III Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

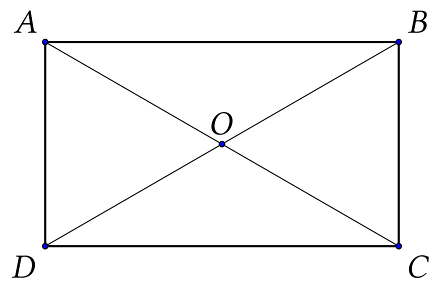
Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи

І тур

Задача 1. Спортивний майданчик має форму прямокутника $ABCD$, причому кут між діагоналями AC і BD дорівнює 60° і $AB > BC$. Тренер доручив Андрійку пробігти спочатку 10 разів по маршруту $A-C-B-D-A$, а потім ще 15 разів по маршруту $A-D-A$. Андрійко виконав завдання, пробігши загалом 4,5 км. Якою є відстань AC на майданчику?

Розв'язання.



Нехай O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Трикутники AOC та BOC рівносторонні. Позначимо $BC = x$. Тоді довжина маршруту $A-C-B-D-A$ дорівнює $2x + x + 2x + x = 6x$, а довжина маршруту $A-D-A$ дорівнює $x + x = 2x$. Маємо рівняння:

$$6x \cdot 10 + 2x \cdot 15 = 4500,$$

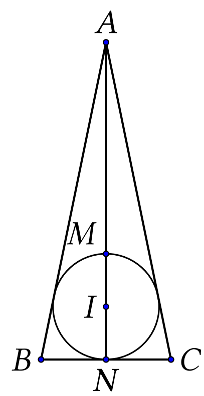
звідки $x = 50$ (м). Тоді відстань AC дорівнює 100 (м).

Відповідь. 100 м.

Задача 2. Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$) з радіусом r вписаного в нього кола. Відомо, що точка M перетину медіан трикутника ABC належить вписаному в цей трикутник колу. Знайдіть відстань від вершини A до точки перетину бісектрис трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



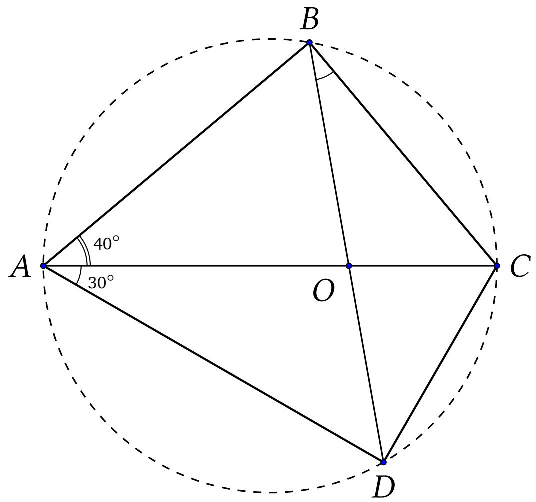
Нехай ω — вписане в трикутник ABC коло і $M \in \omega$. Оскільки промінь AM співпадає з висотою, бісектрисою і медіаною AN, то точка I перетину бісектрис трикутника ABC також належить променю AM.

Тоді, очевидно, $MN = 2r$ ($MI = IN = r$). Але $AM = 2MN = 4r$ (властивість точки перетину медіан). Отже, $AI = 4r + r = 5r$.

Відповідь. $5r$.

Задача 3. В чотирикутнику $ABCD$ кути B і D — прямі. Діагональ AC утворює зі стороною AB кут $40°$, а зі стороною AD — кут $30°$. Знайдіть гострий кут між діагоналями AC і BD.

Розв'язання.

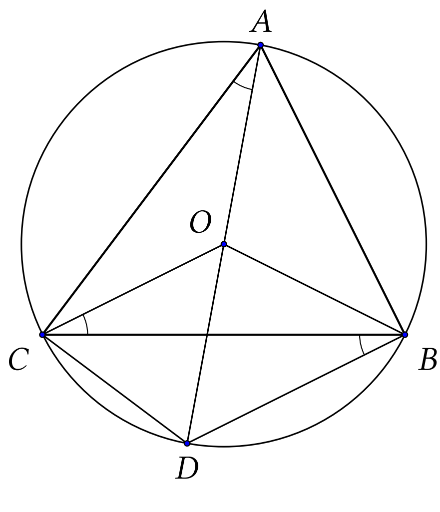


Нехай O — точка перетину діагоналей чотирикутника. З прямокутного трикутника ABC знаходимо,що $\angle BCA = 50°$. Оскільки в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює $180°$, то навколо нього можна описати коло. Тоді $\angle CBD = \angle CAD = 30°$ як вписані в коло, що спираються на одну дугу. Нарешті $\angle BOA$ є зовнішнім кутом трикутника BOC і дорівнює сумі кутів $\angle CBO + \angle BCO = 30° + 50° = 80°$.

Задача 4. Нехай ABC — трикутник, O — центр кола, описаного навколо нього, AD — діаметр цього кола. Відомо, що прямі CO і DB паралельні. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

(*Андрій Мостовий*)

Розв'язання.



Із трикутника COB знаходимо, що $\angle OCB = 90° - \angle A$ (оскільки він рівнобедрений, а $\angle COB = 2\angle A$ як центральний). $\angle OCB = \angle CBD$ (як внутрішні різносторонні приперетині паралельних прямих січною) $= \angle CBD$ (як вписані, що спираються на одну дугу).

Оскільки $\angle ACD = 90°$ (це вписаний кут, що спирається на діаметр), то $\angle CDA = 90° - \angle CAD = 90° - (90° - \angle A) = \angle A$. Нарешті $\angle ABC = \angle ADC = \angle A$, а це і означає, що трикутник ABC рівнобедрений ($AC = CB$).

Задача 5. У трикутнику ABC $\angle ABC = \angle ACB = 78°$. На сторонах AB і AC обрано відповідно точки D та E так, що $\angle BCD = 24°$, $\angle CBE = 51°$. Знайдіть градусну міру кута $\angle BED$.

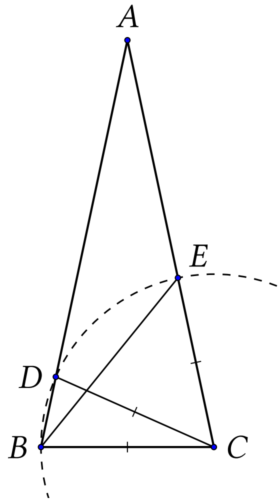
Розв'язання.

З трикутника BCD знаходимо, що $\angle BDC = 180° - 78° - 24° = 78°$, а тому цей трикутник рівнобедрений і $CB = CD$.

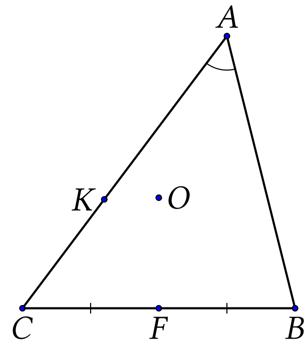
З трикутика BCE знаходимо, що $\angle BEC = 180° - 78° - 51° = 51°$. Отже, цей трикутник також рівнобедрений, і, отже, $CB = CE$.

Тоді точки B, D, E належать колу з центром в точці C і радіусом CB. Шуканий кут $\angle BED$ є вписаним в це коло і дорівнює половині центрального кута $\angle BCD$, тобто $12°$.

Відповідь. $12°$.



Задача 6. На дошці зображено трикутник ABC, його центр описаного кола — точка O, середина сторони BC — точка F, а також деяка точка K на стороні AC (див. рис.). Учитель повідомив, що $\angle BAC$ цього трикутника дорівнює гострому куту α і окремо накреслив кут, який дорівнює α. Після цього учитель витер дошку, залишивши лише точки O, F, K і кут α. Чи можливо з допомогою циркуля та лінійки відновити трикутник ABC? Відповідь обґрунтуйте.



(*Григорій Філіпповський*)

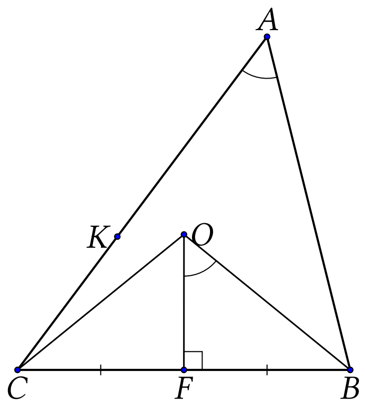
Розв'язання. 1) З'єднаємо O та F і через F проведемо пряму t перпендикулярно до OF. Вона містить вершини B і C.

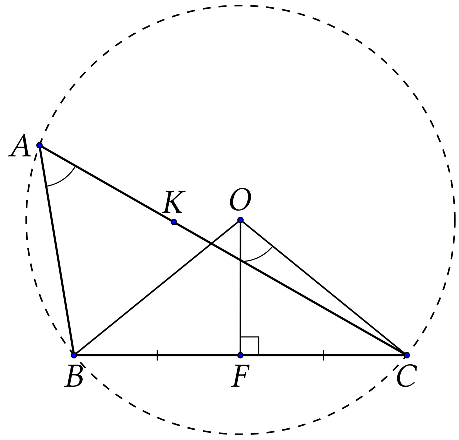
2) Аналіз показує, що якщо $\angle BAC = \alpha$, то $\angle BOC = 2\alpha$ (як центральний).

3) Оскільки ΔBOC рівнобедрений ($BO = OC$), то $\angle BOF = \angle COF = \alpha$. Тоді промені, проведені під кутом α до OF з точки O (в обидві сторони), перетнуть пряму t в вершинах B і C (у деякому порядку).

4) Коло з центром в точці O, радіуса $OC = OB$ та промінь CK перетнуться в вершині A.

Таким чином, існує два трикутники, які задовольняють умову задачі (залежно від позначень точок B та C на прямій t), і однозначно відновити трикутник не можна, проте можна можна побудувати обидва ці трикутники.


A
K
O
C
F
B


A
K
O
B
F
C

III Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

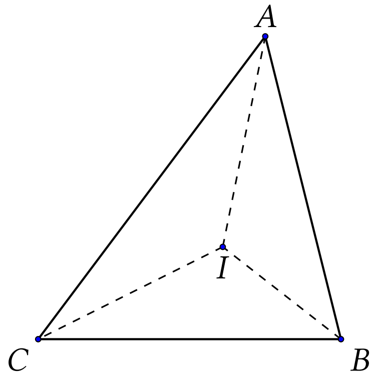
8–9 класи (поглиблене вивчення математики)

I тур

Задача 1. Відомо, що в трикутнику ABC відстані від точки перетину бісектрис до кожної з вершин трикутника не перевищують діаметра вписаного в цей трикутник кола. Знайдіть кути трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Припустимо, що відстані від інцентра I до вершин трикутника ABC менші за діаметр вписаного кола, тобто $IA < 2r$, $IB < 2r$, $IC < 2r$ (r — радіус вписаного кола).

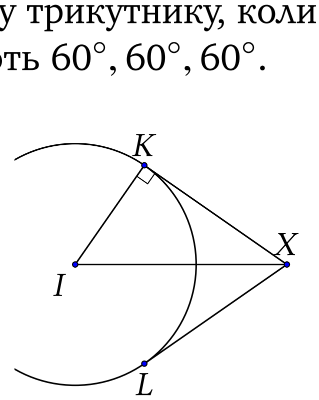


Тоді коло s з центром в точці I радіуса $2r$ накриває весь трикутник ABC, тобто воно є більшим, ніж коло ω, описане навколо трикутника ABC. Але у такому випадку порушується нерівність $R \geqslant 2r$.

Нехай $IA = 2r$, а $IB < 2r$ та $IC < 2r$. В цьому разі коло s_1 з центром в точці I радіуса $IA = 2r$ знов-таки буде "виходити" за вершини B і C і буде більшим за коло ω, яке описане навколо трикутника ABC.

Отже, можливим є єдиний випадок: $IA = IB = IC = 2r$, що досягається лише в рівносторонньому трикутнику, коли $R = 2r$. Таким чином, кути трикутника ABC дорівнюють $60°, 60°, 60°$.

Другий спосіб. Доведемо таке твердження: якщо точка X віддалена від центра I кола радіуса r на відстань $d \leqslant 2r$ $(d > r)$, то кут між дотичними, проведеними з цієї точки до кола, не менший за $60°$.



Справді, позначимо K і L точки дотику. Тоді $\sin\angle KXI = \frac{IK}{IX} \geqslant \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$. Тоді $\angle KXI \geqslant 30°$, а тому і $\angle KXL \geqslant 60°$.

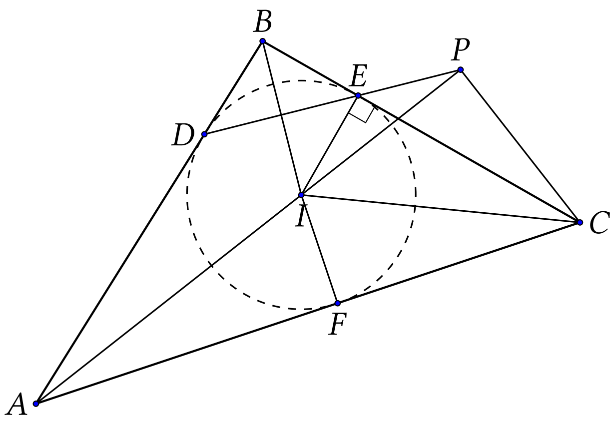
Отже, усі кути трикутника не менші від $60°$, а це можливо лише коли він рівносторонній.

Відповідь. $60°, 60°, 60°$.

Задача 2. Дано різносторонній трикутник ABC. Відомо, що I — центр вписаного кола в цей трикутник, точки D, E, F — точки дотику цього кола до сторін AB, BC, CA відповідно. Нехай P — точка перетину прямих DE і AI. Доведіть, що $CP \perp AI$.

(*Віталій Ветров*)

Розв'язання. Для доведення того, що $CP \perp AI$ достатньо показати, що точки C, I, E, P лежать на одному колі (оскільки $\angle IEC = 90^\circ$). Позначимо кути трикутника 2α, 2β, 2γ. Тоді $\angle CAI = \angle IAB = \alpha$, $\angle ABI = \angle IBC = \beta$, $\angle BCI = \angle ICA = \gamma$; $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.



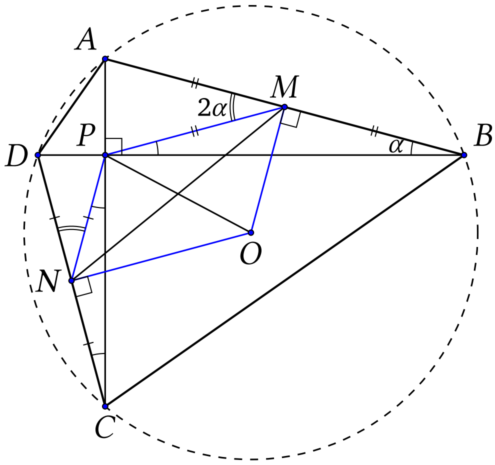
Трикутник DBE рівнобедрений ($BD = BE$ як дотичні проведені з точки B до вписаного кола). Тоді $\angle BDE = 90^\circ - \beta$, $\angle ADP = 90^\circ + \beta$. З трикутника ADP знаходимо: $\angle DPA = 180^\circ - \angle ADP - \angle DAP = 90^\circ - \alpha - \beta = \gamma$. Таким чином, $\angle EPI = \angle ECI = \gamma$, а це і означає, що точки I, E, C, P лежать на одному колі.

Задача 3. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці P. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини протилежних сторін чотирикутника $ABCD$ ділить відрізок OP навпіл (O — центр кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$).

(*Олександр Дзюняк*)

Розв'язання.

Нехай M — середина AB, N — середина CD. Доведемо, що чотирикутник $PMON$ є паралелогамом, тоді за властивістю паралелограма діагоналі MN і PO точкою перетину діляться навпіл.



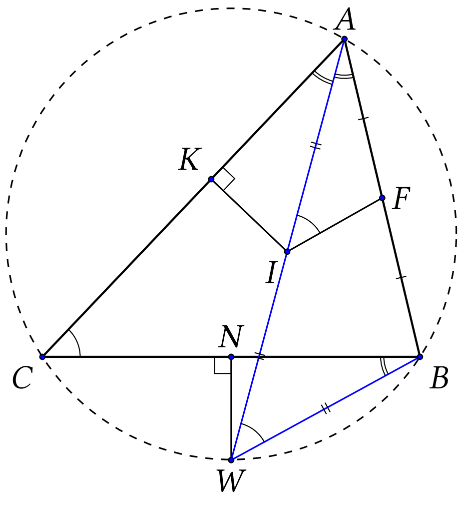
Позначимо $\angle ABD = \alpha$, тоді $\angle ACD = \alpha$, $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ - \alpha$. Далі: з рівнобедрених трикутників AMP, PMB, PNC знаходимо: $\angle AMP \angle PND = 2\alpha$, $\angle MPB = \angle NPC = \alpha$. Тоді $\angle PMO = 90^\circ - \angle AMP = 90^\circ - 2\alpha$, а $\angle NPM = 90^\circ + 2\alpha$. Оскільки $\angle NPM + \angle PMO = 180^\circ$, то прямі NP і OM паралельні.

Крім того, $\angle PNO = 90^\circ - \angle DNP = 90^\circ - 2\alpha$, а тому паралельними є і відрізки PM і NO. Таким чином, чотрикутник $NPMO$ є паралелограмом, що і треба було показати.

Задача 4. В трикутнику ABC сторона BC дорівнює a. Точка F — середина AB, I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. Виявилось, що $\angle AIF = \angle ACB$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



1) Опишемо коло ω навколо трикутника ABC і продовжимо AI до перетину з ω в точці W.

2) З'єднаємо точки W і B. Тоді $\angle AWB = \angle C$ (вписані, що спираються на одну дугу); $\angle AIF = \angle C$ (за умовою). Отже, $IF \parallel WB$ і, оскільки $AF = FB$, то й $AI = IW$ (теорема Фалеса).

3) Проведемо $IK \perp AC$. Тоді $IK = r$ і $AK = p - a$ (відомий факт геометрії трикутника).

4) Проведемо $WN \perp BC$. Очевидно, що $BN = CN = \frac{a}{2}$ (трикутник BWC рівнобедрений, оскільки $\smile BW = \smile CW$). $\angle CBW = \angle CAW$ — вписані, що спираються на одну дугу.

5) Оскільки $IW = BW$ (так звана *теорема трилисника*) і, до того ж, $IW = AI$, то $\Delta AIK = \Delta BWN$ — за гіпотенузою та гострим кутом.

6) Отже, $BN = AK$, або $\frac{a}{2} = p - a$, $a = 2p - 2a$ і $2p = 3a$.

Задача 5. У трикутнику ABC відомо, що $BC = 5$, $AC - AB = 3$. Доведіть, що $r < 2 < r_a$ (тут r — радіус кола, вписаного у трикутник ABC, r_a — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається сторони BC).

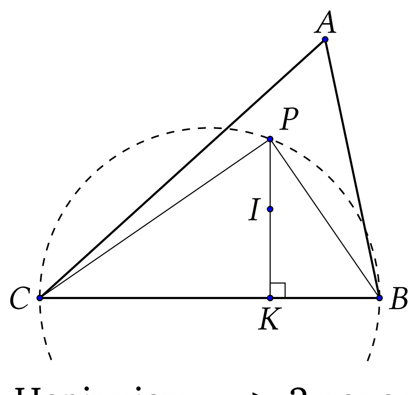
(*Микола Мороз*)

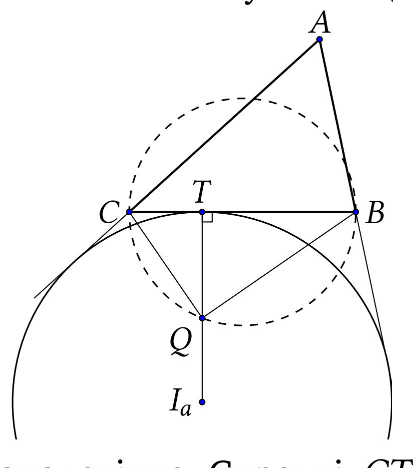
Розв'язання. 1) Доведемо, що $r < 2$.

Відомо, що $BK = p - b = \frac{a+c-b}{2}$. Підставивши дані з умови, знаходимо, що $BK = \frac{5-3}{2} = 1$, $CK = p - c = \frac{a+b-c}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$.

Оскільки $\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} > 90^\circ$, то інцентр I знаходиться всередині кола, описаного на BC як на діаметрі.

Нехай P — точка перетину IK з цим колом (див. рис.) Тоді $r = IK < PK$. Але PK є середнім геометричним BK та CK. Тому $PK = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$.





2) Нерівність $r_a > 2$ доводиться аналогічно. Справді, $CT = p - b$, $BT = p - c$, $\angle CI_aB = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} < 90^\circ$, тому I_a знаходиться поза колом, описаному на BC як на діаметрі. Тому $r_a = I_aT > \sqrt{CT \cdot TB} = \sqrt{(p-b) \cdot (p-c)} = 2$.

Задача 6. У гострокутному трикутнику ABC провели бісектрису $\angle A$ до перетину із описаним навколо трикутника ABC колом у точці W. Через точку W проведено пряму паралельно до сторони AB, яка перетинає це ж коло у точці $F \neq W$. Опишіть побудову трикутника ABC, якщо дано відрізки FA і FW, а також $\angle FAC$.

(*Андрій Мостовий*)

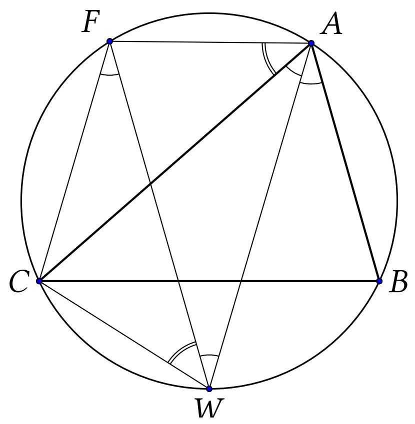
Розв'язання. Аналіз. Проведемо відрізки FA, FC і CW і відмітимо рівні кути. $\angle CAW = \angle WAB = \angle AWF = \angle CFW$ (тут використано паралельність прямих WF та AB, а також властивість вписаних кутів, що спираються на одну дугу). Отже, $CF \parallel AW$. Оскільки паралельні прямі на колі відтинають рівні дуги, а хорди, що стягують рівні дуги рівні, то $CW = FA$. Крім того, $\angle FAC = \angle FWC$ як вписані, що спираються на одну дугу. Тоді у трикутнику CWF відомо дві сторони і кут між ними, і, отже, його можна побудувати.

Побудова. 1) Будуємо трикутник CWF ($CW = FA$, $\angle CWF = \angle FAC$).

2) Описуємо коло навколо трикутника CWF.

3) Точку A можна одержати, провівши через W пряму, яка паралельна до CF до перетину із колом.

4) Точку B можна одержати, провівши через точку A пряму, паралельно до FW до перетину із колом.



III Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи

I тур

Задача 1. Коло з центром в початку координат і радіусом 5 перетинає вісь абсцис в точках A та B. Нехай точка P належить прямій $x = 11$, а точка Q є точкою перетину відрізка AP із цим колом. Відомо, що точка Q є серединою відрізка AP. Знайдіть координати точки P.

Розв'язання.

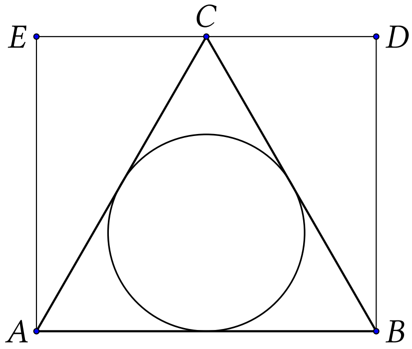
Відповідь. $(11; 8)$ або $(11; -8)$.

Нехай точка P має координати $(11; y)$. Із умови задачі випливає, що точка A має координати $(-5; 0)$, а точка B — $(5; 0)$. Оскільки точка Q є серединою відрізка AP, то її координати $\left(\frac{11+(-5)}{2}; \frac{y}{2}\right) = \left(3; \frac{1}{2}y\right)$. Оскільки точка Q належить колу $x^2 + y^2 = 25$, то $3^2 + \frac{1}{4}y^2 = 25$, звідки $y = 8$ або $y = -8$.

Задача 2. Дано рівносторонній трикутник ABC. Відомо, що радіус вписаного кола в цей трикутник дорівнює 1. Прямокутник $ABDE$ такий, що точка C належить його стороні DE. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника $ABDE$.

Розв'язання.

Як відомо, радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, а висота такого трикутника $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Із рівності $1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ знаходимо, що $a = 2\sqrt{3}$. Тоді сторони прямокутника $ABDE$ $AB = 2\sqrt{3}$ і $BD = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.



За теоремою Піфагора для трикутника ABD знаходимо: $AD^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 = 21$, тобто $AD = \sqrt{21}$. Радіус кола, описаного навколо прямокутника дорівнює половині діагоналі, тобто $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Відповідь. $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Задача 3. Нехай $ABCDEF$ — правильний шестикутник. Відомо, що площа трикутника ACD дорівнює 8. Знайдіть площу шестикутника $ABCDEF$.

Розв'язання. У правильного шестикутника довжина діагоналі $AD = 2a$, де a — сторона шестикутника. Площі трикутників ABC та ACDвідносяться як $1 : 2$, оскільки вони мають однакові висоти і $BC : AD = 1 : 2$. Отже, площа трикутника ABC дорівнює 4, площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює 12, а площа всього шестикутника $2 \cdot 12 = 24$ (кв. од.).

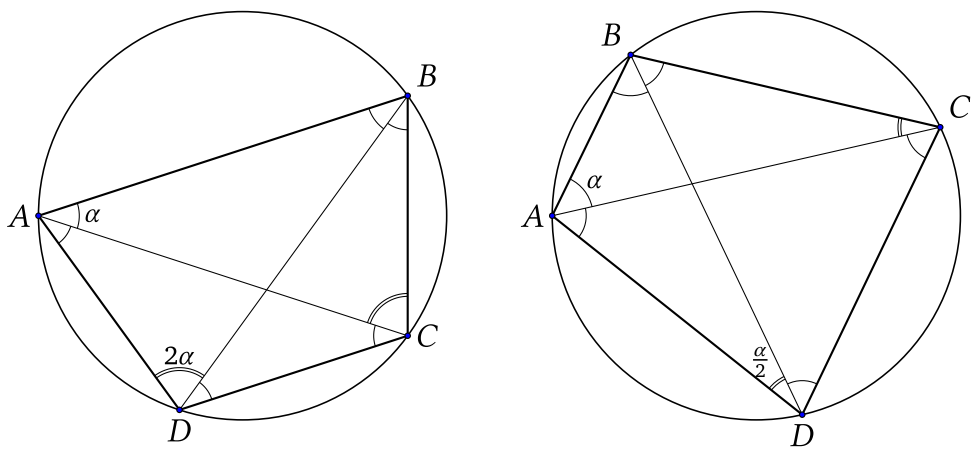
Відповідь. 24.

Задача 4. Знайдіть кути вписаного чотирикутника, якщо відомо, що кожна його діагональ є бісектрисою одного кута і трисектрисою протилежного (трисектриса кута — це один із двох променів, які лежать всередині кута і ділять його на три рівні частини).

(*В'ячеслав Ясінський*)

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — заданий вписаний чотирикутник. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що діагональ AC є бісектрисою кута $\angle A$. Тоді $\angle DAC = \angle CAB = \angle CDB = \angle DBC = \alpha$ (ми врахували, що вписані кути, які опираються на рівні дуги рівні).

Діагональ BD є бісектрисою або кута $\angle B$, або кута $\angle D$. Не порушуючи загальності, припустимо, що BD є бісектрисою $\angle B$. Тоді $\angle CBD = \angle DBA = \alpha$.



Діагональ AC є трисектрисою кута $\angle C$. Можливі два випадки: або $\angle ACB = 2\angle ACD = 2\alpha = \angle ADB$, або $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ACD = \frac{1}{2}\alpha = \angle ADB$ (див. рис.). У першому випадку ми приходимо до рівняння

$$\alpha + \alpha + \alpha + 2\alpha = 180^\circ,$$

звідки $\alpha = 36^\circ$, а у другому — до рівняння

$$\alpha + \alpha + \alpha + \frac{1}{2}\alpha = 180^\circ,$$

тоді $\alpha = \frac{360^\circ}{7}$.

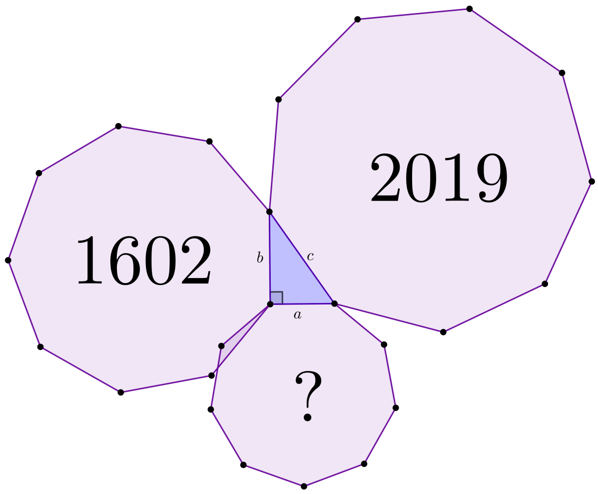
Знаходимо кути чотирикутника у кожному із цих випадків: 72°, 72°, 108°, 108°, або $\frac{720^\circ}{7}$, $\frac{720^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$.

Відповідь. 72°, 72°, 108°, 108°, або $\frac{720^\circ}{7}$, $\frac{720^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$.

Задача 5. На сторонах прямокутного трикутника зовні побудовано правильні дев'ятикутники. Площі дев'ятикутників, які побудовано на одному з катетів та на гіпотенузі, дорівнюють відповідно 1602 см^2 та 2019 см^2. Чому дорівнює площа дев'ятикутника, який побудовано на іншому катеті цього трикутника?

(*Владислав Кирилюк*)

Розв'язання.



Позначимо катети даного трикутника a та b, а гіпотенузу — c. Як відомо, площа правильного n-кутника зі сторони довжини x визначається за формулою

$$S = \frac{nx^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Тоді площа дев'ятикутника, побудованого на гіпотенузі c:

$$S_c = \frac{9c^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ;$$

$$2019 = \frac{9c^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ;$$

$$c^2 = \frac{4 \cdot 2019}{9 \operatorname{ctg} 20^\circ}.$$

Аналогічно знаходимо, що $b^2 = \dfrac{4 \cdot 1602}{9 \operatorname{ctg} 20^\circ}$.

За теоремою Піфагора:

$$a^2 = c^2 - b^2 = \frac{4 \cdot (2019 - 1602)}{9 \operatorname{ctg} 20^\circ} = \frac{4 \cdot 417}{9 \operatorname{ctg} 20^\circ}.$$

Знаходимо площу правильного дев'ятикутника, побудованого на стороні a:

$$S_a = \frac{9a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ = \frac{9 \cdot 4 \cdot 417 \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ}{9 \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot 4} = 417.$$

Відповідь. 417 см^2.

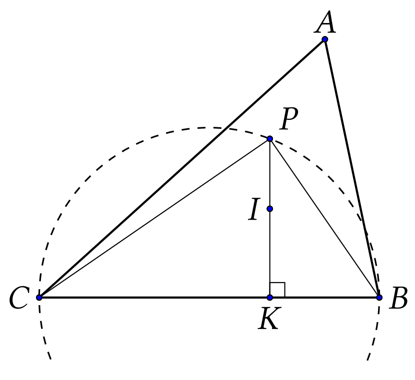
Задача 6. У трикутнику ABC відомо, що $BC = 5$, $AC - AB = 3$. Доведіть, що $r < 2$ (тут r — радіус кола, вписаного у трикутник ABC).

(*Микола Мороз*)

Розв'язання. Відомо, що $BK = p - b = \frac{a+c-b}{2}$. Підставивши дані з умови, знаходимо, що $BK = \frac{5-3}{2} = 1$, $CK = p - c = \frac{a+b-c}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$.

Оскільки $\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} > 90^\circ$, то інцентр I знаходиться всередині кола, описаного на BC як на діаметрі.

Нехай P — точка перетину IK з цим колом (див. рис.) Тоді $r = IK < PK$. Але PK є середнім геометричним BK та CK. Тому $PK = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$.



III Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи (поглиблене вивчення математики)

I тур

Задача 1. Коло $x^2+y^2=25$ перетинає вісь абсцис в точках A та B. Нехай точка P лежить у першій координатній чверті і належить прямій $x=11$, C — точка перетину цієї прямої з віссю Ox, а точка Q є точкою перетину відрізка AP із даним колом. Виявилось, що площа трикутника AQB в чотири рази менша площі трикутника APC. Знайдіть координати точки Q.

Розв'язання. Відповідь. $\left(\frac{7}{5}; \frac{24}{5}\right)$.

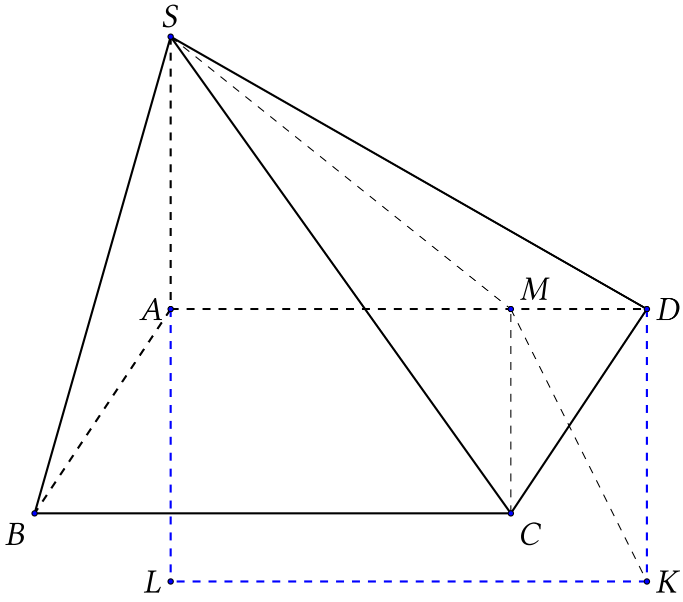
Оскільки $AB=10$, $BC=6$, то площі трикутникі ABP і BPC відносяться як $10:6=5:3$. Позначимо площу трикутника ABP як $5S$, тоді площа трикутника $BPC=3S$, площа трикутника $ACP=8S$. Далі: $S(AQB)=\frac{1}{4}S(ACP)=2S$, $S(PQB)=5S-2S=3S$. Таким чином, площі трикутників AQB та PQB відносяться як $2:3$, а тому і точка Q ділить відрізок AP у відношенні $2:3$.

Нехай $T(x;0)$ — проекція точки Q на вісь абсцис. Тоді $AT:TC=2:3$, тобто $\frac{5+x}{11-x}=\frac{2}{3}$, звідки $x=\frac{7}{5}$. Тоді, враховуючи, що точка $Q(x;y)$ належить колу $x^2+y^2=25$, $y>0$, знаходимо: $y=\sqrt{25-x^2}=\frac{24}{5}$.

Задача 2. В основі чотирикутної піраміди $SABCD$ лежить прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB=1$ і $AD=10$. Ребро SA піраміди перпендикулярне до основи, $SA=4$. На ребрі AD знайдіть таку точку M, щоб периметр трикутника SMC був мінімальним.

Розв'язання. Периметр трикутника SMC дорівнює $SM+MC+SC$. Оскільки SC не залежить від положення точки M, то периметр трикутника SMC буде мінімальним тоді, коли сума $SM+MC$ є мінімальною.

В площині SAD на стороні AD побудуємо прямокутник $ADKL$, який дорівнює прямокутнику $ABCD$. Нехай M належить AD. Тоді трикутники MDC і MDK рівні за двома катетами. Отже, $SM+MC=SM+MK$. Але оскільки точки S і K фіксовані, то $SM+MK$ буде мінімальним, тоді, коли точки S, M, K лежать на одній прямій.

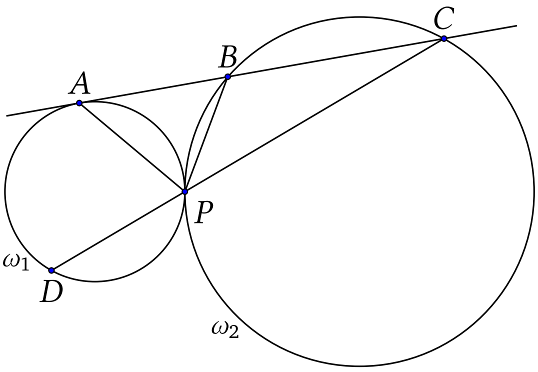


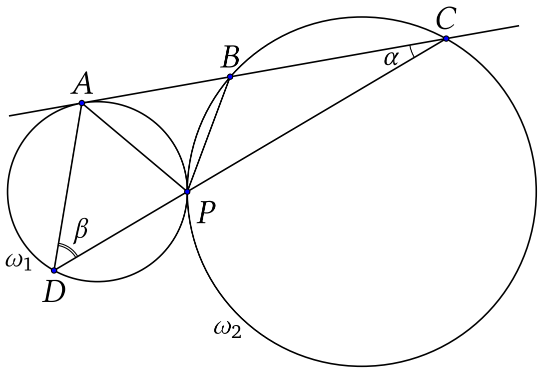
Нехай $AM = x$, тоді $MD = 10 - x$. Трикутники SAM та KDM подібні (за двома кутами), тому $\frac{SA}{DK} = \frac{x}{10-x}$, звідки $x = 8$.

Відповідь. $AM = 8$, $MD = 2$.

Задача 3. Два кола ω_1 і ω_2 дотикаються зовнішнім чином у точці P. Через точку A кола ω_1 проведено дотичну до цього кола, яка перетинає коло ω_2 у точках B та C (див. рисунок). Пряма CP повторно перетинає коло ω_1 в точці D. Доведіть, що промінь PA є бісектрисою кута DPB.

Розв'язання. Проведемо відрізок DA і позначимо $\angle ACP = \alpha$, $\angle PDA = \beta$. Тоді зовнішній кут при вершині A трикутника DAC дорівнює $\alpha + \beta$. Тоді і $\angle APD = \alpha + \beta$ (за теоремою про кут між дотичною і хордою).



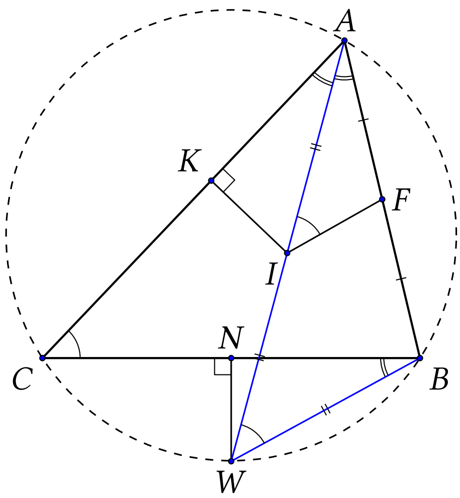


Але $\angle APB = \alpha + \beta$ також. Справді, якщо провести через точку P спільну дотичну до заданих кіл, то за теоремою про кут між дотичною і хордою вона поділить $\angle APB$ на кути β і α.

Задача 4. В трикутнику ABC сторона BC дорівнює a. Точка F — середина AB, I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. Виявилось, що $\angle AIF = \angle ACB$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



1) Опишемо коло ω навколо трикутника ABC і продовжимо AI до перетину з ω в точці W.

2) З'єднаємо точки W і B. Тоді $\angle AWB = \angle C$ (вписані, що спираються на одну дугу); $\angle AIF = \angle C$ (за умовою). Отже, $IF \parallel WB$ і, оскільки $AF = FB$, то й $AI = IW$ (теорема Фалеса).

3) Проведемо $IK \perp AC$. Тоді $IK = r$ і $AK = p - a$ (відомий факт геометрії трикутника).

4) Проведемо $WN \perp BC$. Очевидно, що $BN = CN = \frac{a}{2}$ (трикутник BWC рівнобедрений, оскільки $\smile BW = \smile CW$). $\angle CBW = \angle CAW$ — вписані, що спираються на одну дугу.

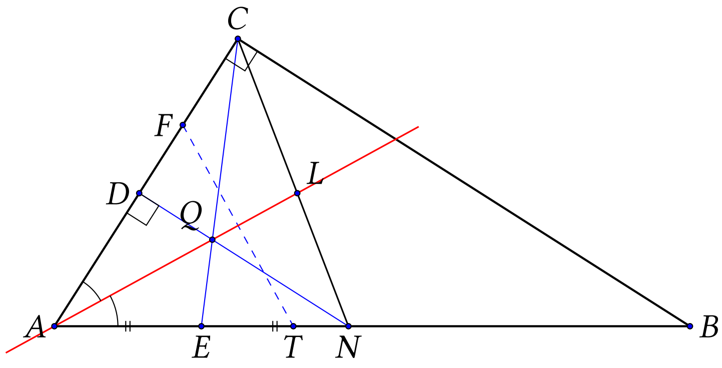
5) Оскільки $IW = BW$ (так звана *теорема трилисника*) і, до того ж, $IW = AI$, то $\Delta AIK = \Delta BWN$ — за гіпотенузою та гострим кутом.

6) Отже, $BN = AK$, або $\frac{a}{2} = p - a$, $a = 2p - 2a$ і $2p = 3a$.

Задача 5. В прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB кут A більший за кут B. Точка N на гіпотенузі AB така, що $BN = AC$. Відновіть цей трикутник ABC за точкою N, точкою F на катеті AC та прямою l, що містить бісектрису кута A трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



1) Проведемо $FK \perp l$ та продовжимо на стільки ж. Отримаємо точку T, яка, очевидно, належить гіпотенузі AB.

2) Пряма NT перетне l в вершині A.

3) Проводимо промінь AF, який містить вершину C трикутника ABC.

4) Аналіз показує, що у трикутнику ACN висота ND, бісектриса AL і медіана CE перетинаються в одній точці. Покажемо, що $\frac{CL}{LN} \cdot \frac{NE}{EA} \cdot \frac{AD}{DC} = 1$. В такому разу за оберненою теоремою Чеви AD, AL і CE перетинаються в одній точці. Очевидно, що $\frac{NE}{EA} = 1$ (E — середина AN). $\frac{CL}{LN} = \frac{AC}{AN}$ за властивістю бісектриси, $\frac{AD}{DC} = \frac{AN}{NB}$ (узагальнена теорема Фалеса). Оскільки $AC = NB$ за умовою, то добуток трьох відношень справді дорівнює 1 і ND, AL, CE перетинаються в одній точці (скажімо, точці Q).

5) Тоді проводимо $ND \perp AF$ і Q є точкою перетину ND і l.

6) Знаходимо E — середину AN. Промені EQ та AF перетнуться в вершині C.

7) На промені AN за точку N відкладаємо відрізок AC і одержуємо вершину B.

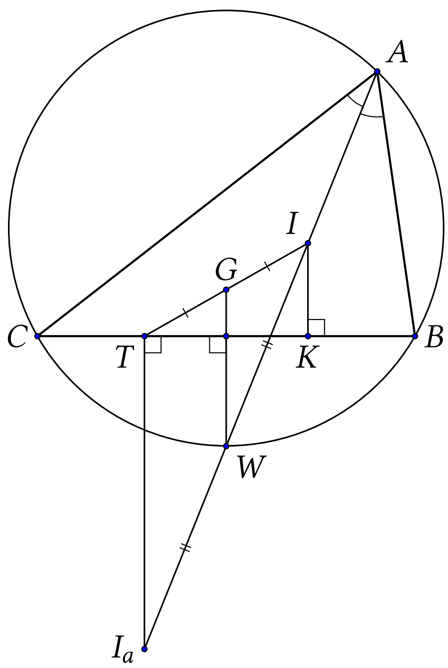
Задача 6. Дано трикутник ABC, точка I_a — центр зовнівписаного кола, що дотикається до сторони BC, точка M — середина сторони BC, точка W — точка перетину бісектриси кута A трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Доведіть, що площа трикутника I_aBC обчислюється за формулою $S(I_aBC) = MW \cdot p$, де p — півпериметр трикутника ABC.

(*Микола Мороз*)

Розв'язання. Нехай площа трикутника ABC рівна S, $BC = a$, r — радіус вписаного кола в цей трикутник. Зрозуміло, що $S(I_aBC) = \frac{1}{2}a \cdot r_a$, де r_a — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC, оскільки він є висотою в трикутнику I_aBC. Тому формула, яку необхідно довести, рівносильна рівності $MW \cdot p = \frac{1}{2}a \cdot r_a$, яка в свою чергу рівносильна формулі $MW = \frac{a \cdot r_a}{2p}$. Але

$$\frac{a \cdot r_a}{2p} = \frac{a \cdot S}{2p(p-a)} = \frac{a \cdot r}{2(p-a)} = \frac{pr - (p-a)r}{2(p-a)} = \\ = \frac{S - (p-a)r}{2(p-a)} = \frac{(p-a)r_a - (p-a)r}{2(p-a)} = \frac{r_a - r}{2}.$$

Тому, щоб довести початкову формулу, досить довести рівність $MW = \frac{r_a - r}{2}$.



Відомо, що точки I, W та I_a лежать на одній прямій, причому точка W ділить відрізок I_aI навпіл (цей факт ще відомий як *теорема Мансіона*).

Також легко показати, що пряма MW перпендикулярна до BC. Справді, оскільки хорди BW та CW описаного кола рівні, бо стягують рівні дуги, то відрізок WM є медіаною у рівнобедреному трикутнику BWC, а тому і висотою.

Нехай точки K і T — точки дотику до сторони BC вписаного і зовнівписаного кіл відповідно, G — точка перетину прямих MW та IT. Зрозуміло, що $I_aT \parallel MW \parallel IK$.

Тоді, оскільки $I_aT \parallel MW$ і при цьому W — середина I_aI, то G — середина IT, а WG — середня лінія у трикутнику I_aIT. Звідси маємо, що $GW = \frac{r_a}{2}$.

Оскільки, як щойно було доведено, G — середина IT, і при цьому $GM \parallel IK$, то GM — середня лінія трикутника ITK. Тому $GM = \frac{r}{2}$.

Звідси остаточно отримуємо рівність $MW = GW - GM = \frac{r_a - r}{2}$. А тому справедлива і формула $S(I_aBC) = MW \cdot p$.