III Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи

І тур

Задача 1. Спортивний майданчик має форму прямокутника $ABCD$, причому кут між діагоналями AC і BD дорівнює 60° і $AB > BC$. Тренер доручив Андрійку пробігти спочатку 10 разів по маршруту $A-C-B-D-A$, а потім ще 15 разів по маршруту $A-D-A$. Андрійко виконав завдання, пробігши загалом 4,5 км. Якою є відстань AC на майданчику?

Задача 2. Дано рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$) з радіусом r вписаного в нього кола. Відомо, що точка M перетину медіан трикутника ABC належить вписаному в цей трикутник колу. Знайдіть відстань від вершини A до точки перетину бісектрис трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

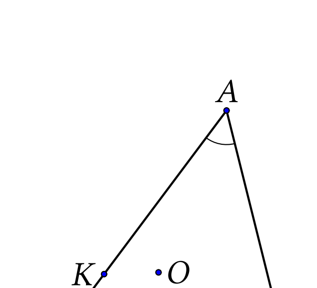
Задача 3. В чотирикутнику $ABCD$ кути B і D — прямі. Діагональ AC утворює зі стороною AB кут 40°, а зі стороною AD — кут 30°. Знайдіть гострий кут між діагоналями AC і BD.

Задача 4. Нехай ABC — трикутник, O — центр кола, описаного навколо нього, AD — діаметр цього кола. Відомо, що прямі CO і DB паралельні. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

(*Андрій Мостовий*)

Задача 5. У трикутнику ABC $\angle ABC = \angle ACB = 78^\circ$. На сторонах AB і AC обрано відповідно точки D та E так, що $\angle BCD = 24^\circ$, $\angle CBE = 51^\circ$. Знайдіть градусну міру кута $\angle BED$.

Задача 6. На дошці зображено трикутник ABC, його центр описаного кола — точка O, середина сторони BC — точка F, а також деяка точка K на стороні AC (див. рис.). Учитель повідомив, що $\angle BAC$ цього трикутника дорівнює гострому куту α і окремо накреслив кут, який дорівнює α. Після цього учитель витер дошку, залишивши лише точки O, F, K і кут α. Чи можливо з допомогою циркуля та лінійки відновити трикутник ABC? Відповідь обґрунтуйте.



(*Григорій Філіпповський*)

III Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи (поглиблене вивчення математики)

I тур

Задача 1. Відомо, що в трикутнику ABC відстані від точки перетину бісектрис до кожної з вершин трикутника не перевищують діаметра вписаного в цей трикутник кола. Знайдіть кути трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Задача 2. Дано різносторонній трикутник ABC. Відомо, що I — центр вписаного кола в цей трикутник, точки D, E, F — точки дотику цього кола до сторін AB, BC, CA відповідно. Нехай P — точка перетину прямих DE і AI. Доведіть, що $CP \perp AI$.

(*Віталій Ветров*)

Задача 3. Нехай $ABCD$ — вписаний чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці P. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини протилежних сторін чотирикутника $ABCD$ ділить відрізок OP навпіл (O — центр кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$).

(*Олександр Дзюняк*)

Задача 4. В трикутнику ABC сторона BC дорівнює a. Точка F — середина AB, I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. Виявилось, що $\angle AIF = \angle ACB$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Задача 5. У трикутнику ABC відомо, що $BC = 5$, $AC - AB = 3$. Доведіть, що $r < 2 < r_a$ (тут r — радіус кола, вписаного у трикутник ABC, r_a — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається сторони BC).

(*Микола Мороз*)

Задача 6. У гострокутному трикутнику ABC провели бісектрису $\angle A$ до перетину із описаним навколо трикутника ABC колом у точці W. Через точку W проведено пряму паралельно до сторони AB, яка перетинає це ж коло у точці $F \neq W$. Опишіть побудову трикутника ABC, якщо дано відрізки FA і FW, а також $\angle FAC$.

(*Андрій Мостовий*)

III Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи

I тур

Задача 1. Коло з центром в початку координат і радіусом 5 перетинає вісь абсцис в точках A та B. Нехай точка P належить прямій $x = 11$, а точка Q є точкою перетину відрізка AP із цим колом. Відомо, що точка Q є серединою відрізка AP. Знайдіть координати точки P.

Задача 2. Дано рівносторонній трикутник ABC. Відомо, що радіус вписаного кола в цей трикутник дорівнює 1. Прямокутник $ABDE$ такий, що точка C належить його стороні DE. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника $ABDE$.

Задача 3. Нехай $ABCDEF$ — правильний шестикутник. Відомо, що площа трикутника ACD дорівнює 8. Знайдіть площу шестикутника $ABCDEF$.

Задача 4. Знайдіть кути вписаного чотирикутника, якщо відомо, що кожна його діагональ є бісектрисою одного кута і трисектрисою протилежного (трисектриса кута — це один із двох променів, які лежать всередині кута і ділять його на три рівні частини).

(*В'ячеслав Ясінський*)

Задача 5. На сторонах прямокутного трикутника зовні побудовано правильні дев'ятикутники. Площі дев'ятикутників, які побудовано на одному з катетів та на гіпотенузі, дорівнюють відповідно 1602 см^2 та 2019 см^2. Чому дорівнює площа дев'ятикутника, який побудовано на іншому катеті цього трикутника?

(*Владислав Кирилюк*)

Задача 6. У трикутнику ABC відомо, що $BC = 5$, $AC - AB = 3$. Доведіть, що $r < 2$ (тут r — радіус кола, вписаного у трикутник ABC).

(*Микола Мороз*)

III Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

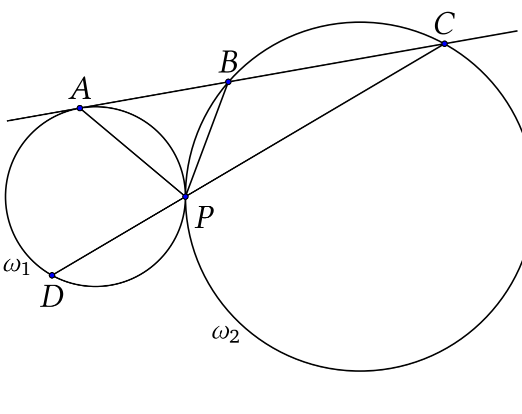
10–11 класи (поглиблене вивчення математики)

I тур

Задача 1. Коло $x^2+y^2 = 25$ перетинає вісь абсцис в точках A та B. Нехай точка P лежить у першій координатній чверті і належить прямій $x = 11$, C — точка перетину цієї прямої з віссю Ox, а точка Q є точкою перетину відрізка AP із даним колом. Виявилось, що площа трикутника AQB в чотири рази менша площі трикутника APC. Знайдіть координати точки Q.

Задача 2. В основі чотирикутної піраміди $SABCD$ лежить прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 1$ і $AD = 10$. Ребро SA піраміди перпендикулярне до основи, $SA = 4$. На ребрі AD знайдіть таку точку M, щоб периметр трикутника SMC був мінімальним.

Задача 3. Два кола ω_1 і ω_2 дотикаються зовнішнім чином у точці P. Через точку A кола ω_1 проведено дотичну до цього кола, яка перетинає коло ω_2 у точках B та C (див. рисунок). Пряма CP повторно перетинає коло ω_1 в точці D. Доведіть, що промінь PA є бісектрисою кута DPB.



Задача 4. В трикутнику ABC сторона BC дорівнює a. Точка F — середина AB, I — точка перетину бісектрис трикутника ABC. Виявилось, що $\angle AIF = \angle ACB$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Задача 5. В прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB кут A більший за кут B. Точка N на гіпотенузі AB така, що $BN = AC$. Відновіть цей трикутник ABC за точкою N, точкою F на катеті AC та прямою l, що містить бісектрису кута A трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

Задача 6. Дано трикутник ABC, точка I_a — центр зовнівписаного кола, що дотикається до сторони BC, точка M — середина сторони BC, точка W — точка перетину бісектриси кута A трикутника ABC з описаним навколо нього колом. Доведіть, що площа трикутника I_aBC обчислюється за формулою $S(I_aBC) = MW \cdot p$, де p — півпериметр трикутника ABC.

(*Микола Мороз*)