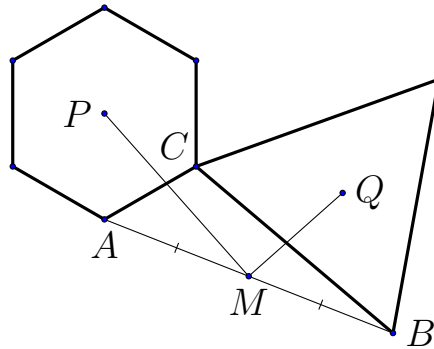


**Завдання**  
**IV Турніру студентів-математиків**  
**Вінницького державного педагогічного університету**  
**імені Михайла Коцюбинського**

1. «Від шестикутника до трикутника». На рисунку зображено правильний шестикутник, центром якого є точка  $P$ , і правильний трикутник, центром якого є точка  $Q$ , причому вони мають спільну вершину  $C$ . Нехай точка  $M$  — середина відрізка  $AB$ . Доведіть, що  $\angle PMQ = 90^\circ$ .



2. «Нерівність з коренями». Доведіть нерівність

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} \geq \sqrt{x^2 + xz + z^2}.$$

3. «Економний прямокутник». Знайдіть найменше число  $S$  таке, що будь-які два квадрати, сума площ яких дорівнює 1, можна розмістити без перекриття їхніх внутрішніх точок в прямокутнику з площею  $S$ . (Можна вважати, що сторони квадратів паралельні сторонам прямокутника).

4. «Занадто багато невідомих». Про рівняння  $7x^3 - ax^2 + bx - 12 = 0$  відомо, що воно має три дійсних додатних корені  $x_1, x_2, x_3$ , причому

$$\frac{7}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 3.$$

Знайдіть значення  $a$  та  $b$ .

5. «Асоціативність і комутативність». Нехай  $*$  — асоціативна операція, яку задано на множині  $S$ . Нехай  $a, b, c$  — такі три елементи множини  $S$ , що:

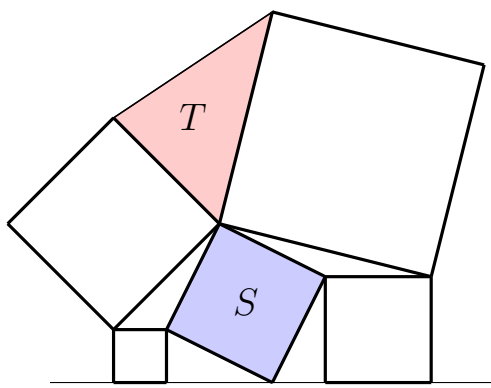
- $a * b = b * a$ ;
- $a * c = c * a$ ;
- $a * b * a = a$ ;
- $b * a * b = b$ .

Доведіть, що  $b * c = c * b$ .

**6. «Дуель дурнів».** Дві особи  $A$  та  $B$  вирішили провести дуель на шести-зарядному револьвері. Вони кладуть кулю в одне з шести відділень барабану, після чого випадковим чином надають обертів барабану. Після цього  $A$  стріляє в  $B$ . Якщо постріл відбувається, то гра завершується з перемогою гравця  $A$ . В іншому випадку,  $B$  бере револьвер, випадковим чином обертає барабан і стріляє в  $A$ . Дуель триває до того, як один з гравців не застрелить іншого. Яка ймовірність того, що  $A$  виграє (тобто виживе) в цій жорстокій грі?

**7. «Перша цифра».** Для деякого натурального  $n$  числа  $2^n$  і  $5^n$  починаються на одну і ту ж цифру (в десятковій системі числення). Якою може бути ця цифра?

**8. «Задача з японського храму».** П'ять квадратів розміщено так, як показано на рисунку. Доведіть, що площа квадрата  $S$  дорівнює площі трикутника  $T$ .



**9. «Незвичні шашки».** а) На всіх клітинах дошки  $1 \times 2017$ , крім крайніх, стоїть по шашці. Усі шашки білі, а центральна — чорна. Андрійко і Марійка ходять по черзі, розпочинає Андрійко. Крок — це стрибок шашки рівно через одну шашку на вільну клітину; при цьому шашка, через яку перестрибнули, знімається. Виграє той, хто зніме чорну шашку. Хто з гравців може забезпечити собі виграш незалежно від ходів суперника?

б) Гральне поле — це нескінченна смуга, шириною в одну клітину. На 100 клітинах підряд стоять по одній шашці. Усі шашки білі, а одна з двох центральних — чорна. Андрійко і Марійка ходять по черзі, розпочинає Андрійко. Крок — це стрибок шашки рівно через одну шашку на вільну клітину; при цьому шашка, через яку перестрибнули, знімається. Виграє той, хто зніме чорну шашку. Хто з гравців може забезпечити собі виграш незалежно від ходів суперника?

**10. «Дві основи».** Число 40 володіє такою цікавою властивістю: його запис в семірковій системі числення — 55, а в дев'ятірковій — 44. Знайдіть найменше натуральне число, яке в системах числення з двома різними основами має представлення, яке складається із трьох однакових цифр.