри O і H симетричні відносно E (O — центр описаного кола трикутника ABC).

2-й спосіб. Візьмемо до уваги, що точки, симетричні ортоцентру H трикутника відносно його сторін і відносно середин сторін, належать описаному колу трикутника (рис. 4.2). Задамо гомотетію з центром H і коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$. При цій гомотетії прообразами дев'яти точок, що розглядаються в теоремі, є точки описаного кола трикутника ABC. Гомотетія відображає описане навколо трикутника ABC коло $(O; R)$ на коло $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$, якому належать усі дев'ять зазначених у теоремі точок. Оскільки $O \to E$, то E — середина OH. □

Коло $\left(E; \frac{1}{2}R\right)$ називають **колом дев'яти точок трикутника** ABC.

Отже, коло дев'яти точок трикутника гомотетичне його описаному колу відносно ортоцентра цього трикутника. Коло дев'яти точок трикутника ABC є описаним навколо його серединного трикутника $A_1B_1C_1$ і навколо його ортотрикутника $H_1H_2H_3$.

Наслідками цього відображення будуть наступні твердження:

1) Точки, які симетричні ортоцентру H трикутника ABC відносно прямих, які містять його сторони, лежать на описаному колі трикутника ABC.

2) Точки, які симетричні ортоцентру H трикутника ABC відносно середин його сторін, лежать на описаному колі трикутника ABC. При цьому, відрізки, які з'єднують вершини з відповідними відображеними точками, будуть діаметрами описаного кола.

Олімпіадні задачі

Задача 4.1. *Нехай O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC, BB' — його діаметр, H — ортоцентр цього трикутника. Нехай M і N — середини відрізків HB і HC відповідно. Відомо, що чотирикутник $MHON$ — вписаний. Доведіть, що $B'N = \frac{1}{2}AC$.*

(Іран, відбір на ММО, 2010 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.3).

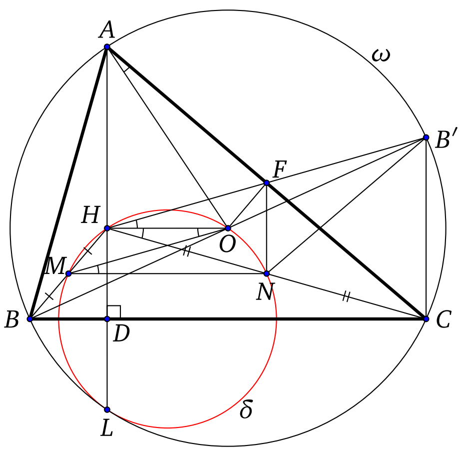


Рис. 4.3.

Нехай F — середина AC, AD — висота трикутника ABC. Скористаємося наслідками кола дев'яти точок. За вище зазначеними наслідками, одержуємо, що точки H, F, B' — колінеарні, причому F — середина HB', бо гомотетія з центром у точці H і коефіцієнтом $k = 2$ відображає точку F у точку B', яка лежить на описаному колі ω трикутника ABC. Крім того, ця гомотетія відображає точку D в точку L, яка також лежить на колі ω, причому $HD = DL$. Ця ж гомотетія відображає описане коло δ трикутника MHN на описане коло ω_1 трикутника BHC (його на рисунку немає). Так як $\angle BHC = \angle BLC = 180^\circ - \angle A$, то радіуси кіл ω і ω_1 будуть однаковими і дорівнюють R. Враховуючи коефіцієнт гомотетії, одержуємо, що радіус кола δ дорівнює $\frac{1}{2}R$. Оскільки, за умовою, коло δ проходить через точку O, то коло δ дотикається кола ω.

Так як F — середина HB' і O — середина BB', то OF — середня лінія трикутника $HB'B$, тобто $OF \parallel BH$ і $OF = \frac{1}{2} \cdot BH = MH$. Звідси випливає, що $MHFO$ — паралелограм. Тому $HF \parallel MO$. Крім того, $MN \parallel BC$, як середня лінія трикутника BHC. Із цих двох паралельностей і властивостей вписаних кутів, матимемо:

$$\angle FHO = \angle HOM = \angle HNM = \angle HCB = 90^\circ - \angle B =$$
$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = \angle FAO,$$

тобто $\angle FHO = \angle FAO$. Ця рівність кутів означає, що точки O, H, A, F — циклічні, а з циклічності цих точок випливає, що

$$\angle OHA = 180^\circ - \angle OFA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

тобто $OH \perp AD$. Так як $BC \perp AD$ і $MN \parallel BC$, то $MN \perp AD$. Звідси випливає, що $OH \parallel MN \parallel BC$. Крім того, випливає що L — точка дотику кіл ω і δ, бо OL дорівнює діаметру кола δ і $\angle OHL = 90°$. Таким чином, $\angle NMO = \angle OHF$ як кути з паралельними сторонами, а за властивістю вписаних кутів, $\angle NMO = \angle NHO$, тобто $\angle NHO = \angle OHF$. А це означає, що HO — бісектриса $\angle NHF$. Далі, оскільки BB' — діаметр кола ω, то $B'C \perp BC$, $OH \perp B'C$. Так як HO містить висоту і бісектрису трикутника $B'HC$, то трикутник $B'HC$ — рівнобедрений. Оскільки FN — його середня лінія, то $CNFB'$ — рівнобедрена трапеція. Враховуючи, що діагоналі рівнобедреної трапеції рівні, знаходимо

$$B'N = CF = \frac{1}{2} \cdot AC.$$

що і треба було довести. □

Задача 4.2. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, в якому $AB \neq AC$. Нехай ω — описане коло цього трикутника, H — його ортоцентр, O — центр кола ω, M — середина сторони BC. Коло δ з діаметром AM перетинає вдруге коло ω у точці P, а пряма AM перетинає вдруге коло ω у точці N. Доведіть, що прямі AP, OH і BC перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли $AH = HN$.*

(Франція, відбір на ММО, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.4).

Нехай K — діаметрально протилежна точка до точки A у колі ω. Скористаємося наслідками кола дев'яти точок. Тоді, M — середина відрізка KH, бо $BHCK$ — паралелограм. Отже, точки K, M, H, P — колінеарні, причому $\angle APK = \angle APM = 90°$. Нехай D — точка перетину прямих AP і BC. Тоді H — ортоцентр трикутника ADM, тобто $DH \perp AM$. Це означає, що пряма OH проходитиме через точку D тоді і тільки тоді, коли $OH \perp AN$, тобто коли OH — серединний перпендикуляр до хорди AN кола ω, а це означає, що коли $HA = HN$, що і треба було довести. □

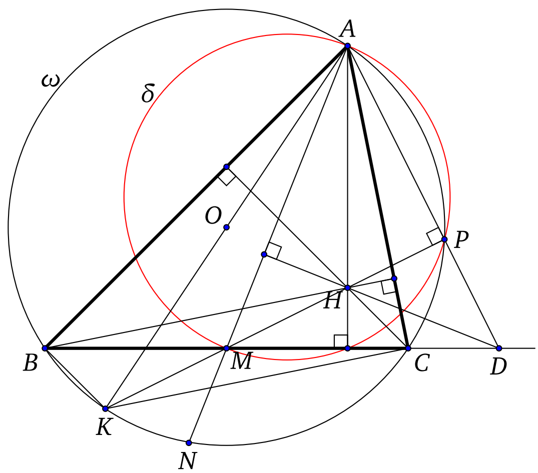


Рис. 4.4.

Задача 4.3. (В. Протасов) *На площині задано трикутник ABC, O — центр описаного кола цього трикутника. Для довільної точки X площини трикутника через X_1, X_2, X_3 будемо позначати точки, які симетричні точці X відносно прямих BC, CA, AB відповідно. Доведіть, що для довільної точки M прямі, що проходять через середини відрізків O_1O_2 і M_1M_2, O_2O_3 і M_2M_3, O_3O_1 і M_3M_1, перетинаються в одній точці.*

(Росія, Міжнародна олімпіада з геометрії ім. І.Ф. Шаригіна, 2005 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.5).

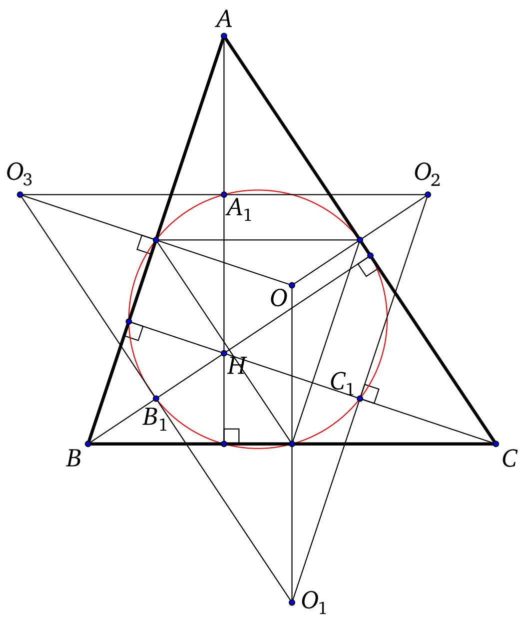


Рис. 4.5.

Доведемо, що ці прямі перетинаються в точці, яка лежить на колі дев'яти точок трикутника ABC.

Нехай H — ортоцентр трикутника ABC. Тоді середини відрізків O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 співпадають з серединами відрізків HA, HB, HC, які будемо позначати A_1, B_1, C_1 відповідно. Дійсно, сторони трикутника $O_1O_2O_3$ паралельні середнім лініям трикутника ABC і в двічі більші за них, оскільки відображаються один в одного гомотетією з центром O і коефіцієнтом 2. Отже, трикутник $O_1O_2O_3$ центральносиметричний трикутнику ABC. Це означає, що пряма, яка проходить через вершину C і середину O_1O_2, паралельна прямій, яка проходить через O_3 і середину AB, тобто співпадає з висотою трикутника ABC, а H є центром гомотетії трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

Далі, нехай M — довільна точка в площині трикутника ABC, а D_1, D_2, D_3 — середини відрізків M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2. Тоді, зокрема,

$$\overrightarrow{D_3C_1} = \frac{\overrightarrow{D_3O_1} + \overrightarrow{D_3O_2}}{2}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_1O_1}$ і $\overrightarrow{M_2O_2}$ одержуються один із одного поворотом навколо точки C на кут рівний $2\angle C$, а також мають однакову довжину, то вектор $\overrightarrow{D_3C_1}$ утворює з кожним із них кут, рівний $\angle C$. Крім того, вектори $\overrightarrow{M_1O_1}$ і $\overrightarrow{M_2O_2}$ відображаються у вектор $\overrightarrow{MO}$ при симетрії відносно прямих BC і CA відповідно. А тому, вектори $\overrightarrow{D_3C_1}$ і $\overrightarrow{MO}$ утворюють рівні кути з бісектрисою кута C, а отже рівні кути з бісектрисою кута C_1 трикутника $A_1B_1C_1$ (див. рис. 4.6).

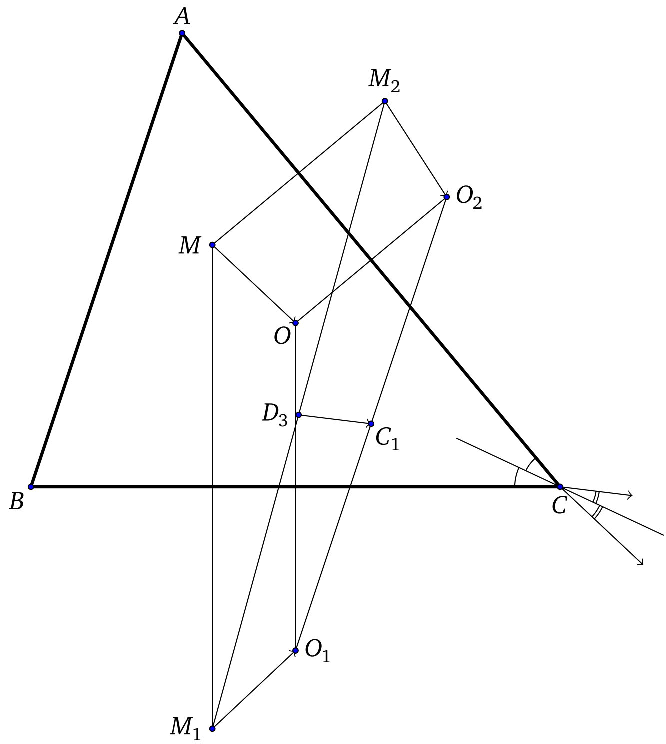


Рис. 4.6.

Провівши аналогічні міркування для двох інших середин, приходимо до висновку, що прямі, які проходять через A_1, B_1, C_1 і середини трикутника $M_1M_2M_3$ відповідно, симетричні відносно бісектрис трикутника $A_1B_1C_1$ прямим, які проходять через A_1, B_1, C_1 і паралельні прямій MO. Далі потрібно скористатися наступною класичною теоремою планіметрії.

Теорема. *Трійка прямих, що проходить через вершини трикутника, перетинається в одній точці, яка лежатиме на описаному колі цього трикутника, тоді і тільки тоді, коли прямі, що симетричні даним відносно бісектрис відповідних кутів трикутника, паралельні між собою.* (Просте доведення використовує простий підрахунок кутів.)

Згідно цієї теореми трійка прямих в нашій задачі перетинається на описаному колі трикутника $A_1B_1C_1$, тобто на колі дев'яти точок трикутника ABC. □

4.2. Теорема Сімсона і теорема Птоломея

Ці дві теореми є доповненнями до критеріїв вписаного чотирикутника.

Теорема 4.2 (Сімсона). *Для того, щоб чотири точки належали одному колу, необхідно і достатньо, щоб ортогональні проекції однієї з них на три прямі, що визначаються трьома іншими точками, були колінеарні.*

Пряма, на якій лежать ці проекції, називається **прямою Сімсона** точки кола, описаного навколо трикутника.

Доведення. Доведемо **необхідність** зазначеної в теоремі умови існування описаного навколо чотирикутника $ABCD$ кола. Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло і A_1, B_1, C_1 — ортогональні проекції вершини D на прямі BC, CA, AB відповідно (рис. 4.7).

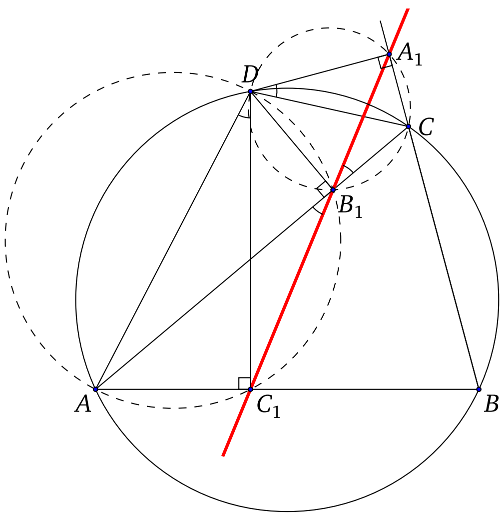


Рис. 4.7.

З точок A_1 і B_1 сторону CD видно під прямими кутами, тому чотирикутник A_1CB_1D вписаний в коло з діаметром CD. Так само чотирикутник AC_1B_1D вписаний в коло з діаметром AD. Звідси випливають рівності вписаних в ці кола кутів: $\angle CDA_1 = \angle A_1B_1C$ і $\angle ADC_1 = \angle AB_1C_1$. Крім того, $\angle DAC_1 = \angle DCA_1$, так як кожен з цих кутів в сумі з кутом BCD становить 180°. Це остання рівність забезпечує рівність кутів ADC_1 і CDA_1 (в прямокутних трикутниках ADC_1 і CDA_1). В результаті маємо рівність кутів A_1B_1C і AB_1C_1, яка означає колінеарність точок A_1, B_1, C_1, бо точки A, B_1, C колінеарні.

Достатність. Нехай точки A_1, B_1, C_1 — колінеарні. Побудуємо кола з діаметрами AD і CD. Перше з них містить точки B_1 і C_1, друге — точки A_1 і $B-1$. З рівності вертикальних кутів AB_1C_1 і A_1B_1C випливає рівність кутів ADC_1 і CDA_1, а потім і рівність кутів DAC_1 і DCA_1. Тому, $\angle DAB + \angle DCB = 180°$. Це означає, що чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. □

Теорему Сімсона можна сформулювати ще й так: *ортогональні проекції точки D на прямі, що містять сторони трикутника ABC, колінеарні тоді і тільки тоді, коли ця точка D лежить на описаному навколо цього трикутника колі.*

Із теореми Сімсона випливають наступні твердження.

Наслідок 1. Точку D описаного кола трикутника ABC симетрично відобразили відносно сторін трикутника ABC або їх продовжень. Одержані три точки будуть лежати на одній прямій, яку називають **прямою Штейнера** точки D відносно трикутника ABC.

Наслідок 2. Пряма Штейнера проходить через точку H — точку перетину висот трикутника ABC.

Доведення цих наслідків пропонуємо здійснити читачам самостійно.

Теорема 4.3 (Птоломея). *Для того, щоб навколо чотирикутника можна було описати коло, необхідно і достатньо, щоб сума добутків його протилежних сторін дорівнювала добутку діагоналей.*

Доведення. Ця теорема може бути отримана як наслідок попередньої теореми Сімсона. Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. Користуючись тими ж позначеннями і колом з діаметром CD, за теоремою синусів отримаємо: $A_1B_1 = CD\sin\angle A_1CB_1 = CD\sin\angle BCA$. За теоремою синусів з трикутника ABC маємо: $AB = 2R\sin\angle BCA$ (R — радіус кола трикутника ABC). Тому,

$$A_1B_1 = \frac{AB\cdot CD}{2R}.$$

Аналогічно доводиться, що

$$B_1C_1 = \frac{BC\cdot AD}{2R} \quad \text{і} \quad C_1A_1 = \frac{CA\cdot BD}{2R}.$$

Оскільки точки A_1, B_1, C_1 — колінеарні, то

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1.$$

Підставивши у цю рівність, доведені вище, три рівності, одержимо:

$$\frac{AB\cdot CD}{2R} + \frac{BC\cdot AD}{2R} = \frac{AC\cdot BD}{2R},$$

тобто

$$AB\cdot CD + BC\cdot AD = AC\cdot BD.$$

Тут істотно використаний той факт, що точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1. Це завжди має місце при розташуванні точок A, B, C, D на колі саме в такій послідовності.

Навпаки, якщо співвідношення $AB\cdot CD + BC\cdot AD = AC\cdot BD$ виконано, то точка D лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC. Дійсно, для будь-якої точки D площини і її ортогональних проекцій A_1, B_1, C_1 на прямі BC, CA, AB маємо рівності:

$$A_1B_1 = \frac{AB\cdot CD}{2R}, B_1C_1 = \frac{BC\cdot AD}{2R}, C_1A_1 = \frac{CA\cdot BD}{2R},$$

в силу яких співвідношення $AB\cdot CD + BC\cdot AD = AC\cdot BD$ набуває вигляду: $A_1B_1\cdot 2R + B_1C_1\cdot 2R = A_1C_1\cdot 2R$. Звідки $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. Це означає, що точки A_1, B_1, C_1 — колінеарні. За достатньою умовою теореми Сімсона точка D лежить на описаному колі трикутника ABC. $\square$

Олімпіадні задачі

Задача 4.4. *Нехай H — ортоцентр гострокутного трикутника ABC, ω — описане коло навколо нього. На дузі BC кола ω, яка не містить точки A, відмітили точку P, а на дузі AC кола ω, яка не містить точку B, відмітили точку M так, що MP проходить через точку H. Нехай K — така точка кола ω, що пряма KM паралельна прямій Сімсона трикутника ABC відносно точки P. Через Q позначили таку точку кола ω, що PQ і BC — паралельні. Нехай J — точка перетину прямих BC і KQ. Доведіть, що трикутник MJK — рівнобедрений.*

(Китай, відбір на ММО, 2011 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 4.8).

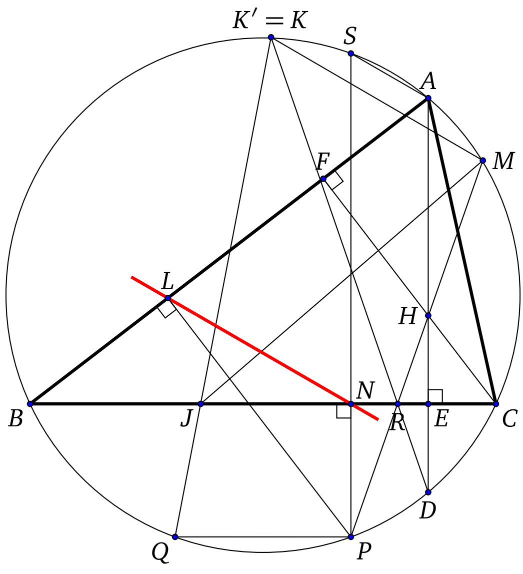


Рис. 4.8.

Будемо доводити, що $JK = JM$. Нехай AE і CF — висоти трикутника ABC. Тоді H — точка перетину цих висот. Нехай пряма AH перетинає описане коло ω — в точці D. Тоді, як відомо, $HE = ED$. Нехай PN і PL — перпендикуляри, що опущені із точки P на прямі BC і AB відповідно, а S — точка перетину променя PN з описаним колом ω. Тоді, пряма NL — пряма Сімсона. За умовою задачі, $MK \parallel NL$.

Далі, позначимо через R — точку перетину прямої MP зі стороною BC, а через K' — другу точку перетину прямої DN з описаним колом ω. Тоді, з того, що трикутник HRD — рівнобедрений, одержуємо:

$$\angle K'DA = \angle RDH = \angle DHR = \angle DHP.$$

Оскільки $PS \perp BC$ і $DA \perp BC$, то $PS \parallel DA$. Тому, $\angle DHP = \angle SPH = \angle SPM$, тобто $\angle K'DA = \angle SPM$. Так як ці кути вписані, то вони спираються на рівні дуги, які стягуються рівними хордами, тобто $SM = AK'$. Це означає, що $MK' \parallel AS$. Так як $\angle SAL = \angle SAB = \angle SPB = \angle NPB$, а чотирикутник $BLNP$ — вписаний, бо $\angle BLP = \angle BNP = 90°$, то $\angle NPB = \angle ALN$, тобто $\angle SAL = \angle ALN$. Ця рівність кутів означає, що $SA \parallel NL$, тобто SA — паралельна прямій Сімсона. Оскільки пряма MK також паралельна прямій Сімсона, то прямі MK і MK' паралельні, тобто вони співпадають і тому $K' = K$.

Далі, враховуючи паралельність BC і PQ, а також циклічність точок P, Q, K, M, одержуємо, що чотирикутник $RJKM$ — вписаний. Звідси одержуємо, що

$$\angle KMJ = \angle KRJ = \angle DRE = \angle HRE = \angle MRE = \angle MKJ.$$

тобто $\angle KMJ = \angle MKJ$. Рівність цих кутів і доводить, що трикутник MJK — рівнобедрений, що і треба було довести. □

Задача 4.5. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, а X — довільна точка дуги BC описаного кола трикутника ABC, яка не містить точку A. Нехай P і Q — основи перпендикулярів, опущених із точки X на прямі CA і CB відповідно. Позначимо через R — точку перетину прямої PQ із прямою, що містить висоту BD трикутника ABC. Далі, розглядається пряма l, яка проходить через точку P і паралельна до прямої XR. Доведіть, що при переміщенні точки X по дузі BC, прямі l проходитимуть через фіксовану точку площини трикутника ABC.*

(США, відбір на ММО, 2014 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.9).

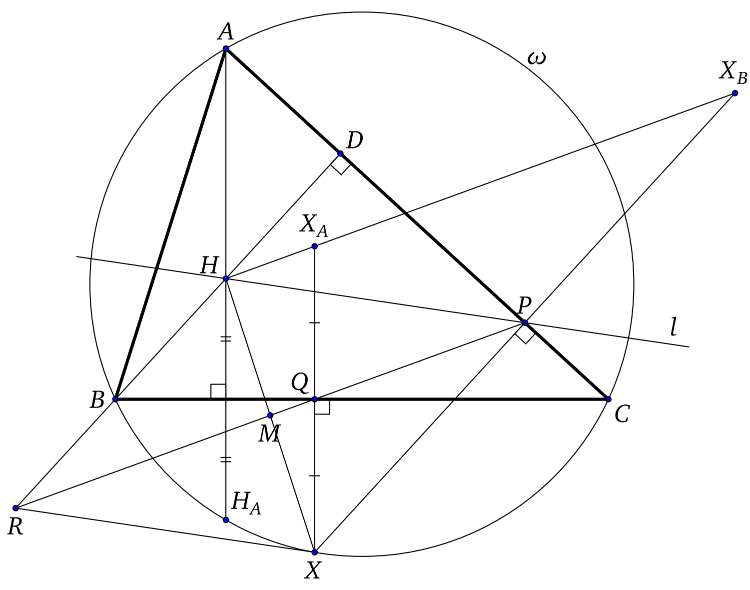


Рис. 4.9.

Позначимо через H — ортоцентр трикутника ABC, через M — середину відрізка XH, а через ω — коло, описане навколо трикутника ABC. Нехай H_A — точка, симетрична до точки H відносно прямої BC, а X_A і X_B — точки, симетричні до точки X відносно прямих BC і CA відповідно. Тоді $XP = PX_B$, $XQ = QX_A$. Як відомо, пряма PQ — пряма Сімсона, а пряма X_AX_B — пряма Штейнера. Оскільки пряма Штейнера проходить через точку H — ортоцентр трикутника ABC, то пряма Сімсона проходить через точку M — середину відрізка XH. Крім того, пряма Сімсона і пряма Штейнера паралельні між собою. Таким чином, точки H, X_A, X_B — колінеарні і точки R, M, P також колінеарні. Оскільки $RP \parallel RX_B$ і $RH \parallel PX_B$ (бо $RH \perp AC$ і $X_BP \perp AC$), то RHX_BP — паралелограм. Звідси випливає, що $RH = PX_B$ і $RH \parallel PX_B$. Це означає, що $RH = XP$ і $RH \parallel XP$, тобто чотирикутник $RHPX$ — паралелограм. Тоді $PH \parallel XR$. А це означає, що пряма l проходить через точку H, яка є фіксованою при зміні вказаного положення точки X, що і треба було довести. □

Задача 4.6. *Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, для якого трикутники BCD і CDA не є рівносторонніми. Доведіть, що коли пряма Сімсона точки A відносно трикутника BCD буде перпендикулярною до прямої Ейлера трикутника BCD, то пряма Сімсона точки B відносно трикутника CDA буде перпендикулярною до прямої Ейлера трикутника CDA.*

(Румунія, відбір на ММО, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.10). Позначимо через ω — коло, в яке вписаний чотирикутник $ABCD$.

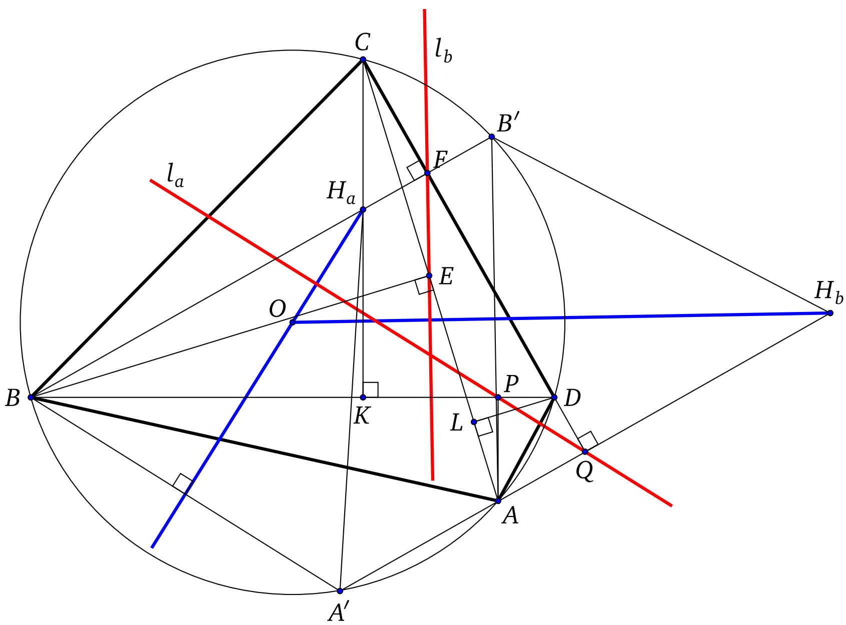


Рис. 4.10.

Нехай H_a — точка перетину висот BF і CK в трикутнику BCD, а H_b — точка перетину висот AQ і DL в трикутнику ACD. Опустимо перпендикуляр AP з точки A на пряму BD, тоді пряма l_a, яка проходить через точки P і Q — пряма Сімсона точки A відносно трикутника BCD. Опустимо перпендикуляр BE з точки B на пряму CA, тоді пряма l_b, яка проходить через точки E і F — пряма Сімсона точки B відносно трикутника CDA. За умовою пряма

OH_a — пряма Ейлера трикутника BCD перпендикулярна прямій l_a. Потрібно довести, що пряма OH_b — пряма Ейлера трикутника CDA перпендикулярна прямій l_b.

Нехай пряма BH_a перетинає вдруге коло ω у точці B', а пряма AH_b перетинає вдруге коло ω у точці A'. Відомо, що точки, які симетричні ортоцентру трикутника відносно прямих, які містять його сторони, лежать на описаному колі цього трикутника. Тому, з того, що $BH_a \perp CD$ і $AH_b \perp CD$ випливає, що F і Q — середини $B'H_a$ і $A'H_b$ відповідно. Спочатку доведемо, що $AB' \parallel l_b$. Дійсно, оскільки $\angle BEC = \angle BFC = 90°$, то чотирикутник $BEFC$ — циклічний. Тому, за властивістю вписаних кутів, матимемо:

$$\angle BB'A = \angle BCA = \angle BCE = \angle BFE.$$

тобто $\angle BB'A = \angle BFE$. А це означає, що $AB' \parallel l_b$. Аналогічно доводиться, що $BA' \parallel l_a$.

А тепер перейдемо до доведення твердження задачі. Оскільки $OH_a \perp l_a$ і $l_a \parallel BA'$, то $OH_a \perp BA'$. Так як BA' — хорда кола ω і OH_a — пряма Ейлера, що перпендикулярна до цієї хорди, то OH_a — серединний перпендикуляр цієї хорди. Це означає, що $BH_a = A'H_a$. Так як CD — вісь симетрії відрізків $B'H_a$ і $A'H_b$, то $A'H_a = H_bB'$. Таким чином,

$$H_bB' = BH_a. \qquad (\star)$$

Далі, скористаємося тим, що відстань від вершини трикутника до точки перетину його висот дорівнює подвоєній відстані від центра описаного кола до протилежної сторони. Тому, якщо позначити через d відстань від точки O до сторони CD, з трикутника BCD знаходимо, що $BH_a = 2d$, а з трикутника ACD знаходимо, що $AH_b = 2d$. Таким чином,

$$AH_b = BH_a. \qquad (\star\star)$$

Із $(\star)$ і $(\star\star)$ одержуємо, що $H_bB' = AH_b$. Крім того, $OB' = OA$, як радіуси кола. Тому, пряма Ейлера OH_b трикутника CDA є серединним перпендикуляром до відрізка AB'. Так як $AB' \parallel l_b$ і $OH_b \perp AB'$, то $OH_b \perp l_b$, що і треба було довести. □

Задача 4.7. *Коло ω вписане в чотирикутник $ABCD$. Нехай I — центр цього кола. Відомо, що $(AI + DI)^2 + (BI + CI)^2 = (AB + CD)^2$. Доведіть, що $ABCD$ — рівнобедрена трапеція.*

(Математична олімпіада США, 2004 р.)

Розв'язання. Спочатку доведемо наступне допоміжне твердження, яке стосується співвідношень для описаних трикутників.

Лема 1. *Якщо I — центр кола ω, вписаного в чотирикутник $ABCD$, то виконується наступне співвідношення:*

$$IB^2 + \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{ID} = AB \cdot BC.$$

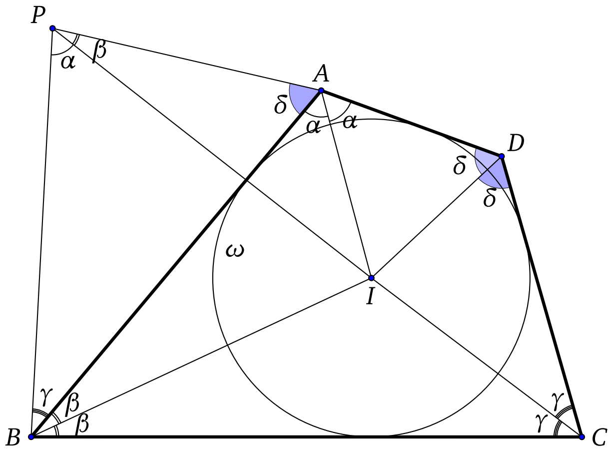


Рис. 4.11.

Доведення. Зробимо рисунок до умови задачі і леми (рис. 4.11).

Оскільки коло ω вписане в чотирикутник $ABCD$, то за теоремою про дотичні, матимемо: $\angle DAI = \angle BAI = \alpha$, $\angle ABI = \angle CBI = \beta$, $\angle BCI = \angle DCI = \gamma$, $\angle CDI = \angle ADI = \delta$. З того, що сума кутів довільного чотирикутника дорівнює 360°, то $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Побудуємо точку P, яка лежить зовні чотирикутника $ABCD$ таку, щоб трикутники DIC і ABP були подібними (див. рисунок 4.11). Тоді, $\angle PAB = \angle IDC = \delta$ і $\angle PBA = \angle ICD = \gamma$. Тому,

$$\angle PAI + \angle PBI = (\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180^\circ.$$

Це означає, що чотирикутник $AIBP$ — вписаний в деяке коло. Звідси за властивістю вписаних кутів, одержуємо: $\angle API = \angle PBI = \beta$, $\angle BPI = \angle BAI = \alpha$, $\angle AIP = \angle ABP = \gamma$ і $\angle BIP = \angle BAP = \delta$. За теоремою Птоломея виконується співвідношення:

$$BP \cdot AI + AP \cdot BI = PI \cdot AB.$$

Звідки

$$BP \cdot \frac{AI}{PI} + BI \cdot \frac{AP}{PI} = AB. \qquad (\star)$$

А з подібності трикутників AIP і ICB (за двома кутами), одержуємо:

$$\frac{AI}{IP} = \frac{IC}{CB} \text{ та } \frac{AP}{IP} = \frac{IB}{CB}.$$

Тоді, співвідношення $(\star)$ набуває вигляду:

$$BP \cdot \frac{CI}{BC} + \frac{BI^2}{BC} = AB,$$

тобто

$$BP \cdot CI + BI^2 = AB \cdot BC. \qquad (\star\star)$$

З подібності трикутників BIP і IDA (за двома кутами), одержуємо

$$\frac{BP}{BI} = \frac{IA}{ID},$$

тобто

$$BP = \frac{IB \cdot IA}{ID}.$$

А тому, співвідношення ($\star\star$) набуває такого вигляду:

$$\frac{IB \cdot IA}{ID} \cdot CI + BI^2 = AB \cdot BC,$$

тобто

$$IB^2 + \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{ID} = AB \cdot BC,$$

що і завершує доведення леми. Зауважимо, що це співвідношення леми записане відносно вершини B. Аналогічні співвідношення матимуть місце і відносно інших вершин. □

А тепер переходимо до розв'язання самої задачі. За лемою, відносно вершин B і C, матимемо:

$$IB^2 + \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{ID} = AB \cdot BC \quad \text{та} \quad IC^2 + \frac{IB \cdot IC \cdot ID}{IA} = CD \cdot BC.$$

Додавши ці співвідношення, одержимо:

$$IB^2 + IC^2 + \left(\frac{AI}{DI} + \frac{DI}{AI}\right) \cdot BI \cdot CI = BC\,(AB + CD)\,.$$

За нерівністю Коші, між середнім арифметичним і середнім геометричним, одержуємо:

$$\frac{AI}{DI} + \frac{DI}{AI} \geqslant 2,$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $AI = DI$. Тому,

$$BC\,(AB + CD) \geq IB^2 + IC^2 + 2 \cdot IB \cdot IC = (IB + IC)^2,$$

тобто

$$BC\,(AB + CD) \geq (IB + IC)^2,$$

причому знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли $IA = AD$. Аналогічно доводиться, що

$$AD\,(AB + CD) \geq (IA + ID)^2,$$

причому знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли $IB = IC$. Додавши ці останні дві нерівності, одержимо:

$$(AI + DI)^2 + (BI + CI)^2 \leq AD\,(AB + CD) + BC\,(AB + CD)\,,$$

тобто

$$(AI + DI)^2 + (BI + CI)^2 \leq (AB + CD)\,(BC + AD)\,.$$

Оскільки чотирикутник $ABCD$ — описаний навколо кола ω, то

$$AB + CD = BC + AD.$$

Враховуючи цю рівність, одержуємо:

$$(AI + DI)^2 + (BI + CI)^2 \leq (AB + CD)^2,$$

причому знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли $IA = ID$ і $IB = IC$. Оскільки за умовою задачі виконується співвідношення

$$(AI + DI)^2 + (BI + CI)^2 = (AB + CD)^2$$

то, із коментаря для останньої нерівності, випливає, що з умови задачі випливає умова: $IA = ID$ і $IB = IC$, тобто $\alpha = \delta$ і $\beta = \gamma$. Оскільки $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$, то $\alpha + \beta = 90°$ і $\gamma + \delta = 90°$. А це означає, що

$$\angle DAB + \angle CBA = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180°,$$

тобто $AD \parallel BC$, причому $AB = CD$ як гіпотенузи рівних трикутників AIB та DIC. Таким чином, $ABCD$ — рівнобедрена трапеція, що і треба було довести. $\square$

4.3. Теорема Чеви

Теорема Чеви є критерієм перетину трьох прямих в одній точці і тому знаходить широке застосування в олімпіадних задачах на доведення і обчислення.

Теорема 4.4 (Чеви). *Нехай на прямих AB, BC, CA, що визначають трикутник ABC, дано точки C_1, A_1, B_1. Для того, щоб прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетиналися в одній точці або були паралельними, необхідно і достатньо, щоб*

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1. \qquad (\star)$$

Доведення. Спочатку доведемо **необхідність**. Нехай прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці P (рис. 4.12). Проведемо через вершину A трикутника ABC пряму, паралельну до прямої BC.

Із подібності трикутників AB_1N і BB_1C випливає, що

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Із подібності трикутників AC_1M і BCC_1 випливає, що

$$\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{MA}}.$$

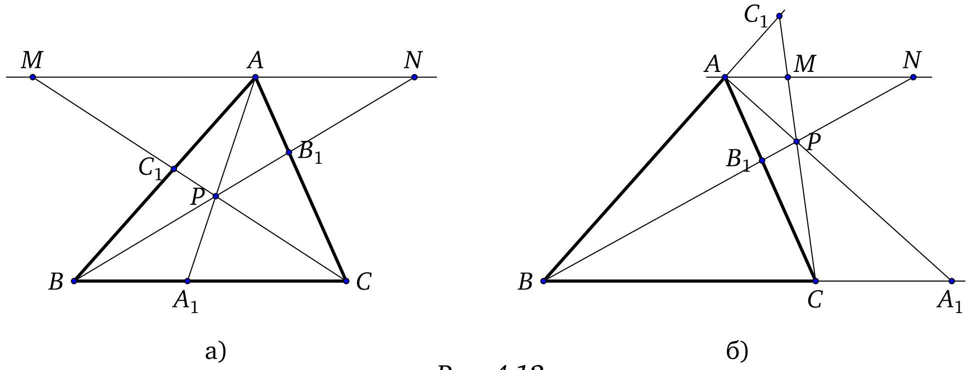


Рис. 4.12.

А за теоремою про пропорційні відрізки на паралельних прямих, одержуємо, що

$$\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{AN}}.$$

Перемножимо почленно три отримані пропорції. Враховуючи, що відношення однаково напрямлених векторів дорівнює відношенню їх довжин, а відношення протилежно напрямлених векторів дорівнює числу, яке протилежне відношенню їх довжин, отримуємо:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1.$$

Прямі AA_1, BB_1, CC_1 називають **чевіанами** точки P.

Нехай тепер прямі AA_1, BB_1 і CC_1 — паралельні (рис. 4.13).

Тоді, за теоремою про пропорційні відрізки на сторонах кута, одержуємо, що

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{BC}} \text{ і } \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CA_1}}.$$

Тому співвідношення також виконується.

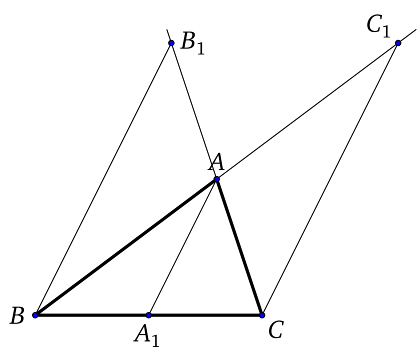


Рис. 4.13.

Достатність. Нехай виконується співвідношення:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1.$$

Потрібно довести, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці. Для двох прямих AA_1 і BB_1 можливі лише два випадки: а) вони перетинаються в деякій точці P; б) вони паралельні.

Розглянемо перший випадок, доведемо, що пряма CC_1 проходить через точку P. Припустимо, що це не так. Проведемо пряму CP, яка перетне пряму AB у точці C_2 (рис. 4.14).

Тоді, за необхідною умовою теореми Чеви

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}} = 1.$$

Тоді із цих двох співвідношень, одержуємо, що $\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}}$. Це співвідношення означає, що точки C_1 і C_2 співпадають. Отже точка P лежить на прямій CC_1.

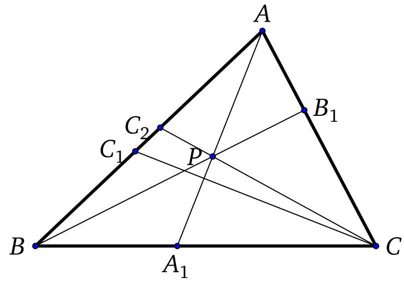


Рис. 4.14.

Якщо прямі AA_1 і BB_1 паралельні, то пряма CC_1 повинна бути їм паралельна, так як, якщо б CC_1 перетинала BB_1, то за доведеним вище через точку їх перетину проходила б пряма AA_1, що суперечить припущенню $AA_1 \parallel BB_1$. Доведення закінчено.

□

Якщо ввести до розгляду ***орієнтовані*** кути $\alpha_1 = \angle BAA_1$, $\alpha_2 = \angle A_1AC$, $\beta_1 = \angle CBB_1$, $\beta_2 = \angle B_1BA$, $\gamma_1 = \angle ACC_1$ і $\gamma_2 = \angle C_1CB$ (рис. 4.15), то співвідношення теореми Чеви може бути записаним в рівносильному вигляді через синуси цих кутів, які утворюють чевіани зі сторонами трикутника.

Дійсно, за теоремою синусів

$$\frac{AB_1}{\sin\beta_2} = \frac{AB}{\sin\angle AB_1B} \quad \text{і} \quad \frac{B_1C}{\sin\beta_1} = \frac{BC}{\sin\angle CB_1B}.$$

Оскільки синуси суміжних (однаково орієнтованих) кутів рівні, то одержуємо рівність (з урахуванням напрямку векторів):

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{AB\sin\beta_2}{B_1C\sin\beta_1}.$$

Аналогічно,

$$\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{AC\sin\alpha_2}{AB\sin\alpha_1} \quad \text{і} \quad \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{BC\sin\gamma_2}{BA\sin\gamma_1}.$$

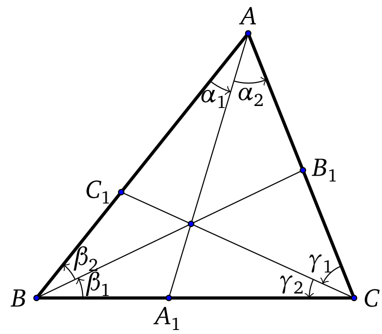


Рис. 4.15.

Тому

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \cdot \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}.$$

Таким чином, має місце таке твердження.

Теорема 4.5 (тригонометрична форма теореми Чеви). *Для того, щоб прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетиналися в одній точці або були паралельними, необхідно і достатньо, щоб виконувалося співвідношення*

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1. \qquad (\star\star)$$

Зокрема, якщо AA_1, BB_1, CC_1 — медіани трикутника ABC, то кожне із відношень лівої частини ($\star$) дорівнює 1, тобто співвідношення ($\star$) виконується, а тому медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці. Якщо AA_1, BB_1, CC_1 — бісектриси трикутника ABC, то $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, тобто співвідношення ($\star\star$) виконується. А це означає, що бісектриси довільного трикутника перетинаються в одній точці.

Олімпіадні задачі

Задача 4.8. *Нехай $ABCDE$ — опуклий п'ятикутник такий, що*

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \text{ та } \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Діагоналі BD і CE перетинаються в точці P. Доведіть, що пряма AP ділить сторону CD навпіл.

(Задача, запропонована США для ММО, 2006 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 4.16).

Нехай діагоналі AC і BD перетинаються в точці Q, а діагоналі AD і CE перетинаються в точці R, і нехай AP перетинає сторону CD в точці M. Нам потрібно довести, що M — середина CD.

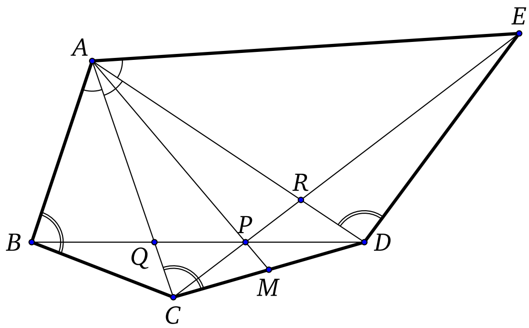


Рис. 4.16.

Для цього потрібно довести, що точки Q і R ділять відрізки AC і AD в однаковому відношенні

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{AR}{RD} \qquad (1)$$

(що еквівалентно паралельності $QR \parallel CD$).

Із заданих рівностей кутів випливає подібність трикутників ABC, ACD і ADE (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}.$$

Оскільки

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle CAD + \angle DAE = \angle CAE$$

і

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE},$$

то трикутники ABD і ACE подібні. Відрізки AQ та AR — відповідні бісектриси цих трикутників, тому

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AQ}{AR}.$$

Але з подібності трикутників ABC і ACD випливає, що $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$, тому

$$\frac{AQ}{AR} = \frac{AC}{AD}.$$

що еквівалентно (1).

А тепер застосуємо теорему Чеви до трикутника ACD: так як чевіани AM, CR і DQ перетинаються в одній точці, то

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DR}{RA} = 1.$$

Враховуючи (1), одержуємо, що $CM = MD$. □

Задача 4.9. *Дано трикутник ABC. Коло ω, яке проходить через точки A і B, перетинає сторони AC і BC у точках D і E відповідно. Промені BA і ED перетинаються в точці F, а прямі BD і CF перетинаються в точці M. Доведіть, що $MF = MC$ тоді і тільки тоді, коли $MB \cdot MD = MC^2$.*

(Математична олімпіада США, 2003 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.17).

Нехай спочатку $MB \cdot MD = MC^2$. Тоді

$$\frac{MC}{MD} = \frac{MB}{MC}.$$

Так як $\angle CMB = \angle DMC$, то трикутники CMB і BMC — подібні (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів, тобто $\angle MCD = \angle MBC$. Далі, чотирикутник $ABED$ — вписаний в коло ω, тому за властивістю вписаних кутів одержуємо, що $\angle DBE = \angle DAE$. Тому

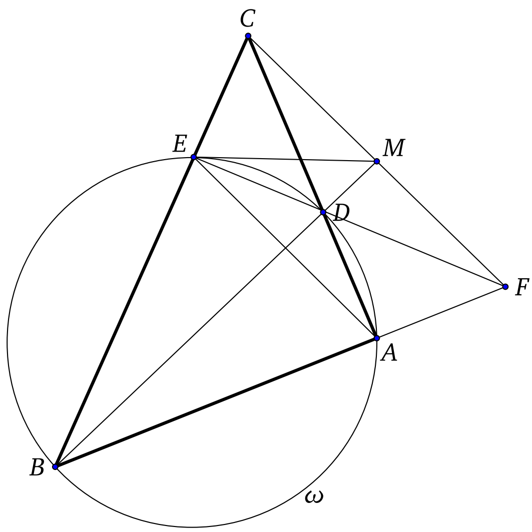


Рис. 4.17.

$$\angle MCD = \angle MBC = \angle DBE = \angle DAE,$$

тобто $\angle MCD = \angle DAE$. Оскільки ці кути внутрішні різносторонні, то $AE \parallel CF$. З паралельності прямих AE і CF випливає рівність кутів: $\angle AEF = \angle CFE$. Таким чином,

$$\angle MFD = \angle CFE = \angle AEF = \angle AED = \angle ABD = \angle FBM,$$

тобто $\angle MFD = \angle MBF$. Ця рівність кутів забезпечує подібність трикутників MFD і MBF (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

$$\frac{MF}{MB} = \frac{MD}{MF}.$$

тобто $MF^2 = MB \cdot MD$. Порівнюючи цю одержану рівність з припущенням, що $MB \cdot MD = MC^2$, одержуємо: $MF^2 = MC^2$, тобто $MC = MF$, що і треба було довести.

Нехай тепер $MC = MF$, тоді за теоремою Чеви з трикутника BCF і його чевіан BM, CA, FE, які перетинаються в одній точці D, отримуємо:

$$\frac{BA}{AF} \cdot \frac{FM}{MC} \cdot \frac{CE}{EB} = 1.$$

Враховуючи, що $\dfrac{FM}{MC} = 1$, одержуємо:

$$\frac{BA}{AF} = \frac{BE}{EC}.$$

Це означає, що $AE \parallel CF$. Із цієї паралельності випливає, що $\angle DCM = \angle DAE$. Оскільки чотирикутник $ABED$ — циклічний, то $\angle DAE = \angle DBE$. Тому

$$\angle DCM = \angle DAE = \angle DBE = \angle CBM.$$

Так як $\angle CBM = \angle DCM$ і $\angle CMB = \angle DMC$, то трикутники BCM і CDM подібні. З подібності трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

$$\frac{CM}{DM} = \frac{BM}{CM},$$

тобто $CM^2 = BM \cdot DM$.

Отже, ми довели, що $CM = FM$ тоді і тільки тоді, коли $CM^2 = BM \cdot DM$. $\square$

Задача 4.10. *Нехай D — така точка медіани AM гострокутного трикутника ABC, що $\angle BDC = 90°$. Позначимо через H — основу перпендикуляра DH, опущеного з точки D на сторону BC, а через P та Q — основи перпендикулярів HP і HQ, опущених з точки H на прямі BD і CD відповідно. Прямі HP і HQ перетинають сторони AB і AC в точках X та Y відповідно. Доведіть, що описане коло трикутника XHY дотикається прямої BC.*

(Математична олімпіада Австрії, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.18).

Нехай прямі BD і CD перетинають сторони AC і AB у точках L і K відповідно. Застосуємо теорему Чеви до трикутника BDC і точки A перетину його чевіан BK, DM і CL, одержимо:

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BL}{LD} \cdot \frac{DK}{KC} = 1.$$

Враховуючи, що M — середина BC, одержуємо, що

$$\frac{BL}{LD} = \frac{CK}{KD}.$$

Далі, скористаємося теоремою про пропорційні відрізки на паралельних прямих, які відтинаються прямими, що перетинаються в одній точці, одержимо:

$$\frac{BL}{LD} = \frac{HY}{YQ} \text{ та } \frac{CK}{KD} = \frac{HX}{XP}.$$

Тому, враховуючи попереднє співвідношення, одержуємо:

$$\frac{HY}{YQ} = \frac{HX}{XP},$$

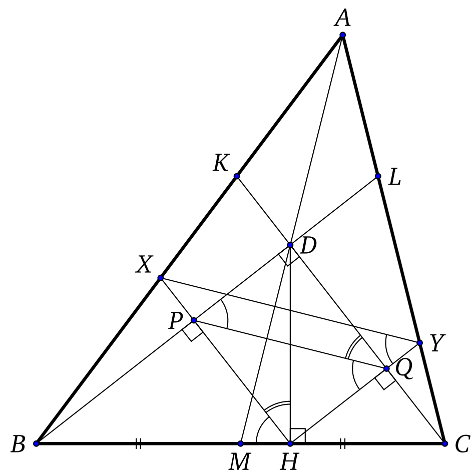


Рис. 4.18.

тобто

$$\frac{XP}{YQ} = \frac{HX}{HY}. \tag{1}$$

Далі, знаходимо:

$$\frac{HY}{YQ} = \frac{HX}{XP}, \quad \frac{HY}{YQ} - 1 = \frac{HX}{XP} - 1, \quad \frac{HQ}{YQ} = \frac{HP}{XP}.$$

Звідси слідує, що

$$\frac{XP}{YQ} = \frac{HP}{HQ}. \tag{2}$$

З рівностей (1) і (2) знаходимо, що

$$\frac{HX}{HY} = \frac{HP}{HQ},$$

тобто $\frac{HX}{HP} = \frac{HY}{HQ}$. Оскільки $\angle XHY = \angle PHQ$, то із цього співвідношення випливає подібність трикутників XHY і PHQ. Оскільки у подібних трикутників відповідні кути рівні, а чотирикутник $DPHQ$ — прямокутник, тоді знаходимо, що

$$\angle XHB = 90^\circ - \angle PHD = 90^\circ - \angle PQD = \angle DPQ = \angle HQP = \angle HYX,$$

тобто $\angle XHB = \angle HYX$. Ця рівність кутів забезпечує дотик описаного кола трикутника XHY і прямої BC, що і треба було довести. □

4.4. Класичні теореми про колінеарність трьох точок

Теореми Менелая, Гауса, Дезарга, Паскаля є критеріями колінеарності трьох точок, але основною серед них є теорема Менелая. Усі ці теореми знаходять широке застосування в олімпіадних задачах на доведення і обчислення.

Теорема 4.6 (Менелая). *Нехай на прямих BC, CA, AB, що містять сторони трикутника ABC, відмітили точки A_1, B_1, C_1 відповідно. Для того, щоб ці точки лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб мало місце співвідношення*

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1.$$

Доведення. Спочатку доводимо ***необхідність***. Нехай точки A_1, B_1, C_1 — колінеарні (рис. 4.19). Тоді, через вершину B проведемо пряму $BK \parallel A_1B_1$, $K \in (AC)$. За теоремою про пропорційні відрізки на сторонах кута маємо:

$$\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1K}}, \quad \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{KB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}.$$

Підстановка цих відношень у рівність, яка доводиться, зводить її до очевидної:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1K}} \cdot \frac{\overrightarrow{KB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1.$$

А тепер доведемо ***достатність***. Нехай співвідношення

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1$$

виконується. Доведемо, що точки A_1, B_1, C_1 — колінеарні. Припустимо, що це не так. Тоді прямі A_1B_1 і AB перетинаються у точці C_2, яка відмінна від C_1. (Випадок, коли $A_1B_1 \parallel AB$ — тривіальний). Тоді, за доведеною необхідністю, матимемо:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}} = -1.$$

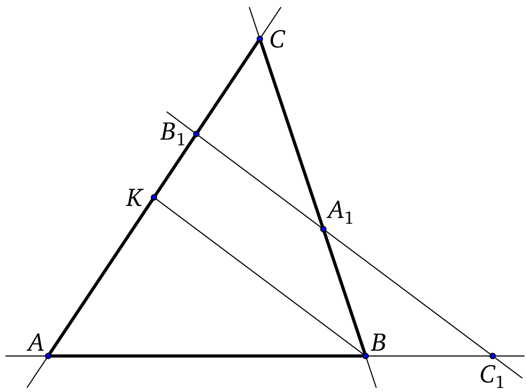


Рис. 4.19.

Із цих двох рівностей одержуємо: $\dfrac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \dfrac{\overrightarrow{BC_2}}{\overrightarrow{C_2A}}$. Отже, точки C_1 і C_2 співпадають. Одержане протиріччя і доводить колінеарність точок A_1, B_1, C_1. $\square$

Зауваження. Існує тригонометрична форма теореми Менелая. Нехай α_1 і α_2 — орієнтовані кути між прямою AA_1 і прямими AB та AC, тобто $\alpha_1 = \angle BAA_1$ і $\alpha_2 = \angle A_1AC$. Аналогічно, β_1 і β_2 — орієнтовані кути між прямою BB_1 і прямими BC та BA, а γ_1 і γ_2 — орієнтовані кути між прямою CC_1 і прямими CA та CB (рис. 4.20).

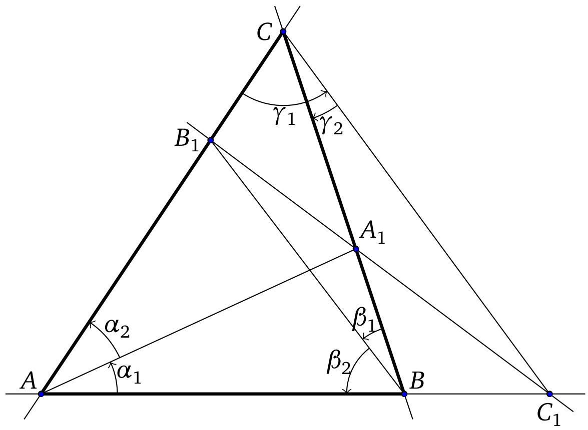


Рис. 4.20.

Отже, точки A_1, B_1, C_1 будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = -1.$$

Теорема 4.7 (Гауса). *Якщо пряма, яка не проходить через вершини трикутника ABC, перетинає його сторони BC, CA, AB або їх продовження в точках A_1, B_1, C_1, то середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 лежать на одній прямій.*

Доведення. Нехай A_2, B_2, C_2 — середини сторін BC, CA, AB трикутника ABC. Тоді середини M, N, P відрізків AA_1, BB_1, CC_1 лежать на прямих B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 відповідно, що містять середні лінії трикутника ABC (рис. 4.21).

За теоремою про пропорційні відрізки на паралельних прямих, одержуємо:

$$\frac{\overrightarrow{A_2P}}{\overrightarrow{PB_2}} = \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}}, \frac{\overrightarrow{B_2M}}{\overrightarrow{MC_2}} = \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}, \frac{\overrightarrow{C_2N}}{\overrightarrow{NA_2}} = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}$$

Перемноживши ці три рівності, одержимо:

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = \frac{\overrightarrow{C_2N}}{\overrightarrow{NA_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{A_2P}}{\overrightarrow{PB_2}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_2M}}{\overrightarrow{MC_2}}$$

Оскільки точки A_1, B_1, C_1 — колінеарні, то за необхідною умовою теореми Менелая для трикутника ABC, ліва частина цієї рівності дорівнює -1. Тоді, за достатньою умовою цієї теореми для трикутника $A_2B_2C_2$, одержуємо колінеарність точок M, N, P, що і завершує доведення. □

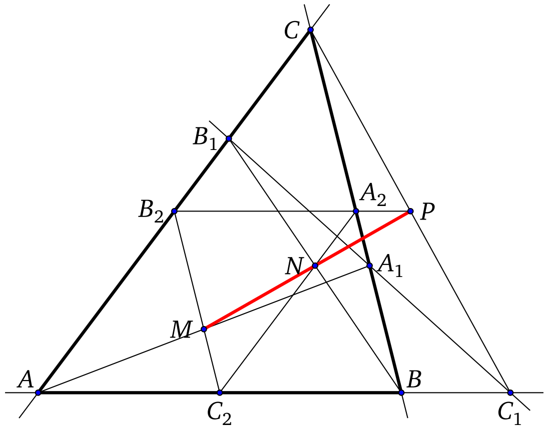


Рис. 4.21.

Справедливою буде і обернена теорема до теореми Гауса. Пропонуємо читачам довести її самостійно.

Зауваження. Неважко помітити, що чотири прямі AB, BC, CA, A_1B_1, що фігурують в теоремі Гауса, рівноправні. Четвірку прямих, жодні дві із яких не паралельні і жодні три не проходять через одну точку, називають *повним чотирикутником*. Пряма MNP, на якій лежать середини зазначених відрізків, називається *прямою Гауса повного чотирикутника*.

Теорема 4.8 (Дезарга). *Якщо прямі AA_1, BB_1, CC_1, що з'єднують вершини трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, перетинаються в одній точці S або паралельні, то точки перетину прямих AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, CA і C_1A_1 (якщо вони існують) лежать на одній прямій.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в точці S (рис. 4.22).

Нехай $(AB)\cap(A_1B_1) = P$, $(BC)\cap(B_1C_1) = Q$, $(CA)\cap(C_1A_1) = R$. За теоремою Менелая для трикутника SAB і прямої A_1B_1:

$$\frac{\overrightarrow{SA_1}}{\overrightarrow{A_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1S}} = -1.$$

За цією ж теоремою для трикутника SBC і прямої B_1C_1:

$$\frac{\overrightarrow{SB_1}}{\overrightarrow{B_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1S}} = -1.$$

Далі, ще раз застосуємо теорему Менелая для трикутника SCA і прямої C_1A_1:

$$\frac{\overrightarrow{SC_1}}{\overrightarrow{CR}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1S}} = -1.$$

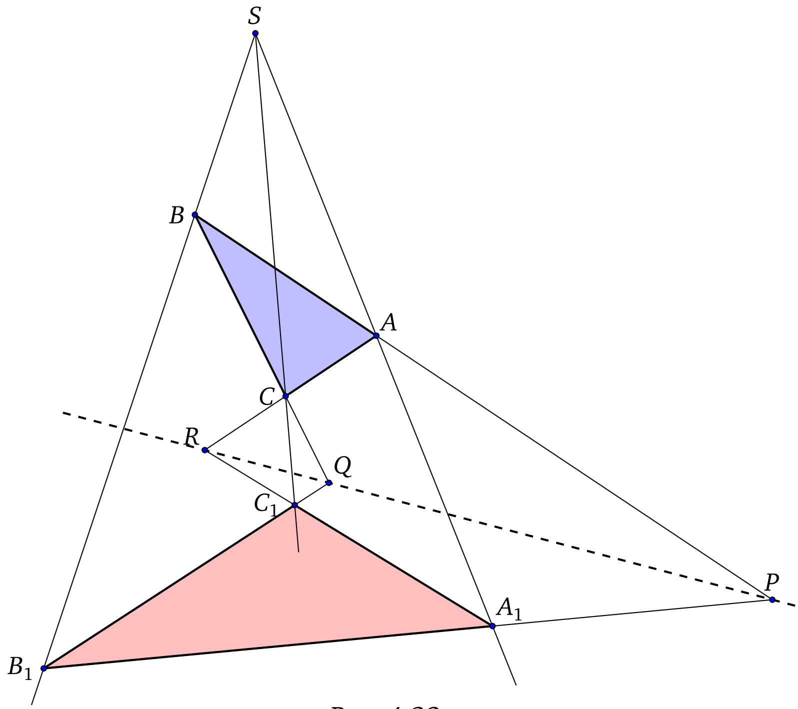


Рис. 4.22.

Перемноживши останні три рівності, одержимо:

$$\left(\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{SA_1}}{\overrightarrow{A_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{SA_1}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{SB_1}}{\overrightarrow{B_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_1B}}{\overrightarrow{SB_1}}\right)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{SC_1}}{\overrightarrow{C_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_1C}}{\overrightarrow{SC_1}}\right)=-1.$$

Кожний із трьох останніх добутків в дужках дорівнює 1, тому

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}}=-1.$$

А це означає (див. трикутник ABC), що точки P, Q, R — колінеарні.

Нехай тепер прямі AA_1, BB_1, CC_1 паралельні (рис. 4.23). Нехай $(AB)\cap(A_1B_1)=P$, $(BC)\cap(B_1C_1)=Q$, $(PQ)\cap(AC)=R$ і $(PQ)\cap(A_1C_1)=R_1$. Потрібно довести, що точки R і R_1 співпадають.

За теоремою Менелая для трикутника PBQ і прямої AC:

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AP}}\cdot\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}\cdot\frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{CB}}=-1.$$

За цією ж теоремою для трикутника B_1PQ і прямої A_1C_1:

$$\frac{\overrightarrow{B_1A_1}}{\overrightarrow{A_1P}}\cdot\frac{\overrightarrow{PR_1}}{\overrightarrow{R_1Q}}\cdot\frac{\overrightarrow{QC_1}}{\overrightarrow{C_1B_1}}=-1.$$

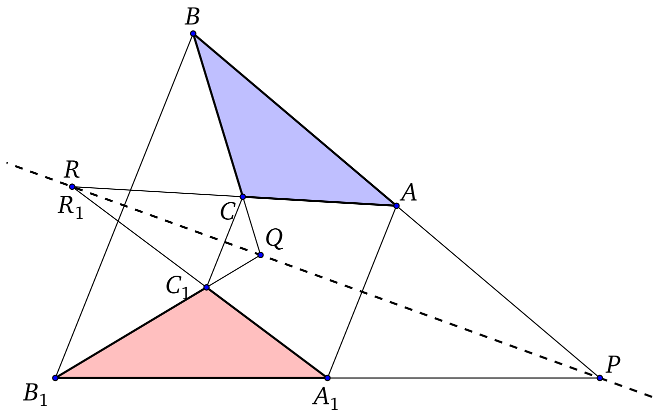


Рис. 4.23.

Оскільки

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AP}} = \frac{\overrightarrow{B_1A_1}}{\overrightarrow{A_1P}} \text{ і } \frac{\overrightarrow{QC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{QC_1}}{\overrightarrow{C_1B_1}},$$

то із двох попередніх співвідношень, одержуємо:

$$\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = \frac{\overrightarrow{PR_1}}{\overrightarrow{R_1Q}},$$

тобто точки R і R_1 співпадають. □

Має місце і ***обернена теорема Дезарга***. Для її доведення достатньо застосувати пряму теорему Дезарга до трикутників AA_1R і BB_1Q.

Фігура, що ілюструє теорему Дезарга, містить 10 точок і десять прямих, причому на кожній прямій лежать по три точки і через кожну точку проходять три прямі. Таку фігуру називають ***конфігурацією Дезарга***. Точка S називається ***дезарговою точкою***, а пряма PQR — ***дезарговою прямою*** двох ***дезаргових трикутників*** ABC і $A_1B_1C_1$. Конфігурація Дезарга володіє цікавою властивістю: будь-яку з 10 її точок можна взяти за дезаргову точку, тоді однозначно визначаються дезаргові трикутники і дезаргова пряма; кожну із прямих можна прийняти як дезаргову пряму, тоді однозначно визначаються дезаргові трикутники і дезаргова точка. Перевірку цієї властивості залишаємо читачеві.

Теорема 4.9 (Паскаля для трикутника)**.** *Дотичні в вершинах нерівнобедреного трикутника до описаного навколо нього кола перетинають прямі, що містять протилежні сторони цього трикутника, у трьох точках, що лежать на одній прямій (**прямій Паскаля** трикутника).*

Доведення. Для доведення цієї теореми використаємо теорему Менелая в тригонометричній формі.

Нехай дотичні в точках A, B, C до описаного кола трикутника ABC перетинають прямі BC, CA, AB відповідно в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 4.24). Тоді

$$|\alpha_1| = \angle BAA_1 = \angle C,$$
$$|\alpha_2| = \angle A_1AC = \angle A + \angle C,$$

де $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — кути трикутника ABC. Так як кути α_1 і α_2 орієнтовані протилежно, то

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = -\frac{\sin\angle C}{\sin(\angle A + \angle C)} = -\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}.$$

Аналогічно

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = -\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C} \;\text{ і }\; \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = -\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A},$$

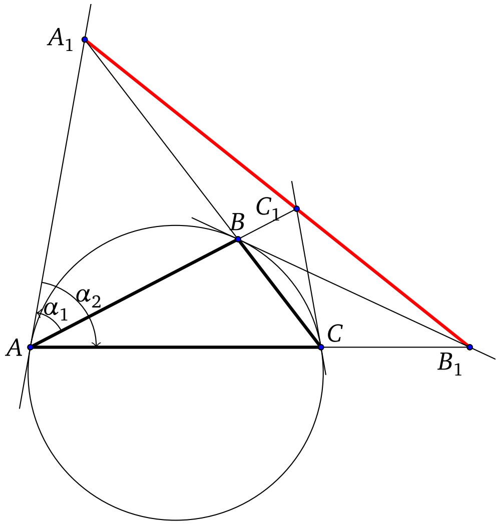


Рис. 4.24.

де β_1 і β_2 — кути між BB_1 і сторонами BC і BA, а γ_1, γ_2 — кути між CC_1 і сторонами CA і CB. Таким чином,

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \left(-\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\angle B}{\sin\angle A}\right) = -1.$$

що забезпечує колінеарність точок A_1, B_1, C_1. □

Теорема 4.10 (Паскаля для вписаного шестикутника). *У вписаному в коло шестикутнику точки перетину (якщо вони існують) протилежних сторін лежать на одній прямій, яку називають* ***прямою Паскаля*** *вписаного шестикутника.*

Доведення. Нехай в коло вписаний шестикутник $AB_1CA_1BC_1$. Доведемо, що точки $M = (AB_1)\cap(A_1B)$, $P = (BC_1)\cap(B_1C)$, $N = (CA_1)\cap(C_1A)$ колінеарні. Введемо до розгляду точки $X = (AB_1)\cap(CA_1)$, $Y = (BC_1)\cap(CA_1)$, $Z = (AB_1)\cap(BC_1)$, припускаючи їх існування (рис. 4.25). За теоремою про січні кола, одержуємо:

$$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB_1} = \overrightarrow{XC}\cdot\overrightarrow{XA_1},$$
$$\overrightarrow{YB}\cdot\overrightarrow{YC_1} = \overrightarrow{YC}\cdot\overrightarrow{YA_1},$$
$$\overrightarrow{ZB}\cdot\overrightarrow{ZC_1} = \overrightarrow{ZA}\cdot\overrightarrow{ZB_1}.$$

За теоремою Менелая стосовно трикутника XYZ і прямих AC_1, CB_1, BA_1 матимемо відповідно:

$$\frac{\overrightarrow{XA}}{\overrightarrow{AZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZC_1}}{\overrightarrow{C_1Y}}\cdot\frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}} = -1,$$

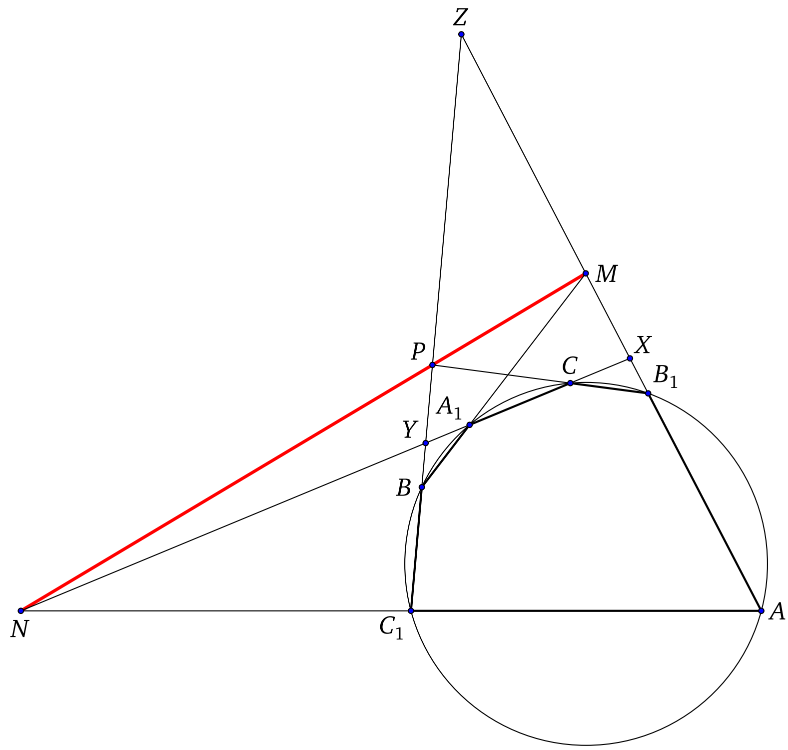


Рис. 4.25.

$$\frac{\overrightarrow{XB_1}}{\overrightarrow{B_1Z}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZP}}{\overrightarrow{PY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CX}} = -1,$$

$$\frac{\overrightarrow{XM}}{\overrightarrow{MZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{BY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YA_1}}{\overrightarrow{A_1X}} = -1.$$

Перемножимо почленно ці рівності. В лівій частині одержаного виразу здійснимо скорочення на основі одержаних вище рівностей. В результаті цього, одержимо:

$$\frac{\overrightarrow{XM}}{\overrightarrow{MZ}} \cdot \frac{\overrightarrow{XP}}{\overrightarrow{PY}} \cdot \frac{\overrightarrow{YN}}{\overrightarrow{NX}} = -1.$$

З одержаної рівності з достатньою частиною теореми Менелая, одержуємо, що точки M, P, N — колінеарні, що і треба було довести. □

Теорема 4.11 (Паскаля для вписаного чотирикутника)**.** *Довести, що у вписаному чотирикутнику точки перетину протилежних сторін і точки перетину дотичних в протилежних вершинах лежать на одній прямій.*

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло, дотичні до якого у точках A і C перетинаються в точці M, дотичні у точках B і D перетинаються в точці N, $(AB) \cap (CD) = P$ і $(AD) \cap (BC) = Q$. Нам треба довести, що точки M, N, P, Q колінеарні. Для цього доведемо таке допоміжне твердження.

Лема. *Через дві точки M і N провели дві дотичні MP і NQ до кола, яке не проходить через ці точки (P і Q — точки дотику). Пряма PQ перетинає пряму MN у точці L. Тоді має місце таке співвідношення*

$$\frac{ML}{LN} = \frac{MP}{NQ}.$$

Доведення.

Нехай S — точка перетину MP і NQ (рис. 4.26). Тоді за теоремою Менелая для трикутника SMN і прямої PQL матимемо:

$$\frac{\overrightarrow{SP}}{\overrightarrow{PM}} \cdot \frac{\overrightarrow{ML}}{\overrightarrow{LN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NQ}}{\overrightarrow{QS}} = -1.$$

Оскільки $SQ = SP$, то

$$\frac{ML}{LN} = \frac{MP}{NQ},$$

що і треба було довести. □

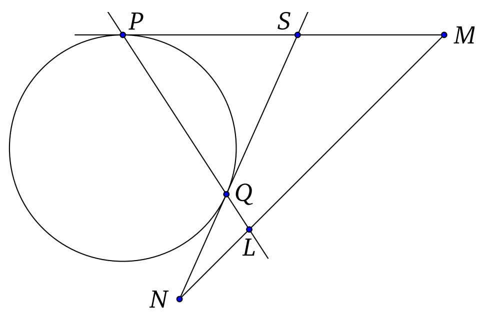


Рис. 4.26.

А тепер переходимо до доведення теореми. Нехай $(AB) \cap (MN) = L$ і $(CD) \cap (MN) = K$ (рис. 4.27).

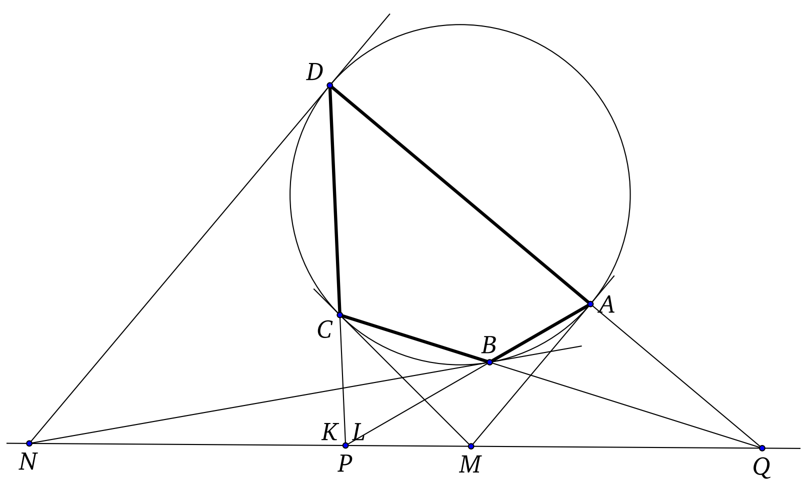


Рис. 4.27.

Тоді за лемою матимемо:

$$\frac{NL}{LM} = \frac{NB}{MA} \text{ і } \frac{NK}{KM} = \frac{ND}{MC}.$$

Оскільки $NB = ND$ і $MA = MC$ (як дотичні), то одержуємо співвідношення:

$$\frac{NL}{LM} = \frac{NK}{KM}$$

Це співвідношення доводить, що точки L і K співпадають, тобто прямі AB і CD перетинають пряму MN в одній точці, тобто точка P належить прямій MN. Аналогічно доводиться, що точка Q також належить прямій MN, тобто точки M, N, P, Q — колінеарні, що і треба було довести. $\square$

Теорема 4.12 (Паппа). *Якщо A_1, B_1, C_1 — точки однієї прямої, а A_2, B_2, C_2 — точки другої прямої, то точки $C = (A_1B_2) \cap (A_2B_1)$, $B = (A_1C_2) \cap (A_2C_1)$ і $A = (B_1C_2) \cap (B_2C_1)$ лежать на одній прямій.*

Доведення. Розглянемо трикутник $A_0B_0C_0$, утворений прямими A_1B_2, B_1C_2 і C_1A_2 (рис. 4.28).

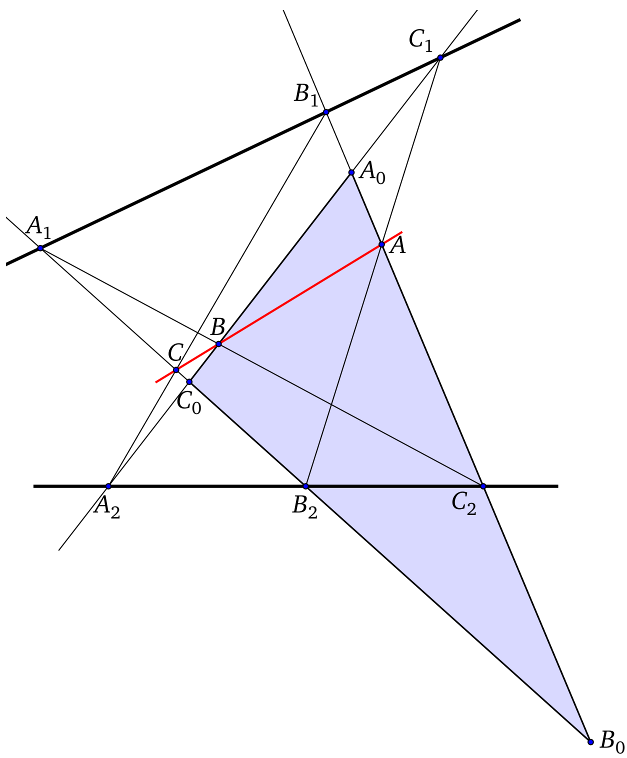


Рис. 4.28.

Застосуємо теорему Менелая до трикутника $A_0B_0C_0$ і п'яти прямих. Для прямої AB_2C_1 одержуємо:
$$\frac{\overrightarrow{B_0A}}{\overrightarrow{AC_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0C_1}}{\overrightarrow{C_1A_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_0B_2}}{\overrightarrow{B_2B_0}}=-1.$$
Для прямої $A-1BC_2$ одержуємо:
$$\frac{\overrightarrow{C_0B}}{\overrightarrow{BA_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_0A_1}}{\overrightarrow{A_1B_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_0C_2}}{\overrightarrow{B_2B_0}}=-1.$$
Для прямої A_2B_1C знаходимо:
$$\frac{\overrightarrow{A_0C}}{\overrightarrow{CB_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_0B_1}}{\overrightarrow{B_1C_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0A_2}}{\overrightarrow{A_2A_0}}=-1.$$
Для прямої $A_1B_1C_1$ знаходимо:
$$\frac{\overrightarrow{B_0A_1}}{\overrightarrow{A_1A_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_0C_1}}{\overrightarrow{C_1C_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0B_1}}{\overrightarrow{B_1B_0}}=-1.$$
Для прямої $A_2B_2C_2$ знаходимо:
$$\frac{\overrightarrow{A_0A_2}}{\overrightarrow{A_2C_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0C_2}}{\overrightarrow{C_2B_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_0B_2}}{\overrightarrow{B_2A_0}}=-1.$$
Перемноживши ці п'ять рівностей, одержимо:
$$\frac{\overrightarrow{B_0A}}{\overrightarrow{AC_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0C_1}}{\overrightarrow{C_1A_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_0B_2}}{\overrightarrow{B_2B_0}}\times\frac{\overrightarrow{C_0B}}{\overrightarrow{BA_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_0A_1}}{\overrightarrow{A_1B_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_0C_2}}{\overrightarrow{B_2B_0}}\times\frac{\overrightarrow{A_0C}}{\overrightarrow{CB_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_0B_1}}{\overrightarrow{B_1C_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0A_2}}{\overrightarrow{A_2A_0}}\times$$
$$\times\frac{\overrightarrow{B_0A_1}}{\overrightarrow{A_1A_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_0C_1}}{\overrightarrow{C_1C_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0B_1}}{\overrightarrow{B_1B_0}}\times\frac{\overrightarrow{A_0A_2}}{\overrightarrow{A_2C_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0C_2}}{\overrightarrow{C_2B_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_0B_2}}{\overrightarrow{B_2A_0}}=-1,$$
а після скорочення, одержимо:
$$\frac{\overrightarrow{B_0A}}{\overrightarrow{AC_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{C_0B}}{\overrightarrow{BA_0}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_0C}}{\overrightarrow{CB_0}}=-1.$$
Ця рівність і достатня частина теореми Менелая для трикутника $A_0B_0C_0$ забезпечують колінеарність точок A, B, C, що і треба було довести. □

Олімпіадні задачі

Задача 4.11. (В. А. Ясінський) *Нехай $ABCD$ трапеція з основами $AB > CD$. Точки K і L належать відрізкам AB і CD відповідно, причому*
$$\frac{AK}{KB}=\frac{DL}{LC}.$$
Припустимо, що точки P та Q належать відрізку KL, причому
$$\angle APB=\angle BCD \text{ і } \angle CQD=\angle ABC.$$

Доведіть, що точки P, Q, B і C лежать на одному колі.

(Задача, запропонована Україною на ММО, 2006 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 4.29).

Якщо $P = Q$, то задача є тривіальною. Нехай P і Q — дві різні точки, причому лежить між P і K. Оскільки $AB \parallel CD$, $AB > CD$ і виконується співвідношення

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC},$$

то три прямі AD, BC і KL перетинаються в одній точці S, яка лежить по один бік від прямої AB разом з точками C і D.

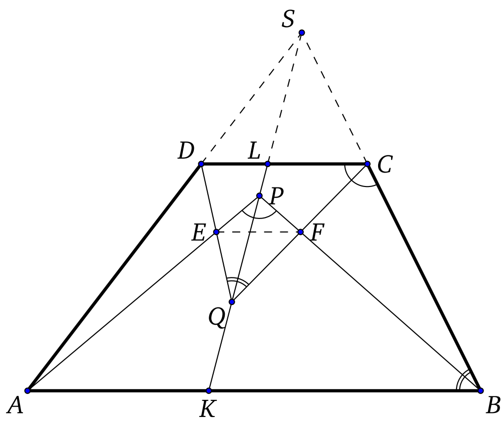


Рис. 4.29.

Нехай відрізки AP і DQ перетинаються в точці E, а прямі BP і CQ — в точці F. Тоді, за умовою задачі, $\angle EPF = \angle BCD$ і $\angle FQE = \angle ABC$. Оскільки кути BDC і ABC доповнюють один одного до $180°$, то чотирикутник $PEQF$ — циклічний.

Застосуємо теорему Менелая для трикутника ASP і прямої DQ та до трикутника BSP і прямої CQ, матимемо:

$$\frac{AD}{DS} \cdot \frac{SQ}{QP} \cdot \frac{PE}{EA} = 1 \text{ та } \frac{BC}{CS} \cdot \frac{SQ}{QP} \cdot \frac{PF}{FB} = 1$$

Оскільки перші два множники першої рівності дорівнюють першим двом множникам другої рівності (бо $AB \parallel CD$), то з цих двох рівностей випливає, що

$$\frac{PE}{EA} = \frac{PF}{FB},$$

а це означає, що пряма EF паралельна до основ AB і CD даної трапеції.

Так як чотирикутник $PEQF$ вписаний, то маємо

$$\angle BCD = \angle BCF + \angle FCD = \angle BCQ + \angle EFQ = \angle BCQ + \angle EPQ.$$

Враховуючи умову, одержимо:

$$\angle BCD = APB = EPF = \angle EPQ + \angle QPF.$$

Звідки слідує, що $\angle BCQ = \angle QPF$, тобто $\angle BCQ = \angle QPB$. Оскільки точки P і C лежать по один бік від прямої BQ, то точки P, Q, B і C лежать на одному колі.

Випадок, коли точка P лежить між точками Q і K розглядається аналогічно. □

Задача 4.12. *В трикутнику ABC сторона AB більша за сторону AC. Вписане коло ω дотикається до сторони BC в точці E і перетинає AE в точці*

D. На AE вибирається точка F ($F \neq E$) так, що $CE = CF$. Нехай G — точка перетину прямих CF і BD. Доведіть, що $CF = FG$.

(Китай, відбір на ММО, 2008 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.30).

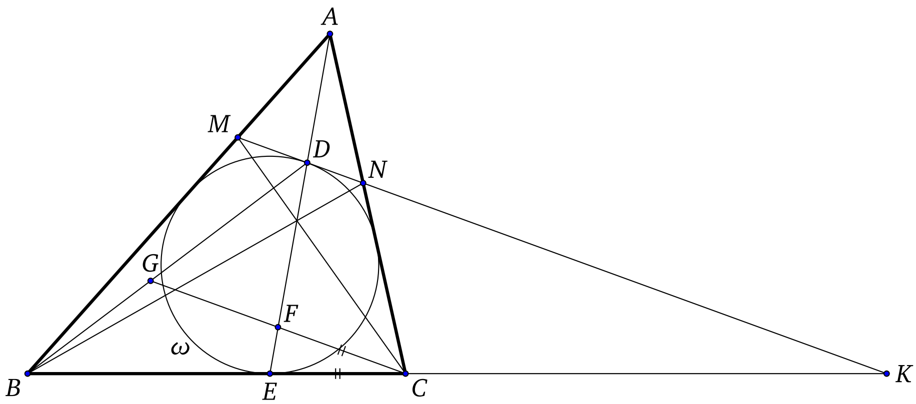


Рис. 4.30.

Проведемо через точку D дотичну до кола ω; нехай вона перетинає прямі AB, AC і BC відповідно в точках M, N і K. За теоремою про дотичні трикутник DKE — рівнобедрений, тому $\angle DEK = \angle EDK$. За умовою задачі трикутник ECF також рівнобедрений, тому $\angle FEC = \angle EFC$. З цих двох рівностей одержуємо, що $\angle EFC = \angle EDK$, тобто $CF \parallel KD$.

За теоремою Ньютона для описаного чотирикутника $BMNC$ одержуємо, що відрізки BN, CM і AE перетинаються в одній точці. Тоді, за теоремою Чеви одержуємо:

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1. \tag{1}$$

За теоремою Менелая одержуємо:

$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1. \tag{2}$$

Розділивши (1) на (2) одержимо:

$$BE \cdot KC = EC \cdot BK.$$

Звідси одержуємо:

$$\begin{aligned}
BE \cdot KC &= (BC - BE) \cdot (BC + CK), \\
BE \cdot KC &= BC^2 + BC \cdot CK - BC \cdot BE - BE \cdot KC, \\
2 \cdot BE \cdot KC &= BC^2 + BC \cdot CK - BC \cdot BE, \\
2 \cdot BE \cdot KC &= BC \cdot (BC + CK - BE),
\end{aligned}$$

і, остаточно,

$$2 \cdot BE \cdot KC = BC \cdot EK. \tag{3}$$

Застосуємо теорему Менелая до трикутника CEF і прямої BGD:
$$\frac{CB}{BE}\cdot\frac{ED}{DF}\cdot\frac{FG}{GC}=1.$$
Оскільки $CF \parallel DK$, то за узагальненою теоремою Фалеса:
$$\frac{ED}{DF}=\frac{EK}{KC}.$$
Тому,
$$\frac{CB}{BE}\cdot\frac{EK}{KC}\cdot\frac{FG}{GC}=1.$$
Враховуючи (3), остання рівність перепишеться так:
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{FG}{GC}=1.$$
Звідси й випливає, що $CF=FG$. □

Задача 4.13. *Нехай ABC — рівнобедрений трикутник, в якому $AB=AC$, а D — середина AC. Бісектриса кута BAC перетинає коло, що проходить через точки B, D і C, у точці E, яка лежить всередині трикутника ABC. Пряма BD перетинає коло, що проходить через точки A, E і B у двох точках B і F. Прямі AF і BE перетинаються в точці I, а прямі CI і BD — у точці K. Доведіть, що I — центр вписаного кола трикутника KAB.*

(Задача, запропонована Болгарією на ММО, 2011 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 4.31).

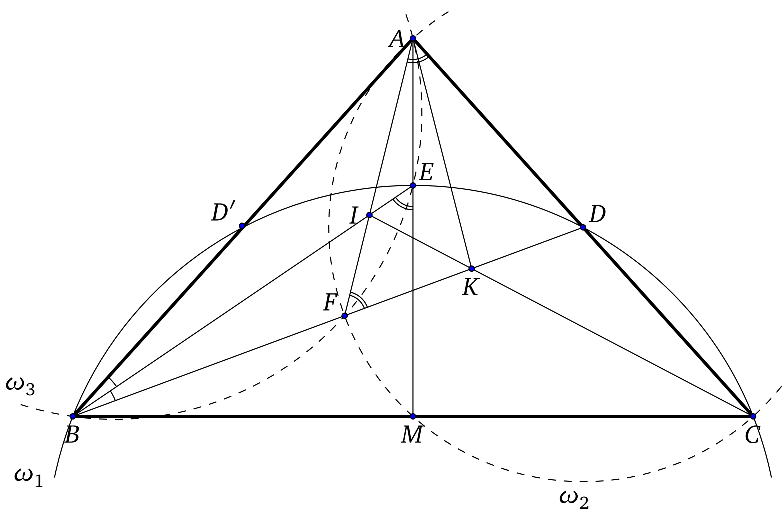


Рис. 4.31.

Нехай D' — середина , а M — середина BC. Оскільки AM — вісь симетрії трикутника ABC, то точка D' належить колу ω_1, яке описане навколо трикутника BDC. Це означає, що дуги $D'E$ і ED кола ω_1 рівні між собою. Звідки випливає, що BE — бісектриса кута $D'BD$, тобто I лежить на бісектрисі кута ABK. Далі, достатньо довести, що AI — бісектриса кута BAK.

Оскільки

$$\angle DFA = 180^\circ - \angle BFA = 180^\circ - \angle BEA = \angle MEB = \frac{1}{2}\angle CEB = \frac{1}{2}\angle CDB,$$

то $\angle DFA = \angle DAF$. А це означає, що трикутник AFD — рівнобедрений, тобто $DA = DF$. Далі, застосуємо теорему Менелая для трикутника ADF і прямої CIK, а також теорему про властивість бісектриси трикутника ABF, одержимо:

$$1 = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{DK}{KF} \cdot \frac{FI}{IA} = 2 \cdot \frac{DK}{KF} \cdot \frac{BF}{BA} = 2 \cdot \frac{DK}{KF} \cdot \frac{BF}{2 \cdot AD} = \frac{DK}{KF} \cdot \frac{BF}{AD}.$$

Звідси слідує, що

$$\frac{BF}{AD} = \frac{KF}{DK}.$$

Крім того,

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BF + FD}{AD} = \frac{BF}{AD} + 1 = \frac{KF}{DK} + 1 = \frac{DF}{DK} = \frac{AD}{DK}.$$

Тоді $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{DK}$. Оскільки $\angle BDA = \angle KDA$, то трикутники ABD і KDA подібні. З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle DAK = \angle DBA$. Таким чином,

$$\angle IAB = \angle AFD - \angle ABD = \angle DAF - \angle DAK = \angle KAI,$$

тобто $\angle IAB = \angle KAI$. А це означає, що AI — бісектриса кута BAK, що і треба було довести. $\square$

Частина 2

Задачі математичних олімпіад 2012–2013 років

Задачі зарубіжних математичних олімпіад 2012 року

Задача 5.1. (Д. Прокопенко) *Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. BL і CN — бісектриси трикутників ABD і ACD відповідно. Кола, описані навколо трикутників ABL і CDN, перетинаються в точках P і Q. Доведіть, що пряма PQ проходить через середину дуги AD, що не містить точку B.*

(Олімпіада з геометрії ім. І.Ф. Шаригіна, фінал, 10 клас, 2012 р.)

Задача 5.2. *Про трикутник ABC відомо, що на його сторонах AB і BC відмітили точки M і K відповідно так, що $MA = AC = CK$. Нехай I та O — центри вписаного та описаного кіл трикутника ABC.*

а) Доведіть, що довжина відрізка OI дорівнює радіусу описаного кола трикутника MBK.

б) Доведіть, що $OI \perp MK$.

(Боснія і Герцеговина, 2012 р.)

Задача 5.3. *Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, P — точка перетину його діагоналей. Відомо, що $AC + AD = BC + BD$. Доведіть, що бісектриси кутів $\angle ACB$, $\angle ADB$ і $\angle APB$ перетинаються в одній точці.*

(Канада, 2012 р.)

Задача 5.4. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторін BC, CA, AB у точках D, E, F. Нехай K — точка перетину прямих DI і EF. Доведіть, що пряма AK ділить сторону BC навпіл.*

(Сінгапур, 2012 р.)

Задача 5.5. *У гострокутному трикутнику ABC через D, E, F позначили основи його висот, проведених із вершин A, B, C відповідно. Нехай ω — коло, описане навколо трикутника AEF. Нехай ω_1 і ω_2 — кола, які проходять через точку D і дотикаються до ω у точках F і E відповідно. Доведіть, що точка перетину ω_1 і ω_2, яка відмінна від точки D, лежить на прямій BC.*

(США, Лінкольн, Небраска, 2012 р.)

Задача 5.6. *Нехай P і Q — точки всередині трикутника ABC такі, що $\angle PAC = \angle QAB$ і $\angle PBC = \angle QBA$.*

а) Доведіть, що усі шість основ перпендикулярів, опущених із точок P і Q на сторони трикутника, будуть циклічними (лежатимуть на одному колі).

б) Нехай D і E — основи перпендикулярів, опущених із точки P на сторони BC і AC, а K — основа перпендикуляра, опущеного із точки Q на сторону AB. Нехай M — точка перетину прямих DE і AB. Доведіть, що $MP \perp CK$.

(Сербія, 2012 р.)

Задача 5.7. *Нехай J — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається сторони BC у точці M, а продовжень сторін AB і AC відповідно у точках K і L. Нехай F — точка перетину прямих JB і LM, а G — точка перетину прямих JC і KM. Нехай S і T — точки перетину прямих AF і AG з прямою BC відповідно. Доведіть, що M — середина відрізка ST.*

(Міжнародна математична олімпіада, 2012 р.)

Задача 5.8. *У прямокутному трикутнику ABC, з прямим кутом при вершині B, висота BH перетинається з бісектрисами CE і AD відповідно в точках P і Q. Нехай M і N — середини відрізків PE і QD відповідно. Доведіть, що $MN \parallel AC$.*

(Румунія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.9. *Нехай ABC — трикутник, у якому $\angle BCA = 90°$, D — основа висоти, проведеної з вершини C. Всередині відрізка CD взято точку X. Точка K на відрізку AX така, що $BK = KC$. Аналогічно, точка L на відрізку BX така, що $AL = AC$. Нехай M — точка перетину відрізків AL і BK. Доведіть, що $MK = ML$.*

(Міжнародна математична олімпіада, 2012 р.)

Задача 5.10. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, D — точка дотику цього кола зі стороною BC, P — основа перпендикуляра, опущеного з точки I на пряму AD. Доведіть, що $\angle BPD = \angle DPC$.*

(США, Лінкольн, Небраска, 2012 р.)

Задача 5.11. *Кола k_1 і k_2 дотикаються внутрішнім чином у точці C. Хорда AB кола k_1 дотикається до кола k_2 у точці E, причому E — середина AB. Коло k_3 дотикається до k_1, k_2 і відрізка AB відповідно у точках D, Z і F. Промені CD і AB перетинаються у точці P. Нехай M — середина дуги AB кола k_1, яка не містить точку C. Доведіть, що $\operatorname{tg}\angle ZEP = \dfrac{PE}{CM}$.*

(США, Лінкольн, Небраска, 2012 р.)

Задача 5.12. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, у якому $AB < AC$, а D і E — такі точки на стороні BC, що $BD = CE$ і D лежить між B і E. Відомо, що всередині трикутника ABC знайшлася така точка P, що $PD \parallel AE$ і $\angle PAB = \angle EAC$. Доведіть, що $\angle PBA = \angle PCA$.*

(США, Лінкольн, Небраска, 2012 р.)

Задача 5.13. *Дано трикутник ABC. На його сторонах AB і AC відмітили точки P і Q відповідно так, що $AP = AQ$. Нехай S і R різні точки сторони BC (S лежить між B і R) такі, що $\angle BPS = \angle PRS$ і $\angle CQR = \angle QSR$. Доведіть, що* *точки P, Q, R, S — циклічні, тобто лежать на одному колі.*

(США, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.14. *Нехай у площині трикутника ABC задано точку P і пряму l, яка проходить через P. Точки A', B' і C' — точки перетину прямих, що симетричні прямим PA, PB і PC відносно прямої l, з прямими BC, CA і AB відповідно. Доведіть, що точки A', B' і C' — колінеарні, тобто лежать на одній прямій.*

(США, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.15. *Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти різностороннього трикутника ABC, а D, E, F — середини сторін BC, CA, AB цього трикутника. Позначимо через A_2, B_2, C_2 точки перетину прямих B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 відповідно з прямими BC, CA, AB. Доведіть, що прямі, які проходять через точки D, E, F відповідно перпендикулярно до прямих AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці.*

(США, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2012 р.)

Задача 5.16. *Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що він є одночасно вписаним і описаним. Вписане в нього коло дотикається до сторін AB і CD в точках X і Y відповідно. Перпендикуляри до прямих AB і CD в точках A і D перетинаються в точці U, в точках X і Y перетинаються в точці V, а в точках B і C перетинаються у точці W. Доведіть, що точки U, V і W — колінеарні.*

(Математичний турнір, Якутія, Росія, 2012 р.)

Задача 5.17. *Нехай $ABCD$ — чотирикутник, в якому $AC = BD$ і P — точка перетину діагоналей AC і BD. Нехай k_1 і k_2 — описані кола трикутників PAB і PCD, а O_1 і O_2 — відповідно їхні центри. Сторона BC перетинає k_1 і k_2 вдруге у точках S і T відповідно. Нехай M — середина дуги PS кола k_1, яка не містить точку B, а N — середина дуги PT кола k_2, яка не містить точку C. Доведіть, що $MN \parallel O_1O_2$.*

(США, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2012 р.)

Задача 5.18. *Трикутник ABC вписаний в коло k. Продовження бісектриси AD цього трикутника за точку D, перетинає коло k у точці L. Нехай M — середина сторони BC. Описане коло k_1 трикутника ADM перетинає сторони AB і AC відповідно в точках P і Q (відмінних від A). Нехай N — середина PQ, а H — основа перпендикуляра, опущеного з точки L на пряму ND. Доведіть, що пряма ML дотикається описаного кола трикутника HMN.*

(США, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2012 р.)

Задача 5.19. *Нехай $ABCD$ — чотирикутник, який вписаний в коло з центром O. Відомо, що промені AB і DC перетинаються в точці M, а промені BC і AD перетинаються в точці N. Нехай P, Q, S, T — різні точки перетину бісектрис кутів: $\angle MAN$ і $\angle MBN$, $\angle MBN$ і $\angle MCN$, $\angle MDN = \angle MAN$, $\angle MCN$ і $\angle MDN$ відповідно. а) Доведіть, що точки P, Q, S, T — лежать на одному колі, центр якого позначено через I. б) Доведіть, що точки O, E, I, де E —*

точка перетину AC і BD, лежать на одній прямій.

(В'єтнам, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.20. *Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло з центром O. Кола, описані навколо трикутників AOB і COD, вдруге перетинаються у точці P, яка лежить всередині трикутника AOD. На продовженні відрізка OP за точку P відмітили точку Q, а на продовженні відрізка OP за точку O відмітили точку R так, що $\angle QAP = \angle OBR$. Доведіть, що $\angle PDQ = \angle RCO$.*

(Індія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.21. *Кола k_1 і k_2 дотикаються зовнішнім чином у точці T. Точки A і E лежать на колі k_1. Із цих точок до кола k_2 провели дотичні AB і ED (B і D — точки дотику з k_2) відповідно, а прямі AE і BD перетинаються у точці P. Доведіть, що*

а) $\dfrac{AB}{AT} = \dfrac{ED}{ET}$;

б) $\angle ATP + \angle ETP = 180^\circ$.

(Китай, Математична олімпіада для дівчат, 2012 р.)

Задача 5.22. *Нехай I — центр вписаного кола гострокутного трикутника ABC, яке дотикається до сторін AB і AC відповідно в точках D і E. Нехай O — центр описаного кола k трикутника BIC. Доведіть, що $\angle ODB = \angle OEC$.*

(Китай, Математична олімпіада для дівчат, 2012 р.)

Задача 5.23. *Нехай t — пряма, яка проходить через вершину A рівностороннього трикутника ABC, паралельно до сторони BC. На стороні AC довільно відмітили точку D. Бісектриса кута ABD перетинає пряму t у точці E. Доведіть, що $BD = CD + AE$.*

(Молдова, відбір на Балканську математичну олімпіаду, 2012 р.)

Задача 5.24. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторін AB, BC, CA відповідно в точках D, E, F. Прямі AI, BI, DI перетинають пряму EF у точках M, N, K відповідно. Доведіть, що $DM \cdot KE = DN \cdot KF$.*

(Китай, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.25. *Вписане коло трикутника ABC, в якому $AB \neq AC$, дотикається до сторін BC, CA і AB відповідно в точках D, E і F. Пряма, яка проходить через точку D і перпендикулярна до EF, перетинає пряму AB у точці X. Другу точку перетину описаних кіл трикутників ABC і AEF позначимо через T. Доведіть, що $\angle XTF = 90^\circ$.*

(Іран, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.26. *Нехай P — точка всередині гострокутного трикутника ABC, k — описане коло цього трикутника. Прямі BP і CP перетинають вдруге коло k у точках B_1 і C_1 відповідно. Позначимо через E і F основи перпендикулярів, опущених із точки P на сторони AC і AB відповідно. Доведіть, що*

$\dfrac{EF}{B_1C_1} \geqslant \dfrac{r}{R}$, де r і R — радіуси вписаного і описаного кіл трикутника ABC.

(Китай, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.27. *Задано два трикутники PAB і PCD, для яких $PA = PB$, $PC = PD$, а точки P, A, C і B, P, D лежать на прямих у вказаному порядку відповідно. Нехай k_1 і k_2 — довільні кола, що проходять через кінці відрізків AC і BD відповідно, а X і Y — точки перетину цих кіл. Нехай k — описане коло трикутника PXY. Доведіть, що центр кола k є серединою відрізка, що з'єднує центри кіл k_1 і k_2.*

(Японія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.28. *Нехай ABC — заданий трикутник, D, E, F — середини його сторін BC, CA, AB відповідно. Описане коло k_1 трикутника BCF перетинає пряму BE у точках B і P, а описане коло k_2 трикутника ABE перетинає пряму AD у точках A і Q. Нехай прямі DP і FQ перетинаються в точці R. Доведіть, що точка G перетину медіан трикутника ABC лежить на описаному колі трикутника PQR.*

(Румунія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Задача 5.29. *Дано гострокутний трикутник ABC, в якому $AB \neq AC$ і H — основа висоти, опущеної з вершини A на сторону BC. На продовженнях сторін AB і AC відмітили точки P і Q відповідно так, що $HP = HQ$ і точки P, B, C, Q — циклічні. Доведіть, що H — центр описаного кола трикутника PAQ.*

(Албанія, відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, 2012 р.)

Задача 5.30. *Кола ω_1 і ω_2 різних радіусів перетинаються у двох точках A і B. Коло ω_3 дотикається зовнішнім чином до кола ω_1 у точці A_1 і дотикається внутрішнім чином до кола ω_2 у точці B_1. Коло ω_4 дотикається зовнішнім чином до кола ω_1 у точці A_2 і дотикається внутрішнім чином до кола ω_2 у точці B_2. Крім того, відомо, що кола ω_3 і ω_4 перетинаються у двох точках C і D. Доведіть, що прямі A_1B_1, A_2B_2 і CD перетинаються в одній точці.*

(Польща, відбір до математичної олімпіади між Словаччиною, Польщею і Чехією, 2012 р.)

Задача 5.31. *Трикутник ABC, з тупим кутом при вершині B, вписаний в коло ω з центром у точці O. Нехай D точка перетину прямої AB з прямою, яка проходить через точку C і перпендикулярна до прямої AC. Позначимо через l пряму, яка проходить через точку D і перпендикулярна до прямої AO. Нехай пряма l перетинає пряму AC у точці E, а коло ω у точці F, яка лежить між точками D і E. Доведіть, що описані кола трикутників BEF і CDF дотикаються одне одного у точці F.*

(Міжнародна математична олімпіада Балканських країн, 2012 р.)

Задача 5.32. *У колі ω з центром O провели хорду AB, яка не є діаметром цього кола. На відрізку OB відмітили довільно точку T. Пряма, яка проходить через точку T і перпендикулярна до відрізка OB, перетинає хорду AB у* *точці C, а коло ω – у двох точках D і E. Позначимо через S основу перпендикуляра, опущеного із T на пряму AB. Доведіть, що $AS \cdot BC = TE \cdot TD$.*

(Міжнародна математична олімпіада африканських країн, 2012 р.)

Задача 5.33. *Нехай пряма, що проходить через вершину A трикутника ABC і паралельна до його сторони BC, перетинає бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C у точках P і Q відповідно. Нехай R – точка перетину прямої, що проходить через точку P і перпендикулярна до BP, з прямою, яка проходить через точку Q і перпендикулярна до прямої CQ. Нехай I – центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $AI = AR$.*

(Міжнародна математична олімпіада латиноамериканських країн, 2012 р.)

Розв'язання задач 2012 року

Задача 5.1. (Д. Прокопенко) *Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. BL і CN — бісектриси трикутників ABD і ACD відповідно. Кола, описані навколо трикутників ABL і CDN, перетинаються в точках P і Q. Доведіть, що пряма PQ проходить через середину дуги AD, що не містить точку B.*

(Олімпіада з геометрії ім. І. Ф. Шаригіна, фінал, 10 клас, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.1).

Нехай W — середина дуги AD, що не містить точку B, тоді за властивостями вписаних кутів одержуємо, що BL і CN проходять через точку W. Оскільки PQ — радикальна вісь кіл (ABL) і (CDN), то для доведення, що PQ проходить через W, достатньо довести, що степені точки W відносно цих кіл рівні, тобто потрібно довести рівність:

$$WL \cdot WB = WN \cdot WC.$$

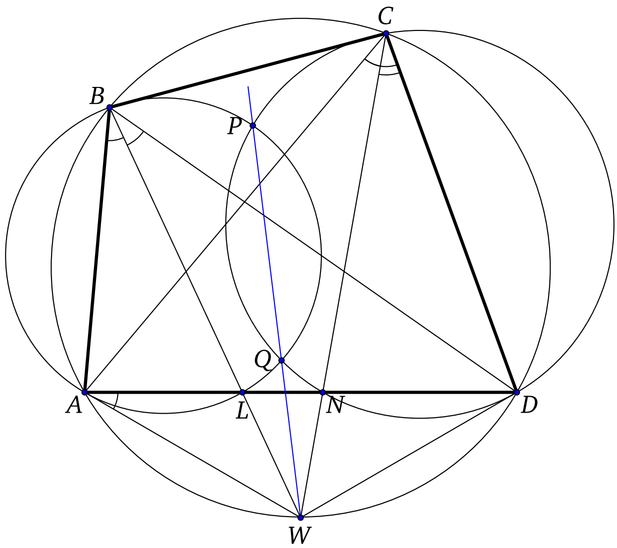


Рис. 5.1.

Дійсно,

$$\angle WAL = \angle WBD = \angle WBA,$$

тобто $\triangle\ WAL \sim \triangle\ WBA$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{WL}{WA} = \frac{WA}{WB},$$

тобто $WL \cdot WB = WA^2$. Аналогічно доводиться, що $WN \cdot WC = WD^2$. Оскільки W — середина дуги AD, то $WA = WD$, тобто $WL \cdot WB = WN \cdot WC$, що і треба було довести. □

Задача 5.2. *Про трикутник ABC відомо, що на його сторонах AB і BC відмітили точки M і K відповідно так, що $MA = AC = CK$. Нехай I та O — центри вписаного та описаного кіл трикутника ABC.*

а) Доведіть, що довжина відрізка OI дорівнює радіусу описаного кола трикутника MBK.

б) Доведіть, що $OI \perp MK$.

(Боснія і Герцеговина, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.2).

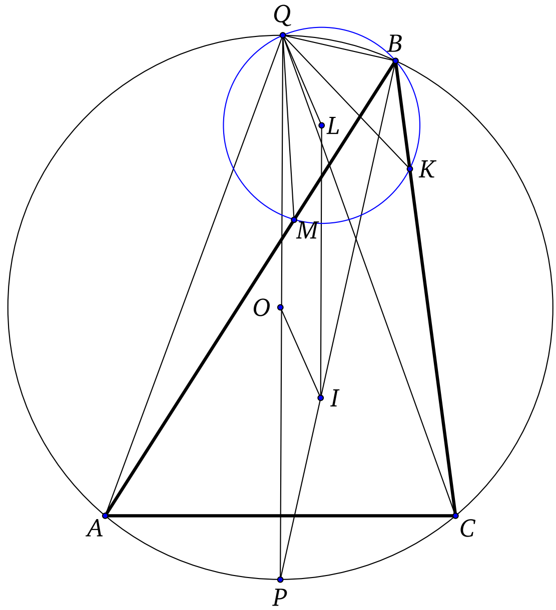


Рис. 5.2.

Не порушуючи загальності будемо вважати, що $AB > BC$. Нехай P — середина дуги AC описаного кола трикутника ABC, яка не містить точку B, а Q — середина дуги ABC цього кола, тоді PQ — діаметр цього кола, який є серединним перпендикуляром до сторони AC. Тому $QA = QC$ і $PA = PC = PI$ (теорема про «тризуб»). Крім того, точки B, I, P — колінеарні.

Оскільки $QA = QC, AM = CK$ і $\angle QAM = \angle QCK$ (бо за властивістю вписаних кутів $\angle QAM = = \angle QAB = \angle QCB = \angle QCK$), то $\triangle\ QAM = \triangle\ QCK$ (за двома сторонами і кутом між ними). З рівності цих трикутників випливає, що $QM = QK$ і $\angle QMB = \angle QKB$. А це означає, що описане коло трикутника BMK проходить через точку Q, і коли L — центр цього кола, то $QL \perp MK$.

Оскільки $\angle MQK = \angle MBK = \angle ABC = \angle AQC$, тобто $\angle MQK = \angle AQC = = \angle B$, а також $QM = QK$ і $QA = QC$, то *спіральна подібність*, з центром у точці Q, коефіцієнтом $k = \dfrac{QM}{QA} = \dfrac{QK}{QC}$ і кутом повороту $\angle AQM = \angle CQK$, відображає точку A у точку M, точку C у точку K, а центр O описаного кола трикутника AQC відображає у центр L описаного кола трикутника MQK, тобто трикутники AQM і OQL подібні. Оскільки $OA = OP$, $QA = QC$ і $\angle AOP = \angle AQC = \angle B$, то трикутники AQC і AOP також подібні. Тому матимемо:

$$\frac{OL}{AM} = \frac{QO}{QA} = \frac{OA}{QA} = \frac{AP}{AC} = \frac{IP}{AM},$$

тобто $OL = PI$. Крім того, $\angle QBP = 90^\circ$, а $OL \perp BQ$, бо $OB = OQ$ і $LB = LQ$. Звідси випливає, що $OL \parallel PI$. Так як $OL = PI$ і $OL \parallel PI$, то $OLIP$ — паралелограм. Тому $IL = PO$ і $LI \parallel PO$, тобто $IL = OQ$ і $IL \parallel OQ$, а це означає, що $OQLI$ також паралелограм. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні і паралельні, то $OI = QL$, що і завершує розв'язання пункту а).

Для розв'язання пункту б), матимемо: $OI \parallel QL$, а $QL \perp MK$. Тому $OI \perp MK$, що і треба було довести. $\square$

Задача 5.3. *Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, P — точка перетину його діагоналей. Відомо, що $AC + AD = BC + BD$. Доведіть, що бісектриси* *кутів $\angle ACB$, $\angle ADB$ і $\angle APB$ перетинаються в одній точці.*

(Канада, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.3).

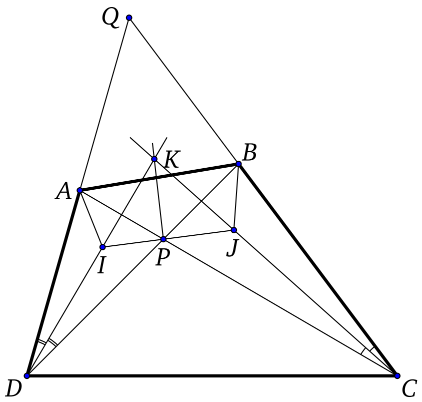


Рис. 5.3.

Нехай I та J — центри вписаних кіл трикутників APD та BPC відповідно. Тоді ці точки — точки перетину бісектрис цих трикутників. Позначимо через K — точку перетину променів DI і CJ. Доведемо, що PK — бісектриса кута $\angle APB$.

Нехай Q — точка перетину променів DA і CB. Оскільки $AC + AD = BC + BD$, то за відомою лемою про властивості і ознаки описаних чотирикутників, одержуємо, що в чотирикутник $AQBP$ можна вписати коло, яке буде зовнівписаним для трикутників APD і BPC, а K — його центр. Звідси й випливає, що PK — бісектриса кута $\angle APB$, що і треба було довести. □

Для завершення розв'язання цієї задачі, доведемо згадану у ній *лему про властивості та ознаки вписаних чотирикутників*.

Лема. *Дано опуклий чотирикутник. Промені AB і DC перетинаються у точці P, а промені BC і AD — у точці Q. Чотирикутник $ABCD$ буде описаним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:*

а) $AB + CD = BC + AD$;

б) $AP + CQ = AQ + CP$;

в) $BP + BQ = DP + DQ$.

Доведення.

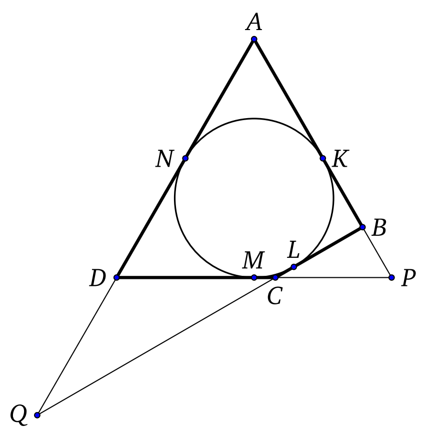


Рис. 5.4.

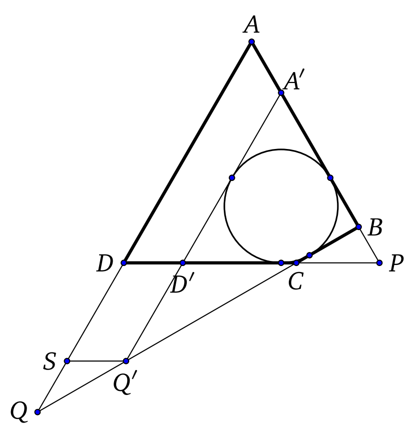


Рис. 5.5.

Спочатку доведемо, що коли заданий чотирикутник $ABCD$ є описаним, то виконується кожна умова. Нехай K, $AB < AC$, M і N — точки дотику вписаного кола зі сторонами AB, BC, CD і DA відповідно.

За теоремою про січні, що проведені до кола із однієї точки, матимемо:

а) $AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN = BC + AD$;

б) $AP + CQ = AK + PK + QL - CL = AN + PM + QN - CM = AQ + CP$;

в) $BP + BQ = AP - AB + BC + CQ = (AP + CQ) + (BC - AB) = (AQ + CP) + + (CD - AD) = DP + DQ$.

Доведемо тепер, наприклад, що коли $BP + BQ = DP + DQ$, то чотирикутник $ABCD$ описаний.

Розглянемо для цього коло, яке є зовнівписаним колом трикутника BCP, що дотикається до сторони BC. Припустимо, що пряма AD не дотикається цього кола; перемістимо паралельно цю пряму так, щоб вона доторкнулася цього кола (див. рис. 5.5). Нехай S така точка прямої AQ, що $Q'S \parallel DD'$. Так як за умовою $BP + BQ = DP + DQ$, а за попереднім доведенням $BP + BQ' = D'P + + D'Q'$, то $QS + SQ' = QQ'$, що суперечить нерівності трикутника. Одержане протиріччя і доводить, що чотирикутник $ABCD$ буде описаним. Для інших двох умов доведення аналогічне. □

Задача 5.4. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторін BC, CA, AB у точках D, E, F. Нехай K — точка перетину прямих DI і EF. Доведіть, що пряма AK ділить сторону BC навпіл.*

(Сінгапур, 2012 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.6).

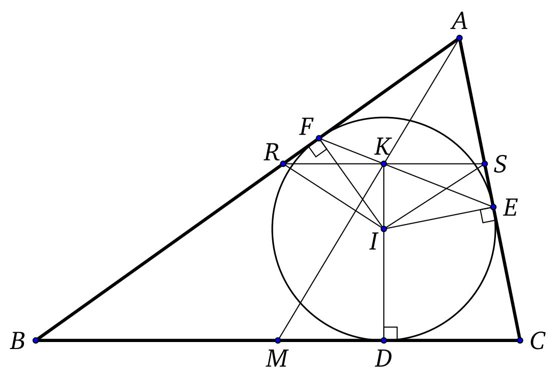


Рис. 5.6.

Проведемо через точку K пряму, яка паралельна до сторони BC, яка перетинає AB у точці R, а AC — у точці S. Оскільки $RS \parallel BC$ і $ID \perp BC$, то $IK \perp RS$. Крім того, $IF \perp RF$, бо радіус, що проведений у точку дотику, перпендикулярний до дотичної. З того, що $\angle RFI = \angle RKI = 90°$, одержуємо, що точки R, F, K, I — циклічні. Аналогічно доводиться, що точки E, S, K, I також циклічні. За властивістю вписаних кутів матимемо:

$$\angle KRI = \angle KFI = \angle EFI = \angle FEI = \angle KEI = \angle KSI,$$

тобто $\angle KRI = \angle KSI$. Звідси випливає, що трикутник RIS — рівнобедрений, тобто IK — медіана трикутника RIS. Оскільки K — середина RS і $RS \parallel BC$, то за основною властивістю центрального проектування, одержуємо: M — середина BC, що і завершує розв'язання задачі. $\square$

Задача 5.5. *У гострокутному трикутнику ABC через D, E, F позначили основи його висот, проведених із вершин A, B, C відповідно. Нехай ω — коло, описане навколо трикутника AEF. Нехай ω_1 і ω_2 — кола, які проходять через точку D і дотикаються до ω у точках F і E відповідно. Доведіть, що точка перетину ω_1 і ω_2, яка відмінна від точки D, лежить на прямій BC.*

(США, Лінкольн, Небраска, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.7).

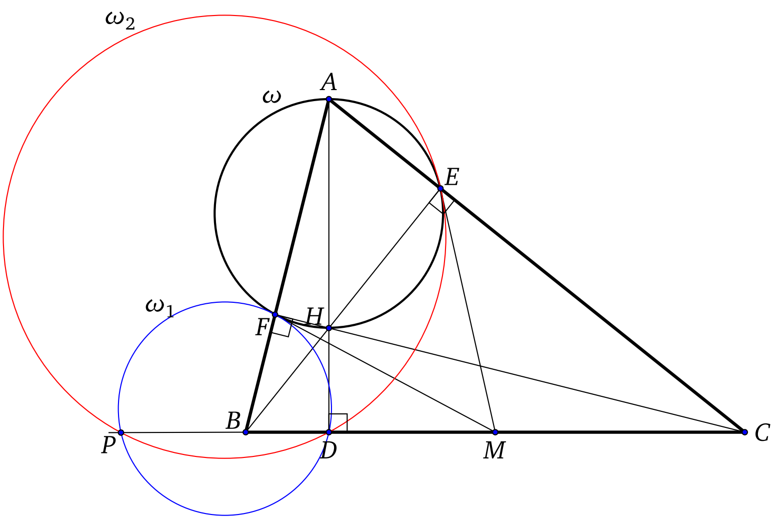


Рис. 5.7.

Нехай H — точка перетину висот AD, BE, CF трикутника ABC, тоді AH — діаметр кола ω, описаного навколо трикутника AEF. Нехай M — середина сторони BC трикутника ABC. Тоді $EM = FM$ — як медіани прямокутних трикутників BEC і BFC, що проведені до гіпотенузи BC. Тому

$$\angle MFC = \angle FCB = \angle DAB = \angle HAF,$$

тобто $\angle MFC = \angle HAF$, а ця рівність кутів означає, що MF — дотична до кола ω. Аналогічно, ME також дотична до кола ω. Оскільки кола ω_1 і ω_2 дотикаються до ω у точках F і E відповідно, то пряма MF — спільна дотична кіл ω_1 і ω, а ME — спільна дотична кіл ω_2 і ω. А це в свою чергу означає, що пряма MF — радикальна вісь кіл ω_1 і ω, а E — радикальна вісь кіл ω_2 і ω. Так як DP — радикальна вісь кіл ω_1 і ω_2, то за теоремою про радикальний центр трьох кіл, одержуємо, що вказані радикальні осі FM, EM і DP перетинаються в одній точці — точці M. Звідси й випливає, що P лежить на прямій BC, що і завершує розв'язання. □

Задача 5.6. *Нехай P і Q — точки всередині трикутника ABC такі, що $\angle PAC = \angle QAB$ і $\angle PBC = \angle QBA$.*

а) Доведіть, що усі шість основ перпендикулярів, опущених із точок P і Q на сторони трикутника, будуть циклічними (лежатимуть на одному колі).

б) Нехай D і E — основи перпендикулярів, опущених із точки P на сторони BC і AC, а K — основа перпендикуляра, опущеного із точки Q на сторону AB. Нехай M — точка перетину прямих DE і AB. Доведіть, що $MP \perp CK$.

(Сербія, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 5.8).

Оскільки $\angle PAC = \angle QAB$ і $\angle PBC = \angle QBA$, то за теоремою Чеви у тригонометричній формі, одержуємо, що $\angle PCA = \angle QCB$, тобто точки P і Q ізогонально спряжені.

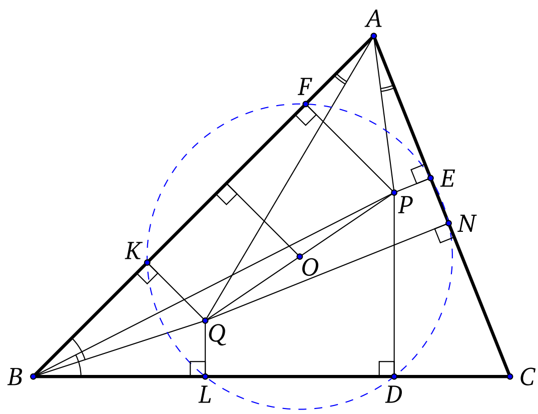


Рис. 5.8.

а) Нехай D, E, F — основи перпендикулярів, опущених із точки P на сторони BC, CA, AB відповідно, а L, N, K — основи перпендикулярів, опущених із точки Q на сторони BC, CA, AB відповідно. Доведемо, що точки L, D, N, E, F, K — циклічні. Дійсно, чотирикутники $PEAF$ і $QNAK$ — циклічні, а тому за властивістю вписаних кутів, одержуємо:

$$\angle PFE = \angle PAE = \angle PAC = \angle QAB = \angle QAK = \angle QNK,$$

тобто $\angle PFE = \angle QNK$. Так як $\angle PFA = \angle QNA = 90^\circ$, то $\angle EFA = \angle KNA$. Ця рівність кутів забезпечує циклічність чотирикутника $KNEF$, а центр O описаного кола чотирикутника $KNEF$ є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін FK і NE, тобто точка O — середина відрізка PQ. Аналогічно доводиться, що коло з центром O буде проходити і через точки D і L. А це означає, що усі точки L, D, N, E, F, K лежать на колі з центром O — серединою PQ і радіусом OD, що і завершує розв'язання задачі а).

б) Нехай T — точка перетину кіл (PFK) і $(PDCE)$. Проведемо коло з центром O, існування якого було доведена у пункті а) (рис. 5.9).

За теоремою про радикальний центр трьох зображених кіл, одержуємо, що M — їх радикальний центр, тобто MP проходить через точку T. Оскільки

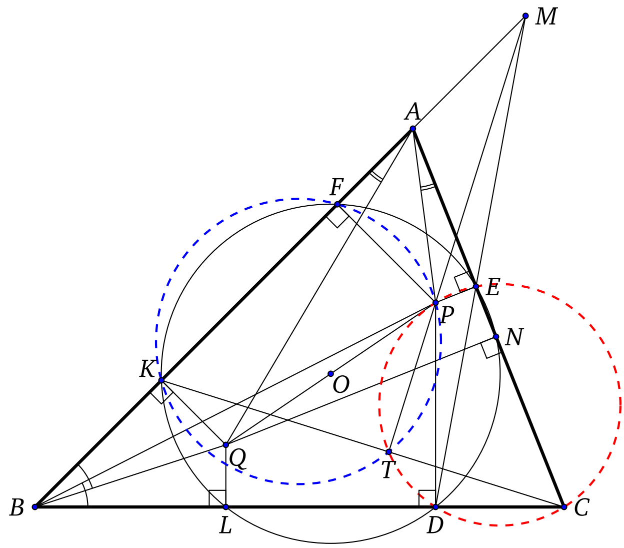


Рис. 5.9.

$\angle KTP = 180^\circ - \angle KFP = 90^\circ$ і $\angle PTC = \angle PDC = 90^\circ$, то пряма CK проходить через точку T і $MP \perp CK$, що і треба було довести. □

Задача 5.7. *Нехай J — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається сторони BC у точці M, а продовжень сторін AB і AC відповідно у точках K і L. Нехай F — точка перетину прямих JB і LM, а G — точка перетину прямих JC і KM. Нехай S і T — точки перетину прямих AF і AG з прямою BC відповідно. Доведіть, що M — середина відрізка ST.*

(Міжнародна математична олімпіада, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.10).

Так як $BK = BM$ (за теоремою про дотичні) і $JK = JM$ (як радіуси зовнівписаного кола), то JB — серединний перпендикуляр відрізка KM. Аналогічно, JC — серединний перпендикуляр відрізка LM. Звідси випливає, що $FK = FM$ і $GL = GM$, тобто трикутники KFM і LGM рівнобедрені і подібні, бо $\angle FMK = \angle GML$ (як вертикальні). Звідси випливає, що кути при їх вершинах відповідно рівні: $\angle KFM = \angle LGM$.

Оскільки $\angle KFL = \angle KGL$, то точки K, F, G, L — циклічні, тобто лежать на одному колі, яке ми позначимо ω. Оскільки FJ — бісектриса $\angle KFL$, то FJ ділить меншу дугу KL кола ω навпіл. Аналогічно, GJ також ділить цю дугу навпіл. Тому точка J і є серединою цієї дуги, тобто точка J лежить на ω. Оскільки

$$\angle JKA + \angle JLA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

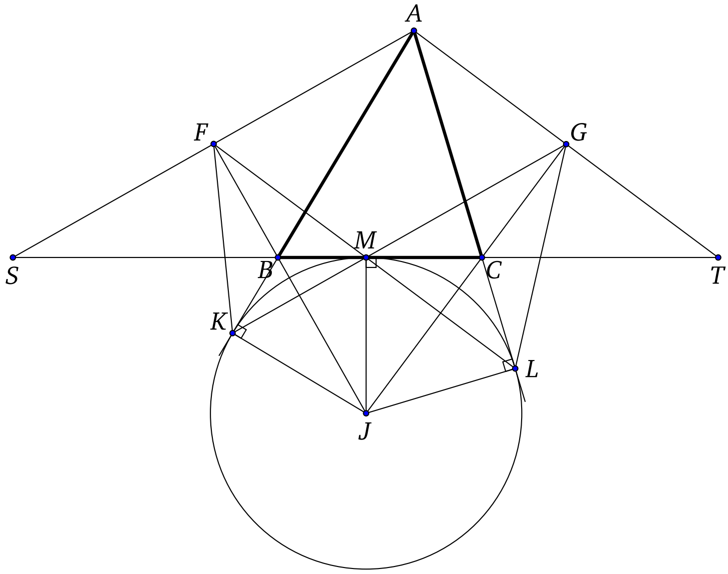


Рис. 5.10.

то точки K, J, L, A — циклічні. Враховуючи, що K, J, L лежать на ω, то і точка A також лежить на ω. Звідси випливає, що $\angle AFJ = \angle AKJ = 90^\circ$ і $\angle AGJ = \angle ALJ = 90^\circ$.

Розглянемо трикутник ABS. У ньому BF є висотою і бісектрисою. Тому він рівнобедрений, тобто $SB = AB$. Крім того, $BM = BK$ (за теоремою про дотичні). Звідси випливає, що

$$SM = SB + BM = AB + BK = AK,$$

тобто $SM = AK$. Аналогічно доводиться, що $TM = AL$. Оскільки $AK = AL$ (як дотичні), то і $SM = TM$, що і треба було довести. □

Задача 5.8. *У прямокутному трикутнику ABC, з прямим кутом при вершині B, висота BH перетинається з бісектрисами CE і AD відповідно в точках P і Q. Нехай M і N — середини відрізків PE і QD відповідно. Доведіть, що $MN \parallel AC$.*

(Румунія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.11).

Оскільки CE — бісектриса кута ACB, то прямокутні трикутники CHP і CBE — подібні (за двома кутами). Звідси випливає, що $\angle BEC = \angle HPC$. Але $\angle HPC = \angle BPE$ (як вертикальні). Тому $\angle BEP = \angle BPE$, тобто трикутник PBE — рівнобедрений. Аналогічно доводиться, що трикутник QBD також рівнобедрений. З рівнобедреності цих трикутників випливає, що $BM \perp CE$ і $BN \perp QD$.

Тоді чотирикутник $BMIN$ — вписаний, де I — точка перетину бісектрис CE і AD. За теоремою про кут між бісектрисами трикутника знаходимо, що

$$\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

Отже, $\angle MIN = 135^\circ$ і $\angle MBN = 45^\circ$. Оскільки BI — бісектриса кута ABC, то $\angle ABI = \angle CBI = 45^\circ$.

Так як $\angle DBQ = \angle CBH = \angle A$ і BH — бісектриса кута DBQ, то $\angle DBN = \frac{1}{2}\angle A$. Оскільки $\angle MBN = \angle IBD$, то $\angle MBI = \angle NBD = \frac{1}{2}\angle A$. Далі з циклічності чотирикутника $BMIN$ випливає, що

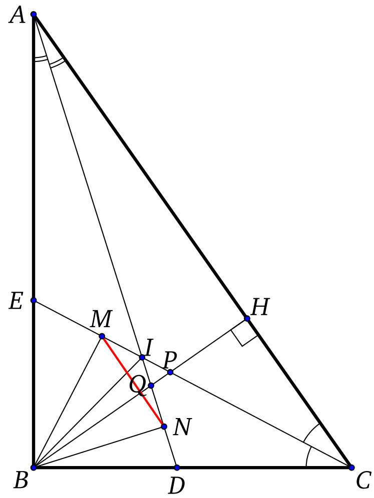


Рис. 5.11.

$$\angle MNI = \angle MBI = \frac{1}{2}\angle A = \angle IAC.$$

Звідки випливає, що $\angle MNI = \angle IAC$. Оскільки ці кути внутрішні різносторонні, то $MN \parallel AC$, що і треба було довести. □

Задача 5.9. *Нехай ABC — трикутник, у якому $\angle BCA = 90^\circ$, D — основа висоти, проведеної з вершини C. Всередині відрізка CD взято точку X. Точка K на відрізку AX така, що $BK = BC$. Аналогічно, точка L на відрізку BX така, що $AL = AC$. Нехай M — точка перетину відрізків AL і BK. Доведіть, що $MK = ML$.*

(Міжнародна математична олімпіада, 2012 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.12).

Проведемо два кола k_1 і k_2: перше з центром у точці A і радіусом AC, а друге з центром у точці B і радіусом BC. Оскільки $AL = AC$ і $BK = BC$, то точка L лежить на колі k_1, а точка K лежить на колі k_2. Нехай C' — друга точка перетину кіл k_1 і k_2, тоді точка D — середина CC', а CC' — радикальна вісь k_1 і k_2. Нехай BL перетинає вдруге коло k_1 у точці E

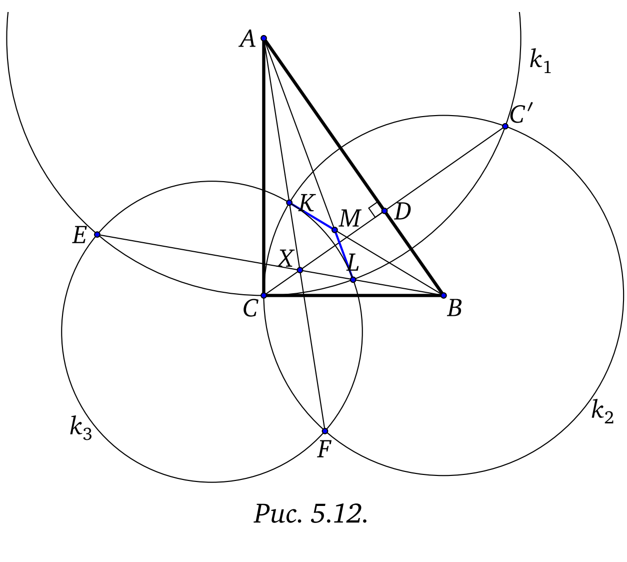


Рис. 5.12.

і AK перетинає вдруге коло k_2 у точці F. Оскільки точка X лежить на радикальній осі CC' кіл k_1 і k_2, то її степінь відносно цих кіл однаковий. Та як хорди EL і FK проходять через точку X, то степінь точки X відносно кола k_1 дорівнює $-XE \cdot XL$, а степінь точки X відносно кола k_2 дорівнює $-XF \cdot XK$. Тому $-XE \cdot XL = -XF \cdot XK$. Звідки слідує, що $XE \cdot XL = XF \cdot XK$, тобто точки E, K, L, F лежать на одному колі (позначимо його k_3).

Далі, оскільки BC — дотична до кола k_1, то $BC^2 = BE \cdot BL$, а враховуючи рівність $BC = BK$, одержуємо, що $BK^2 = BF \cdot BL$, а це означає, що BK — дотична до кола k_3.

Аналогічно доводиться, що AL також дотична до кола k_3. Звідси і випливає, за теоремою про дотичні, що $MK = ML$, що і треба було довести. □

Задача 5.10. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, D — точка дотику цього кола зі стороною BC, P — основа перпендикуляра, опущеного з точки I на пряму AD. Доведіть, що $\angle BPD = \angle DPC$.*

(США, Лінкольн, Небраска, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.13).

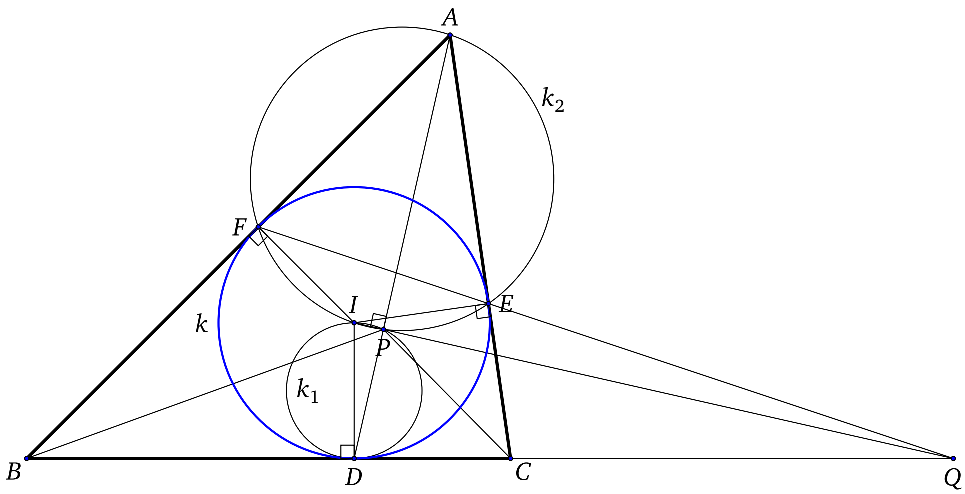


Рис. 5.13.

Позначимо вписане коло через k. Нехай k дотикається до сторін AB і AC в точках F і E відповідно. Оскільки D, E і F — точки дотику k зі сторонами BC, CA і AB відповідно, то $ID \perp BC$, $IE \perp CA$ і $IF \perp AB$.

Нехай k_1 — коло з діаметром DI. Так як $\angle DPI = 90°$, то точка P лежить на колі k_1. Нехай k_2 — коло з діаметром AI. Так як $\angle API = \angle AEI = \angle AFI = 90°$, то точки P, E і F лежать на колі k_2. Пряма BC є спільною дотичною до кіл k і k_1, тобто пряма BC — радикальна вісь кіл k і k_1. Оскільки IP — спільна хорда кіл k_1 і k_2, то пряма IP — радикальна вісь кіл k_1 і k_2. Оскільки FE — спільна хорда кіл k і k_2, то пряма FE — радикальна вісь кіл k і k_2. За теоремою про радикальний центр трьох кіл, одержуємо, що прямі BC, IP і FE перетинаються в одній точці Q.

Далі, застосуємо теорему Менелая до трикутника ABC і прямої $\overline{FEQ}$:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

Оскільки $AF=AE$, $BF=BD$ і $CD=CE$ (як дотичні, що проведені із вершин A, B і C до кола k), то після скорочення матимемо:

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{FB}{CE}=\frac{BD}{DC},$$

тобто

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{BD}{DC}. \qquad (\star)$$

Далі, нехай $\angle BPD=\varphi$, а $\angle DPC=\psi$, (φ і ψ — гострі), тоді за основним співвідношенням чевіани трикутника (лема 2.1) матимемо: а) для трикутника BPC і чевіани PD:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\psi};$$

б) для трикутника BPC і чевіани PQ:

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{\sin(90^\circ+\varphi)}{\sin(90^\circ-\psi)}.$$

Таким чином, використовуючи $(\star)$, матимемо:

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{BD}{DC}\Leftrightarrow\frac{BP}{PC}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{\sin(90^\circ+\varphi)}{\sin(90^\circ-\psi)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\psi\Leftrightarrow\varphi=\psi,$$

тобто PD — бісектриса кута BPC, що і треба було довести. □

Задача 5.11. *Кола k_1 і k_2 дотикаються внутрішнім чином у точці C. Хорда AB кола k_1 дотикається до кола k_2 у точці E, причому E — середина AB. Коло k_3 дотикається до k_1, k_2 і відрізка AB відповідно у точках D, Z і F. Промені CD і AB перетинаються у точці P. Нехай M — середина дуги AB кола k_1, яка не містить точку C. Доведіть, що $\operatorname{tg}\angle ZEP=\dfrac{PE}{CM}$.*

(США, Лінкольн, Небраска, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 5.14).

Нехай O_1, O_2 і O_3 — центри кіл k_1, k_2 і k_3 відповідно, а G — друга точка перетину прямої PC з колом k_3. Оскільки E — середина AB, то точки C, O_2, O_1, E, M — лежать на одній прямій, яка є серединним перпендикуляром відрізка AB. Так як $\angle GDF=\angle CDM=90^\circ$, то GF — діаметр кола k_3, а враховуючи, що P — центр гомотетії, яка відображає коло k_3 на коло k_2, матимемо, що центри O_3 і O_2 цих кіл лежатимуть на прямій PZ.

Далі, оскільки D — точка дотику кіл k_1 і k_3, то D — центр гомотетії, яка відображає коло k_3 на коло k_1. Це означає, що точки D, F і M — колінеарні. Так як $\angle CEF = \angle CDF = 90°$, то чотирикутник $CDFE$ — вписаний. За теоремою про січні одержуємо, що $MD \cdot MF = MC \cdot ME$. Ця рівність означає, що степінь точки M відносно кіл k_2 і k_3 однакова, тобто точка M належить радикальній осі кіл k_2 і k_3. Оскільки точка Z також належить радикальній осі кіл k_2 і k_3, як їхня точка дотику, то MZ — спільна дотична кіл k_2 і k_3. Отже, $MZ \perp PZ$, а тому $\angle CZM = \angle EZP$. Оскільки $\angle ECZ = \angle ZEP$, як кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, то $\triangle\ CZM \sim \triangle\ EZP$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що

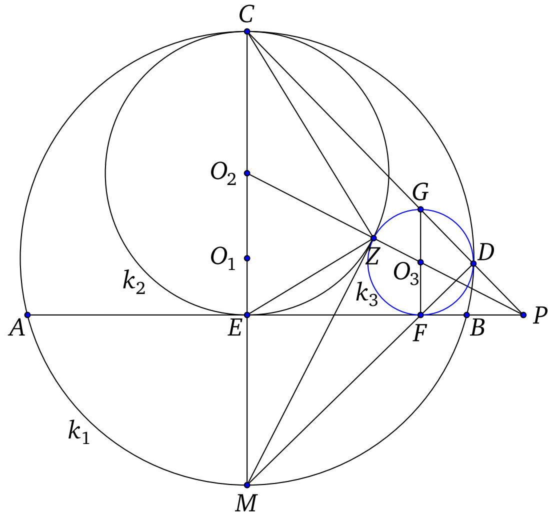


Рис. 5.14.

$$\frac{EZ}{CZ} = \frac{PE}{MC}.$$

Тому

$$\operatorname{tg}\angle ZEP = \operatorname{tg}\angle ECZ = \frac{EZ}{CZ} = \frac{PE}{MC},$$

що і треба було довести. □

Задача 5.12. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, у якому $AB < AC$, а D і E — такі точки на стороні BC, що $BD = CE$ і D лежить між B і E. Відомо, що всередині трикутника ABC знайшлася така точка P, що $PD \parallel AE$ і $\angle PAB = \angle EAC$. Доведіть, що $\angle PBA = \angle PCA$.*

(США, Лінкольн, Небраска, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок , що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.15).

Нехай $ABFC$ і $ABGP$ — паралелограми, тоді $PG \parallel AB \parallel CF$ і $PG = AB = CF$. Звідси слідує, що $PGFC$ — також паралелограм. Отже, трикутники APC і BGF рівні (за трьома сторонами).

Далі,

$$\angle BGP = \angle PAB = \angle CAE = \angle BFD = \angle BFP,$$

тобто $\angle BGP = \angle BFP$.

Остання рівність кутів означає, що точки B, G, F і P — циклічні. З циклічності цих точок випливає, що $\angle BPG = \angle BFG$. Але $\angle BPG = \angle ABP$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і PG), а $\angle BFG = \angle ACP$ (як відповідні кути рівних трикутників).

Таким чином, з рівності кутів $\angle BPG = \angle BFG$, випливає рівність кутів $\angle ABP = \angle ACP$, що і треба було довести. □

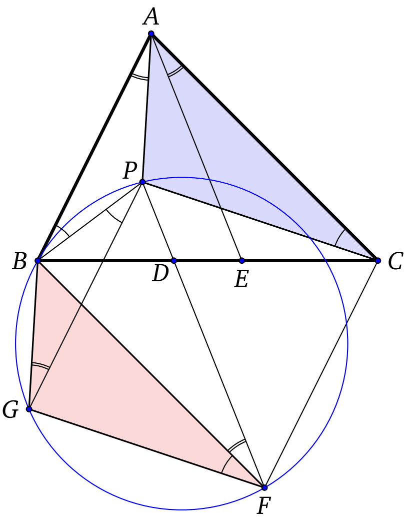


Рис. 5.15.

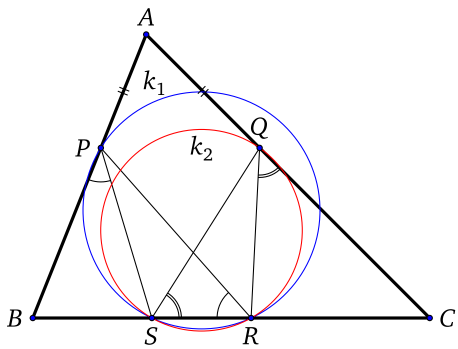


Рис. 5.16.

Задача 5.13. *Дано трикутник ABC. На його сторонах AB і AC відмітили точки P і Q відповідно так, що $AP = AQ$. Нехай S і R різні точки сторони BC (S лежить між B і R) такі, що $\angle BPS = \angle PRS$ і $\angle CQR = \angle QSR$. Доведіть, що точки P, Q, R, S — циклічні, тобто лежать на одному колі.*

(США, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.16).

Нехай k_1 і k_2 — описані кола трикутників PSR і QSR відповідно. Припустимо, що ці кола не співпадають. Оскільки $\angle BPS = \angle PRS$, то коло k_1 дотикається до сторони AB у точці P, а так як $\angle CQR = \angle QSR$, то коло k_2 дотикається сторони AC у точці Q. Це означає, що AP^2 — степінь точки A відносно кола k_1 і AQ^2 — степінь точки A відносно кола k_2. За умовою задачі $AP = AQ$, тобто степені точки A відносно кіл k_1 і k_2 — рівні. Це означає, що точка A лежить на радикальній осі кіл k_1 і k_2. Так як R і S — точки перетину k_1 і k_2, то пряма BC, яка проходить через ці точки, буде радикальною віссю кіл k_1 і k_2. Таким чином, точка A мусить лежати на прямій BC, що неможливо. Одержане протиріччя і доводить, що кола k_1 і k_2 співпадають, тобто точки P, Q, R,S — циклічні, що і треба було довести. □

Задача 5.14. *Нехай у площині трикутника ABC задано точку P і пряму l, яка проходить через P. Точки A', B' і C' — точки перетину прямих, що симетричні прямим PA, PB і PC відносно прямої l, з прямими BC, CA і AB відповідно. Доведіть, що точки A', B' і C' — колінеарні, тобто лежать на одній прямій.*

(США, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.17).

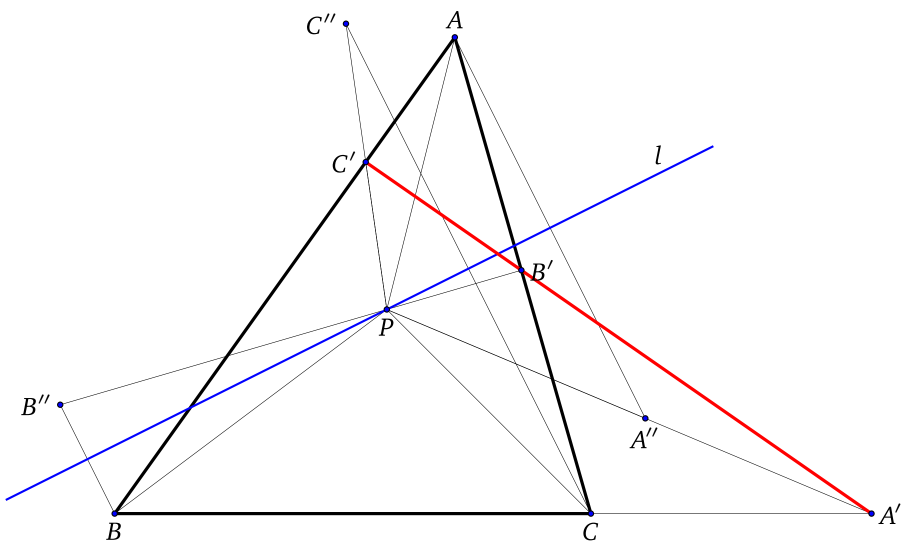


Рис. 5.17.

Нехай A'', B'' і C'' — точки, симетричні точкам A, B і C відносно прямої l, тоді A', B' і C' — точки перетину прямих PA'', PB'' і PC'' відповідно з прямими BC, CA і AB. Далі скористаємося основним співвідношенням чевіани трикутника (лема 2.1). Для трикутника BPC і його чевіани PA' маємо:

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{PB}{PC} \cdot \frac{\sin \angle BPA'}{\sin \angle CPA'}.$$

Для трикутника CPA і його чевіани PB' маємо:

$$\frac{CB'}{AB'} = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{\sin \angle CPB'}{\sin \angle APB'}.$$

Для трикутника BPC і його чевіани PA' маємо:

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{\sin \angle APC'}{\sin \angle BPC'}.$$

Перемножуючи ці три співвідношення, після скорочення, одержимо:

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = \frac{\sin \angle BPA'}{\sin \angle CPA'} \cdot \frac{\sin \angle CPB'}{\sin \angle APB'} \cdot \frac{\sin \angle APC'}{\sin \angle BPC'}.$$

Враховуючи задану симетрію, матимемо:

$$\sin\angle BPA' = \sin\angle APB'.$$

Дійсно, $\sin\angle BPA' = \sin\angle BPA'' = \sin\angle B''PA = \sin\angle APB'$. Аналогічно доводиться, що $\sin\angle CPB' = \sin\angle BPC'$ і $\sin\angle APC' = \sin\angle CPA'$. Таким чином, після скорочення відповідних синусів, одержуємо, що

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1.$$

Із цього співвідношення, за теоремою Менелая для трикутника ABC і точок A', B' і C', випливає, що ці точки A', B' і C' — колінеарні, що і треба було довести. □

Задача 5.15. *Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти різностороннього трикутника ABC, а D, E, F — середини сторін BC, CA, AB цього трикутника. Позначимо через A_2, B_2, C_2 точки перетину прямих B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 відповідно з прямими BC, CA, AB. Доведіть, що прямі, які проходять через точки D, E, F відповідно перпендикулярно до прямих AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці.*

(США, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2012 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.18).

Доведемо, що $DH \perp AA_2$. Звідси випливатиме, що усі вказані прямі перетинатимуться в точці H.

Оскільки

$$\angle BC_1C = \angle BB_1C = 90^\circ,$$

то точки B, C_1, B_1, C — циклічні. Тоді відносно цього кола пряма AH — поляра точки A_2 і A_2H — поляра точки A. Звідси випливає, що AA_2 — поляра точки H. Оскільки D — центр цього кола, то за властивістю поляри $DH \perp AA_2$, що і треба було довести. □

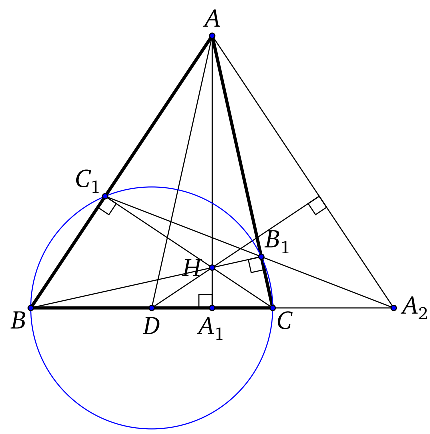


Рис. 5.18.

Задача 5.16. *Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що він є одночасно вписаним і описаним. Вписане в нього коло дотикається до сторін AB і CD в точках X і Y відповідно. Перпендикуляри до прямих AB і CD в точках A і D перетинаються в точці U, в точках X і Y перетинаються в точці V, а в точках B і C перетинаються у точці W. Доведіть, що точки U, V і W — колінеарні.*

(Математичний турнір, Якутія, Росія, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.19).

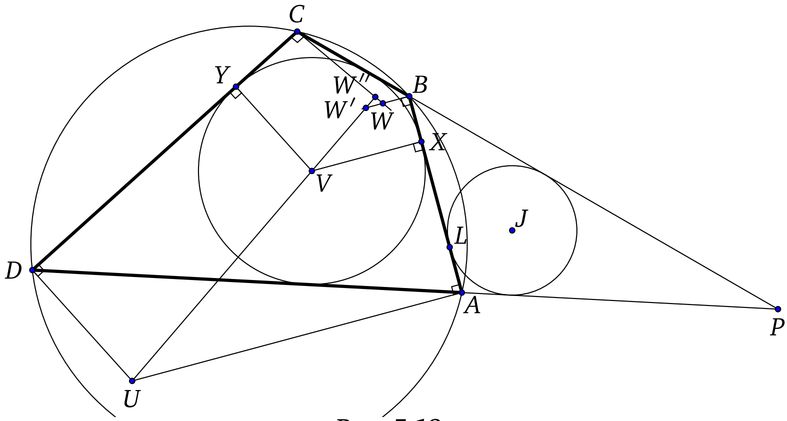


Рис. 5.19.

Нехай пряма UV перетинає перпендикуляр із точки B у точці W', а із точки C — у точці W''. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що промені CB і DA перетинаються у точці P. Нехай J — центр вписаного кола трикутника ABP, яке дотикається сторони AB у точці L. З умови задачі випливає, що V — центр вписаного кола даного чотирикутника $ABCD$. Так як чотирикутник $ABCD$ — вписаний, то $\angle PAB = \angle PCD$. Тому трикутник PAB і PCD подібні, а значить відповідні відрізки цих трикутників є пропорційними:

$$\frac{BL}{LA} = \frac{DY}{YC}.$$

Оскільки коло (V) є також зовнівписаним для трикутника PAB, то за відомою властивістю про точки дотику вписаного і зовнівписаного кіл трикутника, одержуємо, що $AL = BX$ і $BL = AX$. Оскільки прямі, що перпендикулярні до прямої між собою є паралельними, то $UA \parallel XV \parallel BW$ і $UD \parallel VY \parallel WC$.

Таким чином, за теоремою Фалеса одержуємо:

$$\frac{UV}{VW'} = \frac{AX}{XB} = \frac{BL}{LA} = \frac{DY}{YC} = \frac{UV}{VW''},$$

тобто $VW' = VW''$, а це означає, що $W' = W'' = W$, що і треба було довести. □

Задача 5.17. *Нехай $ABCD$ — чотирикутник, в якому $AC = BD$ і P — точка перетину діагоналей AC і BD. Нехай k_1 і k_2 — описані кола трикутників PAB і PCD, а O_1 і O_2 — відповідно їхні центри. Сторона BC перетинає k_1 і k_2 вдруге у точках S і T відповідно. Нехай M — середина дуги PS кола k_1, яка не містить точку B, а N — середина дуги PT кола k_2, яка не містить точку C. Доведіть, що $MN \parallel O_1O_2$.*

(США, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 5.20).

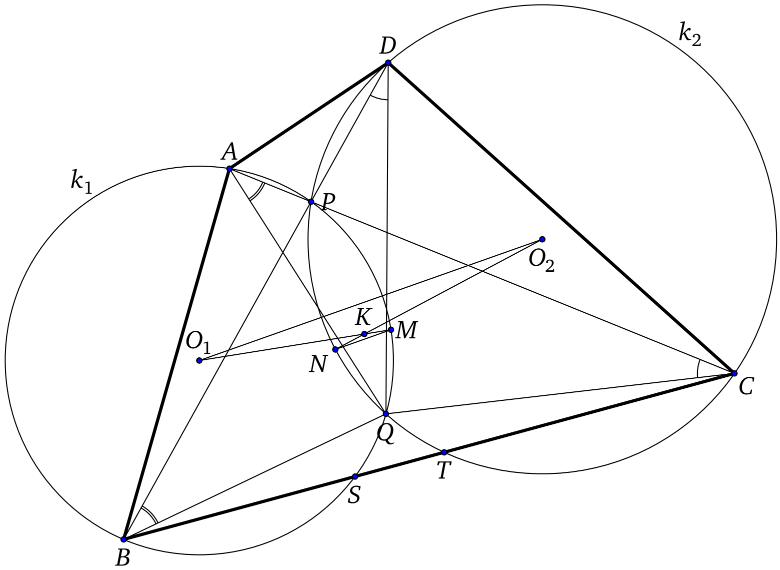


Рис. 5.20.

Нехай Q — друга точка перетину кіл k_1 і k_2. Тоді за властивістю вписаних кутів матимемо:

$$\angle QCA = \angle QCP = \angle QDP = \angle QDB \text{ і } \angle QAC = \angle QAP = \angle QBP = \angle QBD.$$

Оскільки $AC = BD$, то трикутники AQC і BQD — рівні (за стороною і двома прилеглими до неї кутами). З рівності цих трикутників випливає, що $QC = QD$ і $QA = QB$. Крім того, $\angle CQD = \angle CPD = \angle APB = \angle AQB$. Тому $\triangle\ CQD \sim \triangle\ AQB$ (за двома сторонами і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає пропорційність сторін і радіусів описаних кіл, тобто

$$\frac{QB}{QC} = \frac{O_1M}{O_2N}.$$

Нехай K — точка перетину O_1M і O_2N. Оскільки $PQ \perp O_1O_2$ (бо радикальна вісь перпендикулярна лінії центрів кіл) і $O_1M \perp PS$ (бо M — середина дуги PS), то $\angle SPQ = \angle O_2O_1M$. Тоді $\angle QBC = \angle QBS = \angle QPS = \angle O_2O_1M = \angle O_2O_1K$, тобто $\angle QBC = \angle O_2O_1K$. Аналогічно доводиться, що $\angle QCB = \angle O_1O_2K$. Тому трикутники BQC і O_1KO_2 подібні (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{QB}{QC}.$$

Отже, з останніх двох пропорцій, одержуємо, що $\frac{O_1K}{O_2K} = \frac{O_1M}{O_2N}$, тобто

$$\frac{O_1M}{O_1K} = \frac{O_2N}{O_2K} \Leftrightarrow \frac{KM}{KO_1} = \frac{KN}{KO_2}.$$

Звідки $\triangle\ O_1KO_2 \sim \triangle\ MKN$. З подібності цих трикутників випливає, що $\angle O_2O_1K = \angle KMN$. Оскільки ці кути внутрішні різносторонні, то $O_1O_2 \parallel MN$, що і треба було довести. □

Задача 5.18. *Трикутник ABC вписаний в коло k. Продовження бісектриси AD цього трикутника за точку D, перетинає коло k у точці L. Нехай M — середина сторони BC. Описане коло k_1 трикутника ADM перетинає сторони AB і AC відповідно в точках P і Q (відмінних від A). Нехай N — середина PQ, а H — основа перпендикуляра, опущеного з точки L на пряму ND. Доведіть, що пряма ML дотикається описаного кола трикутника HMN.*

(США, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2012 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.21).

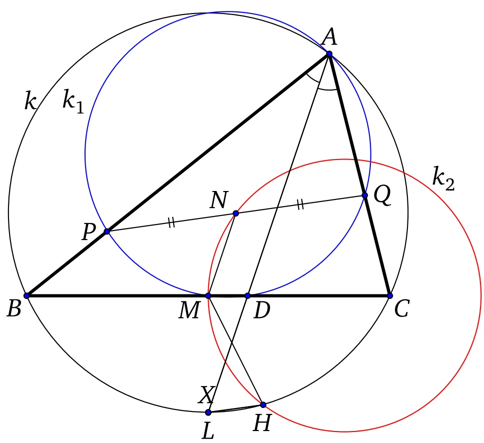


Рис. 5.21.

Оскільки AD — бісектриса кута A трикутника ABC, то L — середина дуги BC кола k, що не містить точку A. Нехай X — середина дуги BAC кола k. Тоді точки X, M і L лежать на одній прямій, яка є серединним перпендикуляром відрізка BC і є діаметром кола k. Оскільки кут XAL — вписаний в коло k і спирається на його діаметр XL, то $\angle XAL = 90°$. Так як $\angle XMD + \angle XAD = 90° + 90° = 180°$, то точки X, A, D, M лежать на одному колі, яке описане навколо трикутника ADM, тобто належать колу k_1, причому XD — діаметр цього кола. За умовою задачі точки P і Q також лежать на цьому колі. Оскільки $\angle PAD = \angle QAD$, то за властивістю вписаних кутів точка D — середина дуги PQ кола k_1, яка не містить точку A. За умовою задачі N — середина хорди PQ кола k_1, тому точки XND лежать на серединному перпендикулярі до відрізка PQ. Оскільки H — основа перпендикуляра, опущеного на пряму ND із точки L, то $\angle XHL = 90°$, тобто точка H належить колу k. Оскільки X — точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків BC і PQ, то $XB = XC$ і $XP = XC$. Крім того, $\angle PXQ = \angle PAQ = \angle BAC = \angle BXC$. Тому $\triangle\ PXQ \sim \triangle\ BXC$.

Це означає, що існує спіральна подібність (*поворотна гомотетія*), яка відображає трикутник BXC на трикутник PXQ. Оскільки M і N — середини BC і PQ відповідно, то $\angle XMN = \angle XCQ$, бо при цій поворотній гомотетії точки M і C відображаються в точки N і Q відповідно. Але за властивостями вписаних кутів, матимемо: $\angle XCQ = \angle XCA = \angle XLA$. Так як $\angle LMD = 90^\circ = \angle LHD$, то точки M, D, H, L — циклічні. Звідси випливає, що $\angle XLA = \angle MLD = \angle MHD$. Таким чином, $\angle XMN = \angle MHD = \angle MHN$, тобто коло k_2, яке описане навколо трикутника HMN, дотикається до прямої ML у точці M, що і треба було довести. □

Задача 5.19. *Нехай ABCD — чотирикутник, який вписаний в коло з центром O. Відомо, що промені AB і DC перетинаються в точці M, а промені BC і AD перетинаються в точці N. Нехай P, Q, S, T — різні точки перетину бісектрис кутів: $\angle MAN$ і $\angle MBN$, $\angle MBN$ і $\angle MCN$, $\angle MDN$ і $\angle MAN$, $\angle MCN$ і $\angle MDN$ відповідно.*

а) Доведіть, що точки P, Q, S, T — лежать на одному колі, центр якого позначено через I.

б) Доведіть, що точки O, E, I, де E — точка перетину AC і BD, лежать на одній прямій.

(В'єтнам, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові а) задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.22).

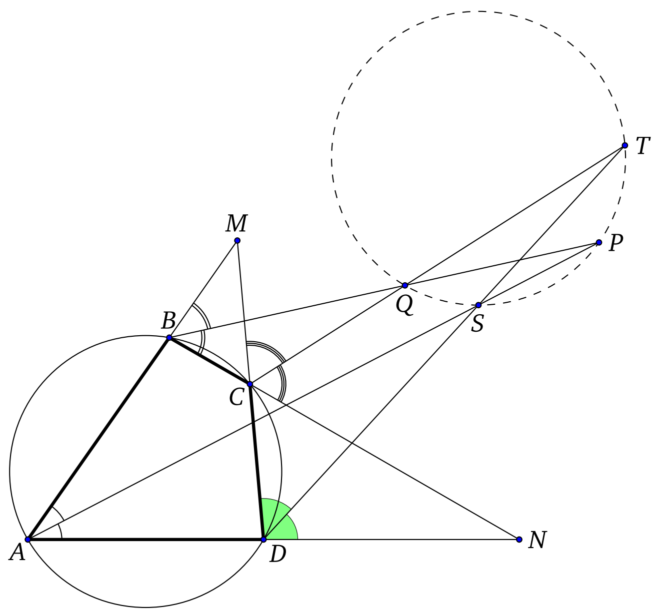


Рис. 5.22.

Скористаємося теоремою про зовнішній кут трикутника. Дійсно, маємо:

$$\angle PST = \angle ASD = \angle SDN - \angle SAD = \frac{180^\circ - \angle D}{2} - \frac{\angle A}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A + \angle D}{2},$$

$$\angle PQT = \angle BQC = \angle QCN - \angle QBC = \frac{\angle C}{2} - \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2} - 90^\circ.$$

Враховуючи, що чотирикутник $ABCD$ — вписаний, то суми його протилежних кутів по 180°. Таким чином,

$$\angle PQT = \frac{\angle B + \angle C}{2} - 90^\circ = \frac{180^\circ - \angle D + 180^\circ - \angle A}{2} - 90^\circ =$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle A + \angle D}{2} - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\angle A + \angle D}{2} = \angle PST,$$

тобто $\angle PQT = \angle PST$. А це означає, що точки P, Q, S і T лежать на одному колі, що і треба було довести.

Зробимо рисунок, що відповідає умові б) задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.23).

Скористаємося таким відомим твердженням: *бісектриса внутрішнього кута трикутника і бісектриси двох інших зовнішніх кутів цього трикутника перетинаються в одній точці*. Розглянемо трикутник MBC. Оскільки Q — точка перетину бісектрис кутів MBC і MCN, то MQ бісектриса зовнішнього кута при вершині M цього трикутника. Розглянемо трикутник MAD. Оскільки S — точка перетину бісектрис кутів MAD і MDN, то MS бісектриса зовнішнього кута при вершині M цього трикутника. Так як у трикутників MBC і MAD зовнішні кути при вершині M співпадають, то їх бісектриси співпадають, тобто точки M, Q і S — колінеарні. Аналогічно доводиться, що точки T, P і N також колінеарні.

Оскільки E — точка перетину діагоналей AC і BD вписаного чотирикутника $ABCD$, то пряма MN — поляра точки E. Тому $OE \perp MN$. Далі, за властивістю кутів вписаного чотирикутника і за властивістю зовнішнього кута трикутника, матимемо:

$$\angle MBQ = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{\angle D}{2}$$

і

$$\angle ASQ = \angle ASM = \angle SMC - \angle MAS = \frac{180^\circ - \angle AMD}{2} - \frac{\angle A}{2} =$$

$$= \frac{180^\circ - (180^\circ - \angle A - \angle D)}{2} - \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle D}{2}.$$

Отже, $\angle MBQ = \angle ASQ$, тобто A, B, Q і S — циклічні, тобто лежать на одному колі. За теоремою про січні маємо: $MA \cdot MB = MS \cdot MQ$, тобто степінь точки M відносно кола (O) і кола (I) однакова, а це означає, що точка M лежить на радикальній осі цих кіл. Аналогічно, з того, що точки B, C, P, T, випливає, що точка N також лежить на радикальній осі кіл (O) та (I). За властивістю

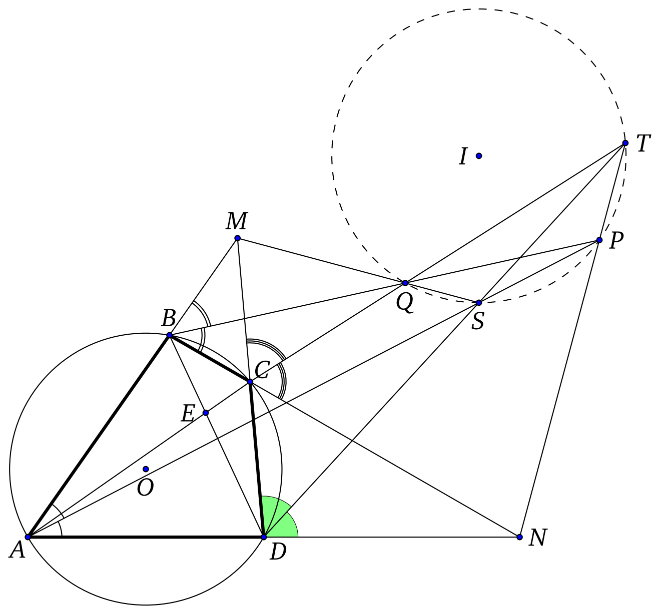


Рис. 5.23.

радикальної осі, одержуємо: $OI \perp MN$. Так як $OE \perp MN$ і $OI \perp MN$, то точки O, E, I — колінеарні, що і треба було довести. □

Задача 5.20. *Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло з центром O. Кола, описані навколо трикутників AOB і COD, вдруге перетинаються у точці P, яка лежить всередині трикутника AOD. На продовженні відрізка OP за точку P відмітили точку Q, а на продовженні відрізка OP за точку O відмітили точку R так, що $\angle QAP = \angle OBR$. Доведіть, що $\angle PDQ = \angle RCO$.*

(Індія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.24).

Розглянемо інверсію заданої конфігурації відносно кола k. При цій інверсії точки A, B, C і D відображаються в себе (бо вони лежать на колі інверсії). Нехай при цій інверсії точки P, Q і R відображаються відповідно у на точки P', Q' і R'. Оскільки точки P, Q і R лежать на прямій, що проходить через точку O — центр інверсії, то точки P', Q' і R' також лежатимуть на цій прямій, причому, оскільки точка P лежить ближче до точки O, ніж точка Q, то точка Q' лежатиме ближче до точки O, ніж точка P'. Якщо точка R лежить всередині кола k, то точка R' буде лежати зовні кола k, і навпаки. Далі, оскільки кожне з кіл (AOB) і (COD) проходить через центр інверсії, то їх образами будуть прямі AB і CD, які перетнуться у точці P', бо другою точкою перетину вказаних кіл є точка P.

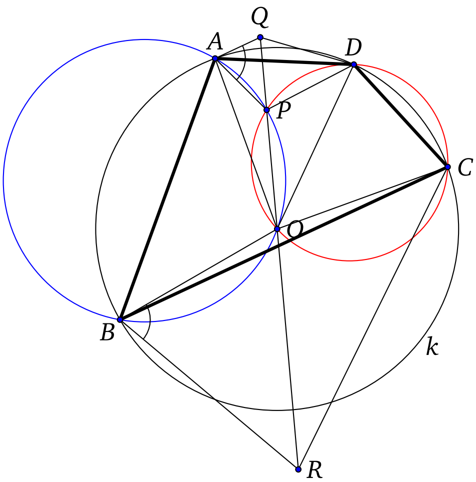


Рис. 5.24.

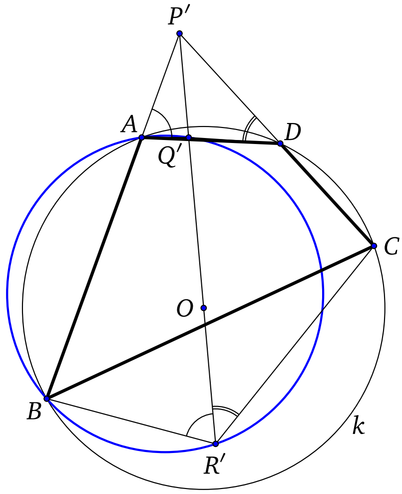


Рис. 5.25.

Одержимо новий рисунок (рис. 5.25).

Оскільки інверсія зберігає кути, то $\angle QAP = \angle P'AQ'$, $\angle PDQ = \angle Q'DP'$, $\angle OBR = \angle OR'B'$ і $\angle RCO = \angle C'R'O$. Так як $\angle QAP = \angle OBR$, то $\angle P'AQ' = \angle OR'B'$. Ця рівність кутів забезпечує циклічність точок A, B, R' і Q'. Тому, використовуючи поняття степеня точки, матимемо: $P'Q' \cdot P'R' = P'A \cdot P'B = P'C \cdot P'D$. Звідси одержуємо, що $P'Q' \cdot P'R' = P'C \cdot P'D$. Ця рівність забезпечує циклічність точок R', C, D і Q'. Звідси випливає, що $\angle CR'O = \angle Q'DP'$, тобто $\angle RCO = \angle PDQ$, що і треба було довести. □

Задача 5.21. *Кола k_1 і k_2 дотикаються зовнішнім чином у точці T. Точки A і E лежать на колі k_1. Із цих точок до кола k_2 провели дотичні AB і ED (B і D — точки дотику з k_2) відповідно, а прямі AE і BD перетинаються у точці P. Доведіть, що*

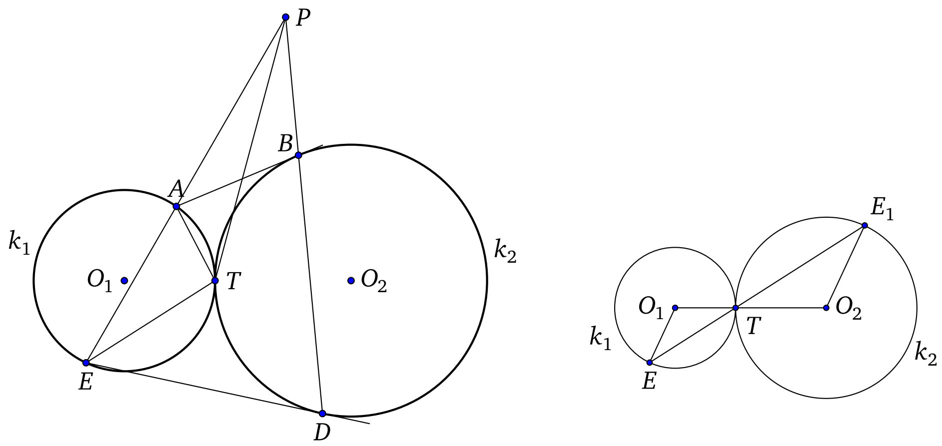
а) $\dfrac{AB}{AT} = \dfrac{ED}{ET}$;

б) $\angle ATP + \angle ETP = 180°$.

(Китай, Математична олімпіада для дівчат, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові а) задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.26, а).

а) Нехай O_1 і O_2 — центри кіл k_1 і k_2 відповідно, а r_1 і r_2 їхні радіуси. Так як T — точка дотику кіл k_1 і k_2, то точки O_1, T і O_2 — колінеарні. Нехай E_1 друга точка перетину прямої ET з колом k_2. Тоді трикутники EO_1T і E_1O_2T — рівнобедрені і подібні (рис. 5.26, б).



а) б)

Рис. 5.26.

З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{TE}{TE_1} = \frac{O_1T}{TO_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Далі (див. рис. 5.26, а), за теоремою про дотичну і січну, одержуємо: $ED^2 = ET \cdot EE_1$. Звідси одержуємо: $ED^2 = ET\,(ET + TE_1) = ET^2 + ET \cdot TE_1$, тобто $ED^2 = ET^2 + ET \cdot TE_1$. Поділивши обидві частини цієї рівності на ET^2, одержимо:

$$\frac{ED^2}{ET^2} = 1 + \frac{TE_1}{TE} = 1 + \frac{r_2}{r_1}.$$

Звідси

$$\frac{ED}{ET} = \sqrt{1 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Це співвідношення ми отримали, провівши міркування відносно точки E кола k_1. Аналогічні міркування відносно точки A кола k_1, дають співвідношення:

$$\frac{AB}{AT} = \sqrt{1 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Із цих двох співвідношень, одержуємо, що і треба було довести.

б) Нехай C — точка перетину прямих AB і DE. Застосуємо теорему Менелая до трикутника ACE і прямої $\overline{PBD}$ (див. рис. 5.27).

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EP}{PA} = 1.$$

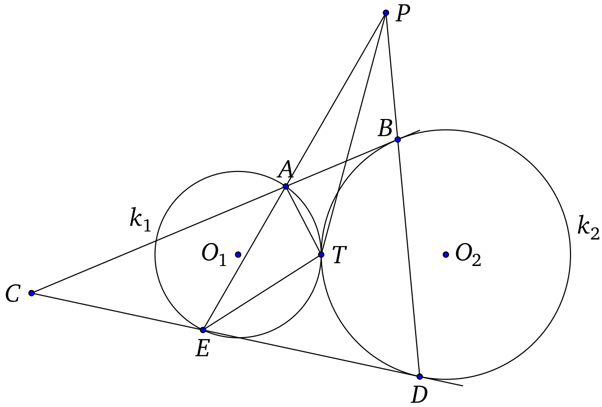


Рис. 5.27.

Оскільки $CB = CD$ (як дотичні до кола k_2), то із співвідношення з теореми Менелая, одержуємо, що $\dfrac{EP}{PA} = \dfrac{DE}{AB}$. Але із результату пункту а) одержуємо: $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{TE}{TA}$. Із цих двох пропорцій знаходимо, що: $\dfrac{EP}{PA} = \dfrac{TE}{TA}$. Це співвідношення означає, що TP бісектриса зовнішнього кута трикутника ATE при вершині T, тобто $\angle ATP = \angle PTE_1$. Оскільки $\angle PTE_1 = 180° - \angle PTE$, то $\angle ATP = 180° - \angle PTE$, тобто $\angle ATP + \angle ETP = 180°$, що і треба було довести.
□

Задача 5.22. *Нехай I — центр вписаного кола гострокутного трикутника ABC, яке дотикається до сторін AB і AC відповідно в точках D і E. Нехай O — центр описаного кола k трикутника BIC. Доведіть, що $\angle ODB = \angle OEC$.*

(Китай, Математична олімпіада для дівчат, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.28).

Розглянемо коло k_1, описане навколо трикутника ABC. Нехай W — друга точка перетину прямої AI з колом k_1. Тоді за теоремою про «тризуб»: $WB = WI = WC$. Тому точка W — центр описаного кола трикутника BIC, тобто точка W співпадає з точкою O. Тому точка O лежить на колі k_1, причому точки A, I, O — колінеарні. Таким чином, $\triangle ADO = \triangle AEO$ (за двома сторонами і кутом між ними: $AD = AE$, $\angle DAO = \angle EAO$, AO — спільна). З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних зовнішніх кутів: $\angle ODB = \angle OEC$, що і треба було довести. □

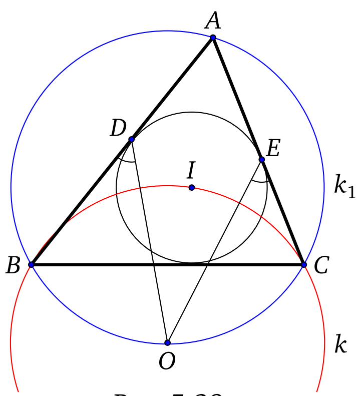


Рис. 5.28.

Задача 5.23. *Нехай t — пряма, яка проходить через вершину A рівностороннього трикутника ABC, паралельно до сторони BC. На стороні AC довільно відмітили точку D. Бісектриса кута ABD перетинає пряму t у точці E. Доведіть, що $BD = CD + AE$.*

(Молдова, відбір на Балканську математичну олімпіаду, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.29).

Відкладемо на продовженні сторони AC, за точку C, відрізок $CE' = AE$. Оскільки $\angle BAE = 120° = \angle BCE'$, то $\triangle\ BAE = \triangle\ BCE'$ (за двома сторонами і кутом між ними). З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle ABE = \angle CBE'$. Тоді

$$\angle BE'D = \angle BE'C = \angle BEA = \angle CBE = \angle E'BD,$$

тобто $\angle BE'D = \angle E'BD$. А це означає, що трикутник BDE' — рівнобедрений. Таким чином,

$$BD = DE' = DC + CE' = DC + AE,$$

що і треба було довести. □

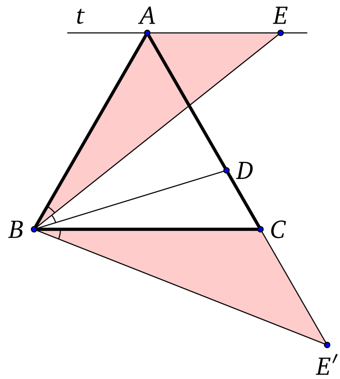


Рис. 5.29.

Задача 5.24. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторін AB, BC, CA відповідно в точках D, E, F. Прямі AI, BI, DI перетинають пряму EF у точках M, N, K відповідно. Доведіть, що $DM \cdot KE = DN \cdot KF$.*

(Китай, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 5.30).

Спочатку доведемо, що $\angle AMB = 90°$. Нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ — кути трикутника ABC. Оскільки $\triangle\ AFM = \triangle\ ADM$ (за двома сторонами і кутом між ними), то $\angle IMD = \angle IMF$ і $DM = FM$. Але за теоремою про зовнішній кут трикутника, маємо:

$$\angle IMF = \angle AMF = \angle CFE - \angle FAM =$$

$$= \frac{180° - \gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} = \angle IBD.$$

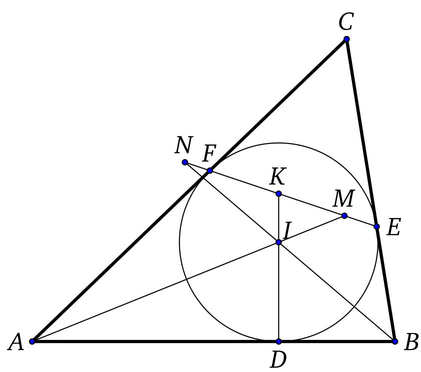


Рис. 5.30.

Тому $\angle IMD = \angle IBD$, тобто точки I, M, B і D — циклічні. Звідси, за властивістю вписаних кутів, одержуємо:

$$\angle IMB = 180° - \angle IDB = 180° - 90° = 90°.$$

Аналогічно доводиться, що $\angle BNA = 90°$ і $NE = ND$. Таким чином, оскільки $\angle BEI = 90°$ і $\angle AFI = 90°$, то п'ятикутники $BDIME$ і $ADIFN$ — циклічні, тобто вписані в кола k_1 і k_2. Оскільки DI — радикальна вісь кіл k_1 і k_2, причому точка K лежить на цій осі, то точка K має однаковий степінь відносно цих кіл, тобто $KM \cdot KE = KF \cdot KN$. Оскільки $DM = FM$ і $DN = NE$, то

$$DM \cdot KE = FM \cdot KE = (FK + KM)KE = FK \cdot KE + KM \cdot KE =$$
$$= FK \cdot KE + KF \cdot KN = (KE + KN)KF = NE \cdot KF = DN \cdot KF,$$

тобто $DM \cdot KE = DN \cdot KF$, що і треба було довести. □

Задача 5.25. *Вписане коло трикутника ABC, в якому $AB \neq AC$, дотикається до сторін BC, CA і AB відповідно в точках D, E і F. Пряма, яка проходить через точку D і перпендикулярна до EF, перетинає пряму AB у точці X. Другу точку перетину описаних кіл трикутників ABC і AEF позначимо через T. Доведіть, що $\angle XTF = 90°$.*

(Іран, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 5.31).

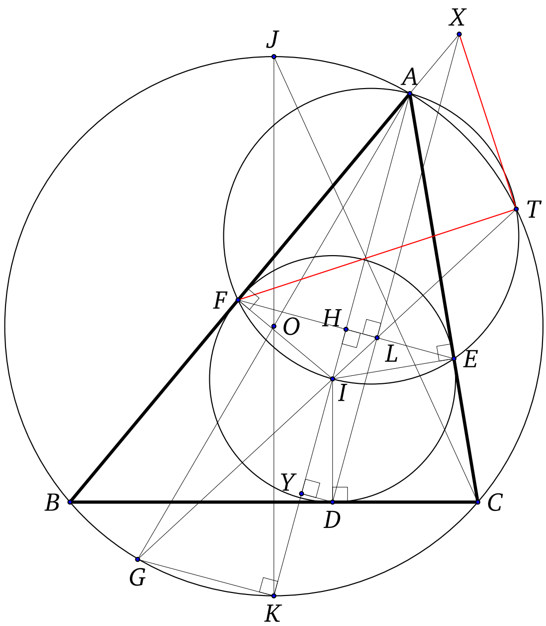


Рис. 5.31.

Не порушуючи загальності будемо вважати, що $AB > AC$. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC, L — точка перетину DX і EF, H — точка перетину AI і EF, K і G другі точки перетину прямих AI і AO з колом (ABC), J — друга точка перетину прямої KO з колом (ABC). Оскільки радіус, що проведений у точку дотику, перпендикулярний до дотичної, то $ID \perp BC$,

$IE \perp CA$ і $IF \perp AB$. Так як $\angle AEI = 90^\circ$ і $\angle AFI = 90^\circ$, то точки A, E, I, F — лежать на одному колі з діаметром AI. Це коло є описаним колом трикутника AEF. Звідси випливає, що коло (AEF) проходить через точки T та I. При цьому, $AI \perp EF$ (бо $AE = AE$ як дотичні) і $XD \parallel AI$ (бо $XD \perp EF$ за умовою і $AI \perp EF$ за доведеним вище). Крім того, оскільки I — центр вписаного кола трикутника ABC, то AI — бісектриса кута BAC, тобто K — середина дуги BC описаного кола трикутника ABC, а J — середина дуги CAB цього кола. Тому $JK \perp BC$ і $JK \parallel ID$.

Якщо ми доведемо, що точки T, L, I — колінеарні, то тоді матимемо:

$$\angle FTL = \angle FTI = \angle FAI = \angle FXL,$$

тобто $\angle FTL = \angle FXL$. А це означатиме, що точки X, T, L і F — циклічні. Звідки і буде слідувати, що $\angle XTF = \angle XLF = 90^\circ$.

Доведемо подібність трикутників EHI і JCK. Дійсно, $\angle EHI = 90^\circ = \angle JCK$, а також $\angle IEH = \angle IEF = \angle IAF = \angle IAE = \angle KAC = \angle KJC$. Отже, $\triangle\, EHI \sim \triangle\, JCK$ (за двома кутами: $\angle EHI = \angle JCK$ і $\angle IEH = \angle KJC$). З подібності цих трикутників, одержуємо:

$$\frac{HI}{IK} = \frac{HI}{CK} = \frac{IE}{KJ} = \frac{IE}{AG} \tag{1}$$

Далі опустимо перпендикуляр DY на пряму AK. Тоді $HLDY$ — прямокутник, оскільки $XD \parallel AK$ і $LH \parallel DY$. Маємо:

$$\begin{aligned} &\angle IYD = 90^\circ = \angle AKG, \\ &\angle DIY = \angle DIK = \angle JKA = \angle OKA = \angle OAK = \angle GAK, \end{aligned}$$

тобто $\angle DIY = \angle GAK$. Тому $\triangle\, IDY \sim \triangle\, AGK$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що

$$\frac{LH}{KG} = \frac{DY}{KG} = \frac{ID}{GA} = \frac{IE}{AG}. \tag{2}$$

З (1) і (2) випливає, що $\dfrac{HI}{IK} = \dfrac{LH}{KG}$, тобто

$$\begin{aligned} \frac{HL}{HI} &= \frac{KG}{KI} && \Leftrightarrow \\ \operatorname{tg}\angle LIH &= \operatorname{tg}\angle GIK && \Leftrightarrow \\ \angle LIH &= \angle GIK, \end{aligned}$$

бо ці кути гострі. З рівності цих кутів випливає, що точки L, I, G — колінеарні.

З іншого боку, $\angle ATG = 90^\circ$, бо він вписаний в коло (ABC) і спирається на його діаметр AG. $\angle ATI = 90^\circ$, бо він вписаний в коло (AEF) і спирається ні її діаметр AI. Отже, $\angle ATG = \angle ATI$, тобто точки T, I, G — колінеарні. З колінеарності точок L, I, G та T, I, G випливає колінеарність точок T, L, I, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 5.26. *Нехай P — точка всередині гострокутного трикутника ABC, k — описане коло цього трикутника. Прямі BP і CP перетинають вдруге коло k у точках B_1 і C_1 відповідно. Позначимо через E і F основи перпендикулярів, опущених із точки P на сторони AC і AB відповідно. Доведіть, що $\frac{EF}{B_1C_1} \geqslant \frac{r}{R}$, де r і R — радіуси вписаного і описаного кіл трикутника ABC.*

(Китай, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.32).

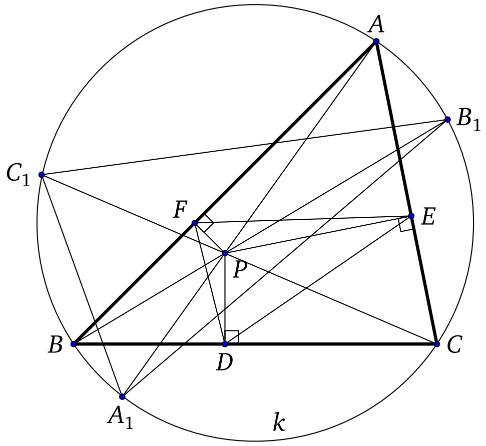


Рис. 5.32.

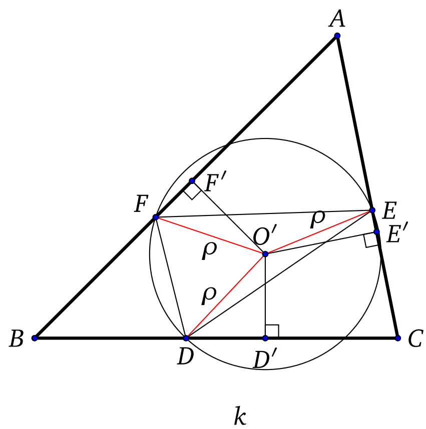


Рис. 5.33.

Нехай пряма AP перетинає вдруге коло k у точці A_1, а D — основа перпендикуляра, опущеного із точки P на сторону BC. Доведемо, що $\triangle DEF \sim \triangle A_1B_1C_1$. Оскільки $\angle BFP + \angle BDP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то навколо чотирикутника $BDPF$ можна описати коло. Тоді за властивістю вписаних кутів, одержуємо:$\angle DFP = \angle DBP = \angle CBB_1 = \angle CC_1B_1$, тобто $\angle DFP = \angle B_1C_1C$. Аналогічно доводиться, що $\angle EFP = \angle A_1C_1C$. Додавши ці рівності, одержуємо: $\angle DFE = \angle A_1C_1B_1$. Аналогічно доводиться, що $\angle DEF = \angle A_1B_1C_1$. Тому $\triangle DEF \sim \triangle A_1B_1C_1$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, пропорційність відповідних елементів:

$$\frac{EF}{B_1C_1} = \frac{\rho}{R},$$

де ρ — радіус описаного кола трикутника DEF. Залишилося довести, що $\rho \geqslant r$. Нехай O' — центр описаного кола трикутника DEF, а D', E', F' його проекції на сторони BC, CA, AB відповідно (рис. 5.33).

Тоді, оскільки перпендикуляр не перевищує похилу, що проведені із однієї точки, то $O'D' \leqslant O'D = \rho$, $O'E' \leqslant O'E = \rho$ і $O'F' \leqslant O'F = \rho$. Далі міркувати можна так:

$$pr = S_{ABC} = S_{AO'B} + S_{BO'C} + S_{CO'A} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot O'F' + \frac{1}{2}\cdot BC\cdot O'D' + \frac{1}{2}\cdot CA\cdot O'E' \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\cdot c\cdot\rho + \frac{1}{2}\cdot a\cdot\rho + \frac{1}{2}\cdot b\cdot\rho = p\rho.$$

Звідки слідує, що $\rho \geqslant r$, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 5.27. *Задано два трикутники PAB і PCD, для яких $PA = PB$, $PC = PD$, а точки P, A, C і B, P, D лежать на прямих у вказаному порядку відповідно. Нехай k_1 і k_2 — довільні кола, що проходять через кінці відрізків AC і BD відповідно, а X і Y — точки перетину цих кіл. Нехай k — описане коло трикутника PXY. Доведіть, що центр кола k є серединою відрізка, що з'єднує центри кіл k_1 і k_2.*

(Японія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.34).

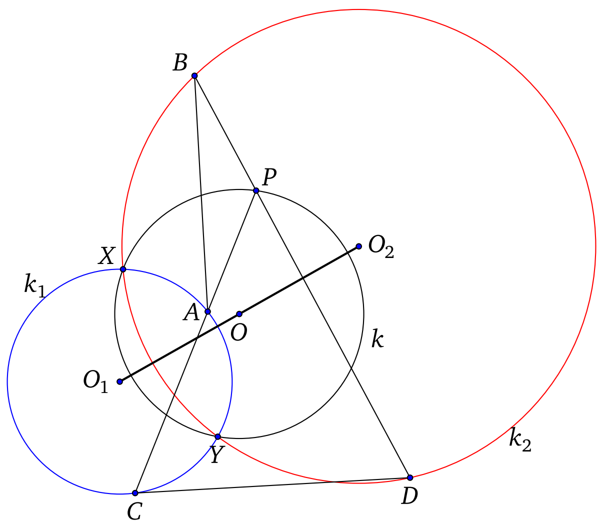


Рис. 5.34.

Нехай O_1 і O_2 — центри кіл k_1 і k_2, r_1 і r_2 — їх радіуси відповідно, а O — центр кола k. Нам треба довести, що O — середина O_1O_2.

Нехай M — середина O_1O_2, доведемо, що M — центр кола k, тобто $PM = XM = YM$. Для цього, будемо використовувати відоме співвідношення:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right),$$

де a, b, c — сторони трикутника, а m_a — його медіана, що проведена до сторони a.

Розглянемо точку P. Її степінь відносно кола k_1 дорівнює $PA \cdot PC = PO_1^2 - r_1^2$, а її степінь відносно кола k_2 дорівнює $-PB \cdot PD = PO_2^2 - r_2^2$. Оскільки $PA = PB$ і $PC = PD$, то $PA \cdot PC = PB \cdot PD$, тобто $PO_1^2 - r_1^2 = r_2^2 - PO_2^2$. Звідки $PO_1^2 + PO_2^2 = r_1^2 + r_2^2$. Тому, використовуючи вказане співвідношення для трикутника O_1PO_2, знаходимо:

$$PM^2 = \frac{1}{4}\left(2PO_1^2 + 2PO_2^2 - O_1O_2{}^2\right) = \frac{1}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right) - \frac{1}{4}O_1O_2{}^2. \tag{1}$$

З трикутника O_1XO_2, за вказаним співвідношенням, знаходимо:

$$XM^2 = \frac{1}{4}\left(2XO_1^2 + 2XO_2^2 - O_1O_2{}^2\right) = \frac{1}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right) - \frac{1}{4}O_1O_2{}^2. \tag{2}$$

З трикутника O_1YO_2, за вказаним співвідношенням, знаходимо:

$$YM^2 = \frac{1}{4}\left(2YO_1^2 + 2YO_2^2 - O_1O_2{}^2\right) = \frac{1}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right) - \frac{1}{4}O_1O_2{}^2. \tag{3}$$

З рівностей (1), (2), (3) одержуємо: $PM = XM = YM$, тобто точка M співпадає з O, що і треба було довести. □

Задача 5.28. *Нехай ABC — заданий трикутник, D, E, F — середини його сторін BC, CA, AB відповідно. Описане коло k_1 трикутника BCF перетинає пряму BE у точках B і P, а описане коло k_2 трикутника ABE перетинає пряму AD у точках A і Q. Нехай прямі DP і FQ перетинаються в точці R. Доведіть, що точка G перетину медіан трикутника ABC лежить на описаному колі трикутника PQR.*

(Румунія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.35).

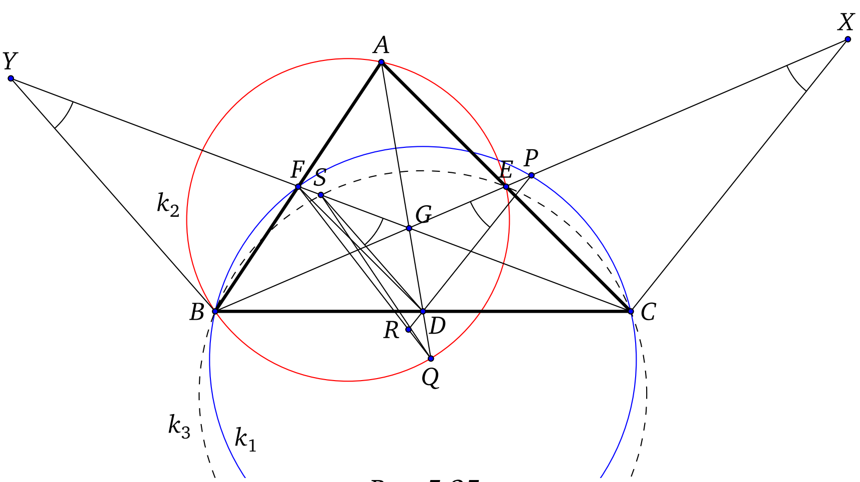


Рис. 5.35.

Позначимо через G — точку перетину медіан AD, BE і CF трикутника ABC. Нехай k_3 — описане коло трикутника BEC. Позначимо через S — точку перетину цього кола з променем GF. Доведемо, що $\angle DPG = \angle DSG$.

Нехай X і Y точки, які лежать на променях BE і CF так, що $BP = PX$ і $CS = SY$. Тоді за властивістю середньої лінії трикутника одержуємо: $DP \parallel CX$ і $DS \parallel BY$. Далі, за властивістю хорд, які перетинаються, одержуємо:

$$\begin{aligned} BG \cdot GX &= BG(GP + PX) = BG \cdot GP + BG \cdot PX = \\ &= BG \cdot GP + BG \cdot BP = BG \cdot GP + BG(BG + GP) = \\ &= 2 \cdot BG \cdot GP + BG^2 = 2 \cdot CG \cdot GF + BG^2 = CG^2 + BG^2. \end{aligned}$$

(Тут ми врахували властивість центроїда G трикутника ABC: $CG = 2GF$). Аналогічно доводиться, що $CG \cdot GY = CG^2 + BG^2$. Тому одержуємо співвідношення: $BG \cdot GX = CG \cdot GY$, яке означає, що чотирикутник $BCXY$ — вписаний в деяке коло. Звідси випливає, що $\angle CXB = \angle BYC$. З того, що DP і DS — середні лінії трикутників CXB і BYC, одержуємо $\angle DPG = \angle DSG$.

Далі, за властивістю хорд, які перетинаються, одержуємо:

$$AG \cdot GQ = BG \cdot GE = CG \cdot GS,$$

тобто $AG \cdot GQ = CG \cdot GS$. Це означає, що чотирикутник $ACQS$ — вписаний у деяке коло. Звідки випливає, що $\angle CAQ = \angle CSQ$. Оскільки DF — середня лінія трикутника ABC, то $DF \parallel AC$, тобто $\angle CAQ = \angle CAD = \angle ADF$. Отже, з останніх двох рівностей випливає, що $\angle GDF = \angle GSQ$, тобто $\angle FDQ = \angle FSQ$. Ця рівність кутів означає, що чотирикутник $FSDQ$ — вписаний в деяке коло. Звідси одержуємо, що $\angle FQD = \angle DSG = \angle DPQ$, тобто

$$\angle RQG = \angle FQG = \angle DPG = \angle RPG.$$

Таким чином, $\angle RQG = \angle RPG$. Ця рівність кутів означає, що описане коло трикутника PQR проходить через точку G, що і завершує доведення. □

Задача 5.29. *Дано гострокутний трикутник ABC, в якому $AB \neq AC$ і H — основа висоти, опущеної з вершини A на сторону BC. На продовженнях сторін AB і AC відмітили точки P і Q відповідно так, що $HP = HQ$ і точки P, B, C, Q — циклічні. Доведіть, що H — центр описаного кола трикутника PAQ.*

(Албанія, відбори на Міжнародну математичну олімпіаду, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 5.36).

Нехай X — точка на прямій AH, для якої $XP \perp AB$. Тоді чотирикутник $PBHX$ — вписаний в деяке коло. За теоремою про січні, маємо: $AB \cdot AP = AH \cdot AX$. Але, за умовою задачі, чотирикутник $PBCQ$ — також вписаний в деяке коло, тому, за теоремою про січні, маємо: $AB \cdot AP = AC \cdot AQ$. З цих двох одержаних рівностей, слідує, що $AH \cdot AX = AC \cdot AQ$. З цієї рівності слідує, що навколо чотирикутника $QCHX$ можна описати коло, а це означає, що

$$\angle XQC = 180^\circ - \angle XHC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

тобто $XQ \perp AC$.

Тоді навколо чотирикутника $APXQ$ можна описати коло, оскільки $\angle APX + \angle AQX = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, причому центр O цього кола є серединою відрізка AX. Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює половині цієї гіпотенузи, то $PO = \frac{1}{2}AX = QO$, тобто точка O — рівновіддалена від точок P і Q, а тому належить серединному перпендикуляру відрізка PQ. Отже, точка O — точка перетину прямої AX і серединного перпендикуляра до відрізка PQ. За умовою задачі $HP = HQ$, тобто точка H належить серединному перпендикуляру до відрізка PQ і належить відрізку AX. Тому точка O співпадає із точкою H, а це означає, що H — центр описаного кола трикутника PAQ, що і треба було довести. □

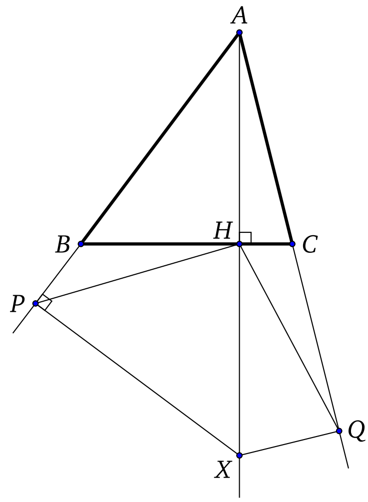


Рис. 5.36.

Задача 5.30. *Кола ω_1 і ω_2 різних радіусів перетинаються у двох точках A і B. Коло ω_3 дотикається зовнішнім чином до кола ω_1 у точці A_1 і дотикається внутрішнім чином до кола ω_2 у точці B_1. Коло ω_4 дотикається зовнішнім чином до кола ω_1 у точці A_2 і дотикається внутрішнім чином до кола ω_2 у точці B_2. Крім того, відомо, що кола ω_3 і ω_4 перетинаються у двох точках C і D. Доведіть, що прямі A_1B_1, A_2B_2 і CD перетинаються в одній точці.*

(Польща, відбір до математичної олімпіади між Словаччиною, Польщею і Чехією, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.37).

Нехай r_1, r_2, r_3 і r_4 — радіуси кіл ω_1, ω_2, ω_3 і ω_4 відповідно, $r_1 \neq r_2$. Позначимо через E — центр гомотетії з коефіцієнтом $k = -\dfrac{r_2}{r_1}$, яка відображає коло ω_1 на коло ω_2. А тепер, розглянемо гомотетію з центром у точці A_1 і коефіцієнтом $k_1 = -\dfrac{r_3}{r_1}$, і гомотетію з центром у точці B_1 і коефіцієнтом $k_2 = \dfrac{r_2}{r_3}$. Перша з цих гомотетій відображає коло ω_1 на коло ω_3, а друга — коло ω_3 на коло ω_2. Це означає, що їх композиція відображає ω_1 на ω_2, тобто $\mathbb{H}_E^k = \mathbb{H}_{B_1}^{k_2} \circ \mathbb{H}_{A_1}^{k_1}$. За теоремою про композицію двох гомотетій: *композиція двох гомотетій з коефіцієнтами k_1 і k_2, де $k_1k_2 \neq 1$, є гомотетією з коефіцієнтом k_1k_2, причому її центр лежить на прямій, що проходить через центри цих гомотетій*, одержуємо, що пряма A_1B_1 проходить через точку E. Аналогічно

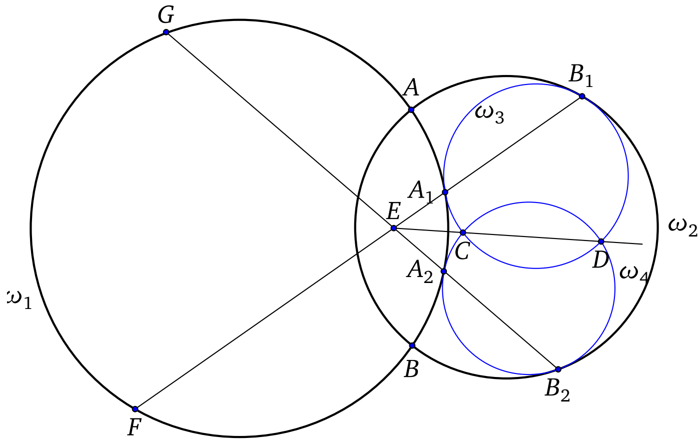


Рис. 5.37.

доводиться, що пряма A_2B_2 також проходить через точку E. Нехай пряма A_1B_1 перетинає вдруге коло ω_1 у точці F, а пряма A_2B_2 — у точці G. Тоді за теоремою про хорди, що перетинаються, одержуємо:

$$EA_1 \cdot EF = EA_2 \cdot EG. \tag{1}$$

При гомотетії $\mathbb{H}_E^k$ точка F відображається в точку B_1, а точка G — у точку B_2, тобто

$$\frac{EB_1}{EF} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{і} \quad \frac{EB_2}{EG} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{EB_1}{EF} = \frac{EB_2}{EG} \tag{2}$$

Перемножуючи (1) і (2), знаходимо:

$$EA_1 \cdot EB_1 = EA_2 \cdot EB_2.$$

Ця рівність означає, що степінь точки E відносно кола ω_3 дорівнює степені точки E відносно ω_4, тобто точка E належить радикальній осі кіл ω_3 і ω_4, тобто точка E належить прямій CD, що і треба було довести. □

Задача 5.31. *Трикутник ABC, з тупим кутом при вершині B, вписаний в коло ω з центром у точці O. Нехай D точка перетину прямої AB з прямою, яка проходить через точку C і перпендикулярна до прямої AC. Позначимо через l пряму, яка проходить через точку D і перпендикулярна до прямої AO. Нехай пряма l перетинає пряму AC у точці E, а коло ω у точці F, яка лежить між точками D і E. Доведіть, що описані кола трикутників BEF і CDF дотикаються одне одного у точці F.*

(Міжнародна математична олімпіада Балканських країн, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 5.38).

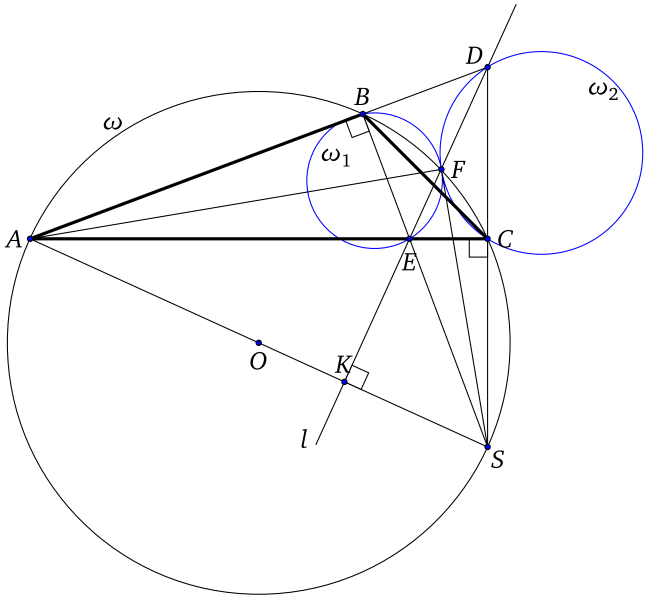


Рис. 5.38.

Позначимо через ω_1 — описане коло трикутника BEF, а через ω_2 — описане коло трикутника CDF. Нехай пряма AO перетинає вдруге коло ω у точці S, а пряму l — у точці K. Так як AS — діаметр кола ω, то $\angle ABS = 90^\circ = \angle ACS$. Це означає, що точки D, C і S — колінеарні. Оскільки $DK \perp AS$, то точка E — точка перетину висот трикутника ADS. Це означає, що

$$\angle SFC = \angle SAC = \angle KDS = \angle FDC,$$

тобто $\angle SFC = \angle FDC$. Ця рівність кутів означає, що SF — дотична до кола ω_2.

Оскільки AS — діаметр кола ω, то $\angle AFS = 90^\circ$. Так як $FK \perp AS$, то аналогічно одержуємо, що:

$$\angle SFE = \angle SFK = \angle SAF = \angle SBF = \angle EBF,$$

тобто $\angle SFE = \angle EBF$. Ця рівність кутів означає, що SF — дотична до кола ω_1.

Таким чином, SF — спільна дотична до кіл ω_1 і ω_2. А це означає, що кола ω_1 і ω_2 дотикаються у точці F, що і треба було довести. □

Задача 5.32. *У колі ω з центром O провели хорду AB, яка не є діаметром цього кола. На відрізку OB відмітили довільно точку T. Пряма, яка проходить через точку T і перпендикулярна до відрізка OB, перетинає хорду AB у точці C, а коло ω — у двох точках D і E. Позначимо через S основу перпендикуляра, опущеного із T на пряму AB. Доведіть, що $AS \cdot BC = TE \cdot TD$.*

(Міжнародна математична олімпіада африканських країн, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.39).

Нехай OB перетинає вдруге коло ω в точці F. Тоді $\angle FAB = 90^\circ$, як вписаний кут, що спирається на діаметр BF кола ω. За умовою задачі $\angle TSB = 90^\circ$. Тому $\triangle\ TSB \sim \triangle\ FAB$ (за двома кутами: $\angle B$ — спільний і $\angle TSB = \angle FAB$). З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

$$\frac{BF}{BT} = \frac{BA}{BS}. \qquad (1)$$

Оскільки $FA \perp AB$ і $TS \perp AB$, то $AF \parallel ST$. Тоді за узагальненою теоремою Фалеса, одержуємо, що

$$\frac{TF}{TB} = \frac{SA}{SB}. \qquad (2)$$

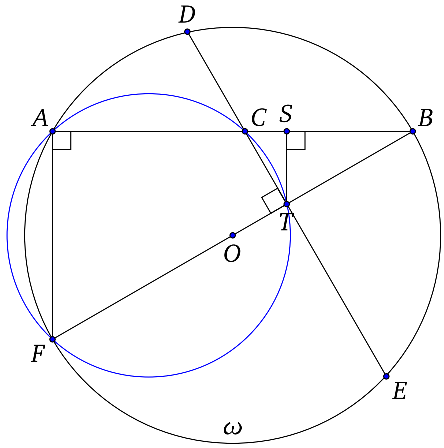


Рис. 5.39.

Далі, чотирикутник $ACTF$ — вписаний в деяке коло, бо

$$\angle FAC + \angle FTC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Звідси, за теоремою про січні, матимемо:

$$BC \cdot BA = BT \cdot BF. \qquad (3)$$

Тепер, із співвідношень (1) і (2) знаходимо, що

$$AS = \frac{BS \cdot TF}{TB}, \qquad BC = \frac{TB \cdot BF}{BA}.$$

Отже,

$$AS \cdot BC = \frac{BS \cdot TF}{TB} \cdot \frac{TB \cdot BF}{BA} = \frac{BS}{BA} \cdot TF \cdot BF.$$

Використовуючи (3), одержимо:

$$AS \cdot BC = \frac{TB}{BF} \cdot TF \cdot BF = TB \cdot BF.$$

І на завершення, за теоремою про хорди, які перетинаються, маємо:

$$TB \cdot TF = TE \cdot TD,$$

тобто остаточно знаходимо, що $AS \cdot BC = TE \cdot TD$, що і треба було довести. □

Задача 5.33. *Нехай пряма, що проходить через вершину A трикутника ABC і паралельна до його сторони BC, перетинає бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C у точках P і Q відповідно. Нехай R — точка перетину прямої, що проходить через точку P і перпендикулярна до BP, з прямою, яка проходить через точку Q і перпендикулярна до прямої CQ. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $AI = AR$.*

(Міжнародна математична олімпіада латиноамериканських країн, 2012 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 5.40).

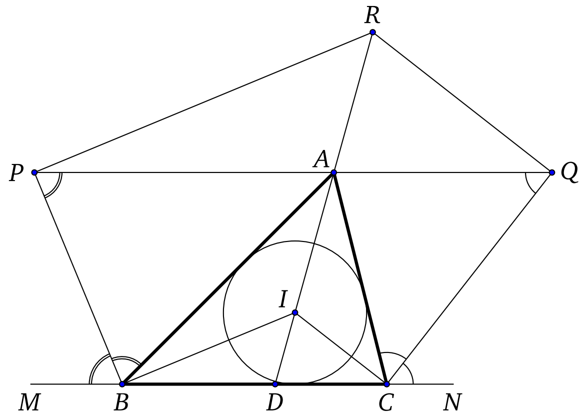


Рис. 5.40.

Нехай M і N — точки, що лежать на продовженнях відрізка BC за точку B і точку C відповідно. Оскільки BP — бісектриса кута ABM і $AP \parallel BC$, то $\angle APB = \angle PBM$, тобто $\angle APB = \angle ABP$. Звідси випливає, що трикутник PAB — рівнобедрений і $AP = AB$. Аналогічно доводиться, що трикутник QAC — рівнобедрений і $AQ = AC$. Так як I — точка перетину бісектрис трикутника ABC, то $BI \perp BP$ і $CI \perp CQ$. Але за умовою задачі $RP \perp PB$ і $RQ \perp QC$. Отже, $PR \parallel BI$ і $QR \parallel CI$. Оскільки $PQ \parallel BC$, то трикутники BAC і PRQ — гомотетичні. Центром цієї гомотетії буде точка O — точка перетину прямих PB і QC (вона на рисунку не зображена). Пряма RA також проходить через точку O — центр нашої гомотетії. Нехай ця гомотетія відображає трикутник BAC на трикутник PRQ.

Нехай AI перетинає BC у точці D, тоді AD — бісектриса трикутника ABC. За теоремою про бісектрису трикутника знаходимо:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{PA}{AQ},$$

тобто точки D і A ділять відрізки BC і PQ в однаковому відношенні. Це означає, що наша гомотетія відображає точку D на точку A, бо при гомотетії зберігається відношення поділу відрізків. Тому пряма DA також проходить через точку O. Тому точки O, D, I, A і R — колінеарні, трикутники BID і PRA — подібні, бо при нашій гомотетії трикутник BID відображається на трикутник PRA. Таким чином, з того, що BI — бісектриса трикутника ABD, випливає, що

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{PA}{BD},$$

а з подібності трикутників BID і PRA випливає, що

$$\frac{PA}{BD} = \frac{RA}{ID}.$$

Тому $\dfrac{AI}{ID} = \dfrac{RA}{ID}$, тобто $AI = AR$, що і треба було довести. $\square$

Розділ 6

Задачі зарубіжних математичних олімпіад 2013 року

Задача 6.1. *Нехай кола k_1 і k_2 перетинаються в двох точках A і B. Пряма t — спільна дотична цих кіл, M і N — точки її дотику з k_1 і k_2 відповідно. Нехай прямі MA і MN перпендикулярні і $MN = 2MA$. Знайдіть величину кута BMN.*

(Міжнародна математична олімпіада країн Балканського регіону, 2013 р.)

Задача 6.2. *Два кола k_1 і k_2 перетинаються в точках A і B. Нехай точки C і D розташовані на колах k_1 і k_2 відповідно так, що A — середина відрізка CD. Продовження відрізка CB перетинає коло k_2 у точці F, а продовження відрізка DB перетинає коло k_1 у точці E. Нехай l_1 і l_2 серединні перпендикуляри відрізків CD і EF відповідно, а P — точка їх перетину. Доведіть, що із відрізків CA, AP і PE можна скласти прямокутний трикутник.*

(Китай, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.3. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, k — його описане коло. На дузі BC цього кола, яка не містить точку A, довільно зафіксували точку D. Рухома пряма l, що проходить через точку H — ортоцентр трикутника ABC, перетинає вдруге описані кола навколо трикутників ABH і ACH відповідно в точках M і N.*

а) Зайти усі такі положення прямої l, для яких площа трикутника AMN досягає найбільшого можливого значення.

б) Нехай p_M і p_N — прямі, що проходять через точки M і N перпендикулярно до DB і DC відповідно, а P — їх точка перетину. Доведіть, що точка P рухається по фіксованому колу.

(В'єтнам, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.4. *Нехай I — центр вписаного кола нерівнобедреного трикутника ABC, яке дотикається його сторін BC, CA і AB у точках D, E і F відповідно. Пряма, що проходить через точку E і перпендикулярна прямій BI, вдруге перетинає вписане коло у точці K, а пряма, яка проходить через точку F і перпендикулярна прямій CI, вдруге перетинає вписане коло у точці L. Нехай J — середина відрізка KL.*

а) Доведіть, що точки D, I, J — колінеарні.

б) Зафіксуємо точки B і C, а точка A нехай змінює своє положення так, що виконується умова $\frac{AB}{AC} = k$, де $k \neq 1$ — додатне фіксоване число. Нехай M і N — точки, діаметрально протилежні точкам E і F відповідно, а P і Q — точки перетину прямої MN з прямими BI і CI відповідно. Доведіть, що серединний перпендикуляр до відрізка PQ проходить через фіксовану точку.

(В'єтнам, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.5. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, AD, BE, CF — його висоти. Відомо, що пряма BE перетинає описане коло трикутника ADC у двох точках K і L (точка K лежить між точками B і L), а пряма CF перетинає описане коло трикутника ADB у двох точках P і Q (точка P лежить між точками C і Q). Доведіть, що прямі LP і KQ перетинаються на стороні BC.*

(Бразилія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.6. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, H — його ортоцентр. Коло k, яке проходить через вершини B і C, перетинає коло h з діаметром AH у двох різних точках X і Y. Нехай AH перетинає BC у точці D, а K — основа перпендикуляра, опущеного із точки D на пряму XY. Доведіть, що KD — бісектриса кута BKC.*

(Японія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.7. *В гострокутному трикутнику ABC через H позначили основу його висоти, опущеної із вершини A. Нехай J та I — центри зовнівписаних кіл трикутників ABH і ACH відповідно, які дотикаються сторони AH. Позначимо через D — точку дотику вписаного кола трикутника ABC зі стороною BC. Доведіть, що точки H, D, I, J лежать на одому колі.*

(Іран, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Задача 6.8. *Кола Ω і ω дотикаються в точці P (коло ω лежить всередині кола Ω). Хорда AB кола Ω дотикається ω в точці C. Пряма PC перетинає вдруге коло Ω в точці Q. Хорди QR і QS кола Ω дотикаються кола ω. Нехай I, X та Y — центри вписаних кіл трикутників APB, ARB і ASB відповідно. Доведіть, що $\angle PXI + \angle PYI = 90^\circ$.*

(Румунія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду 2013 р.)

Задача 6.9. *Нехай M — середина дуги BC, яка не містить точки A, описаного кола трикутника ABC, з центром у точці O. Нехай пряма, яка містить висоту трикутника ABC, що проведена із вершини A, перетинає вдруге описане коло в точці N. На сторонах AB і AC відмітили точки K і L відповідно так, що $OK \parallel MB$ і $OL \parallel MC$. Доведіть, що $NK = NL$.*

(Іран,1-й день другого туру Національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.10. *Нехай P — точка, яка лежить зовні заданого кола k. PA і PB — дотичні до кола k, що проведені із точки P (A і B — точки дотику). На хорді AB кола k довільно обирають точку K. Описане коло трикутника PKB перетинає вдруге коло k у точці T. Нехай Q — точка, симетрична точці P*

відносно точки A. Доведіть, що $\angle PBT = \angle AKQ$.

(Іран, 2-й день другого туру Національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.11. *Нехай* AM *і* BN *— бісектриси прямокутного трикутника* ABC*, в якому* $\angle C = 90^\circ$. *Вони перетинають висоту* CH *у двох точках* P *і* Q *відповідно. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків* PM *і* NQ*, паралельна прямій* AB.

(Боснія і Герцеговина, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Задача 6.12. *Розглянемо рівнобедрений трикутник, в якому* $AB = AC$ *і* $\angle A < 60^\circ$. *На стороні* AC *відмітили таку точку* D*, що* $\angle DBC = \angle BAC$. *Нехай* E *— точка перетину серединного перпендикуляра відрізка* BD *з прямою, що проходить через вершину* A *і паралельна до прямої* BC. *Нехай* F *— точка на прямій* AC*, для якої* $FA = 2AC$ *(точка* A *лежить між точками* F *і* C*). Доведіть, що*

1) прямі BE *і* AC *паралельні;*

2) продовження перпендикулярів із F *до* AB *та із* E *до* AC *перетинаються в точці, яка лежить на прямій* BD.

(Італія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.13. *В трикутнику* ABC *точки* P, Q, R *лежать на сторонах* BC, CA, AB *відповідно. Розглянемо три кола* ω_A, ω_B, ω_C*, які описані навколо трикутників* AQR, PBR, CPQ *відповідно. Відрізок* AP *перетинає вдруге кола* ω_A, ω_B, ω_C *в точках* X, Y, Z *відповідно. Доведіть, що* $\dfrac{YX}{XZ} = \dfrac{BP}{PC}$.

(США, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.14. *Нехай* I *— центр вписаного кола трикутника* ABC*, яке дотикається до сторін* BC, CA, AB *у точках* A_1, B_1, C_1 *відповідно. На прямих* A_1I *і* B_1I *відмітили точки* A_2 *і* B_2 *відповідно так, що* A_1 *і* A_2 *лежать по різні боки від точки* I, B_1 *і* B_2 *лежать по різні боки від точки* I*, причому* $IA_2 = IB_2 = R$*, де* R *— радіус описаного кола трикутника* ABC. *Доведіть, що*

а) $AA_2 = BB_2 = IO$*, де* O *— центр описаного кола трикутника* ABC*;*

б) прямі AA_2 *і* BB_2 *перетинаються на описаному колі трикутника* ABC.

(Узбекистан, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.15. *Чотирикутник* $XABY$ *вписаний в коло* ω *так, що* XY *— діаметр цього кола. Відрізки* AY *і* BX *перетинаються в точці* P. *Точка* Z *— основа перпендикуляра, опущеного з точки* P *на пряму* XY. *Нехай* C *— така точка кола* ω*, що* $XC \perp AZ$. *Нехай* Q *— точки перетину відрізків* AY *і* CX. *Доведіть, що*

$$\frac{BY}{XP} + \frac{CY}{XQ} = \frac{AY}{AX}.$$

(США, заключний тур для юніорів національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.16. *Із точки* P*, яка лежить зовні кола* ω*, провели дві дотичні* PB, PD *і січну, яка перетинає коло* ω *у двох точках* A *і* C *(*C *лежить між* P *і* A*).*

Пряма, що дотикається до кола ω у точці C, перетинає пряму PD у точці Q, а пряму AD у точці R. Пряма AQ перетинає вдруге коло ω у точці E. Доведіть, що точки B, E і R — лежать на одній прямій.

(Азіатсько-тихоокеанська математична олімпіада, 2013 р.)

Задача 6.17. *Нехай A, B і C — три фіксовані точки прямої l, які лежать на ній у вказаному порядку. Для кожного кола k, яке проходить через точки B і C, позначимо через D одну із точок перетину цього кола із серединним перпендикуляром до відрізка BC. Нехай E — друга точка перетину кола k і прямої AD. Доведіть, що для кожного кола k відношення довжин відрізків BE і CE одне і те ж саме.*

(Австрія, заключний 1-й тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.18. *Трикутник ABC вписаний в коло ω. Коло k, яке проходить через точки B і C, перетинає сторони AB і AC в точках S і R відповідно. Відрізки BR і CS перетинаються в точці L, а промені LR і LS перетинають коло ω в точках D і E відповідно. Нехай K — точка перетину бісектриси кута BDE і відрізка ER. Доведіть, що $\angle ELK = \frac{1}{2}\angle BCD$.*

(США, підготовка до Міжнародної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.19. *Нехай O — центр кола ω, описаного навколо гострокутного трикутника ABC, в якому $AB < AC$. На стороні BC відмітили таку точку D, що $\angle BAD = \angle OAC$. Нехай пряма AD перетинає вдруге коло ω у точці E. Позначимо через M, N і P — середини відрізків BE, OD і AC. Доведіть, що точки M, N і P — лежать на одній прямій.*

(Міжнародна математична олімпіада для юніорів країн Балканського регіону, 2013 р.)

Задача 6.20. *Нехай F — точка перетину діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло ω, а E — точка перетину прямих AB і CD. Позначимо через M і N середини відрізків BC і EF відповідно, а через G і H — основи перпендикулярів, опущених із точки F на прямі AB і CD відповідно. Нехай описане коло трикутника MNG перетинає відрізок BF у точці P, а описане коло трикутника MNH перетинає відрізок CF у точці Q. Доведіть, що $PQ \parallel BC$.*

(Китай, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Задача 6.21. *Нехай $ABCD$ — трапеція з основами AB і CD. Позначимо через P і Q середини діагоналей AC і BD відповідно. Відомо, що $\angle ABP = \angle CBD$. Доведіть, що $\angle BCQ = \angle ACD$.*

(Міжнародна математична олімпіада африканських країн, 2013 р.)

Задача 6.22. *Нехай AB — хорда кола ω, відмінна від її діаметра. Нехай T — точка, яка рухається по хорді AB. Два різні кола ω_1 і ω_2 дотикаються до хорди AB у точці T, а також дотикаються внутрішнім чином до кола ω у точках T_1 і T_2 відповідно. Позначимо через X_1 точку перетину прямих AT_1 і TT_2, а через X_2 — точку перетину прямих AT_2 і TT_1. Доведіть, що пряма* *лінія X_1X_2 проходить через фіксовану точку площини трикутника.*

(Румунія, 2013 р.)

Задача 6.23. *В трикутнику ABC через ω_A позначили зовнівписане кола, яке дотикається сторони BC, а продовжень його сторін AB і AC у точках P і Q відповідно. Аналогічно, через ω_B — зовнівписане коло, яке дотикається сторони AC, а продовжень сторін BA і BC у точках M і N відповідно. Нехай K і L — основи перпендикулярів, опущених із точки C на прямі MN і PQ відповідно. Доведіть, що чотирикутник $MKLP$ — вписаний у деяке коло.*

(Міжнародна математична олімпіада країн Балканського регіону, 2013 р.)

Задача 6.24. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, в який вписано коло ω з центром I. Позначмо через X, Y, Z точки дотику кола ω зі сторонами BC, CA, AB відповідно, а через U, V, W — точки перетину кола ω з відрізками AI, BI, CI відповідно. Доведіть, що трикутники XYZ і UVW будуть рівними тоді і тільки тоді, коли трикутник ABC — рівносторонній.*

(США, підготовка до Міжнародної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.25. *Нехай ABC — різносторонній трикутник, вписаний в коло ω. Вписане коло цього трикутника дотикається до його сторін BC, CA і AB у точках D, E і F. Описані кола трикутників AEF, BFD і CDE перетинають вдруге коло ω у точках X, Y і Z відповідно. Доведіть, що три прямі, які проходять через вершини A, B, C і перпендикулярні до AX, BY, CZ відповідно, перетинаються в одній точці.*

(США, підготовка до Міжнародної математичної олімпіади, 2013 р.)

Задача 6.26. *Нехай ABC — трикутник і A_1, B_1, C_1 — точки дотику його зовнівписаних кіл зі сторонами BC, CA, AB відповідно. Доведіть, що коли центр описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$ лежить на описаному колі трикутника ABC, то трикутник ABC — прямокутний.*

(Міжнародна математична олімпіада, 2013 р.)

Задача 6.27. *Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Нехай W — довільна точка на відрізку BC, що відмінна від B і C. Позначимо через M і N основи висот трикутника ABC, що проведені з вершин B і C, відповідно. Нехай ω_1 — описане коло трикутника BWN, а X така точка на ω_1, що WX — діаметр ω_1. Аналогічно, нехай ω_2 — описане коло трикутника CWM, а Y — така точка на ω_2, що WY — діаметр ω_2. Доведіть, що точки X, Y і H — лежать на одній прямій.*

(Міжнародна математична олімпіада, 2013 р.)

Задача 6.28. *В трикутнику ABC кут A — тупий. Нехай O — центр описаного кола, а H — ортоцентр цього трикутника. Позначимо через K точку, симетричну до точки H відносно вершини A. Доведіть, що точки K, O і C будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли $\angle A - \angle B = 90°$.*

(Індія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Задача 6.29. *Про гострокутний трикутник ABC відомо, що $AB \neq BC$. Нехай BE і CX — його висоти. Коло, що проходить через точку A і дотикається BE в точці P $(P \neq B)$, перетинає вдруге сторону AB у точці X. Нехай Q — точка, симетрична точці P відносно точки B, а Y — точка перетину прямих AQ і CP. Доведіть, що точки A, C, X, Y будуть циклічними.*

(Індія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду 2013 р.)

Задача 6.30. *Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, M — середина його сторони AB. Відомо, що коло, яке проходить через точку D і дотикається AB у точці A, перетинає вдруге пряму MD у точці E, коло, яке проходить через точку C і дотикається AB у точці B, перетинає вдруге пряму MC у точці F, а прямі AF і BE перетинаються у точці, яка лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AB. Доведіть, що точки A, E, C будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли точки B, F, D також будуть колінеарними.*

(Міжнародна математична олімпіада країн центральної Америки, 2013 р.)

Задача 6.31. *Дано трапецію $ABCD$, в якій $AB \parallel CD$. Коло k_1 дотикається сторін CB, BA і AD, а коло k_2 дотикається сторін AD, DC і CB, причому k_1 дотикається сторони AB у точці P, а коло k_2 дотикається сторони CD у точці Q. Доведіть, що прямі AC, BD і PQ перетинаються в одній точці.*

(Китай, математична олімпіада для дівчат, 2013 р.)

Задача 6.32. *Два кола з центрами в точках O_1 і O_2 дотикаються зовні у точці T. Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло (O_1) так, що промені DA і CB дотикаються до кола (O_2) у точках E і F відповідно. Бісектриса кута ABF перетинає відрізок EF у точці N, а пряма FT перетинає дугу AT кола (O_1), яка не містить точку B, у точці M, яка не співпадає з точкою A. Доведіть, що точка M є центром описаного кола трикутника BCN.*

(Китай, математична олімпіада для дівчат, 2013 р.)

Задача 6.33. *Нехай AD і AH — відповідно бісектриса і висота трикутника ABC, в якому $AB < AC$. Серединний перпендикуляр до відрізка AD перетинає півкола з діаметрами AB і AC, які розташовані зовні трикутника ABC, відповідно у точках X та Y. Доведіть, що чотирикутник $XYDH$ — вписаний.*

(Іран, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Задача 6.34. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, вписаний в коло ω. Бісектриса кута BAC перетинає коло ω у точці M. На відрізку AM всередині трикутника ABC довільно відмітили точку P. Прямі, що проходять через точку P паралельно прямим AB і AC перетинають сторону BC у точках E і F відповідно. Прямі ME і MF перетинають вдруге коло ω у точках K і L відповідно. Доведіть, що прямі AM, BL і CK перетинаються в одній точці.*

(Індонезія, 2013 р.)

Задача 6.35. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, в якому $AB > AC$ і O центр описаного кола ω. На стороні BC відмітили точку D таку, що*

$\angle BAD = \angle CAO$. Нехай E — друга точка перетину прямої AD з колом ω. Позначимо через M, N і P — середини відрізків BE, OD і AC відповідно. Доведіть, що точки M, N і P — колінеарні.

(Запропонована Македонією на Міжнародну математичну олімпіаду балканських країн, 2013 р.)

Задача 6.36. *Нехай XY — діаметр кола ω, Z — середина дуги XY цього кола. Зовні кола ω відмітили точку P так, що точки P і Z лежать по різні боки прямої XY. Із точки P до кола ω провели дотичні PA і PB (A і B — точки дотику). Прямі ZA, ZB і ZP перетинають відрізок XY у точках D, C і Q. Доведіть, що Q — середина відрізка CD.*

(Міжнародна математична олімпіада країн південної Америки, 2013 р.)

Задача 6.37. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, AD — його висота. Нехай l — дотична у точці A до описаного кола трикутника ABC, а t — пряма, яка проходить через точку D і паралельна до сторони AB. Позначимо через E — точку перетину прямих l і t. Доведіть, що $\angle AEC = 90°$.*

(Південно-Африканська Республіка, 2013 р.)

Розв'язання задач 2013 року

Задача 6.1. *Нехай кола k_1 і k_2 перетинаються в двох точках A і B. Пряма t — спільна дотична цих кіл, M і N — точки її дотику з k_1 і k_2 відповідно. Нехай прямі MA і MN перпендикулярні і $MN = 2MA$. Знайдіть величину кута BMN.*

(Міжнародна математична олімпіада країн Балканського регіону, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.1).

Оскільки $AM \perp MN$, то AM — діаметр кола k_1. Нехай Q — точка перетину прямих AB і MN, тоді Q — середина MN. Це випливає з того, що AB — радикальна вісь кіл k_1 і k_2, а тому степінь точки Q відносно цих кіл однаковий, тобто $QM = QN$ (QM і QN — дотичні до k_1 і k_2). Тому, $MA = MQ$ (бо за умовою задачі $MN = 2MA$), тобто трикутник AMQ прямокутний і рівнобедрений. Звідси слідує, що $\angle MAQ = 45°$, а тому й $\angle BMN = \angle AMB = 45°$ (як кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику). Це і завершує розв'язання задачі.

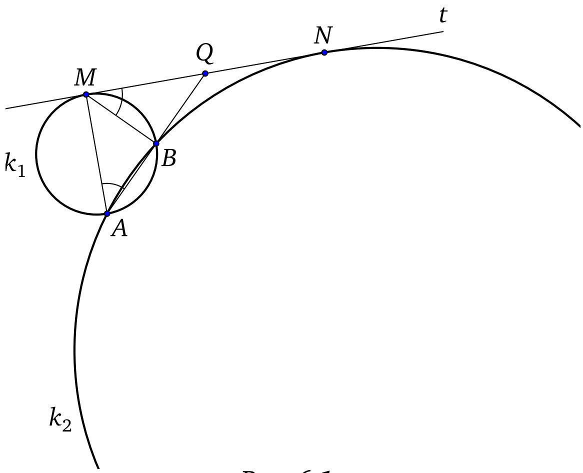


Рис. 6.1.

□

Задача 6.2. *Два кола k_1 і k_2 перетинаються в точках A і B. Нехай точки C і D розташовані на колах k_1 і k_2 відповідно так, що A — середина відрізка CD. Продовження відрізка CB перетинає коло k_2 у точці F, а продовження відрізка DB перетинає коло k_1 у точці E. Нехай l_1 і l_2 — серединні перпендикуляри відрізків CD і EF відповідно, а P — точка їх перетину. Доведіть, що із відрізків CA, AP і PE можна скласти прямокутний трикутник.*

(Китай, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.2).

Оскільки $\angle CAE = \angle ADE + \angle AED = \angle AFC + \angle ACF = \angle FAD$ і $l_1 \perp CD$, то l_1 містить бісектрису $\angle EAF$. Нехай k — описане коло трикутника AEF, а X — друга точка перетину l_1 і k. Оскільки AX — бісектриса $\angle EAF$, то за властивостями вписаних кутів рівними будуть дуги EX і XF кола k. Звідси випливає рівність хорд, що їх стягують, тобто $XE = XF$. А це означає, що $X \in l_2$. Оскільки $X \in l_1$, то $X = P$.

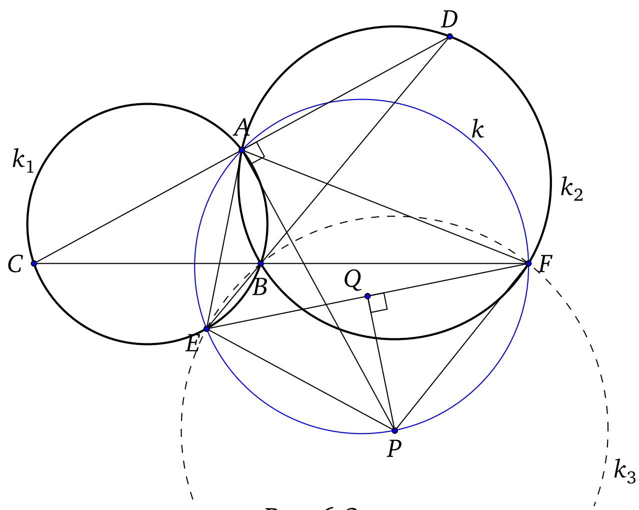


Рис. 6.2.

Оскільки

$$\angle EBF = \angle AEB + \angle AFB + \angle EAF = \angle BCD + \angle BDC + \angle EAF$$

і

$$\angle EBF = 180^\circ - \angle BCD - \angle BDC,$$

то, додавши ці рівності, одержимо:

$$2\angle EBF = 180^\circ - \angle EAF = 360^\circ - \angle EPF,$$

тобто, після скорочення на 2, матимемо:

$$\angle EBF = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle EPF.$$

Ця рівність означає, що точка P — центр описаного кола k_3 навколо трикутника EBF. Оскільки, з одного боку, $DP^2 - PE^2$ — це степінь точки D відносно кола k_3, а з іншого $DE \cdot DB$ це також степінь точки D відносно кола k_3, то $DP^2 - PE^2 = DE \cdot DB$. Далі, за теоремою про січні кола, маємо: $DE \cdot DB = DC \cdot DA$. Тому, $DP^2 - PE^2 = DC \cdot DA = 2AC^2$. Крім того, з перпендикулярності AP і CD виплиає: $DP^2 = AD^2 + AP^2 = AC^2 + AP^2$. З двох останніх рівностей одержуємо:

$$AC^2 + AP^2 - PE^2 = 2AC^2,$$

тобто $AP^2 = PE^2 + AC^2$. Ця рівність означає те, що потрібно було довести. □

Задача 6.3. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, k — його описане коло. На дузі BC цього кола, яка не містить точку A, довільно зафіксували точку D. Рухома пряма l, що проходить через точку H — ортоцентр трикутника ABC, перетинає вдруге описані кола навколо трикутників ABH і ACH відповідно в точках M і N.*

а) Знайти усі такі положення прямої l, для яких площа трикутника AMN досягає найбільшого можливого значення.

б) Нехай p_M і p_N — прямі, що проходять через точки M і N перпендикулярно до DB і DC відповідно, а P — їх точка перетину. Доведіть, що точка P рухається по фіксованому колу.

(В'єтнам, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.3).

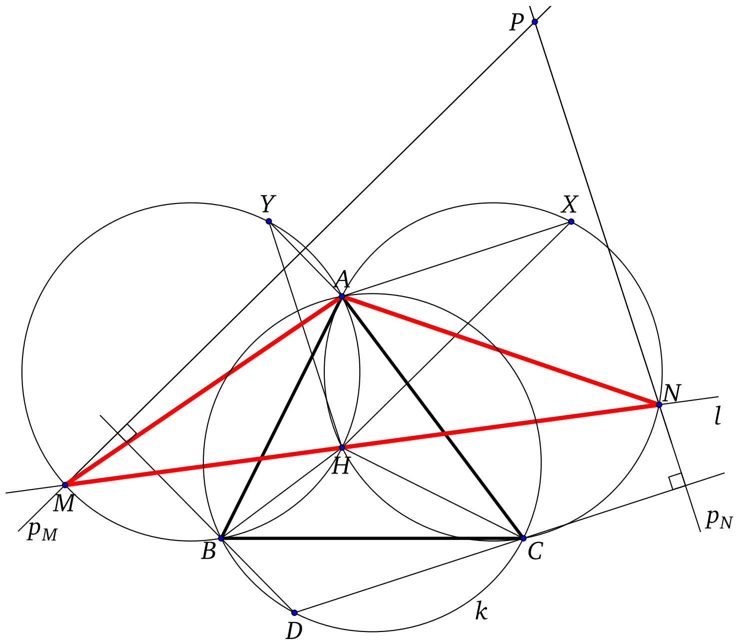


Рис. 6.3.

а) Використовуючи властивості вписаних кутів, одержуємо:

$$\angle ANM = \angle ANH = \angle ACH = 90^\circ - \angle A = \angle ABH = \angle AMN,$$

тобто трикутник AMN — рівнобедрений з фіксованим кутом

$$\angle MAN = 2\angle A.$$

Таким чином,

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin 2\angle A.$$

Оскільки $AM = AN$ і ці відрізки є хордами описаних кіл, трикутників ABH і ACH, то їх найбільше значення буде дорівнювати діаметрам цих кіл, які дорівнюють діаметру описаного кола трикутника ABC. Тому, S_{AMN} досягатиме свого найбільшого значення $2R^2 \sin 2\angle A$, де R — радіус описаного кола трикутника ABC, якщо пряма l буде займати таке положення, при якому AM і AN будуть діаметрами описаних кіл трикутників ABH і ACH відповідно. Це можливо, бо тоді $\angle AHM = 90^\circ - \angle AHN$. Для усіх інших положень прямої l площа трикутника AMN буде досягати меншого значення, ніж $2R^2 \sin 2\angle A$.

б) Відмітимо на описаному колі трикутника ACH таку точку X, що $AX \perp p_N$, а на описаному колі трикутника ABH — точку Y, для якої $AY \perp p_M$. Тоді $AX \parallel DC$ і $AY \parallel DB$. Оскільки фіксованими є трикутник ABC і точки H і D, то точки X та Y також будуть фіксованими.

Оскільки $\angle BDC = 180^\circ - \angle A$, а $BD \perp p_M$ і $CD \perp p_N$, то $\angle MPN = \angle A$. Крім того $AM = AN$ і $\angle MAN = 2\angle A$. Це означає, що точка A — центр описаного кола трикутника MPN, тобто $AP = AM = AN$. Оскільки $AP = AM$ і $AY \perp p_M$, то коло, описане навколо трикутника PAY, буде симетричним відносно прямої AY до кола, яке описане навколо трикутника ABH. Аналогічно, коло, яке описане навколо трикутника PAX, буде симетричним відносно прямої AX до кола, яке описане навколо трикутника ACH. Звідси випливає, що

$$\angle APY = \angle AMY = \angle AHY \text{ і } \angle APX = \angle ANX = \angle AHX,$$

тобто

$$\angle XPY = \angle APX + \angle APY = \angle AHX + \angle AHY = \angle XHY.$$

Далі, так як $AX \perp p_N$ і $AY \perp p_M$, то $\angle XAY = 180^\circ - \angle MPN = 180^\circ - \angle A$. Крім того,

$$\angle AXH = \angle ACH = 90^\circ - \angle A \text{ і } \angle AYH = \angle ABH = 90^\circ - \angle A.$$

Тому

$$\angle XHY = \angle XAY - \angle AXH - \angle AYH = \\ = 180^\circ - \angle A - (90^\circ - \angle A) - (90^\circ - \angle A) = \angle A.$$

Оскільки $\angle XPY = \angle XHY$, то $\angle XPY = \angle A$, тобто $\angle XPY + \angle XAY = \angle A + (180^\circ - \angle A) = 180^\circ$, а це означає, що точки A, X, P, Y — циклічні.

Таким чином, точка P належить описаному колу трикутника XAY, яке є фіксованим, що і треба було довести. □

Задача 6.4. *Нехай I — центр вписаного кола нерівнобедреного трикутника ABC, яке дотикається його сторін BC, CA і AB у точках D, E і F відповідно. Пряма, що проходить через точку E і перпендикулярна прямій BI, вдруге перетинає вписане коло у точці K, а пряма, яка проходить через точку F і перпендикулярна прямій CI, вдруге перетинає вписане коло у точці L. Нехай J — середина відрізка KL.*

а) Доведіть, що точки D, I, J — колінеарні.

б) Зафіксуємо точки B і C, а точка A нехай змінює своє положення так, що виконується умова $\frac{AB}{AC} = k$, де $k \neq 1$ — додатне фіксоване число. Нехай M і N — точки, діаметрально протилежні точкам E і F відповідно, а P і Q — точки перетину прямої MN з прямими BI і CI відповідно. Доведіть, що серединний перпендикуляр до відрізка PQ проходить через фіксовану точку.

(В'єтнам, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.4).

а) Оскільки прямі BI та CI — є осями симетрії вписаного кола трикутника ABC (вони проходять через центр I цього кола), то з умови задачі слідує, що точки K і E симетричні відносно прямої BI, а точки L і F симетричні відносно прямої CI. Тому, враховуючи цю симетричність та властивості вписаних кутів, одержуємо:

$$\angle LKD = \angle LED = \angle FDE = \\ = \angle DFK = \angle DLK,$$

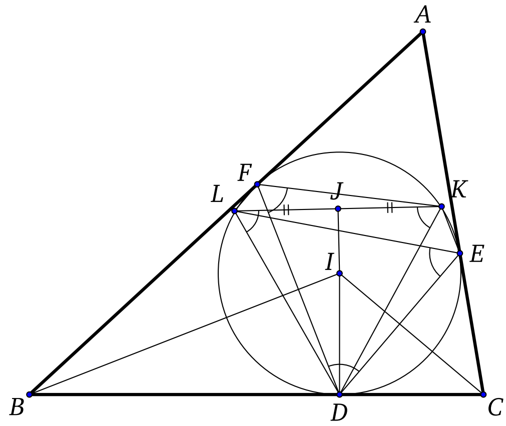


Рис. 6.4.

тобто $\angle LKD = \angle DLK$. А це означає, що трикутник DKL — рівнобедрений, з основою KL. Оскільки DJ — його медіана, то DJ — його висота, тобто DJ — серединний перпендикуляр до сторони KL. Тому, точка I, яка є центром описаного кола трикутника DKL, буде належати прямій DJ, тобто точки D, I і J — колінеарні.

б) Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 6.5).

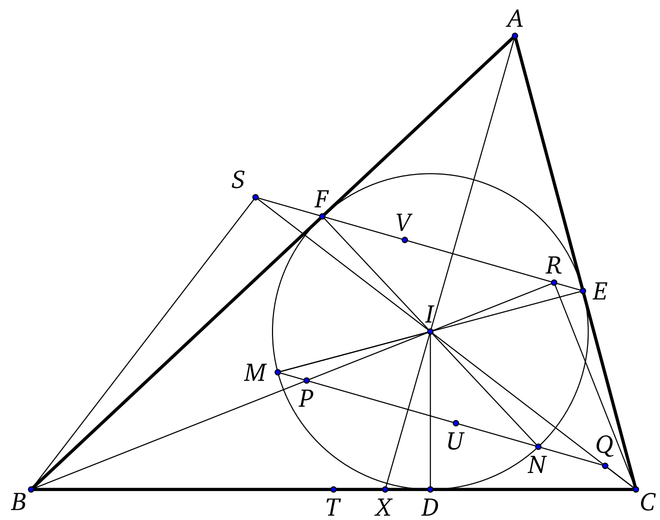


Рис. 6.5.

Нехай AI перетинає BC у точці X, T — середина BC, R і S — точки перетину EF з BI і CI відповідно, U і V — середини відрізків PQ і RS. Тоді в цих позначеннях матимемо:

$$\angle SFB = \angle AFE = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$$

і
$$\angle SIB = \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2},$$
тобто $\angle SFB = \angle SIB$. Це означає, що чотирикутник $BSFI$ — вписаний, а тому $\angle BSC = \angle BSI = \angle BFI = 90^\circ$. Аналогічно, $\angle BRC = 90^\circ$. Звідси слідує, що точки B, S, F, I, D — циклічні і точки C, E, R, I, D — циклічні. Далі, за властивістю медіани прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, маємо: $TS = TR$. Оскільки прямі EF і MN симетричні відносно точки I, то точки R і S симетричні точкам P і Q відносно точки I. Також точки V і U симетричні відносно точки I, як середини відрізків RS і PQ, які симетричні відносно точки I. Тому, $IU = IV$. Нехай серединний перпендикуляр до відрізка PQ перетинає відрізок DC в точці T'. Оскільки $SR \parallel PQ$ (це випливає із паралельності EF і MN, бо вони симетричні відносно точки I), а також $TV \perp SR$, $T'U \perp PQ$ і $AI \perp EF$, то $TV \parallel AI \parallel T'U$. Тоді, за теоремою Фалеса, одержуємо, що $XT = XT'$, бо $IU = IV$ і $TV \parallel AI \parallel T'U$.

Далі, оскільки AX — бісектриса трикутника ABC, то
$$\frac{XB}{XC} = \frac{AB}{AC} = k = \text{const}.$$
Це означає, що при вказаній зміні точки A, точка X буде нерухомою. З рівності $XT = XT'$ і нерухомості точок X і T випливає, що точка T' також буде нерухомою. А це означає, що серединний перпендикуляр до відрізка PQ проходить через фіксовану точку T' на нерухомому відрізку BC, що і треба було довести. □

Задача 6.5. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, AD, BE, CF — його висоти. Відомо, що пряма BE перетинає описане коло трикутника ADC у двох точках K і L (точка K лежить між точками B і L), а пряма CF перетинає описане коло трикутника ADB у двох точках P і Q (точка P лежить між точками C і Q). Доведіть, що прямі LP і KQ перетинаються на стороні BC.*

(Бразилія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 6.6).

Нехай H — ортоцентр трикутника ABC. Оскільки $\angle AFC = \angle ADC = 90^\circ$, то описане коло трикутника ADC проходить через точку F. Аналогічно доводиться, що описане коло трикутника ADB проходить через точку E. За властивістю хорд, що перетинаються, матимемо: $HP \cdot HQ = HA \cdot HD$ і $AH \cdot HD = HK \cdot HL$. Звідси слідує, що $HP \cdot HQ = HK \cdot HL$, тобто $\dfrac{HP}{HK} = \dfrac{HL}{HQ}$. Оскільки $\angle PHL = \angle KHQ$ (як вертикальні), то $\triangle HPL \sim \triangle HKQ$ (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників слідує рівність відповідних кутів: $\angle HLP = \angle HQK$, тобто $\angle KLP = \angle PQK$. З рівності цих кутів слідує циклічність точок K, Q, L, P, тобто ці точки належать

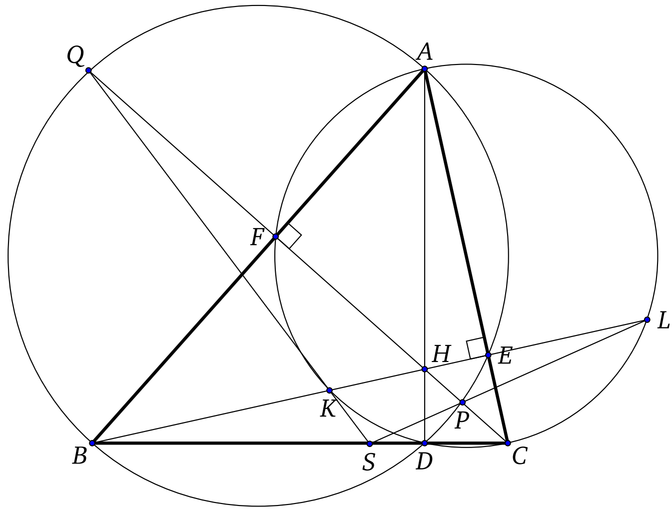


Рис. 6.6.

деякому колу ω. Так як AB і AC — серединні перпендикуляри хорд PQ і KL цього кола, то точка A — точка перетину цих хорд буде центром кола ω. Далі, нехай $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ і $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ — сторони і кути трикутника ABC, ρ — радіус кола $(PKQL)$, тоді з прямокутного трикутника AQB і трикутника ABC знаходимо:

$$\rho^2 = AQ^2 = AB \cdot AF = c \cdot b\cos\alpha = bc\cos\alpha.$$

Далі з трикутника ABC знаходимо:

$$AH \cdot AD = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta} \cdot c\sin\beta = bc\cos\alpha.$$

Отже, $AH \cdot AD = \rho^2$, тобто точки H і D є симетричними (інверсними) відносно кола $(PKQL)$. Оскільки $BC \perp AD$, то пряма BC є полярою точки H відносно кола $(PKQL)$. Так як поляра точки S відносно кола $(PKQL)$ проходить через точку H — точку перетину діагоналей чотирикутника $PKQL$, вписаного в коло $(PKQL)$, то за теоремою Брокара про взаємність поляр, поляра точки H буде проходити через точку S, тобто точка S лежить на стороні BC трикутника ABC, що і треба було довести. $\square$

Задача 6.6. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, H — його ортоцентр. Коло k, яке проходить через вершини B і C, перетинає коло h з діаметром AH у двох різних точках X і Y. Нехай AH перетинає BC у точці D, а K — основа перпендикуляра, опущеного із точки D на пряму XY. Доведіть, що KD — бісектриса кута BKC.*

(Японія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.7).

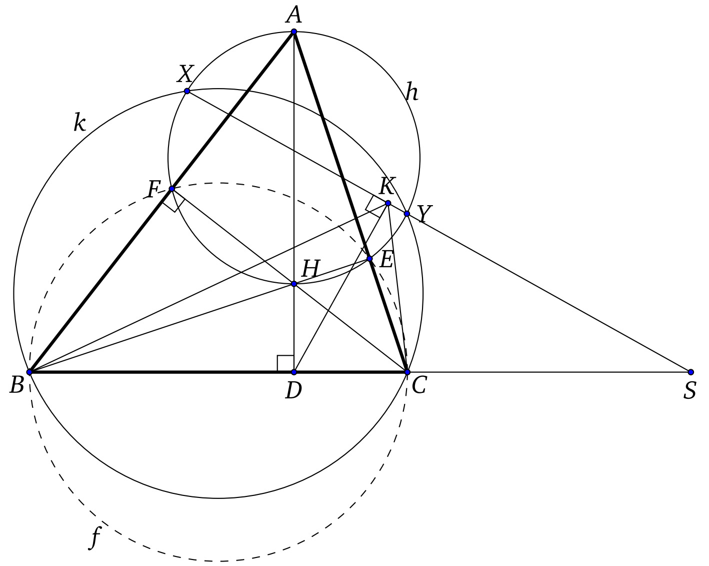


Рис. 6.7.

Нехай BH перетинає AC у точці E, а CH перетинає AB у точці F. Оскільки $\angle BFC = \angle BEC = 90°$, то навколо чотирикутника $BCEF$ можна описати коло f з діаметром BC. Тоді, за теоремою про радикальний центр трьох кіл, прямі BC, EF і XY перетинаються в одній точці S. За теоремою *про повний чотирикутник*, з чотирикутника $AEHF$ одержуємо, що $(BC; DS) = -1$. Далі, за теоремою про *зв'язок гармонічної четвірки точок із колом Аполлонія*, одержуємо: так як $(BC; DS) = -1$ і $\angle DKS = 90°$, то $\angle BKD = \angle CKD$, тобто KD — бісектриса кута BKD, що і треба було довести. □

Задача 6.7. *В гострокутному трикутнику ABC через H позначили основу його висоти, опущеної із вершини A. Нехай J та I — центри зовнівписаних кіл трикутників ABH і ACH відповідно, які дотикаються сторони AH. Позначимо через D — точку дотику вписаного кола трикутника ABC зі стороною BC. Доведіть, що точки H, D, I, J лежать на одому колі.*

(Іран, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.8).

Нехай коло (J) дотикається до прямих AB, BH і AH в точках F, Y і Q відповідно, а коло (I) дотикається до прямих AC, CH і AH в точках E, X і P відповідно. Через O позначимо центр кола, вписаного в трикутник ABC, а через r_B і r_C — радіуси зовнівписаних кіл трикутників ABH і ACH. Оскільки радіус, що проведений в точку дотику, перпендикулярний до дотичної, то чотирикутники $XIPH$ та $YJQH$ — квадрати, зі сторонами r_C і r_B відповідно.

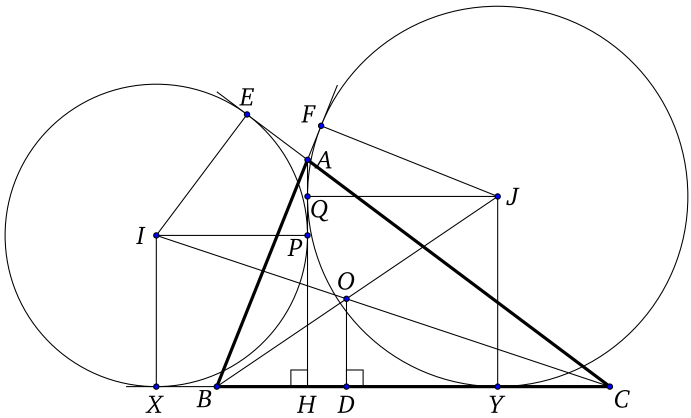


Рис. 6.8.

Звідси слідує, що

$$\angle IHJ = \angle IHP + \angle JHQ = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

Далі, за теоремою про дотичні відстані, маємо:

$$CX = CE = \frac{1}{2}(AC + HC + AH),$$
$$BY = BF = \frac{1}{2}(AB + BH + AH),$$
$$CD = \frac{1}{2}(AC + BC - AB).$$

Таким чином,

$$XD = XC - CD = \frac{1}{2}(AC + AH + CH) - \frac{1}{2}(BC + AC - AB) =$$
$$= \frac{1}{2}(AC + AH + CH - BC - AC + AB) = \frac{1}{2}(AB + AH - BH) =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + AH + BH) - BH = BY - BH = HY = r_B.$$

Отже, ми довели, що $XD = r_B$. Аналогічно доводиться, що $YD = r_C$. Звідси випливає, що прямокутні трикутники IXD та DYJ рівні між собою (за двома катетами). З рівності цих трикутників випливає, що

$$\angle IDJ = 180^\circ - \angle IDX - \angle JDY = 180^\circ - \angle IDX - \angle DIX = 90^\circ.$$

Таким чином, ми довели, що

$$\angle IHJ = \angle IDJ,$$

тобто точки H, D, I, J — циклічні, що і треба було довести. □

Задача 6.8. *Кола Ω і ω дотикаються в точці P (коло ω лежить всередині кола Ω). Хорда AB кола Ω дотикається ω в точці C. Пряма PC перетинає* *вдруге коло Ω в точці Q. Хорди QR і QS кола Ω дотикаються кола ω. Нехай I, X та Y — центри вписаних кіл трикутників APB, ARB і ASB відповідно. Доведіть, що $\angle PXI + \angle PYI = 90^\circ$.*

(Румунія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.9).

Помічаємо, що гомотетія з центром P, яка відображає точку C у точку Q, відображає коло ω в коло Ω, а дотичну AB до кола ω в точці C відображає в дотичну до кола Ω в точці Q, паралельну до AB. Це означає, що Q середина дуги AB кола Ω. Це означає, що PQ, RQ і SQ — бісектриси кутів APB, ARB і ASB відповідно, тобто точки I, X і Y — як центри вписаних кіл трикутників APB, ARB і ASB, лежать відповідно на PQ, RQ і SQ. Далі, за теоремою про «тризуб», одержуємо, що $QI = QX = QY = QA = QB$, тобто точки A, X, I, Y, B лежать на одному колі, з центром в точці Q.

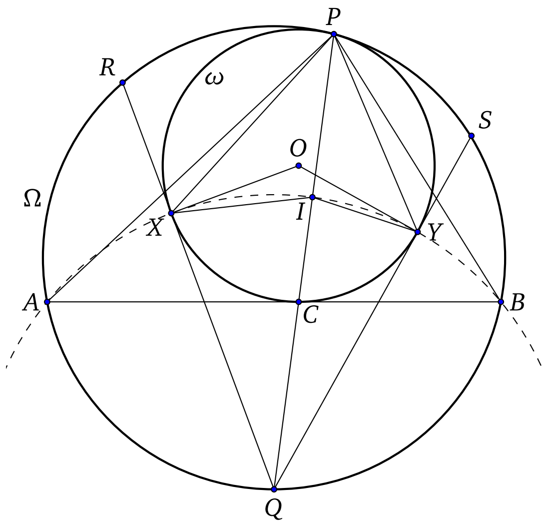


Рис. 6.9.

Далі, оскільки Q — середина дуги AB кола Ω, то, використовуючи властивості вписаних кутів, знаходимо: $\angle APQ = \angle QPB = \angle QAB$, тобто $\triangle\ QAC \sim \triangle\ QPA$ (за двома кутами). Із цієї подібності трикутників випливає пропорційність відповідних сторін, тобто $\dfrac{QA}{QP} = \dfrac{QC}{QA}$. Звідси одержуємо, що $QP \cdot QC = QA^2 = QX^2 = QY^2$, тобто точки X та Y — точки дотику QR і QS до кола ω.

Насамкінець, із рівнобедрених трикутників QXI і QYI знаходимо, що $\angle QXI = \angle QIX = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle IQX$ і $\angle QYI = \angle QIY = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle IQY$. Позначимо через O — центр кола ω, тоді $OX \perp QX$ і $OY \perp QY$. Тому,

$$\angle QIX + \angle QIY = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle XQY = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle XOY) = \\ = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle XOY = 90^\circ + \angle XPY.$$

Таким чином,

$$\angle PXI + \angle PYI = (\angle QIX - \angle XPI) + (\angle XPI - \angle YPI) = \\ = (\angle QIX + \angle QIY) - (\angle XPI + \angle YPI) = \\ = 90^\circ + \angle XPY - \angle XPY = 90^\circ,$$

що і треба було довести. □

Задача 6.9. *Нехай M — середина дуги BC, яка не містить точки A, описаного кола трикутника ABC, з центром у точці O. Нехай пряма, яка містить висоту трикутника ABC, що проведена із вершини A, перетинає вдруге описане коло в точці N. На сторонах AB і AC відмітили точки K і L відповідно так, що $OK \parallel MB$ і $OL \parallel MC$. Доведіть, що $NK = NL$.*

(Іран, 1-ий день другого туру Національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.10).

Оскільки чотирикутник $ABMC$ — вписаний і $OK \parallel MB$, $OL \parallel MC$, то

$$\angle KOL = \angle BMC = 180^\circ - \angle BAC = \\ = 180^\circ - \angle KAL,$$

тобто $\angle KOL = 180^\circ - \angle KAL$. Це означає, що чотирикутник $AKOL$ — вписаний в коло, яке на рисунку зображене пунктиром. Нехай це коло вдруге перетинає AN у точці S.

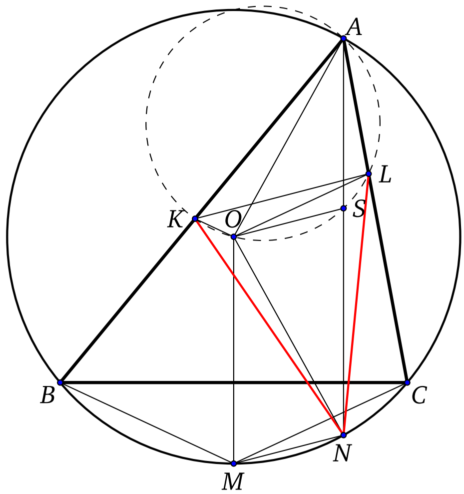


Рис. 6.10.

Далі, оскільки $AN \perp BC$, то

$$\angle LAS = \angle CAN = 90^\circ - \angle ACB = \\ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOB = \\ = 90^\circ - (90^\circ - \angle BAO) = \angle KAO,$$

тобто $\angle LAS = \angle KAO$. Оскільки ці кути вписані в одне коло, то дуги, на які вони спираються будуть рівними, тобто $KOSL$ — рівнобедрена трапеція: $KL \parallel OS$ і $KO = SL$.

Так як $OM \perp BC$ і $AN \perp BC$, то $OM \parallel AN$. Крім того, $OL \parallel MC$, тобто $\angle ALO = \angle ACM$. За властивістю вписаних кутів маємо: $\angle ASO = \angle ALO$ і $\angle ANM = \angle ACM$. Враховуючи попередню рівність кутів, одержуємо, що $\angle ASO = \angle ANM$, тобто $OS \parallel MN$. Тому, $MOSN$ — паралелограм. Звідси слідує, що $SN = OM = ON$, тобто точка N — рівновіддалена від кінців відрізка OS, тобто точка N лежить на серединному перпендикулярі цього відрізка. Так як $KOSL$ — рівнобедрена трапеція, то цей серединний перпендикуляр до основи OS, буде серединним перпендикуляром і до основи KL, тобто точка N рівновіддалена від кінців цієї основи, що і треба було довести. □

Задача 6.10. *Нехай P — точка, яка лежить зовні заданого кола k. PA і PB — дотичні до кола k, що проведені із точки P (A і B — точки дотику). На хорді AB кола k довільно обирають точку K. Описане коло трикутника PKB*

перетинає вдруге коло k у точці T. Нехай Q — точка, симетрична точці P відносно точки A. Доведіть, що $\angle PBT = \angle AKQ$.

(Іран, 2-ий день другого туру Національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 6.11).

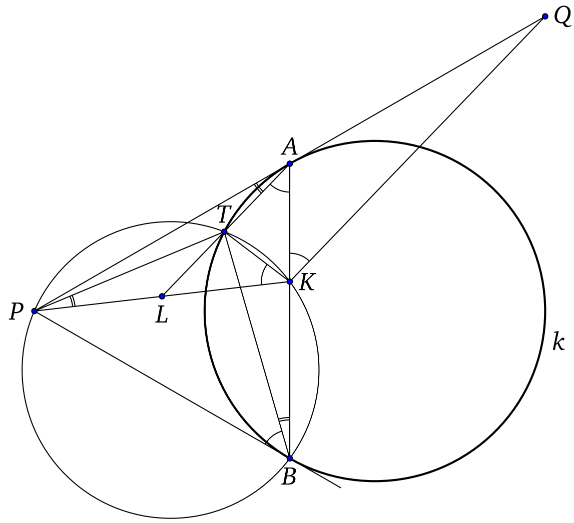


Рис. 6.11.

Нехай AT перетинає PK в точці L. Доведемо, що L — середина PK. Дійсно, за властивістю вписаних кутів, одержуємо: $\angle PBT = \angle PKT$. За теоремою про кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, одержуємо: $\angle PBT = \angle BAT$. Звідси випливає, що $\angle LKT = \angle LAK$, тобто трикутники LKT і LAK — подібні (зо двома кутами). З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

$$\frac{LK}{LA} = \frac{LT}{LK},$$

тобто

$$LK^2 = LA \cdot LT. \tag{1}$$

Аналогічно, $\angle KBT = \angle KPT$ і $\angle KBT = \angle ABT = \angle PAT$, тобто $\angle LPT = \angle LAP$. Звідки $\triangle\ LPT \sim \triangle\ LAP$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників, одержуємо, що

$$\frac{LP}{LA} = \frac{LT}{LK},$$

тобто

$$LP^2 = LA \cdot LT. \tag{2}$$

З рівностей (1) і (2) слідує, що $LP = LK$, тобто L — середина PK.

Оскільки L — середина PK і A — середина PQ, то LA — середня лінія трикутника KPQ. Звідси слідує, що $AL \parallel KQ$. Тому, $\angle QKA = \angle TAK = \angle PBT$, що і треба було довести. □

Задача 6.11. *Нехай AM і BN — бісектриси прямокутного трикутника ABC, в якому $\angle C = 90°$. Вони перетинають висоту CH у двох точках P і Q відповідно. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків PM і NQ, паралельна прямій AB.*

(Боснія і Герцеговина, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.12).

Нехай X і Y — середини відрізків PM і QN, а D і E — точки перетину прямої AB з прямими CX і CY відповідно. Доведемо, що трикутники CMP і CNQ рівнобедрені. Дійсно, нехай $\angle A = \alpha$, тоді, враховуючи, що AM — бісектриса кута BAC, з прямокутного трикутника ACM знаходимо, що

$$\angle CMA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки CH — висота, то $\angle BCH = \angle CAB = \alpha$. Отже, з трикутника CMP знаходимо, що

$$\angle CPM = 180^\circ - \angle PMC - \angle CMP = \\ = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

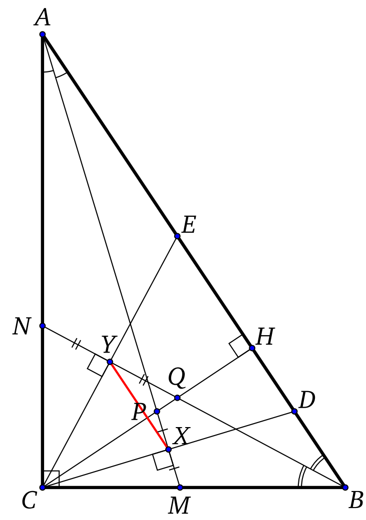


Рис. 6.12.

Тому $\angle CMP = \angle CPM$, тобто трикутник CPM — рівнобедрений. Аналогічно доводиться, що трикутник CQN також рівнобедрений. Це означає, що $CX \perp AM$ і $CY \perp BN$. Оскільки, AX — висота і бісектриса трикутника CAD, то AX — його медіана, тобто X — середина CD. Аналогічно, BN — бісектриса і висота трикутника CBE, тобто BN — медіана цього трикутника, тобто Y — середина CE. Таким чином, XY — середня лінія трикутника CDE, тобто $XY \parallel DE$, що і треба було довести. □

Задача 6.12. *Розглянемо рівнобедрений трикутник, в якому $AB = AC$ і $\angle A < 60^\circ$. На стороні AC відмітили таку точку D, що $\angle DBC = \angle BAC$. Нехай E — точка перетину серединного перпендикуляра відрізка BD з прямою, що проходить через вершину A і паралельна до прямої BC. Нехай F — точка на прямій AC, для якої $FA = 2AC$ (точка A лежить між точками F і C). Доведіть, що*

1) прямі BE і AC паралельні;

2) продовження перпендикулярів із F до AB та із E до AC перетинаються в точці, яка лежить на прямій BD.

(Італія, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 6.13).

Маємо, що $\triangle BAC \sim \triangle DBC$ (за двома кутами: $\angle C$ — спільний і $\angle BAC = \angle DBC$). Оскільки трикутник BAC — рівнобедрений, то рівнобедреним буде і трикутник DBC ($BD = BC$ і $\angle BDC = \angle BCD$). Нехай серединний перпендикуляр відрізка BD перетинає пряму AC у точці P, а пряма BD перетинає пряму AE у точці Q. Так як точки P і E лежать на серединному перпендикулярі відрізка BD, то трикутники BPD і BED — рівнобедрені. Оскільки трикутники

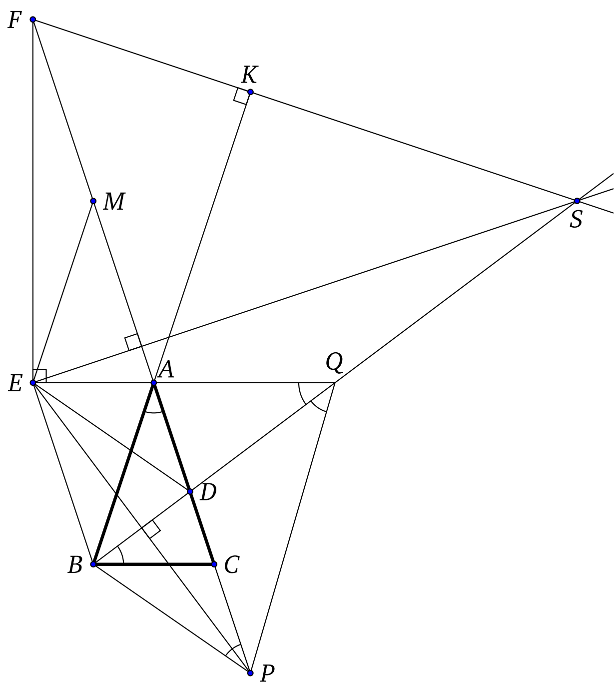


Рис. 6.13.

BAC і BPD — рівнобедрені, $BD = BC$ і $\angle BDC = \angle BCD$, то ці трикутники рівні між собою. Звідси випливає, що $\angle BAC = \angle BPD$ і $BP = BA = AC = PD$. Так як $AQ \parallel BC$, то $\angle CBD = \angle AQD$ (як внутрішні різносторонні). З того, що $\angle APB = \angle AQB$, то чотирикутник $ABPQ$ — вписаний в деяке коло. Тоді, за властивістю вписаних кутів, одержуємо, що $\angle BQP = \angle BAC$, тобто QB — бісектриса кута PQE. Оскільки $BQ \perp PE$, то BQ — серединний перпендикуляр відрізка PE, тобто $BE = BP$. Це означає, що чотирикутник $PBED$ — ромб. Звідси й слідує, що $BE \parallel PD$, тобто $BE \parallel AC$, що і завершує доведення першого пункту задачі.

Для розв'язання другого пункту задачі, позначимо через M — середину відрізка AF. Тоді, $MA = AC = AB = BE$, тобто $MABE$ — ромб. Звідси випливає, що $ME = MA = MF$, тобто AF — діаметр описаного кола трикутника AEF. Тому, $FE \perp AE$. Нехай продовження перпендикуляра FK, опущеного із точки F до прямої AB, перетинає пряму BD у точці S. Тоді, $\angle AEF + \angle AKF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, тобто чотирикутник $AEFK$ — вписаний в деяке коло. Звідси слідує, що $\angle EFK = \angle EAB$, тобто $\angle EFS = \angle EDB$. Це означає, що чотирикутник $DEFS$ — вписаний в деяке коло. Звідси слідує, що $\angle FES = \angle FDS = \angle BDC = \angle DCB = \angle FAE$, тобто $\angle FES = \angle FAE$. Оскільки трикутник FEA — прямокутний, то $ES \perp FA$, що і завершує доведення другого пункту задачі. $\square$

Задача 6.13. *В трикутнику ABC точки P, Q, R лежать на сторонах BC, CA, AB відповідно. Розглянемо три кола ω_A, ω_B, ω_C, які описані навколо трикутників AQR, PBR, CPQ відповідно. Відрізок AP перетинає вдруге кола ω_A, ω_B, ω_C в точках X, Y, Z відповідно. Доведіть, що*

$$\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}.$$

(США, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 6.14).

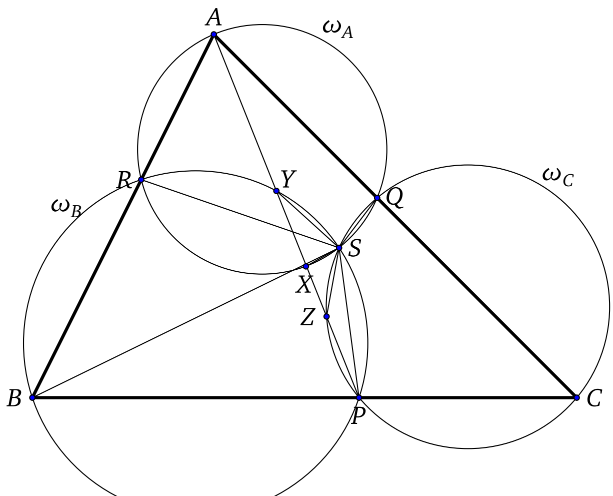


Рис. 6.14.

Нехай кола ω_B і ω_C перетинаються у точці S, відмінній від точки P. У випадку, коли ці кола дотикаються у точці P, доведення буде аналогічним. Оскільки чотирикутники $BPSR$ і $CPSQ$ — вписані, то $\angle PSR = 180^\circ - \angle B$ і $\angle PSQ = 180^\circ - \angle C$. Тому,

$$\begin{aligned}\angle RSQ = 360^\circ - \angle PSR - \angle PSQ = \\ = 360^\circ - (180^\circ - \angle B) - (180^\circ - \angle C) = \\ = \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A,\end{aligned}$$

тобто чотирикутник $AQSR$ також вписаний. А це означає, що коло ω_A також проходить через точку S, тобто кола ω_A, ω_B і ω_C перетинаються в точці S, яку називають **точкою Мікеля**.

Далі, так як чотирикутник $BPSY$ вписаний в коло ω_B, то $\angle XYS = \angle PYS = \angle PBS$, а з того, що чотирикутник $ARXS$ вписаний в коло ω_A, то $\angle SXY = \angle SXA = \angle SRA$. Чотирикутник $BPSR$ вписаний в коло ω_B, тому $\angle SRA = \angle SPB$. Отже, $\angle SXY = \angle SRA = \angle SPB$, тобто $\triangle\ SYX\ \sim \triangle\ SBP$ (за двома кутами $\angle XYS = \angle PBS$ і $\angle SXY = \angle SPB$). З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

$$\frac{YX}{BP} = \frac{SX}{SP}.$$

Аналогічно доводиться, що $\triangle SXZ \sim \triangle SPC$, а тому

$$\frac{SX}{SP} = \frac{XZ}{PC}.$$

Із цих двох одержаних пропорцій, знаходимо, що

$$\frac{XY}{XZ} = \frac{\frac{BP\cdot SX}{SP}}{\frac{PC\cdot SX}{SP}} = \frac{BP}{PC},$$

що і треба було довести. □

Задача 6.14. *Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторін BC, CA, AB у точках A_1, B_1, C_1 відповідно. На прямих A_1I і B_1I відмітили точки A_2 і B_2 відповідно так, що A_1 і A_2 лежать по різні боки від точки I, B_1 і B_2 лежать по різні боки від точки I, причому $IA_2 = IB_2 = R$, де R — радіус описаного кола трикутника ABC. Доведіть, що*

а) $AA_2 = BB_2 = IO$, де O — центр описаного кола трикутника ABC;

б) прямі AA_2 і BB_2 перетинаються на описаному колі трикутника ABC.

(Узбекистан, заключний тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.15).

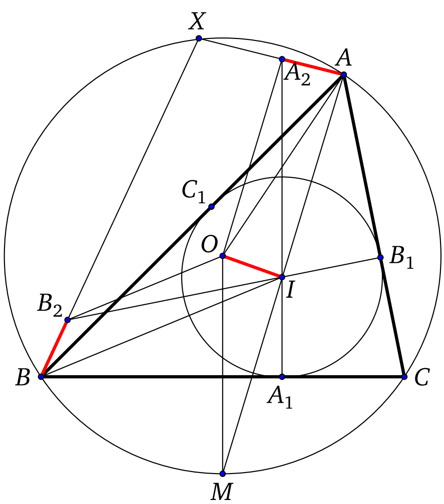


Рис. 6.15.

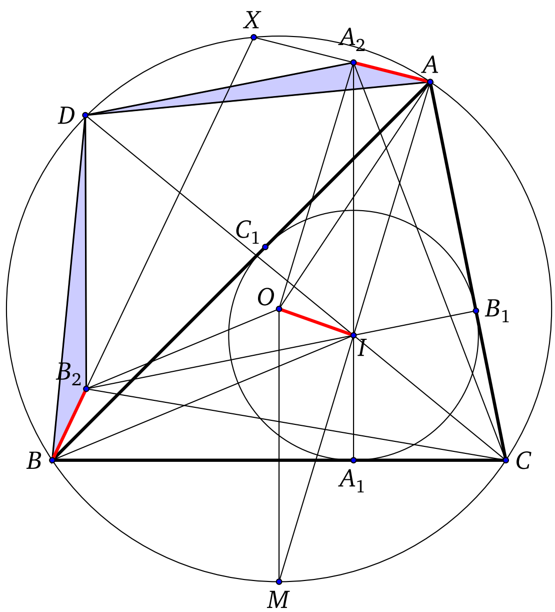


Рис. 6.16.

а) Нехай M — середина дуги BC описаного кола трикутника ABC. Оскільки I — точка перетину бісектрис трикутника ABC, то промінь AI перетинає описане коло трикутника ABC у точці M, причому $OM \perp BC$. Оскільки $A_2I \perp BC$, то $A_2I \parallel OM$. Крім того, $A_2I = R = OM$, тому MOA_2I — паралелограм. Тому, $\angle OA_2I = \angle OMI$. Так як $OM = OA = R$, то трикутник MOA — рівнобедрений, тобто $\angle OMI = \angle OAI$. Таким чином, $\angle OA_2I = \angle OAI$, тобто чотирикутник OA_2AI — вписаний. Оскільки $OA_2 \parallel MI$, то $OA_2 \parallel AI$, а це означає, що вписаний чотирикутник OA_2AI — рівнобедрена трапеція, тобто $IO = AA_2$. Аналогічно доводиться, що OB_2BI також рівнобедрена трапеція, тобто $IO = BB_2$. Отже, ми довели, що $AA_2 = BB_2 = IO$, що і завершує розв'язання першого пункту задачі.

б) Оскільки трикутники CA_1I і CB_1I рівні (за двома катетами), то $\angle CIA_2 = \angle CIB_2$. Так як $IA_2 = IB_2$, то $\triangle\ CIA_2 = \triangle\ CIB_2$ (за двома сторонами і кутом між ними). З рівності цих трикутників випливає, що $CA_2 = CB_2$ і $\angle A_2CI = \angle B_2CI$.

Нехай D середина дуги AB описаного кола трикутника ABC, що не містить точку C, тоді пряма CI проходить через точку D (рис. 6.16). Звідси слідує, що трикутники DCA_2 і DCB_2 рівні між собою (за двома сторонами і кутом між ними). З рівності цих трикутників випливає, що $DA_2 = DB_2$. Крім того, так як D середина дуги AB описаного кола трикутника ABC, то $DA = DB$. Отже, трикутники DAA_2 і DBB_2 рівні між собою (за трьома сторонами). Так як ці трикутники мають спільну вершину D і однаково орієнтовані, то при повороті з центром в точці D на кут ADB за рухом годинникової стрілки, трикутник DAA_2 відобразиться на трикутник DBB_2. Це означає, що кут між прямими AA_2 і BB_2 дорівнює куту повороту, тобто, якщо X — точка перетину прямих AA_2 і BB_2, то $\angle AXB = \angle ADB$. Це означає, що точки A, X, D і B — циклічні, тобто лежать на одному колі. Оскільки точки A, D і B лежать на описаному колі трикутника ABC, то і точка X також лежить на цьому колі, що і треба було довести. □

Задача 6.15. *Чотирикутник $XABY$ вписаний в коло ω так, що XY — діаметр цього кола. Відрізки AY і BX перетинаються в точці P. Точка Z — основа перпендикуляра, опущеного з точки P на пряму XY. Нехай C — така точка кола ω, що $XC \perp AZ$. Нехай Q — точки перетину відрізків AY і CX. Доведіть, що*

$$\frac{BY}{XP} + \frac{CY}{XQ} = \frac{AY}{AX}.$$

(США, заключний тур для юніорів національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.17).

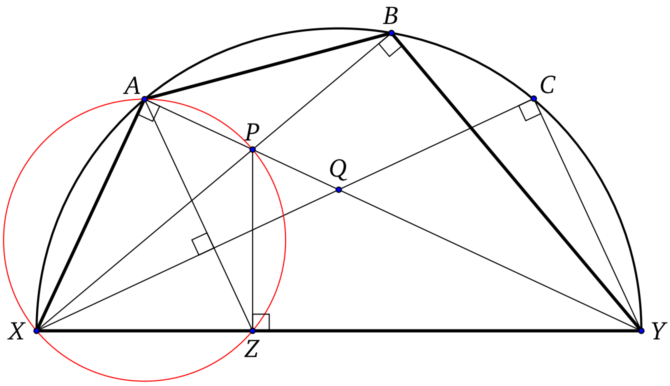


Рис. 6.17.

Помічаємо, що $\angle XAY = \angle XBY = \angle XCY = \angle PZX = \angle PZY = 90^\circ$. З прямокутних трикутників BXY, AXY, AXP знаходимо:

$$BY = XY \cdot \cos\angle BYX, \quad AX = XY \cdot \cos\angle AXY,$$

$$XY = \frac{AX}{\cos\angle AXP} = \frac{XY \cdot \cos\angle AXY}{\cos\angle AXP}.$$

З цих рівностей знаходимо, що

$$\frac{BY}{XP} = \frac{XY \cdot \cos\angle BYX}{\frac{XY \cdot \cos\angle AXY}{\cos\angle AXP}} = \frac{\cos\angle BYX \cdot \cos\angle AXP}{\cos\angle AXY}.$$

Аналогічно знаходимо, що

$$\frac{CY}{XQ} = \frac{\cos\angle CYX \cdot \cos\angle AXQ}{\cos\angle AXY}.$$

Додавши останні дві рівності, знаходимо, що

$$\frac{BY}{XP} + \frac{CY}{XQ} = \frac{\cos\angle BYX \cdot \cos\angle AXP + \cos\angle CYX \cdot \cos\angle AXQ}{\cos\angle AXY}. \qquad (\star)$$

Оскільки $CX \perp AZ$ і $CX \perp CY$, то $\angle CYX = \angle AZX$. Крім того, $\angle XAP = 90^\circ = \angle XZP$, тому чотирикутник $XAPZ$ — вписаний в деяке коло, тобто $\angle AZX = \angle APX$. Таким чином, $\angle CYX = \angle AZX = \angle APX = 90^\circ - \angle AXP$, тобто $\angle CYX + \angle AXP = 90^\circ$. Аналогічно доводиться, що $\angle BYX + \angle AXQ = 90^\circ$. Отже, можна зробити висновок, що $\cos\angle BYX = \sin\angle AXQ$ і $\cos\angle AXP = \sin\angle CYX$. Тому, із формули $(\star)$ випливає, що

$$\frac{BY}{XP} + \frac{CY}{XQ} = \frac{\sin\angle AXQ \cdot \sin\angle CYX + \cos\angle AXQ \cdot \cos\angle CYX}{\cos\angle AXY} =$$

$$= \frac{\cos(\angle CYX - \angle AXQ)}{\cos\angle AXY}.$$

Так як чотирикутник $XACY$ — вписаний, то $\angle AXQ = \angle AXC = \angle CYA$, тобто $\angle CYX - \angle AXQ = \angle CYX - \angle CYA = \angle AYX = 90^\circ - \angle AXY$.

Таким чином,

$$\frac{BY}{XP}+\frac{CY}{XQ}=\frac{\cos(\angle CYX-\angle AXQ)}{\cos\angle AXY}=\frac{\cos(90^\circ-\angle AXY)}{\cos\angle AXY}=$$
$$=\frac{\sin\angle AXY}{\cos\angle AXY}=\operatorname{tg}\angle AXY=\frac{AY}{AX},$$

що і завершує доведення. □

Задача 6.16. *Із точки P, яка лежить зовні кола ω, провели дві дотичні PB, PD і січну, яка перетинає коло ω у двох точках A і C (C лежить між P і A). Пряма, що дотикається до кола ω у точці C, перетинає пряму PD у точці Q, а пряму AD у точці R. Пряма AQ перетинає вдруге коло ω у точці E. Доведіть, що точки B, E і R — лежать на одній прямій.*

(Азіатсько-тихоокеанська математична олімпіада, 2013 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.18).

Щоб довести, що точки B, E і R лежать на одній прямій, достатньо довести, що прямі AD, BE і CQ перетинаються в одній точці.

За умовою задачі пряма CQ перетинає пряму AD у точці R. Нехай пряма BE перетинає пряму AD у точці R'. Достатньо довести, що точки R і R' співпадають. Для цього, достатньо довести, що $\dfrac{AR}{RD}=\dfrac{AR'}{R'D}$.

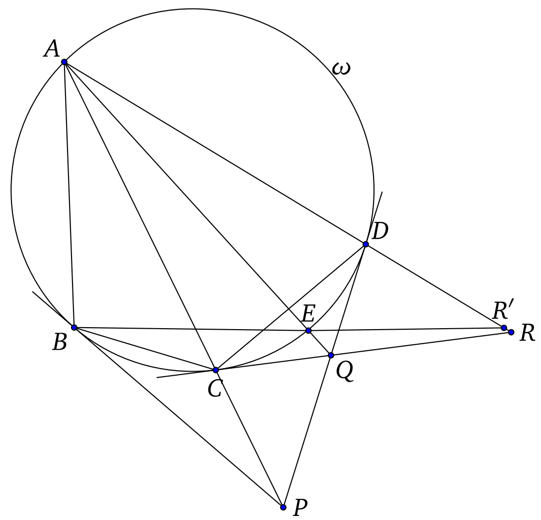


Рис. 6.18.

Так як PD — дотична до ω, то за теоремою про кут між дотичною і хордою, знаходимо, що $\angle PDC=\angle PAD$, тобто $\triangle\ PAD\sim\triangle\ PDC$. Оскільки PB також дотична до кола ω, то аналогічно доводиться, що $\triangle\ PAB\sim\triangle\ PBC$. З подібності цих трикутників, знаходимо:

$$\frac{AD}{DC}=\frac{PA}{PD}=\frac{PA}{PB}=\frac{AB}{BC},$$

тобто $AB\cdot CD=BC\cdot AD$. Оскільки чотирикутник $ABCD$ — вписаний в ω, то за теоремою Птоломея

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

Враховуючи рівність $AB \cdot CD = BC \cdot AD$, знаходимо, що $AB \cdot CD = BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$. Звідки знаходимо, що

$$\frac{DB}{AB} = \frac{2DC}{CA} \tag{1}$$

і

$$\frac{DC}{CA} = \frac{2ED}{AE}. \tag{2}$$

Далі, за теоремою про кут між дотичною і хордою, одержуємо, що $\triangle RDC \sim \triangle RCA$ (за двома кутами). Звідки знаходимо, що

$$\frac{RD}{RC} = \frac{DC}{CA} = \frac{RC}{RA}.$$

Тому, враховуючи цю пропорційність,

$$\frac{RD}{RA} = \frac{RD \cdot RA}{RA^2} = \frac{RC^2}{RA^2} = \left(\frac{DC}{CA}\right)^2 = \left(\frac{2ED}{EA}\right)^2. \tag{3}$$

Аналогічно доводимо, що $\triangle ABR' \sim \triangle EDR'$, тобто

$$\frac{R'D}{R'B} = \frac{ED}{AB},$$

а $\triangle DBR' \sim \triangle EAR'$, тобто

$$\frac{R'A}{R'B} = \frac{EA}{DB}.$$

З цих останніх двох пропорцій, шляхом ділення першої на другу, знаходимо, що

$$\frac{R'D}{R'A} = \frac{ED \cdot DB}{EA \cdot AB},$$

а враховуючи (1), одержимо:

$$\frac{R'D}{R'A} = \frac{ED}{EA} \cdot \frac{2DC}{CA} = \left(\frac{2ED}{EA}\right)^2. \tag{4}$$

З (3) і (4) одержуємо, що

$$\frac{RD}{RA} = \frac{R'D}{R'A},$$

що і завершує доведення задачі. □

Задача 6.17. *Нехай A, B і C — три фіксовані точки прямої l, які лежать на ній у вказаному порядку. Для кожного кола ω, яке проходить через точки B і C, позначимо через D одну із точок перетину цього кола із серединним перпендикуляром до відрізка BC. Нехай E — друга точка перетину кола ω і прямої AD. Доведіть, що для кожного кола ω відношення довжин відрізків BE і CE одне і те ж саме.*

(Австрія, заключний 1-й тур національної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.19).

Нехай M — середина BC, тоді, за умовою задачі, DM — серединний перпендикуляр до відрізка BC. Отже, трикутник BDC — рівнобедрений, бо кожна точка серединного відрізка рівновіддалена від його кінців, тобто $BD = CD$. Звідси випливає, що $\angle DBC = \angle DCB$, як кути при основі рівнобедреного трикутника. Далі, $\angle DBC = \angle DEC$, бо ці кути вписані і спираються на дугу DC кола ω. Тому, $\angle DEC = \angle DCA$, тобто $\triangle\ DEC \sim \triangle\ DCA$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

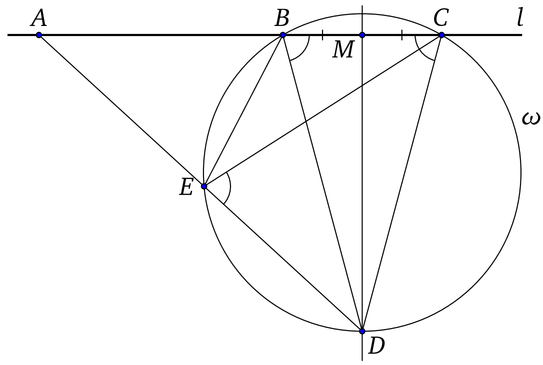


Рис. 6.19.

$$\frac{EC}{CA} = \frac{DC}{DA},$$

тобто

$$CE = \frac{CA \cdot DC}{DA}. \qquad (1)$$

Оскільки чотирикутник $BCDE$ — вписаний, то $\angle ABE = \angle ADC$, тобто $\triangle\ ABE \sim \triangle\ ADC$. З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

$$\frac{BE}{DC} = \frac{AB}{AD},$$

тобто

$$BE = \frac{AB \cdot DC}{DA}. \qquad (2)$$

Таким чином, з рівностей (1) і (2) знаходимо, що

$$\frac{BE}{CE} = \frac{\frac{AB \cdot DC}{DA}}{\frac{CA \cdot DC}{DA}} = \frac{AB}{AC} = \text{const},$$

бо довжини відрізків AB і AC є сталими, що і треба було довести. □

Задача 6.18. *Трикутник ABC вписаний в коло ω. Коло k, яке проходить через точки B і C, перетинає сторони AB і AC в точках S і R відповідно. Відрізки BR і CS перетинаються в точці L, а промені LR і LS перетинають коло ω в точках D і E відповідно. Нехай K — точка перетину бісектриси кута BDE і відрізка ER. Доведіть, що якщо $BE = BR$, то $\angle ELK = \frac{1}{2}\angle BCD$.*

(США, підготовка до Міжнародної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.20).

По-перше відзначимо, що за властивістю вписаних кутів, які спираються на одну і ту ж саму дугу кола, виконуються наступні рівності кутів:

$$\angle EBA = \angle ECA = \angle SCR =$$
$$\angle SBR = \angle ABD = \angle ACD.$$

Вони означають, що BA і CA — бісектриси кутів EBD і ECD відповідно. Оскільки BA — бісектриса кута EBR і $BE = BR$, то BA — серединний перпендикуляр до відрізка ER. Тому, $SE = SR$ і $\angle SER = \angle SRE$.

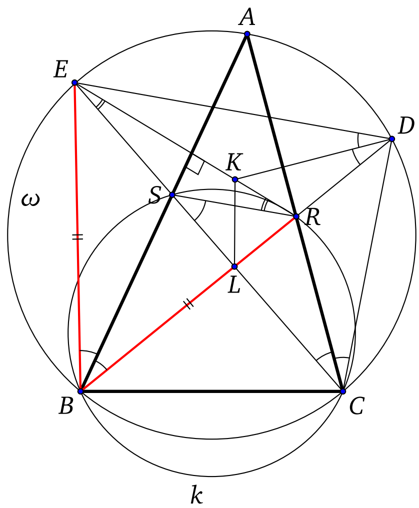


Рис. 6.20.

Тепер зауважимо, що

$$\angle BRC = \angle BSC = 180^\circ - \angle ESB =$$
$$= \angle EBS + \angle SEB = \angle EBS + \angle SRB =$$
$$= \angle EBS + \angle SCB = \angle SCR + \angle SCB = \angle RCB.$$

Звідси слідує, що $\angle BRC = \angle RCB$, тобто трикутник CBR — рівнобедрений, $BR = BC = BE$. Далі матимемо:

$$\angle DEC = \angle DBC = \angle RBC = \angle RSC,$$

тобто $\angle DEC = \angle RSC$. Оскільки ці кути є відповідними, то $SR \parallel ED$. Тому, $\angle DER = \angle ERS = \angle REL$, тобто ER — бісектриса трикутника DEL. Оскільки, за умовою задачі, DK — бісектриса $\angle EDL$, то K — точка перетину бісектрис трикутника DEL. Це означає, що LK — бісектриса кута DLE. □

Задача 6.19. *Нехай O — центр кола ω, описаного навколо гострокутного трикутника ABC, в якому $AB < AC$. На стороні BC відмітили таку точку D, що $\angle BAD = \angle OAC$. Нехай пряма AD перетинає вдруге коло ω у точці E. Позначимо через M, N і P — середини відрізків BE, OD і AC. Доведіть, що точки M, N і P — лежать на одній прямій.*

(Міжнародна математична олімпіада для юніорів країн Балканського регіону, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 6.21).

Оскільки P — середина хорди AC, то $OP \perp AC$. За властивістю вписаних кутів:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle AOP.$$

За умовою задачі, $\angle BAD = \angle OAC$. Тому, трикутники ADB і APO — подібні (за двома кутами). Звідси випливає, що $\angle ADB = \angle APO = 90^\circ$, тобто $ABEC$ — вписаний чотирикутник з перпендикулярними діагоналями. Якщо Q — точка перетину прямих MD і AC, то $MQ \perp AC$ (за теоремою Брахмагупти), тобто $MD \parallel OP$.

Нехай H — точка, симетрична точці E відносно прямої BC, тоді H — ортоцентр трикутника ABC. Як відомо, $OP = \frac{1}{2}BH$, тому

$$OP = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}BE = DM,$$

тобто $OP = DM$ і $OP \parallel DM$. Це означає, що $MDPO$ — паралелограм. Оскільки N — середина його діагоналі AD, то його друга діагональ MP також проходить через точку N, бо діагоналі будь-якого паралелограма точкою перетину діляться навпіл. Таким чином, точки M, N і P — колінеарні, що і треба було довести.

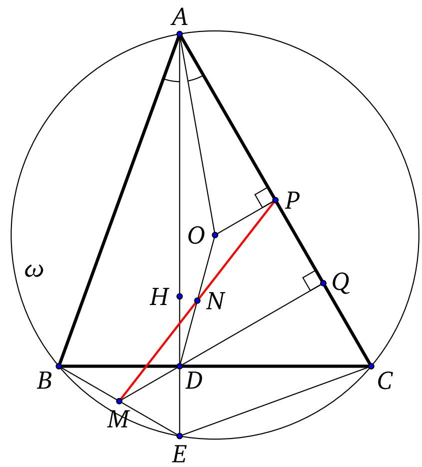


Рис. 6.21.

□

Задача 6.20. *Нехай F — точка перетину діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло ω, а E — точка перетину прямих AB і CD. Позначимо через M і N середини відрізків BC і EF відповідно, а через G і H — основи перпендикулярів, опущених із точки F на прямі AB і CD відповідно. Нехай описане коло трикутника MNG перетинає відрізок BF у точці P, а описане коло трикутника MNH перетинає відрізок CF у точці Q. Доведіть, що $PQ \parallel BC$.*

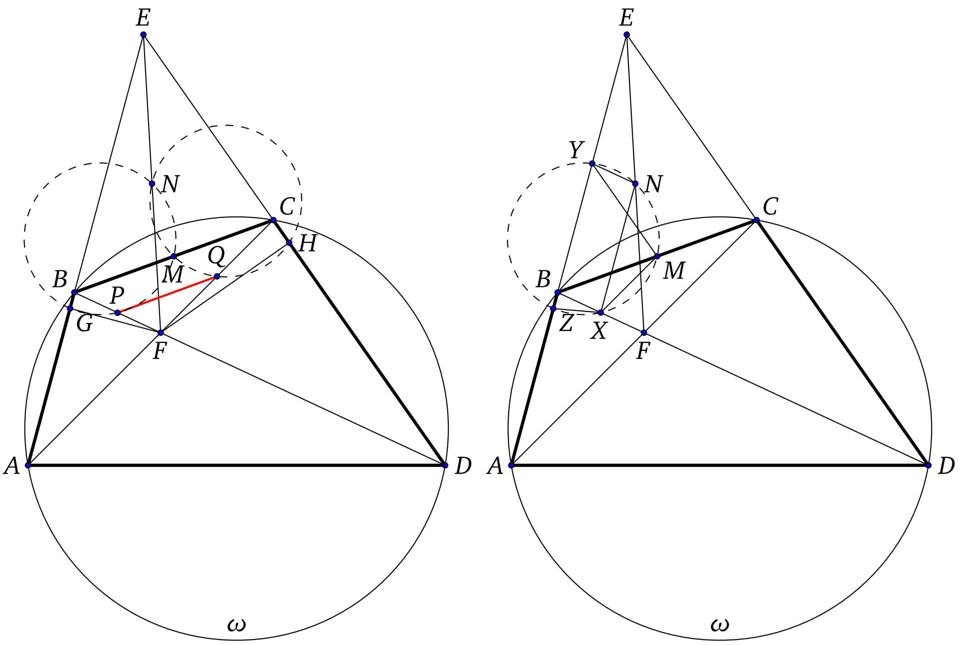
(Китай, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.22).

Нехай X і Y — середини відрізків BF і BE відповідно. Розглянемо коло k, описане навколо трикутника XNY. Нехай це коло перетинає AB у точці Z. Тоді $XN \parallel BE$ і $YN \parallel BF$ — як середні лінії трикутника BEF. Це означає, що $BXNY$ — паралелограм. Крім того, $XM \parallel FC$ і $YM \parallel EC$ — як середні лінії трикутників BFC і BEC відповідно. Тому,

$$\angle XNY = \angle FBE = \angle FCE = \angle XMY,$$

тобто $\angle XNY = \angle XMY$. Тут ми скористалися тим, що протилежні кути паралелограма рівні і рівністю вписаних кутів, що спираються на одну дугу. З одержаної рівності кутів $\angle XNY = \angle XMY$ випливає, що точка M також належить колу k. Оскільки $XN \parallel YZ$, то $YNXZ$ — рівнобедрена трапеція. Звідси слідує, що $NZ = XY = FN$, тобто $NZ = NF = NE$. А це означає, що $\angle EZF = 90°$. Таким чином, коло k співпадає з описаним колом трикутника MNG, тобто $Z = G$ і $X = P$. Ми довели, що P — середина BF. Аналогічно доводиться, що Q — середина CF. Таким чином, PQ — середня лінія трикутника BFC. Звідки слідує, що $PQ \parallel BC$, що і треба було довести. □



а)   б)

Рис. 6.22.

Задача 6.21. *Нехай $ABCD$ — трапеція з основами AB і CD. Позначимо через P і Q середини діагоналей AC і BD відповідно. Відомо, що $\angle ABP = \angle CBD$. Доведіть, що $\angle BCQ = \angle ACD$.*

(Міжнародна математична олімпіада африканських країн, 2013 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 6.23).

Нехай E — точка перетину діагоналей AC і BD. Оскільки BP — медіана трикутника ABC і $\angle ABP = \angle CBE$, то BE — симедіана трикутника ABC. За метричною властивістю симедіани трикутника, одержуємо, що

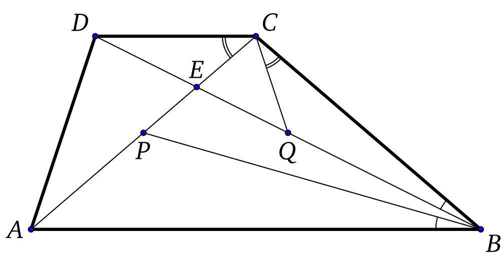


Рис. 6.23.

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

Так як $AB \parallel CD$, то трикутники ABE і CDE подібні. З подібності цих трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD}.$$

Із цих двох співвідношень одержуємо:

$$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AB}{CD},$$

тобто $BC^2 = AB \cdot CD$.

Далі, з подібності вказаних трикутників, знаходимо:

$$\frac{BE}{ED} = \frac{AB}{CD} = \frac{AB \cdot CD}{CD^2} = \frac{BC^2}{CD^2},$$

тобто

$$\frac{BE}{ED} = \frac{BC^2}{CD^2}.$$

Це співвідношення означає, що CE — симедіана трикутника BCD, тобто $\angle BCQ = \angle DCE$, що і треба було довести. □

Задача 6.22. *Нехай AB — хорда кола ω, відмінна від його діаметра. Нехай T — точка, яка рухається по хорді AB. Два різні кола ω_1 і ω_2 дотикаються до хорди AB у точці T, а також дотикаються внутрішнім чином до кола ω у точках T_1 і T_2 відповідно. Позначимо через X_1 точку перетину прямих AT_1 і TT_2, а через X_2 — точку перетину прямих AT_2 і TT_1. Доведіть, що пряма X_1X_2 проходить через фіксовану точку площини трикутника.*

(Румунія, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 6.24). Розв'язання одразу випливає з побудови кіл ω_1, ω_2 і теореми Паскаля.

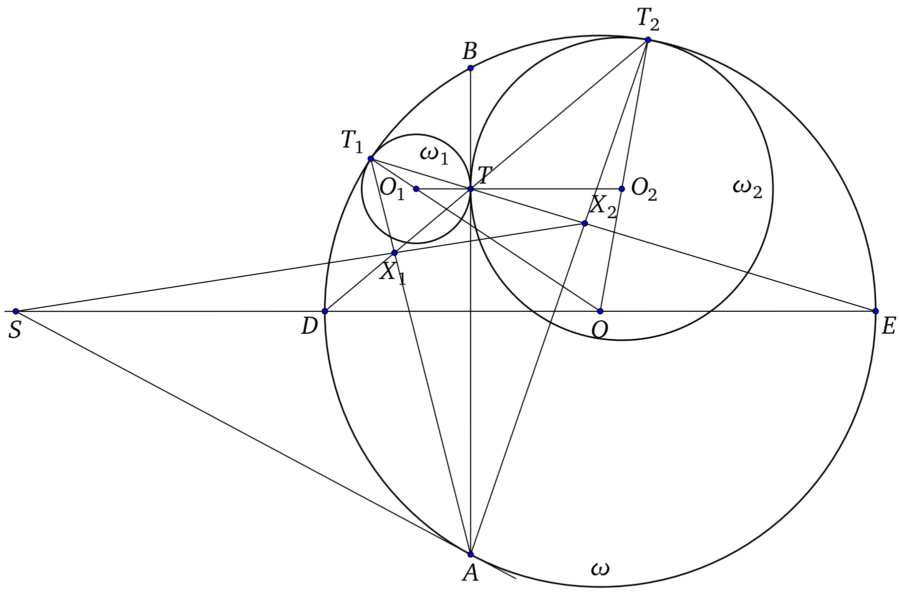


Рис. 6.24.

Нехай DE — діаметр кола ω, який перпендикулярний до заданої хорди AB. Оскільки T_1 — центр гомотетії кіл ω і ω_1, а T_2 — центр гомотетії кіл ω і ω_2. З того, що радіуси O_1T і OE паралельні і мають однаковий напрям, випливає, що прямі OO_1 і ET перетинаються у точці T_1. Аналогічно, доводиться, що прямі OO_2 і DT перетинаються у точці T_2.

Нехай дотична до кола ω у точці A перетинає пряму DE у точці S. Зауважимо, що точка S — фіксована. Застосуємо теорему Паскаля до вписаного шестикутника AAT_1EDT_2 (насправді цей шестикутник — вироджений, він є п'ятикутник). За цією теоремою точки перетину прямих AA і ED, AT_1 і DT_2, ET_1 і AT_2 будуть колінеарними. Пряма AA є дотичною до кола ω, а тому пряма X_1X_2 проходить через фіксовану точку S, що і треба було довести. □

Задача 6.23. *В трикутнику ABC через ω_A позначили зовнівписане коло, яке дотикається продовжень його сторін AB і AC у точках P і Q відповідно. Аналогічно, через ω_B — зовнівписане коло, яке дотикається продовжень сторін BA і BC у точках M і N відповідно. Нехай K і L — основи перпендикулярів, опущених із точки C на прямі MN і PQ відповідно. Доведіть, що чотирикутник $MKLP$ — вписаний у деяке коло.*

(Міжнародна математична олімпіада країн Балканського регіону, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.25).

Нехай D — точка перетину прямих PQ і MN, а I та I_A, I_B — центри вписаного кола трикутника ABC та центри кіл ω_A, ω_B відповідно. Тоді точки A, I, I_A лежать на одній прямій, що містить бісектрису кута BAC. Аналогічно, точки B, I, I_B лежать на одній прямій, що містить бісектрису кута ABC. Крім того, CI_A і CI_B — бісектриси вертикальних кутів BCQ і ACN відповідно, тобто точки I_A, C, I_B — колінеарні. Нехай F і E — точки перетину прямої I_AI_B з прямими PQ і MN відповідно.

Далі, за теоремою про дотичні, одержуємо: $AP = AQ$ і $BM = BN$, тобто трикутники PAQ і MBN — рівнобедрені. Так як бісектриса рівнобедреного трикутника є його висотою, то $AI_A \perp PQ$ і $BI_B \perp MN$. Оскільки, за умовою, $CL \perp PQ$ і $CK \perp MN$, то $CL \parallel AI_A$ і $CK \parallel BI_B$. Так як BI_A і CI_A — бісектриси кутів PBC і QCB відповідно, то

$$\angle BI_AC = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}.$$

Крім того, з рівнобедреного трикутника PAQ знаходимо, що

$$\angle APQ = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}.$$

Тому $\angle BPF = \angle BI_AF$. Ця рівність кутів означає, що чотирикутник BPI_AF — циклічний. Оскільки $\angle BPI_A = 90^\circ$, то і $\angle BFI_A = 90^\circ$. Далі, так як $I_BN \perp BC$, а $I_BM \perp AB$, то точки M, N і F лежать на колі з діаметром BI_B. Оскільки BI —

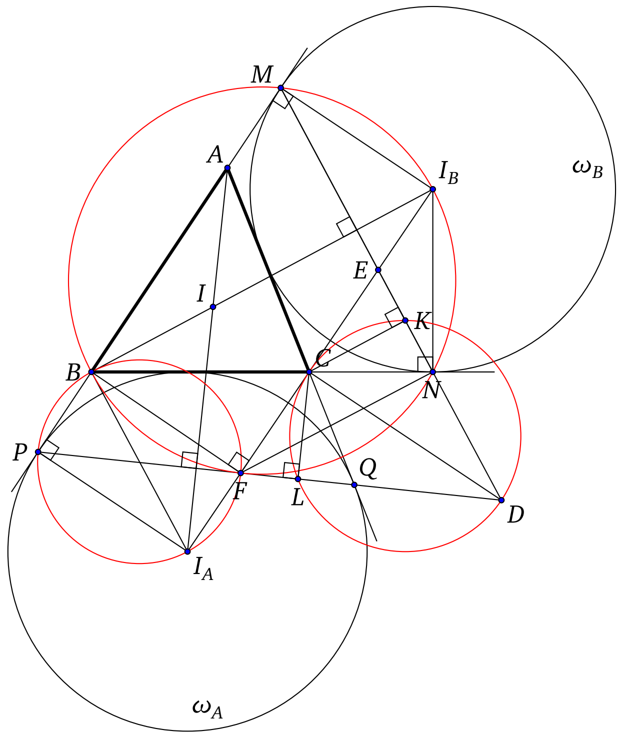


Рис. 6.25.

бісектриса кута ABC, а BI_A — бісектриса PBC, то

$$\angle PBI_A = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

З того, що чотирикутник BPI_AF — вписаний, випливає:

$$\angle PFI_A = \angle PBI_A = 90^\circ - \frac{\angle B}{2},$$

а з вертикальності кутів PFI_A і DFE:

$$\angle DFE = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Крім того, з рівнобедреності трикутника MBN випливає, що

$$\angle BMN = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Тому, одержуємо таку рівність кутів: $\angle DFC = \angle CNM$. З цієї рівності випливає, що чотирикутник $CFDN$ — циклічний. Із циклічності цього чотирикутника маємо: $\angle NDC = \angle NFC = \angle NFI_B$, а з циклічності п'ятикутника $BFNI_BM$ маємо:

$$\angle NFI_B = \angle NMI_B = \angle NBI_B = \frac{\angle B}{2}.$$

Тому $\angle NDC = \dfrac{\angle B}{2}$.

Далі, $\angle CLD = \angle CKD = 90^\circ$, тобто чотирикутник $CKDL$ — циклічний. З циклічності цього чотирикутника, випливає, що $\angle CLK = \angle CDK = \dfrac{\angle B}{2}$, тобто

$$\angle PLK = \angle PLC + \angle CLK = 90^\circ + \frac{\angle B}{2},$$

а

$$\angle PMN = \angle PMI_B - \angle NMI_B = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Таким чином,

$$\angle PLK + \angle PMK = \left(90^\circ + \frac{\angle B}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) = 180^\circ,$$

тобто чотирикутник $MKLP$ — циклічний, що і треба було довести. □

Задача 6.24. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, в який вписано коло ω з центром I. Позначмо через X, Y, Z точки дотику кола ω зі сторонами BC, CA, AB відповідно, а через U, V, W — точки перетину кола ω з відрізками AI, BI, CI відповідно. Доведіть, що трикутники XYZ і UVW будуть рівними тоді і тільки тоді, коли трикутник ABC — рівносторонній.*

(США, підготовка до Міжнародної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання.

Виконаємо рисунок до задачі (рис. 6.26).

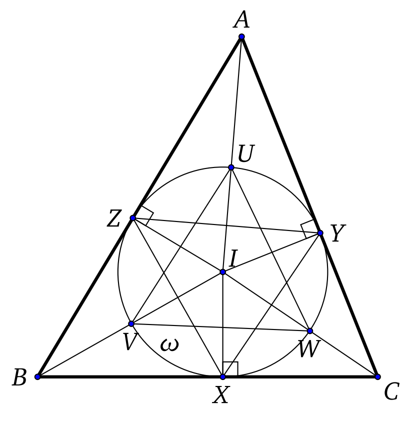


Рис. 6.26.

Якщо трикутник ABC — рівносторонній зі стороною, рівною a, то I — точка перетину AX, BY і CZ, де X, Y і Z — середини сторін BC, CA і AB відповідно, причому

$$AI : IX = BI : IY = CI : IZ = 2 : 1.$$

Оскільки X, Y і Z — середини сторін BC, CA і AB відповідно, то трикутник XYZ — рівносторонній, зі стороною $\frac{1}{2}a$. Так як $IU = IX$, причому $AI : IX = 2 : 1$, то U — середина AI. Аналогічно доводиться, що V — середина BI, а W — середина CI.

З трикутника AIB за теоремою про середню лінію трикутника, знаходимо, що $UV = \frac{1}{2}a$. Аналогічно знаходимо, що $VW = \frac{1}{2}a$ і $WU = \frac{1}{2}a$. Отже, трикутник UVW — рівносторонній, зі стороною $\frac{1}{2}a$, а тому дорівнює трикутнику XYZ.

Тепер залишилося довести обернене твердження. Нехай $\triangle\ XYZ = \triangle\ UVW$. Потрібно довести, що трикутник ABC — рівносторонній. Оскільки

трикутники XYZ і UVW рівні і вписану в коло ω, то
$$\angle UWV = \angle XZY.$$
Але
$$\angle UWV = \frac{1}{2}\angle UIV = \frac{1}{2}(\angle AIZ + \angle BIZ) = \frac{1}{2}((90^\circ - \angle ZAI) + (90^\circ - \angle ZBI)) =$$
$$= 90^\circ - \frac{1}{4}\angle A - \frac{1}{4}\angle B = 45^\circ + \frac{1}{4}\angle C,$$
а
$$\angle XZY = \frac{1}{2}\angle XIY = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C.$$
Таким чином,
$$45^\circ + \frac{1}{4}\angle C = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C.$$
Звідки $\angle C = 60^\circ$. Аналогічно доводиться, що $\angle B = 60^\circ$ і $\angle C = 60^\circ$, що і треба було довести. □

Задача 6.25. *Нехай ABC — різносторонній трикутник, вписаний в коло ω. Вписане коло цього трикутника дотикається до його сторін BC, CA і AB у точках D, E і F. Описані кола трикутників AEF, BFD і CDE перетинають вдруге коло ω у точках X, Y і Z відповідно. Доведіть, що три прямі, які проходять через вершини A, B, C і перпендикулярні до AX, BY, CZ відповідно, перетинаються в одній точці.*

(США, підготовка до Міжнародної математичної олімпіади, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.27).

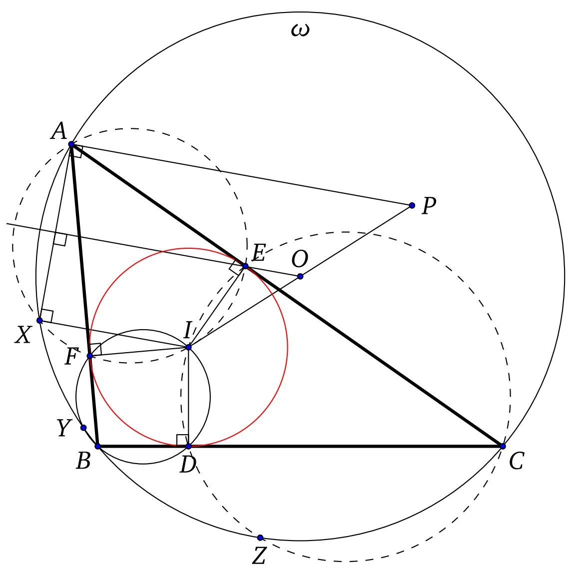


Рис. 6.27.

Нехай O — центр кола ω, I — центр вписаного кола трикутника ABC, а P — точка, симетрична до точки I відносно точки O. Доведемо, що вказані прямі перетинаються у точці P. Для цього достатньо показати, що $\angle XAP = 90^\circ$.

Оскільки D, E, F — точки дотику, то $ID \perp BC$, $IE \perp CA$, $IF \perp AB$. Враховуючи, що $\angle AEI + \angle AFI = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то чотирикутник $AEIF$ — вписаний в коло з діаметром AI, тобто описане коло трикутника AEF проходить через точку I. Тому, $\angle AXI = 90^\circ$. Розглянемо серединний перпендикуляр до хорди AX. Він буде проходити через точку O, паралельний до прямої XI і до прямої, яка проходить через точку A та перпендикулярна до AX. Ці три паралельні прямі, за теоремою Фалеса, відтинають на прямій IO рівні відрізки, тобто $IO = OP$, що і завершує доведення. □

Задача 6.26. *Нехай ABC — трикутник і A_1, B_1, C_1 — точки дотику його зовнівписаних кіл зі сторонами BC, CA, AB відповідно. Доведіть, що коли центр описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$ лежить на описаному колі трикутника ABC, то трикутник ABC — прямокутний.*

(Міжнародна математична олімпіада, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.28).

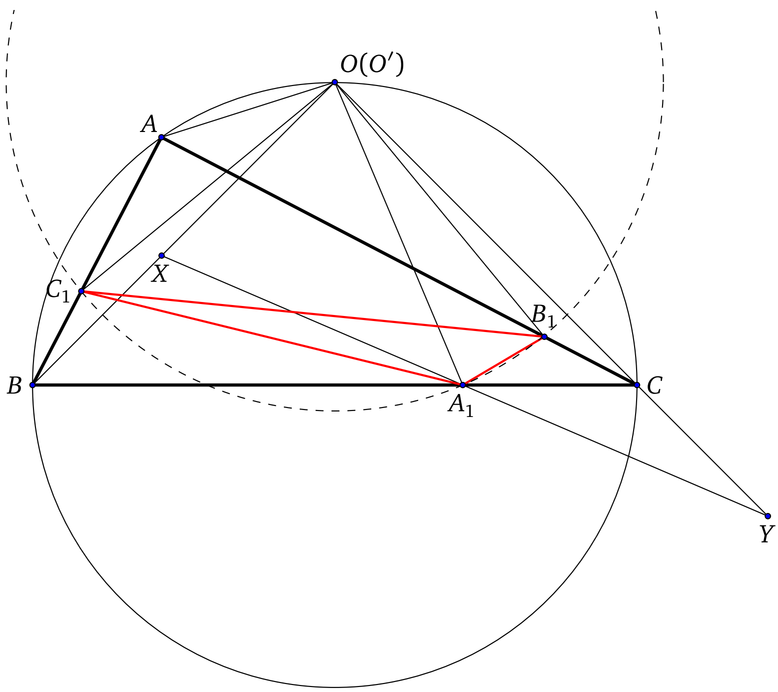


Рис. 6.28.

Нам відомо, що точки A_1, B_1, C_1 розташовані на сторонах BC, CA, AB відповідно так, що $BA_1 = AB_1 = p - c$, $CA_1 = AC_1 = p - b$ і $BC_1 = CB_1 =$

$p-a$, де $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ і $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ (це випливає з теореми про дотичні відстані на сторонах трикутника). Не порушуючи загальності будемо вважати, що $\angle C_1A_1B_1$ — найбільший кут трикутника $A_1B_1C_1$. Якщо $\angle C_1A_1B_1 \le 90^\circ$, то центр O його описаного кола лежатиме всередині або на стороні B_1C_1. Звідси слідує, що O лежатиме всередині трикутника ABC, бо трикутник $A_1B_1C_1$ лежить всередині трикутника ABC. А це означає, що точка O не може лежати на описаному колі трикутника ABC, бо воно лежить зовні цього трикутника. Одержане протиріччя доводить, що $\angle C_1A_1B_1 > 90^\circ$, тобто A_1 і O лежать по різні боки від прямої B_1C_1.

Нехай O' — лежить на дузі BC описаного кола трикутника ABC, яка містить точку A, так, що $O'B=O'C$, тобто O' — середина цієї дуги. Оскільки $\angle ACO'=\angle ABO'$, $CB_1=BC_1$ і $O'B=O'C$, то $\triangle\ O'BC_1=\triangle\ O'CB_1$ (за двома сторонами і кутом між ними. Звідси випливає, що $O'C_1=O'B_1$. Так як O — центр описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$, то $OC_1=OB_1$. Отже, точки O і O' — точки перетину серединного перпендикуляра відрізка B_1C_1 з описаним колом трикутника ABC. Так як точки O' і A_1 лежать по різні боки від прямої B_1C_1 і точки O і A_1 лежать по різні боки від прямої B_1C_1 (як було доведено вище), то точки O і O' співпадають, причому $O'A_1=O'B_1=O'C_1$.

Нехай X і Y такі точки на прямих BO і CO, що $BX=CY=AO$ (при цьому X лежить на відрізку BO, а Y — на продовженні відрізка CO за точку C). Оскільки $\angle OBA_1=\angle OAC$ і $AB_1=BA_1$, а також $\angle YCA_1=\angle OAB$ і $CA_1=AC_1$, то $\triangle\ BXA_1=\triangle\ AOB_1$ і $\triangle\ CYA_1=\triangle\ AOC_1$. З рівності цих трикутників випливає, що

$$YA_1=OC_1=OA_1=OB_1=XA_1$$

і

$$\angle CA_1Y=\angle AC_1O=180^\circ-\angle BC_1O.$$

Але $OB=OC$, $BC_1=CB_1$ і $OC_1=OB_1$, тобто $\triangle\ OC_1B=\triangle\ OB_1C$ (за трьома сторонами). Тому

$$180^\circ-\angle BC_1O=\angle 180^\circ-\angle OB_1C=\angle AB_1O=\angle BA_1X,$$

тобто $\angle YA_1C=\angle BA_1X$. А це означає, що точки X, A_1, Y — колінеарні. Оскільки $A_1X=A_1O=A_1Y$ і A_1 — середина XY, то $\angle XOY=90^\circ$, тобто $\angle AOC=\angle XOY=90^\circ$. За властивістю вписаних кутів, остаточно одержуємо: $\angle BAC=\angle BOC=90^\circ$, що і треба було довести. □

Задача 6.27. *Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Нехай W — довільна точка на відрізку BC, що відмінна від B і C. Позначимо через M і N основи висот трикутника ABC, що проведені з вершин B і C відповідно. Нехай ω_1 — описане коло трикутника BWN, а X така точка на ω_1, що WX — діаметр ω_1. Аналогічно, нехай ω_2 — описане коло трикутника CWM, а Y — така точка на ω_2, що WY — діаметр ω_2.*

Доведіть, що точки X, Y і H — лежать на одній прямій.

(Міжнародна математична олімпіада, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.29).

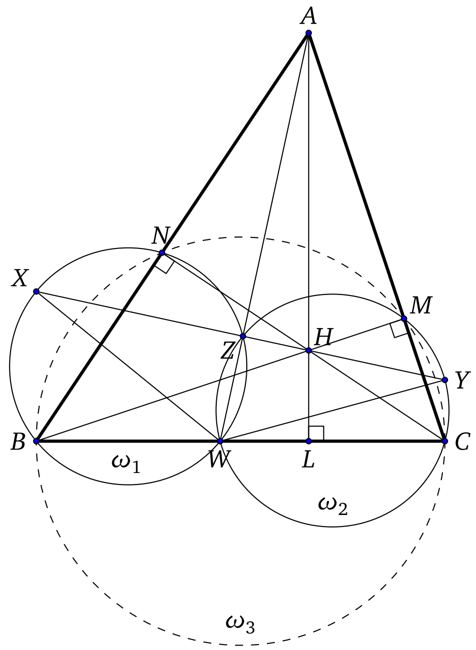


Рис. 6.29.

Оскільки BM і CN — висоти трикутника ABC, $\angle BMC = \angle BNC = 90°$, тобто точки B, C, M, N — належать колу ω_3, для якого BC — діаметр. Нехай Z — друга точка перетину кіл ω_1 і ω_2, тоді A — радикальний центр кіл ω_1, ω_2 і ω_3, бо BN — радикальна вісь кіл ω_1 і ω_3, CM — радикальна вісь кіл ω_2 і ω_3, а WZ — радикальна вісь кіл ω_1 і ω_2. Отже, точки A, Z і W — колінеарні.

Далі, оскільки XW — діаметр кола ω_1, то $WZX = 90°$. Аналогічно доводиться, що $\angle WZY = 90°$. Тому, $\angle XZY = \angle WZX + \angle WZY = 90° + 90° = 180°$, тобто точки X, Z, Y — колінеарні. Залишилося довести, що $WZH = 90°$. Дійсно, якщо AL — висота трикутника ABC, то вона проходить через точку H і $\angle HLC = 90° = \angle HMC$. Це означає, що чотирикутник $CMHL$ — вписаний. Звідси, за теоремою про січні, одержуємо:

$$AH \cdot AL = AC \cdot AM.$$

Але, за цією ж теоремою для кола ω_2, одержуємо:

$$AC \cdot AM = AW \cdot AZ.$$

Із цих двох останніх рівностей, знаходимо, що

$$AL \cdot AH = AW \cdot AZ,$$

тобто $\dfrac{AL}{AW} = \dfrac{AZ}{AH}$. Оскільки $\angle LAW = \angle ZAH$, то $\triangle\ LAW \sim \triangle\ ZAH$ (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає, що їх відповідні кути рівні, тобто $\angle AZH = \angle ALW = 90°$, тобто $\angle WZH = 90°$, а це означає, що точки X, H, Y — колінеарні, що і треба було довести. $\square$

Задача 6.28. *В трикутнику ABC кут A — тупий. Нехай O — центр описаного кола, а H — ортоцентр цього трикутника. Позначимо через K точку, симетричну до точки H відносно вершини A. Доведіть, що точки K, O і C будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли $\angle A - \angle B = 90°$.*

(Індія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.30).

Нехай CD — діаметр описаного кола трикутника ABC, тоді чотирикутник $ABDC$ — вписаний і $\angle CBD = 90°$.

а) Нехай $\angle A - \angle B = 90°$, тоді $\angle A = 90° + \angle B$. З того, що чотирикутник $ABDC$ — вписаний і враховуючи останню рівність, одержуємо, що

$$\angle BDC = 180° - \angle A = 180° - (90° + \angle B) = \\ = 90° - \angle B,$$

тобто з трикутника CBD знаходимо: $\angle DCB = \angle B$, а це означає, що $CD \parallel AB$. Далі,

$$\angle HBC = \angle 90° - \angle C = \\ = 90° - (180° - \angle A - \angle B) = \\ = \angle A + \angle B - 90° = 90° + \angle B + \angle B - 90° = \\ = 2\angle B,$$

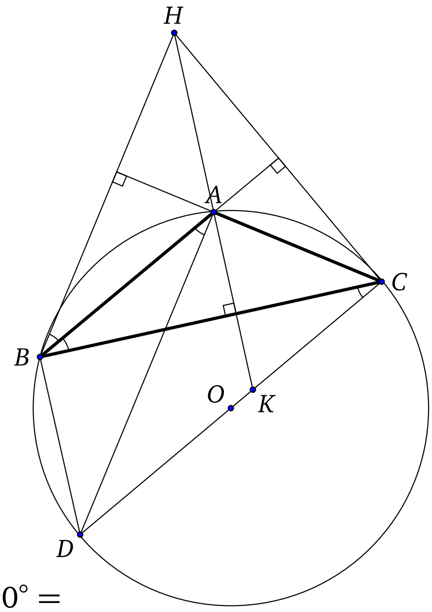


Рис. 6.30.

тобто $\angle HBA = \angle B$. Але, за властивістю вписаних кутів одержуємо: $\angle BAD = \angle BCD = \angle B$, тобто $\angle BAD = \angle ABH$. А це означає, що $BH \parallel AD$. Оскільки $AH \perp BC$ і $DB \perp BC$, то $AH \parallel BD$. Тому, $BHAD$ — паралелограм. Звідси випливає, що $BD = HA$ і $BD \parallel HA$. Оскільки K симетрична до H відносно A, то $AK = BD$ і $AK \parallel BD$, тобто $ABDK$ — паралелограм. Це означає, що $DK \parallel AB$. Так як $DC \parallel AB$, то точки D, K і C — колінеарні. Оскільки O — середина CD, то і точки K, O, C — колінеарні.

б) Нехай точки K, O, C — колінеарні, тоді точка K лежить на діаметрі CD описаного кола трикутника ABC. За властивістю середньої лінії трикутника одержуємо: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, де M — серединна сторони BC. А за відомою властивістю ортоцентра трикутника одержуємо: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$. Із цих двох векторних рівностей отримуємо, що $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AH}$. Оскільки K симетрична точці H відносно точки A, то $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{KA}$. Отже, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{KA}$, а це означає, що $AB \parallel KD$, тобто $AB \parallel CD$. Оскільки кути DBA і BDC — внутрішні односторонні, то їх сума дорівнює $180°$. А так як чотирикутник $ABDC$ — вписаний, то сума кутів BAC і BDC також дорівнює $180°$. Звідки випливає, що $\angle DBA = \angle BAC$, тобто $90° + \angle B = \angle A \Leftrightarrow \angle A - \angle B = 90°$, що і треба було довести. □

Задача 6.29. *Про гострокутний трикутник ABC відомо, що $AB \neq BC$. Нехай BE і CX — його висоти. Коло, що проходить через точку A і дотикається BE в точці P ($P \neq B$), перетинає вдруге сторону AB у точці X. Нехай*

Q — точка, симетрична точці P відносно точки B, а Y — точка перетину прямих AQ і CP. Доведіть, що точки A, C, X, Y будуть циклічними.

(Індія, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.31).

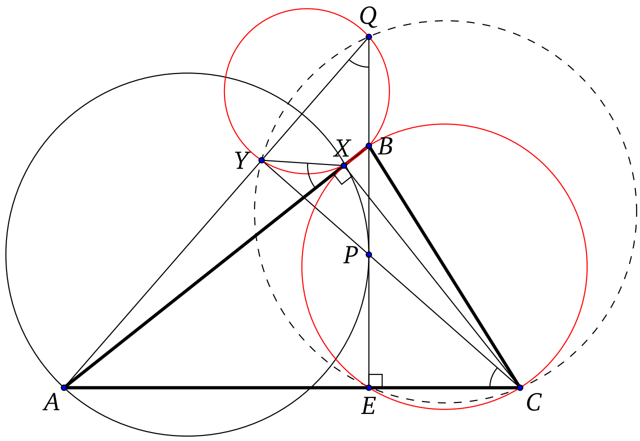


Рис. 6.31.

Оскільки CX — висота трикутника ABC, тоді точки B, X, E, C — циклічні, бо $\angle BXC = 90^\circ = \angle BEC$. Оскільки BP — дотична до описаного кола трикутника APX, то за теоремою про дотичну і січну маємо:

$$BP^2 = BX \cdot BA = (AB - AX)AB = AB^2 - AB \cdot AX.$$

Оскільки точки B, X, E, C — циклічні, то за теоремою про січні:

$$AB \cdot AX = AC \cdot AE.$$

Тому, $BP^2 = AB^2 - AC \cdot AE$. Звідси випливає, що

$$AC \cdot AE = AB^2 - BP^2 = AE^2 + BE^2 - BP^2 =$$
$$= AE^2 + (BE - BP)(BE + BP) = AE^2 - EP \cdot EQ,$$

тобто

$$AC \cdot AE = AE^2 + EP \cdot EQ. \qquad (1)$$

Далі,

$$AC \cdot AE = (AE + EC)AE = AE^2 + AE \cdot EC. \qquad (2)$$

Із (1) і (2) одержуємо, що $AE \cdot EC = EP \cdot EQ$, тобто $\dfrac{AE}{PE} = \dfrac{EQ}{EC}$. Оскільки $\angle AEQ = 90^\circ = \angle CEP$, то $\triangle AEQ \sim \triangle PEC$ (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає, що $\angle PCE = \angle AQE$, тобто $\angle YCE = \angle YQE$. Звідси випливає, що точки C, E, Y, Q — циклічні. За теоремою про січні, одержуємо: $AY \cdot AQ = AE \cdot AC$. Оскільки $AE \cdot AC = AX \cdot AB$, то із двох останніх рівностей, одержуємо: $AY \cdot AQ = AX \cdot AB$, тобто

$$\frac{AX}{AQ} = \frac{AY}{AB}.$$

Оскільки $\angle XAY = \angle QAB$, то $\triangle AXY \sim \triangle AQB$ (за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle AXY = \angle AQB$. Оскільки $\angle AQB = \angle ACY$, то $\angle AXY = \angle ACY$. З рівності цих кутів випливає, що точки A, Y, X, C — циклічні, що і треба було довести. □

Задача 6.30. *Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник, M — середина його сторони AB. Відомо, що коло, яке проходить через точку D і дотикається AB у точці A, перетинає вдруге пряму MD у точці E; коло, яке проходить через точку C і дотикається AB у точці B, перетинає вдруге пряму MC у точці F, а прямі AF і BE перетинаються у точці, яка лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AB. Доведіть, що точки A, E, C будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли точки B, F, D також будуть колінеарними.*

(Міжнародна математична олімпіада країн центральної Америки, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.32).

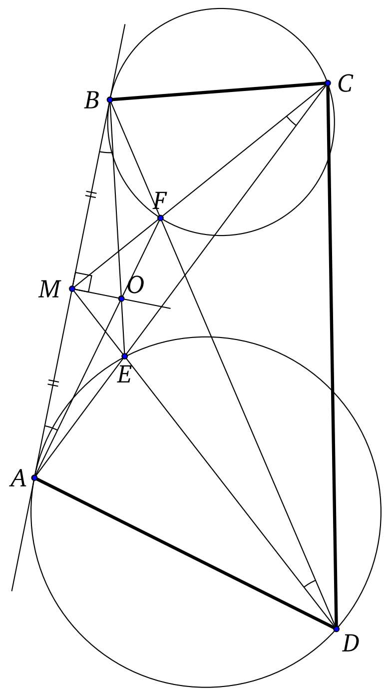


Рис. 6.32.

Нехай O — точка перетину AF і BE. Оскільки точка O лежить на серединному перпендикулярі відрізка AB, то $OM \perp AB$ і $OA = OB$. Це означає, що $\angle OAB = \angle OBA = \varphi$.

Припустимо, що точки A, E, C — колінеарні. Доведемо, що тоді точки B, F, D також колінеарні. В силу рівноправності обох кіл, зворотне доводитиметься аналогічно. За теоремою про дотичну і січну одержуємо:

$$MA^2 = ME \cdot MD \tag{1}$$

і

$$MB^2 = MF \cdot MC. \tag{2}$$

Із (1) і (2) одержуємо, що

$$MA^2 = MF \cdot MC \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{MA}{MF} = \frac{MC}{MA} \quad \Leftrightarrow$$

$$\triangle MAF \sim \triangle MCA$$

(за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle MCA = \angle MAF = \varphi$.

Далі, із (1) і (2) одержуємо, що

$$ME \cdot MD = MF \cdot M \quad \Leftrightarrow$$

$$C, F, E, D \text{ — циклічні} \quad \Leftrightarrow$$

$$\angle EDF = \angle ECF = \varphi.$$

Отже,

$$\angle MDF = \varphi. \tag{$\star$}$$

Далі, із (1) і (2) одержуємо, що

$$\begin{aligned} MB^2 = ME \cdot MD \quad &\Leftrightarrow \\ \frac{MB}{ME} = \frac{MD}{MB} \quad &\Leftrightarrow \\ \triangle\, MBE \sim \triangle\, MDB & \end{aligned}$$

(за пропорційністю двох сторін і кутом між ними). З подібності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle MDB = \angle MBE = \varphi$. Отже,

$$\angle MDB = \varphi. \tag{$\star\star$}$$

Таким чином, із ($\star$) і ($\star\star$) слідує, що $\angle MDF = \angle MDB$, тобто точки D, F, B — колінеарні, бо точки F і B лежать по один бік від прямої MD, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 6.31. *Дано трапецію $ABCD$, в якій $AB \parallel CD$. Коло k_1 дотикається сторін CB, BA і AD, а коло k_2 дотикається сторін AD, DC і CB, причому k_1 дотикається сторони AB у точці P, а коло k_2 дотикається сторони CD у точці Q. Доведіть, що прямі AC, BD і PQ перетинаються в одній точці.*

(Китай, математична олімпіада для дівчат, 2013 р.)

Розв'язання. Спочатку доведемо такі допоміжні твердження.

Лема 1. Відрізок PQ буде проходити через точку L тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення $\dfrac{BP}{DQ} = \dfrac{AB}{CD}$.

Доведення. Нехай відрізок PQ проходить через точку E. Оскільки $BP \parallel DQ$, то $\triangle\, BLP \sim \triangle\, DLQ$. Звідси випливає, що $\dfrac{BP}{DQ} = \dfrac{BL}{DL}$. Так як $AB \parallel CD$, то $\triangle\, BLA \sim \triangle\, DLC$. Тоді $\dfrac{BL}{DL} = \dfrac{AB}{CD}$. Із одержаних двох співвідношень знаходимо, що

$$\frac{BP}{DQ} = \frac{AB}{CD}.$$

Доведемо тепер зворотне. Нехай виконується співвідношення $\dfrac{BP}{DQ} = \dfrac{AB}{CD}$, а відрізок PQ не проходить через точку L. Нехай пряма PL перетинає сторону CD у точці R. За припущенням точка Q і R — різні. Тоді за доведенням, що наведено вище, виконується співвідношення $\dfrac{BP}{DR} = \dfrac{AB}{CD}$. Із цих двох співвідношень, одержуємо, що $\dfrac{BP}{DQ} = \dfrac{BP}{DR}$. Звідки $DQ = DR$, що суперечить умові $R \neq Q$. Одержане протиріччя і доводить, що коли виконується співвідношення, то пряма PQ проходить через точку L, що і завершує доведення леми 1. □

Лема 2. Якщо виконується одна із трьох рівностей

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d},$$

то виконуються й інші.

Доведення. Нехай $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda$, тоді $a=\lambda b$ і $c=\lambda d$. Тоді

$$\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{\lambda b\pm\lambda d}{b\pm d}=\frac{\lambda(b\pm d)}{b\pm d}=\lambda,$$

що і треба було довести. □

А тепер перейдемо до розв'язання нашої задачі. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі, і будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього (рис. 6.33).

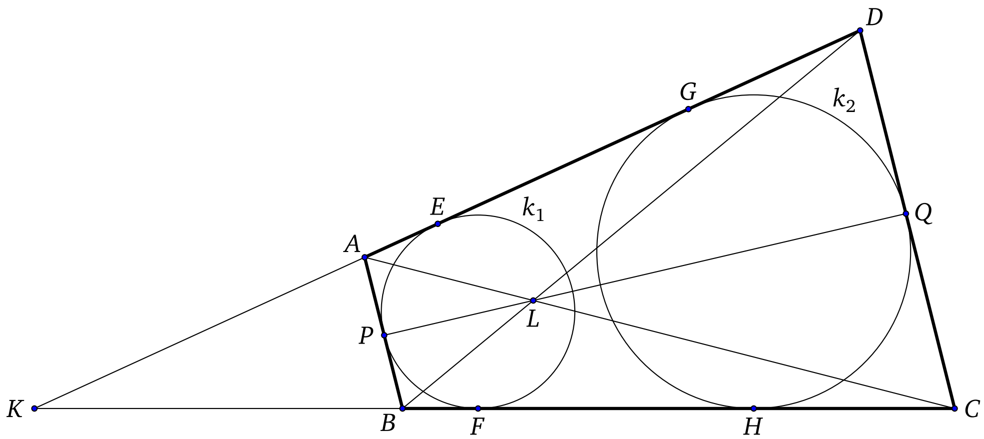


Рис. 6.33.

Нехай K — точка перетину прямих BC і AD, а L — точка перетину прямих AC і BD. Оскільки $AB \parallel CD$, то відрізок PQ буде проходити через точку L, якщо довести, що $\frac{BP}{DQ}=\frac{AB}{CD}$ (це одне із тверджень леми 1). Використовуючи подібність трикутників ABK і DCK, терему про дотичні і лему 2, матимемо:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{KA}{KD}=\frac{KB}{KC}=\frac{KE-AE}{KE+EG+GD}=\frac{KF-BF}{KF+FH+HC}=$$
$$=\frac{(KE-AE)-(KF-BF)}{(KE+EG+GD)-(KF+FH+HC)}=\frac{BF-AE}{GD-HC}=$$
$$=\frac{BP-AP}{DQ-CQ}=\frac{2BP-AB}{2DQ-CD}=\frac{2BP}{2DQ}=\frac{BP}{DQ},$$

що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 6.32. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, AD — його висота. Нехай l — дотична у точці A до описаного кола трикутника ABC, а t —*

пряма, яка проходить через точку D і паралельна до сторони AB. Позначимо через E — точку перетину прямих l і t. Доведіть, що $\angle AEC = 90°$.

(Південно-Африканська Республіка, 2013 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі і будемо розв'язувати її, виходячи з нього (рис. 6.34).

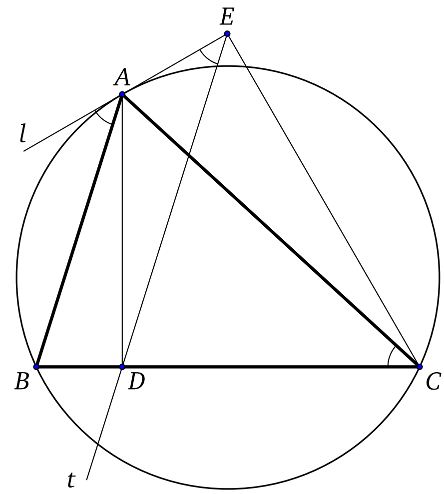


Рис. 6.34.

За теоремою про кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, та за властивістю відповідних кутів при паралельних, одержуємо:

$$\angle DCA = \angle BCA = \angle BAF = \angle DEA,$$

тобто $\angle DCA = \angle DEA$. А це означає, що чотирикутник $ADCE$ — вписаний. Звідси випливає, що

$$\angle AEC = 180° - \angle ADC = 180° - 90° = \\ = 90°,$$

що і треба було довести. □

Наступні задачі олімпіад 2013 року будуть розв'язуватися за допомогою так званого **реверсного методу**. Суть цієї техніки розв'язування геометричних задач полягає в тому, що замість одного із фактів, що задається умовою задачі, ми доводимо інше твердження — *реверсне*. Після цього потрібний результат стає очевидним. При цьому, зрозуміло, потрібно показати виконання усіх умов заданої задачі.

Задача 6.33. *Два кола з центрами в точках O_1 і O_2 дотикаються зовні у точці T. Чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло (O_1) так, що промені DA і CB дотикаються до кола (O_2) у точках E і F відповідно. Бісектриса кута ABF перетинає відрізок EF у точці N, а пряма FT перетинає дугу AT кола (O_1), яка не містить точку B, у точці M, яка не співпадає з точкою A. Доведіть, що точка M є центром описаного кола трикутника BCN.*

(Китай, математична олімпіада для дівчат, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 6.35).

Для розв'язання цієї задачі, застосуємо реверсний метод: нехай P — точка перетину AM і EF. Доведемо, що M — центр описаного кола трикутника BCP і що BP — бісектриса кута ABF, тобто, що точка P співпадає з точкою N.

Дійсно, оскільки T — точка дотику кіл (O_1) і (O_2), то пряма O_1O_2 проходить через точку T. Крім того, пряма MF також проходить через точку T. Тому трикутники MO_1T і FO_2T — подібні рівнобедрені трикутники. Звідси випливає, що $\angle MO_1T = \angle FO_2T$. Тому, за властивістю вписаних кутів і

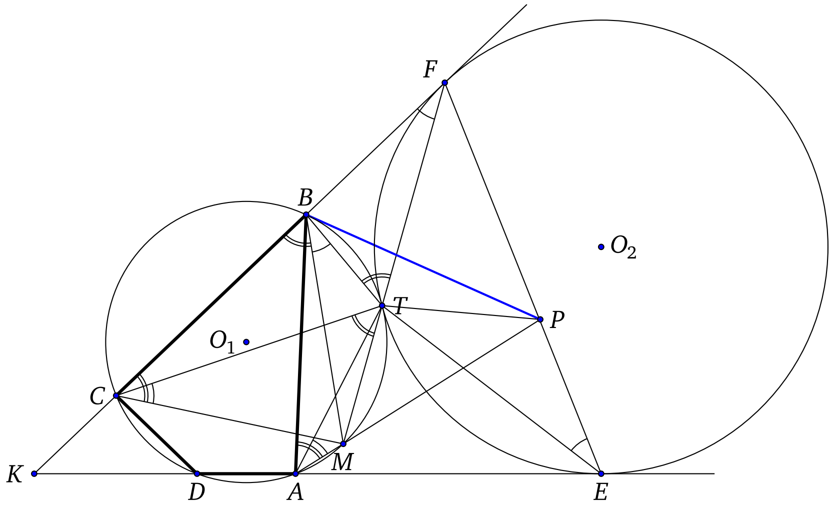


Рис. 6.35.

теоремою про кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, одержуємо:

$$\angle FET = \angle TFK = \frac{1}{2}\angle FO_2T = \frac{1}{2}\angle MO_1T = \angle TBM = \angle TCM = \angle TAM.$$

Далі, оскільки $\angle MBT = \angle MFB$, то $\triangle\ MBT \sim\triangle\ MFB$ (за двома кутами). Звідси випливає, що їх відповідні зовнішні кути рівні, а сторони пропорційні: $\angle CBM = \angle FTB$ і $MB^2 = MT \cdot MF$. А за властивістю вписаних кутів, одержуємо: $\angle CTM = \angle BCM$. Звідси випливає, що $\angle MBC = \angle MCB$, тобто $MC = MB$. Оскільки $\angle TAP = \angle TEP$, то точки A, T, P, E — циклічні. Звідки, за властивістю вписаних кутів і кута між дотичною і січною, одержуємо:

$$\angle MPT = \angle APT = \angle AET = \angle EFT,$$

тобто $\angle MPT = \angle MFP$. А це означає, що $\triangle\ MPT \sim\triangle\ MFT$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що $MP^2 = MT \cdot MF = MB^2$, тобто $MP = MB = MC$. Це означає, що M — центр описаного кола трикутника BCP. Залишилося довести, що BP — бісектриса кута ABF. Дійсно,

$$\angle ABP = \angle ABM + \angle MBP = \angle ABM + \frac{180^\circ - \angle BMP}{2} = \angle ABM + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCA =$$
$$= \angle ABM + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCM - \frac{1}{2}\angle ACM = \frac{1}{2}\angle CMB + \frac{1}{2}\angle BCM + \frac{1}{2}\angle ACM =$$
$$= \frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}\angle ABF,$$

що і треба було довести. □

Задача 6.34. *Нехай AD і AH — відповідно бісектриса і висота трикутника ABC, в якому $AB < AC$. Серединний перпендикуляр до відрізка AD перетинає* *півкола з діаметрами AB і AC, які розташовані зовні трикутника ABC, відповідно у точках X та Y. Доведіть, що чотирикутник $XYDH$ — вписаний.*

(Іран, відбір на Міжнародну математичну олімпіаду, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі (рис. 6.36).

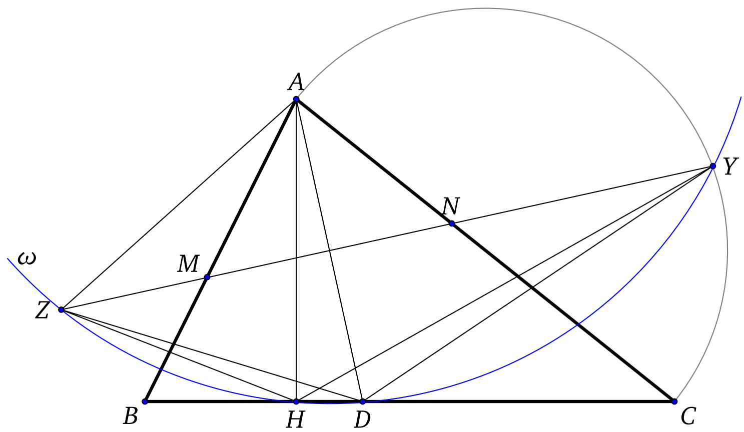


Рис. 6.36.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо реверсний метод: нехай серединний перпендикуляр до відрізка AD перетинає сторони AB і AC відповідно в точках M і N, а описане коло ω трикутника YDH — у двох різних точках Y і Z. Доведемо, що точка Z співпадає з точкою X.

Так як точка Y належить півколу з діаметром AC, то $\angle AYC = 90^\circ$. Тому, $\angle AYC = \angle AHC = 90^\circ$, а це означає, що чотирикутник $AHCY$ — вписаний. За властивістю симетричних і вписаних кутів, одержуємо:

$$\angle AZY = \angle DZY = \angle DHY = \angle CAY.$$

Але

$$\angle ZAB = \angle AMN - \angle AZM = \angle ANM - \angle YAN = \angle AYZ = \angle DYZ = \angle ZHB,$$

тобто $\angle ZAB = \angle ZHB$. А це означає, що чотирикутник $AZBH$ — вписаний. Звідки одержуємо, що $\angle AZB = 180^\circ - \angle AHB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Так як кут AZB — прямий, то точка Z лежить на півколі з діаметром AB. Оскільки точка Z ще й належить серединному перпендикулярові відрізка AD, то ця точка належить їх перетину, тобто точка Z співпадає з точкою X, тобто чотирикутник $XYDH$ — вписаний в коло ω, що і треба було довести. □

Задача 6.35. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, вписаний в коло ω. Бісектриса кута BAC перетинає коло ω у точці M. На відрізку AM всередині трикутника ABC довільно відмітили точку P. Прямі, що проходять через точку P паралельно прямим AB і AC перетинають сторону BC у точках E і F відповідно. Прямі ME і MF перетинають вдруге коло ω у точках K і L*

відповідно. Доведіть, що прямі AM, BL і CK перетинаються в одній точці.

(Індонезія, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.37).

Для розв'язання цієї задачі застосуємо реверсний метод: нехай прямі ME і MF перетинають сторони AB і AC у точках U і V відповідно, а пряма UV перетинає пряму AM у точці D. Доведемо, що прямі BL і CK проходять через точку D.

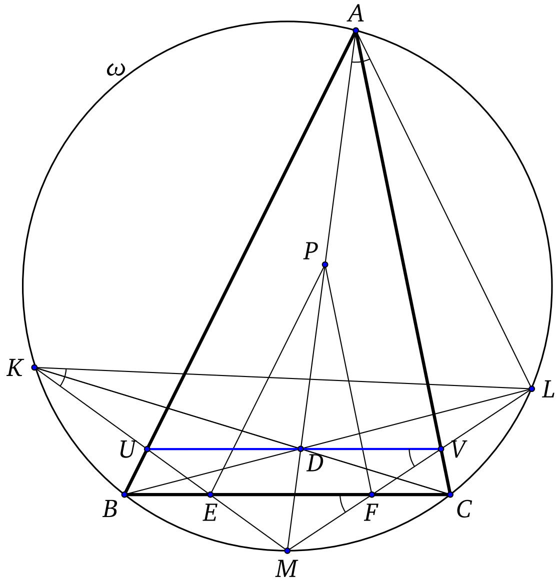


Рис. 6.37.

Трикутники PEF і AUV — гомотетичні з центром у точці M. Дійсно, розглянемо гомотетію з центром M, яка відображає точку P в точку A. Нехай при цій гомотетії точки E і F відображаються в точки E' і F' відповідно. Тоді точка E' лежить на промені ME, причому $PE \parallel AE'$, тобто точка E' співпадає з точкою U. Аналогічно, точка F' співпадає з точкою V. Звідси випливає, що $UV \parallel EF$, тобто $UV \parallel BC$, бо при гомотетії прямі відображаються у паралельні прямі. Далі, так як AM — бісектриса кута BAC, то M — середина дуги BC кола ω. Звідси випливає, що $\angle MBC = \angle MKB$, тобто $\angle MBE = \angle MKB$. А це означає, що $\triangle\ MBE \sim \triangle\ MKB$ (за двома кутами). З подібності цих трикутників випливає, що $MB^2 = ME \cdot MK$. Аналогічно доводиться, що $MC^2 = MF \cdot ML$. Оскільки $MB = MC$, то $ME \cdot MK = MF \cdot ML$. Звідси випливає, що точки K, E, F, L — циклічні, тобто чотирикутник $KEFL$ — вписаний в деяке коло. За властивістю вписаних кутів та відповідних кутів при паралельних прямих, одержуємо:

$$\angle MAL = \angle MKL = \angle MFL = \angle MVD.$$

Так як $\angle MAL = \angle MVD$, то чотирикутник $DALV$ — циклічний. Тому,

$$\angle MLD = \angle VLD = \angle VAD = \angle CAM = \angle MAB = \angle MLB,$$

тобто $\angle MLD = \angle MLB$. Оскільки точки D і B лежать по один бік від прямої ML, то точки L, D і B — колінеарні, тобто відрізок BL проходить через точку D. Аналогічно доводиться, що відрізок CK також проходить через точку D, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 6.36. *Нехай ABC — гострокутний трикутник, в якому $AB > AC$ і O центр описаного кола ω. На стороні BC відмітили точку D таку, що*

$\angle BAD = \angle CAO$. Нехай E — друга точка перетину прямої AD з колом ω. Позначимо через M, N і P — середини відрізків BE, OD і AC відповідно. Доведіть, що точки M, N і P — колінеарні.

(Запропонована Македонією на Міжнародну математичну олімпіаду балканських країн, 2013 р.)

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.38).

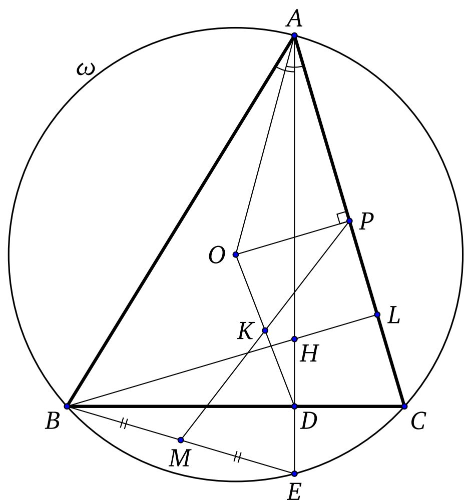


Рис. 6.38.

Для розв'язання цієї задачі застосуємо реверсний метод: нехай пряма MP перетинає пряму OD у точці K. Доведемо, що K — середина OD. Тоді точка K співпадатиме з точкою N.

Оскільки P — середина AC, то $OP \perp AC$. За умовою задачі точка D є такою, що $\angle BAD = \angle CAO = 90^\circ - \angle POA = 90^\circ - \angle CBA$. Тому, $\angle ADB = 90^\circ$, тобто D — основа висоти трикутника ABC, опущеної з вершини A. Нехай H — ортоцентр трикутника ABC. Нехай пряма AD перетинає вдруге коло ω у точці E, а пряма BH перетинає пряму AC у точці L. Тоді BL — висота трикутника ABC і $DE = DH$ (це відома властивість про ортоцентр трикутника). Так як DM — медіана прямокутного трикутника BDE, то $DM = \frac{1}{2}BE$. Але так як точки H і E симетричні відносно BC, то $BE = BH$. Як відомо, $OP = \frac{1}{2}BH$. Тому, $OP = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}BE = DM$ і $DM \parallel BH \parallel OP$. А це означає, що чотирикутник $DMOP$ — паралелограм, бо його дві сторони рівні і паралельні. Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то K — середина OD, що і завершує розв'язання задачі. □

Задача 6.37. *Нехай XY — діаметр кола ω, Z — середина дуги XY цього кола. Зовні кола ω відмітили точку P так, що точки P і Z лежать по різні боки прямої XY. Із точки P до кола ω провели дотичні PA і PB (A і B — точки дотику). Прямі ZA, ZB і ZP перетинають відрізок XY у точках D, C і Q.*

Доведіть, що Q — середина відрізка CD.

(Міжнародна математична олімпіада країн Південної Америки, 2013 р.)

Розв'язання.

Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.39).

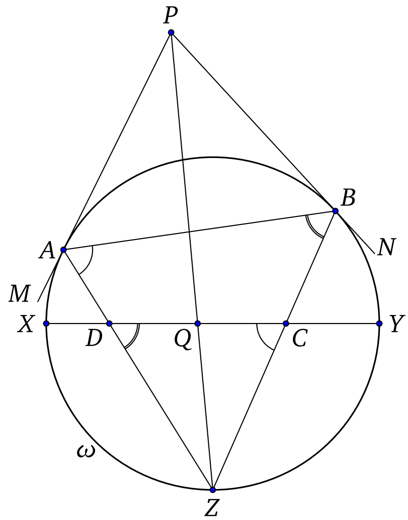


Рис. 6.39.

Оскільки Z — середина дуги $\smile XY$, а PA і PB — дотичні до кола ω, то $\smile XZ = \smile ZY$ і $PA = PB$. За властивістю вписаних кутів та кутів між хордами, одержуємо:

$$\angle ZAB = \frac{\smile BYZ}{2} = \frac{\smile BY + \smile YZ}{2} =$$
$$= \frac{\smile BY + \smile ZX}{2} = \angle ZCX = \angle ZCD,$$

тобто $\angle ZAB = \angle ZCD$. Аналогічно доводиться, що $\angle ZBA = \angle ZDC$.

Нехай $\angle ZAB = \alpha$, $\angle ZBA = \beta$ і $\angle AZB = \gamma$ — кути трикутника ZAB, тоді, за доведеним вище, матимемо: $\angle ZCD = \alpha$ і $\angle ZDC = \beta$. Позначимо через M і N — точки, які лежать на продовженнях дотичних PA і PB відповідно. Тоді за теоремою про кут дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, одержуємо:

$$\angle ZBN = \alpha \text{ і } \angle ZAM = \beta.$$

Далі, застосуємо основну властивість чевіани трикутника і подібність трикутників CZD і AZB:

$$\frac{CQ}{DQ} = \frac{ZC}{ZD} \cdot \frac{\sin\angle CZQ}{\sin\angle QZP} = \frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{\sin\angle BZP}{\sin\angle PZA}.$$

Далі, застосуємо теорему синусів для трикутників ZAB, ZBP і ZCP:

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\ \ \sin\angle BZP = \frac{PB\cdot\sin\alpha}{PZ} \ \text{ і } \ \sin\angle PZA = \frac{PA\cdot\sin\beta}{PZ}.$$

Оскільки $PA = PB$, то

$$\frac{CQ}{DQ} = \frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{\sin\angle BZP}{\sin\angle PZA} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{PB\cdot\sin\alpha}{PZ}\cdot\frac{PZ}{PA\cdot\sin\beta} = 1,$$

тобто $CQ = QD$, що і треба було довести. □

Покажчик

Навчальне видання

ЯСІНСЬКИЙ В'ячеслав Андрійович
ПАНАСЕНКО Олексій Борисович

Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Геометрія

Навчально-методичний посібник

Підписано до друку 14.11.2014
Формат 64x90 1/16. Папір офсетний

Гарнітура ITC Charter. Друк цифровий.
Умовн. друк. арк. 16
Наклад 100 прим.

Видавець ТОВ «Нілан-ЛТД»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції серії DK №4299 від 11.04.2012 р.

Віддруковано ФОП "Легкун В.М."
Тел.: (0432) 527-827