V Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

м. Вінниця,
26 березня 2021 р.

V Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

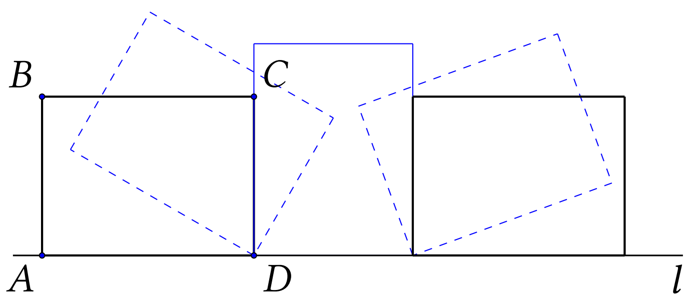
8–9 класи (базовий варіант)

1. Про чотирикутник $ABCD$ відомо, що $BC = CD = AC$, а кут $\angle ABC = 70°$. Обчисліть градусну міру кута $\angle ADB$.

(*Олексій Панасенко*)

2. Дано прямокутник $ABCD$, який розташовано на прямій l. Його прагнуть "перевернути", здійснивши спочатку поворот навколо вершини D, а після того, як точка C опиниться на прямій l — здійснивши поворот навколо вершини C (див. рисунок). Чому дорівнює довжина лінії, по якій рухається вершина A при такому переміщенні, якщо $AB = 30$ см, $BC = 40$ см?

(*Олексій Панасенко*)



3. Відрізки AC та BD перпендикулярні, причому AC вдвічі більший за BD і перетинає BD в його середині. Знайдіть величину кута BAD, якщо відомо, що $\angle CAD = \angle CDB$. (*Григорій Філіпповський*)

4. K — довільна точка всередині гострокутного трикутника ABC, в якому $\angle A = 30°$. F та N — точки перетину медіан в трикутниках AKC і AKB відповідно. Відомо, що $FN = q$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC. (*Григорій Філіпповський*)

5. Побудуйте рівнобічну трапецію за висотою і середньою лінією, якщо відомо, що середня лінія ділиться діагоналями на три рівні частини.

(*Григорій Філіпповський*)

6. Дано чотирикутник $ABCD$, навколо якого можна описати коло. До сторін AD і CD провели серединні перпендикуляри, які перетинаються у точці Q та перетинають сторони BC і AB у точках P і K відповідно. Виявилось, що точки K, B, P, Q лежать на одному колі. Доведіть, що точки A, Q, C лежать на одній прямій.

(*Олена Артемчук*)

V Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи (складний варіант)

1. K — довільна точка всередині гострокутного трикутника ABC, в якому $\angle A = 30^\circ$. F та N — точки перетину медіан в трикутниках AKC і AKB відповідно. Відомо, що $FN = q$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

2. Дано чотирикутник $ABCD$, навколо якого можна описати коло. До сторін AD і CD провели серединні перпендикуляри, які перетинаються у точці Q та перетинають сторони BC і AB у точках P і K відповідно. Виявилось, що точки K, B, P, Q лежать на одному колі. Доведіть, що точки A, Q, C лежать на одній прямій.

(*Олена Артемчук*)

3. Доведіть, що в трикутнику ABC основа висоти AH, точка дотику вписаного кола зі стороною BC і проекції точки A на бісектриси $\angle B$ та $\angle C$ трикутника лежать на одному колі.

(*Дмитро Прокопенко*)

4. Дано гострокутний трикутник ABC, в якому $\angle BAC = 60^\circ$. На сторонах AC та AB взято точки T та Q відповідно — такі, що $CT = TQ = QB$. Доведіть, що центр зовнівписаного кола трикутника ATQ належить стороні BC.

(*Дмитро Швєцов*)

5. Навколо рівнобедреного трикутника ABC з основою BC описано коло. Бісектриса кута C і бісектриса кута A перетинають коло у точках E і D відповідно, а відрізок DE перетинає сторони BC і AB у точках P і Q відповідно. Відновіть $\triangle ABC$ за точками D, P, Q, якщо відомо, в якій півплощині відносно прямої DQ лежить вершина A.

(*Марія Рожкова*)

6. В колі ω провели хорду BC, яка не є діаметром. Точка A рухається по колу ω. H — ортоцентр трикутника ABC. Доведіть, що при будь-якому розташуванні точки A коло, побудоване на AH як на діаметрі, дотикається двох фіксованих кіл ω_1 та ω_2.

(*Дмитро Прокопенко*)

V Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач
10–11 класи (базовий варіант)

1. У коло, діаметр якого 20 см, вписано правильний дванадцятикутник $A_1A_2\dots A_{12}$. Обчисліть периметр п'ятикутника $A_1A_3A_6A_8A_{11}$.

(*Олексій Панасенко*)

2. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 20$ см, а $AC = 24$ см. Точка M належить стороні BC і знаходиться на однаковій відстані від сторін AB і AC. Знайдіть цю відстань.

(*Олександр Школьний*)

3. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $AD = DC = 3\sqrt{2}$ см, а $DD_1 = 8$ см. Через діагональ B_1D паралелепіпеда паралельно до прямої A_1C_1 проведено площину γ.

а) Зобразіть переріз паралелепіпеда площиною γ.

б) Обґрунтуйте, якою геометричною фігурою є цей переріз, та знайдіть його площу.

(*Олександр Школьний*)

4. Нехай BF та CN — висоти гострокутного трикутника ABC. Бісектриси кутів ACN та ABF перетинаються в точці T. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника FTN, якщо відомо, що $BC = a$.

(*Григорій Філіпповський*)

5. В коло ω вписано $\triangle ABC$, вказано його інцентр — точку I. Користуючись лише лінійкою розділіть відрізок AI навпіл.

(*Григорій Філіпповський*)

6. Через точку X в просторі провели три прямі. Ці прямі перетнули деяку сферу в шести точках. Виявилось, що відстані від точки X до деяких п'яти з них дорівнюють 2 см, 3 см, 4 см, 5 см, 6 см. Якою може бути відстань від точки X до шостої точки?

(*Олексій Панасенко*)

V Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи (складний варіант)

1. Нехай BF та CN — висоти гострокутного трикутника ABC. Бісектриси кутів ACN та ABF перетинаються в точці T. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника FTN, якщо відомо, що $BC = a$.

(*Григорій Філіпповський*)

2. У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Діагоналі AC і BD перетинаються в точці F, причому $BC = CF$, а діагональ AC є бісектрисою кута A. Визначіть два інші кути чотирикутника $ABCD$.

(*Марія Рожкова*)

3. В трикутнику ABC h_a; h_b; h_c — висоти, а p — його півпериметр. Порівняйте p^2 та $h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a$.

(*Григорій Філіпповський*)

4. В трикутнику ABC, точка H є ортоцентром. Коло з центром у точці H та з радіусом AH перетинає прямі AB та AC у точках E та D відповідно. Точку A відобразили відносно прямої BC, отримали точку X. Доведіть, що XH є бісектрисою кута DXE.

(*Матвій Курський*)

5. В трикутнику ABC точка I — центр вписаного кола. AT — відрізок дотичної до описаного навколо трикутника BIC кола. На промені AB за точку B і на промені AC за точку C відклали відрізки BD і CE відповідно такі, що $BD = CE = AT$. Нехай точка F така, що $ABFC$ — паралелограм. Доведіть, що точки D, E та F лежать на одній прямій.

(*Дмитро Прокопенко*)

6. У гострокутному трикутнику ABC точка I — центр вписаного кола, точка T — середина дуги ABC описаного кола трикутника ABC. Виявилося, що $\angle AIT = 90^\circ$. Доведіть, що $AB + AC = 3BC$.

(*Матвій Курський*)