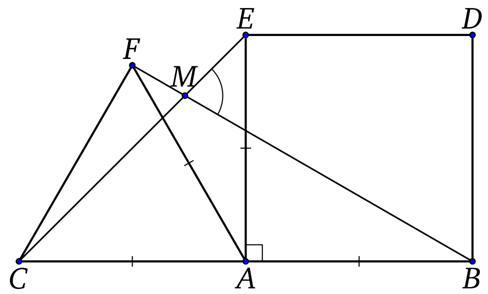
II Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи

I тур

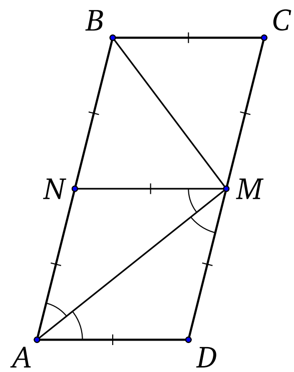
Задача 1. Точки A, B і C так розташовані на прямій, що $CA = AB$. Квадрат $ABDE$ і рівносторонній трикутник CFA побудували в одній півплощині відносно прямої CB. Знайдіть гострий кут між прямими CE і BF.



Розв'язання. Позначимо через M точку перетину CE і BF. Тоді шуканий кут EMB є зовнішнім кутом трикутника CMB і дорівнює сумі кутів $\angle MCB$ і $\angle MBC$. Але з рівнобедреного прямокутного трикутника CAE знаходимо, що $\angle MCB = 45^\circ$, а з рівнобедреного трикутника FAB знаходимо, що $\angle MBC = \angle AFB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$. Таким чином, $\angle EMB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

Відповідь. 75°.

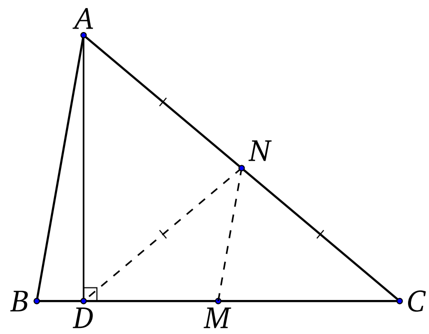
Задача 2. Розглянемо паралелограм $ABCD$, для якого точка M — середина сторони CD — лежить на бісектрисі кута $\angle BAD$. Доведіть, що $\angle AMB = 90^\circ$.



Розв'язання. Оскільки $\angle DAM = \angle BAM$ (за умовою) і $\angle BAM = \angle AMD$ (як внутрішні різносторонні при перетині паралельних AB і CD січною AM), то трикутник ADM — рівнобедрений. Нехай точка N — середина сторони AB. Проведемо NM. Тоді $NB = NM = NA$, тобто точка N є центром кола, описаного навколо трикутника AMB і при цьому $N \in AB$. З цього і слідує, що $\angle AMB = 90^\circ$.

Задача 3. В трикутнику ABC $\angle B = 2\angle C$, AD — висота, M — середина сторони BC. Доведіть, що $AB = 2DM$.

Розв'язання. Нехай N — середина сторони AC. Проведемо відрізки MN, DN. Оскільки MN — середня лінія трикутника ABC, то $AB = 2MN$, а тому достатньо довести, що $DM = MN$.

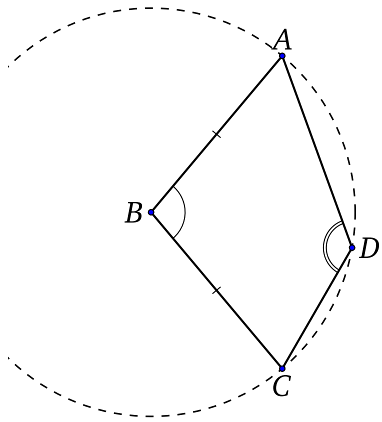


Оскільки DN — медіана прямокутного трикутника, яка проведена до гіпотенузи, то $DN = AN = NC$ і $\angle NDC = \angle C$. Оскільки $MN \parallel AB$, то $\angle NMC = \angle B = 2\angle C$. Тоді кут NMC є зовнішнім кутом трикутника DMN, а значить $\angle DNM = \angle C$. Таким чином, трикутник DMN є рівнобедреним, $DM = MN = \frac{1}{2}AB$, що і потрібно було довести.

Примітка. На рисунку зображено гострокутний трикутник, у якого точка D належить стороні BC. Наведені міркування не залежать від виду трикутника і справедливі для випадків, коли $\angle B$ є прямим або тупим.

Задача 4. В чотирикутнику $ABCD$ довжини сторін AB і BC дорівнюють 1, $\angle B = 100^\circ$, $\angle D = 130^\circ$. Знайдіть довжину BD.

Розв'язання. Проведемо коло з центром в точці B радіуса 1. Оскільки $BA = BC = 1$, то точки A і C належать цьому колу. Градусна міра дуги AC, що відповідає центральному куту ABC, дорівнює 100°. Отже, градусна міра доповнювальної дуги дорівнює $360^\circ - 100^\circ = 260^\circ$. Тому геометричне місце точок, з яких відрізок AC видно під кутом 130°, і які лежать з точкою B в різних півплощинах відносно прямої AC, є менша дуга AC. Оскільки $\angle ADC = 130^\circ$, то точка D лежить на цій дузі. Тому BD дорівнює радіусу побудованого кола, тобто 1.



Відповідь. 1.

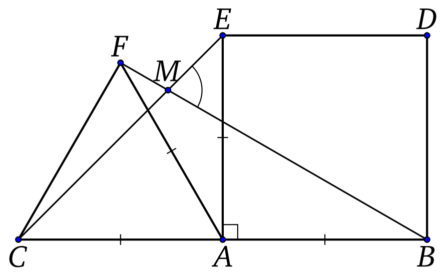
II Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи (поглиблене вивчення математики)

I тур

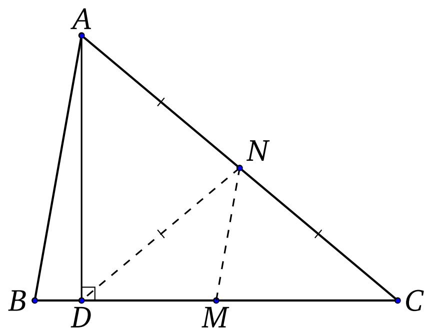
Задача 1. Точки A, B і C так розташовані на прямій, що $CA = AB$. Квадрат $ABDE$ і рівносторонній трикутник CFA побудували в одній півплощині відносно прямої CB. Знайдіть гострий кут між прямими CE і BF.



Розв'язання. Позначимо через M точку перетину CE і BF. Тоді шуканий кут EMB є зовнішнім кутом трикутника CMB і дорівнює сумі кутів $\angle MCB$ і $\angle MBC$. Але з рівнобедреного прямокутного трикутника CAE знаходимо, що $\angle MCB = 45°$, а з рівнобедреного трикутника FAB знаходимо, що $\angle MBC = \angle AFB = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$. Таким чином, $\angle EMB = 45° + 30° = 75°$.

Відповідь. $75°$.

Задача 2. В трикутнику ABC $\angle B = 2\angle C$, AD — висота, M — середина сторони BC. Доведіть, що $AB = 2DM$.



Розв'язання. Нехай N — середина сторони AC. Проведемо відрізки MN, DN. Оскільки MN — середня лінія трикутника ABC, то $AB = 2MN$, а тому достатньо довести, що $DM = MN$.

Оскільки DN — медіана прямокутного трикутника, яка проведена до гіпотенузи, то $DN = AN = NC$ і $\angle NDC = \angle C$. Оскільки $MN \parallel AB$, то $\angle NMC = \angle B = 2\angle C$. Тоді кут NMC є зовнішнім кутом трикутника DMN, а значить $\angle DNM = \angle C$. Таким чином, трикутник DMN є рівнобедреним, $DM = MN = \frac{1}{2}AB$, що і потрібно було довести.

Примітка. На рисунку зображено гострокутний трикутник, у якого точка D належить стороні BC. Наведені міркування не залежать від виду трикутника і справедливі для випадків, коли $\angle B$ є прямим або тупим.

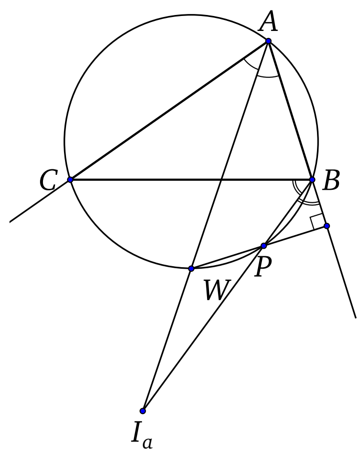
Задача 3. Побудуйте трикутник ABC за висотою та бісектрисою кута A, якщо відомо, що між сторонами трикутника ABC виконується рівність $2BC = AB + AC$.

(Олексій Карлюченко)

Розв'язання. Побудуємо трикутник ATH за катетом і гіпотенузою (AH — висота, AT — бісектриса). Нехай I — інцентр трикутника ABC. Відомо, що інцентр ділить бісектрису AT у відношенні $\frac{AI}{IT} = \frac{AB+AC}{BC}$. В нашому випадку це відношення дорівнює 2 : 1. Тому можемо побудувати точку I. Опустимо з неї перпендикуляр на пряму TH — отримаємо відрізок, який дорівнює радіусу вписаного кола. Будуємо це коло з центром в точці I. З точки A проводимо дотичні до неї. Вони перетнуть пряму TH в шуканих вершинах B і C.

Задача 4. Нехай точка I_a — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторони BC. Нехай W — точка перетину бісектриси кута $\angle A$ трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Перпендикуляр, опущений з точки W на пряму AB, перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці P. Доведіть, що якщо точки B, P, I_a лежать на одній прямій, то трикутник ABC — рівнобедрений.

(*Микола Мороз*)



Розв'язання. Оскільки B, P, I_a лежать на одній прямій, причому P та I_a по один бік від точки B, то $\angle CBP = \angle CBI_a$.

З одного боку, $\angle CBI_a = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$.

З іншого боку, $\angle AWP = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, а тому $\angle ABP = 180^\circ - \angle AWP$, оскільки чотирикутник $ABPW$ — вписаний. Тоді $\angle CBP = \angle ABP - \angle B = 180^\circ - \angle AWP - \angle B = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B$.

В силу рівності $\angle CBP = \angle CBI_a$:

$$90^\circ - \frac{\angle B}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B,$$

звідки $\angle A = \angle B$, а тому $BC = AC$.

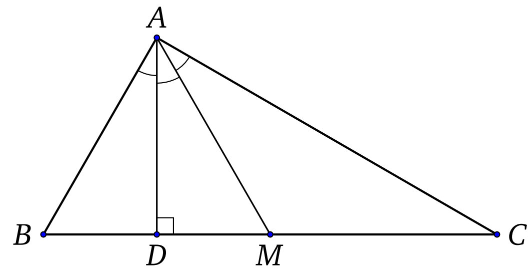
II Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи

I тур

Задача 1. У трикутнику ABC провели висоту AD, M — середина сторони BC. Відомо, що $\angle BAD = \angle DAM = \angle MAC$. Знайдіть величини кутів трикутника ABC.



Розв'язання. Розглянувши усі можливі розташування точки D на прямій BC, приходимо до висновку, що умові задачі відповідає лише такий рисунок, як показано.

З умов задачі випливає, що $\Delta ABD = \Delta AMD$, тому $2MD = BM = MC$. Оскільки AM — бісектриса ΔADC, то $\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{MC} = \frac{1}{2}$, звідси $\sin\angle DCA = \frac{1}{2}$, тому $\angle DCA = 30^\circ$, звідси вже очевидні і інші кути трикутника.

Відповідь. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Задача 2. Нехай P — точка перетину діагоналей опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що площі трикутників ABC, BCD і DAP дорівнюють відповідно 8 см^2, 9 см^2 і 10 см^2. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. Позначимо через $S(F)$ — площу фігури F. Нехай $S(ABP) = S$. Тоді $S(BPC) = 8 - S$, $S(CPD) = 1 + S$. Трикутники BAP і PAD мають спільну вершину A і спільну висоту, яку проведено з цієї вершини. Тому

$$\frac{S(BAP)}{S(PAD)} = \frac{BP}{PD}.$$

Аналогічно для трикутників BCP і PCD:

$$\frac{S(BCP)}{S(PCD)} = \frac{BP}{PD}.$$

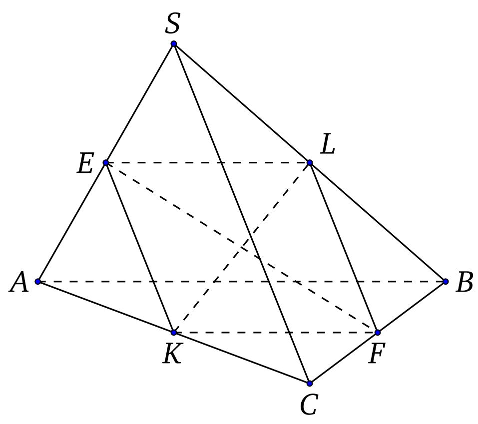
Таким чином,

$$\frac{S}{10} = \frac{8-S}{1+S},$$

звідки $S^2 + 11S - 80 = 0$. Останнє рівняння має корені $S_1 = -16$, $S_2 = 5$. Оскільки площа є числом невід'ємним, то $S = 5$, а площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює $S + (8 - S) + (1 + S) + 10 = 24$ см^2.

Відповідь. 24 см^2.

Задача 3. У тетраедрі $SABC$ точки E, F, K, L — відповідно середини ребер SA, BC, AC, SB. Довжини відрізків EF і KL відповідно дорівнюють 11 см і 13 см, а довжина ребра AB — 18 см. Знайдіть довжину ребра SC тетраедра.



Розв'язання. Розглянемо чотирикутник $ELFK$. Оскільки $EL = \frac{1}{2}AB = 9$ см, $EL \parallel AB$ (як середня лінія у трикутнику SAB), $KF = \frac{1}{2}AB = 9$ см, $KL \parallel AB$ (як середня лінія у трикутнику ABC), то $EL = KF$ і $EL \parallel KF$, тобто чотирикутник $ELFK$ — паралелограм. Тоді з формули $EF^2 + KL^2 = 2(KE^2 + KF^2)$ знаходимо, що $KE^2 = \frac{1}{2}(EF^2 + KL^2 - 2KF^2) = \frac{1}{2}(11^2 + 13^2 - 2 \cdot 9^2) = 64$, тобто $KE = 8$ см. Але KE є середньою лінією у трикутнику SAC, тому $SC = 2KE = 16$ см.

Відповідь. 16 см.

Задача 4. Дано гострокутний трикутник ABC. Пряма, яка паралельна BC, перетинає сторони AB і AC в точках M і P відповідно. При якому розташуванні точок M і P радіус кола, описаного навколо трикутника BMP, буде найменшим?

Розв'язання. Нехай $\angle ABC = \beta$, а радіус кола, описаного навколо трикутника BMP дорівнює R. Тоді за теоремою синусів для трикутника BMP:

$$R = \frac{BP}{2\sin\angle BMP} = \frac{BP}{2\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{BP}{2\sin\beta}.$$

Оскільки β — величина стала, то найменше значення R буде в тому випадку, коли BP є найменш можливим. Отже, BP — висота трикутника.

II Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

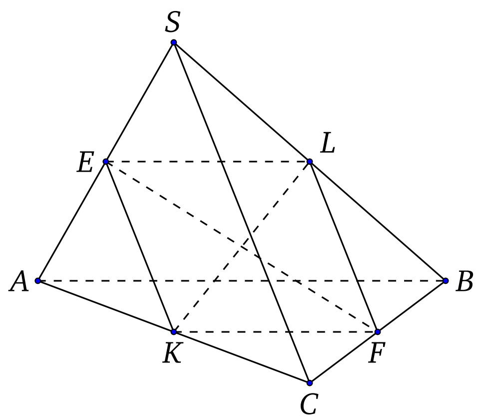
Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи (поглиблене вивчення математики)

I тур

Задача 1. У тетраедрі $SABC$ точки E, F, K, L — відповідно середини ребер SA, BC, AC, SB. Довжини відрізків EF і KL відповідно дорівнюють 11 см і 13 см, а довжина ребра AB — 18 см. Знайдіть довжину ребра SC тетраедра.

Розв'язання. Розглянемо чотирикутник $ELFK$. Оскільки $EL = \frac{1}{2}AB = 9$ см, $EL \parallel AB$ (як середня лінія у трикутнику SAB), $KF = \frac{1}{2}AB = 9$ см, $KL \parallel AB$ (як середня лінія у трикутнику ABC), то $EL = KF$ і $EL \parallel KF$, тобто чотирикутник $ELFK$ — паралелограм. Тоді з формули $EF^2 + KL^2 = 2(KE^2 + KF^2)$ знаходимо, що $KE^2 = \frac{1}{2}(EF^2 + KL^2 - 2KF^2) = \frac{1}{2}(11^2 + 13^2 - 2 \cdot 9^2) = 64$, тобто $KE = 8$ см. Але KE є середньою лінією у трикутнику SAC, тому $SC = 2KE = 16$ см.



Відповідь. 16 см.

Задача 2. Дано гострокутний трикутник ABC. Пряма, яка паралельна BC, перетинає сторони AB і AC в точках M і P відповідно. При якому розташуванні точок M і P радіус кола, описаного навколо трикутника BMP, буде найменшим?

Розв'язання. Нехай $\angle ABC = \beta$, а радіус кола, описаного навколо трикутника BMP дорівнює R. Тоді за теоремою синусів для трикутника BMP:

$$R = \frac{BP}{2\sin\angle BMP} = \frac{BP}{2\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{BP}{2\sin\beta}.$$

Оскільки β — величина стала, то найменше значення R буде в тому випадку, коли BP є найменш можливим. Отже, BP — висота трикутника.

Задача 3. Точка O — центр описаного кола ω рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$). Бісектриса кута C перетинає ω в точці W. Точка Q — центр описаного кола трикутника OWB. Відновіть трикутник ABC за точками Q, W, B.

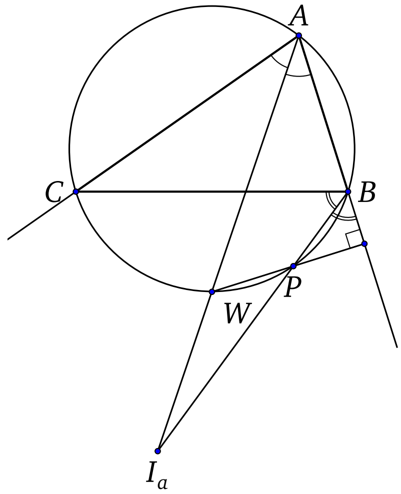
(*Андрій Мостовий*)

Розв'язання. Будуємо коло з центром в точці Q радіуса $QB = QW$. Серединний перпендикуляр до відрізка WB перетинає це коло в точці O. Далі можемо побудувати коло ω з центром в точці O радіуса OB. З точки W розхилом циркуля, який дорівнює BW, робимо засічку на колі ω — отримуємо вершину A (оскільки W — точка перетину бісектриси кута ACB з описаним колом, то $WA = WB$). Проводимо пряму AO. З вершини B проводимо пряму, перпендикулярну до AO; отримаємо точку M — середину BC. Останню вершину C знаходимо відклавши на прямій BM відрізок $MC = MB$.

Задача 4. Нехай точка I_a — центр зовнівписаного кола трикутника ABC, яке дотикається до сторони BC. Нехай W — точка перетину бісектриси кута $\angle A$ трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Перпендикуляр, опущений з точки W на пряму AB, перетинає описане навколо трикутника ABC коло в точці P. Доведіть, що якщо точки B, P, I_a лежать на одній прямій, то трикутник ABC — рівнобедрений.

(*Микола Мороз*)

Розв'язання. Оскільки B, P, I_a лежать на одній прямій, причому P та I_a по один бік від точки B, то $\angle CBP = \angle CBI_a$.



З одного боку, $\angle CBI_a = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$.

З іншого боку, $\angle AWP = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$, а тому $\angle ABP = 180^\circ - \angle AWP$, оскільки чотирикутник $ABPW$ — вписаний. Тоді

$$\angle CBP = \angle ABP - \angle B = 180^\circ - \angle AWP - \angle B = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B = \\ = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B.$$

В силу рівності $\angle CBP = \angle CBI_a$ маємо: $90^\circ - \frac{\angle B}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} - \angle B$, звідки $\angle A = \angle B$, а тому $BC = AC$.