VI Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи (базовий варіант)

1. Дано кут, градусна міра якого дорівнює 108°. Опишіть, як за допомогою циркуля та лінійки можна поділити цей кут на три рівних.

(*Юхим Рабінович*)

2. У трикутнику ABC кут C у чотири рази менший за кожен із двох інших кутів. З вершини кута A проведені висота AK та бісектриса AL. Відомо, що довжина AL дорівнює l. Знайдіть довжину відрізка LK.

(*Григорій Філіпповський*)

3. У рівнобедреному прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C точка M — середина катета AC. На серединному перпендикулярі до AC обрали таку точку D, що $\angle CDM = 30^\circ$, причому D та B лежать по різні сторони від AC. Знайдіть величину кута $\angle ABD$.

(*Володимир Петрук*)

4. Нехай BM — медіана трикутника ABC. На продовженні MB за точку B обрано точку K так, що $BK = \frac{1}{2}AC$. Доведіть, що якщо кут AMB дорівнює 60°, то $AK = BC$.

(*Михайло Штанденко*)

5. На стороні AD квадрата $ABCD$ обрано точку X. У трикутник ABX вписано коло, яке дотикається до AX, BX і AB в точках N, K і F відповідно. Доведіть, що промінь NK проходить через центр O квадрата $ABCD$.

(*Дмитро Швецов*)

6. Нехай AD, BE та CF є діаметрами кола, описаного навколо гострокутного трикутника ABC. Точка N — середина дуги $\smile CAD$, а точка M — середина дуги $\smile BAD$. Доведіть, що прямі EN та MF перетинаються на бісектрисі кута BAC.

(*Матвій Курський*)

VI Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи (складний варіант)

1. Нехай BM — медіана трикутника ABC. На продовженні MB за точку B обрано точку K так, що $BK = \frac{1}{2}AC$. Доведіть, що якщо кут AMB дорівнює 60°, то $AK = BC$.

(*Михайло Штанденко*)

2. На стороні AD квадрата $ABCD$ обрано точку X. У трикутник ABX вписано коло, яке дотикається до AX, BX і AB в точках N, K і F відповідно. Доведіть, що промінь NK проходить через центр O квадрата $ABCD$.

(*Дмитро Швецов*)

3. Відновіть трикутник ABC, в якому $\angle B - \angle C = 90^\circ$, за ортоцентром H та точками M_1 і L_1 — відповідно основами медіани та бісектриси, проведених з вершини A.

(*Григорій Філіпповський*)

4. Нехай X — довільна точка на стороні BC трикутника ABC. Трикутник T утворено бісектрисами кутів ABC, ACB та AXC. Доведіть, що описане коло трикутника T, проходить через вершину A.

(*Дмитро Прокопенко*)

5. У гострокутному трикутнику ABC точка I — інцентр, H — ортоцентр, O — центр описаного кола, K і T — точки дотику відповідно вписаного та зовнівписаного кіл зі стороною BC. Виявилося, що відрізок TI проходить через точку O. Доведіть, що HK є бісектрисою кута BHC.

(*Матвій Курський*)

6. Нехай s — довільна пряма, яка проходить через інцентр трикутника ABC — точку I. Пряма s перетинає прямі AB та BC у точках D та E відповідно. Точки P та Q — центри описаних кіл DAI та CEI відповідно, а точка F — друга точка перетину цих кіл. Доведіть, що описане коло трикутника PQF завжди проходить через сталу точку на площині незалежно від положення прямої s.

(*Матвій Курський*)

VI Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи (базовий варіант)

1. У трикутнику ABC медіану AM продовжено до перетину з описаним колом у точці D. Відомо, що $AB = 2AM$ та $AD = 4AM$. Знайдіть кути трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

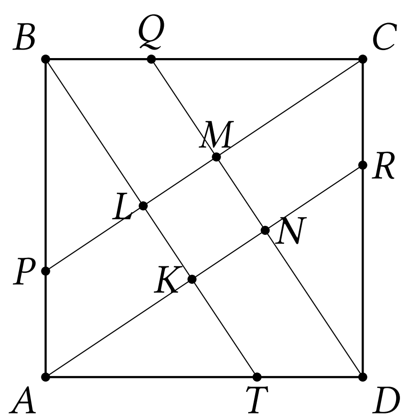
2. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ обрано точки P, Q, R, T відповідно так, що

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RD} = \frac{DT}{TA} = \frac{1}{2}.$$

Відрізки AR, BT, CP, DQ у перетині утворюють чотирикутник $KLMN$ (див. рисунок).

а) Доведіть, що $KLMN$ — квадрат.

б) Знайдіть відношення площ квадратів $KLMN$ і $ABCD$.



(*Олександр Школьний*)

3. За допомогою лише однієї лінійки без поділок відновіть трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за вершинами A і B, точкою O перетину діагоналей трапеції та точкою M — серединою основи AD.

(*Юхим Рабінович*)

4. Точку I перетину бісектрис трикутника ABC симетрично відобразили відносно сторін і отримали точки P, Q, T. Виявилося, що коло s, описане навколо трикутника PQT, проходить через вершину A. Знайдіть радіус описаного кола трикутника ABC, якщо $BC = a$.

(*Григорій Філіпповський*)

5. Нехай ABC — прямокутний трикутник з катетом $CB = 2$ і гіпотенузою $AB = 4$. На гіпотенузі AB обирається точка K, а на катеті AC — точка L.

а) Опишіть і обґрунтуйте, як побудувати такі точки K і L, щоб сума відстаней $CK + KL$ була найменшою з можливих.

б) Знайдіть найменше можливе значення $CK + KL$.

(*Олексій Панасенко*)

6. У трикутнику ABC ($AC > AB$) точка N — середина BC, а I — точка перетину бісектрис. Промінь AI перетинає описане коло трикутника ABC в точці W, а з неї проведено перпендикуляр WF до сторони AC. Знайдіть довжину відрізка CF, якщо радіус вписаного у трикутник ABC кола дорівнює r та $\angle INB = 45°$.

(*Григорій Філіпповський*)

VI Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи (складний варіант)

1. Від трикутника ABC залишилися лише інцентр I, точка K дотику вписаного кола зі стороною AB, а також центр I_a зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC. Побудуйте трикутник, рівновеликий до трикутника ABC.

(*Григорій Філіпповський*)

2. У гострокутному трикутнику ABC сума відстаней від вершин B і C до ортоцентра H дорівнює $4r$, де r — радіус кола, вписаного у цей трикутник. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо відомо, що $BC = a$.

(*Григорій Філіпповський*)

3. Дано трикутник ABC, в якому медіани BE і CF перпендикулярні. Нехай M — точка перетину медіан цього трикутника, а L — його точка Лемуана (точка перетину прямих, симетричних до медіан відносно бісектрис відповідних кутів). Доведіть, що $ML \perp BC$.

(*Михайло Сидоренко*)

4. У трикутнику ABC виконується співвідношення $AB+AC = 2BC$. Нехай I та M — інцентр та точка перетину медіан трикутника ABC, AL — його бісектриса, а точка P — ортоцентр трикутника BIC. Доведіть, що точки L, M, P лежать на одній прямій.

(*Матвій Курський*)

5. Нехай X — довільна точка на стороні BC трикутника ABC. Трикутник T утворено бісектрисами кутів ABC, ACB та AXC. Доведіть, що:

а) описане коло трикутника T, проходить через вершину A;

б) ортоцентр трикутника T належить прямій BC.

(*Дмитро Прокопенко*)

6. Нехай ω — описане коло трикутника ABC, в якому $AC < AB$, K — середина дуги BAC, KW — діаметр кола ω. Коло γ вписане у криволінійний трикутник, утворений відрізками BC, AB та дугою AC кола ω. Виявилося, що коло γ також дотикається до KW у точці F. Нехай I — інцентр трикутника ABC, M — середина меншої дуги AK, а T — друга точка перетину MI з колом ω. Доведіть, що прямі FI, TW та BC перетинаються в одній точці.

(*Михайло Сидоренко*)