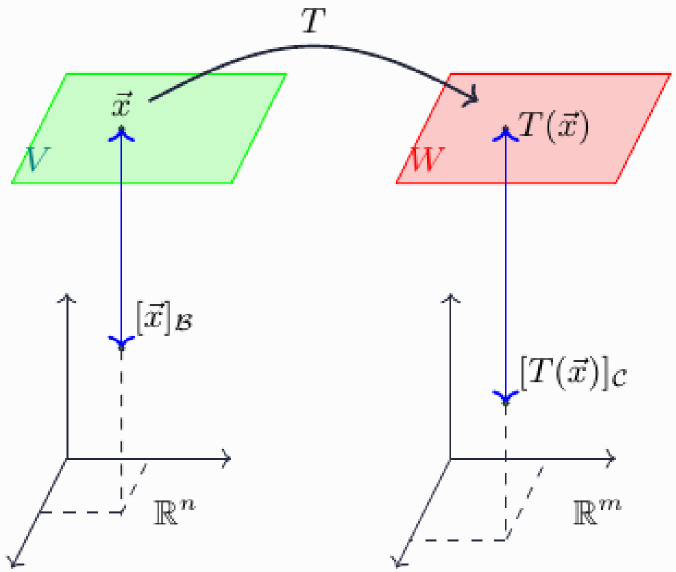
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 1.

Метод Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь



Олексій Панасенко

20 лютого 2023 р.

День в історії

20 лютого 1967 року — народився Курт Кобейн (1967–1993), американський рок-музикант, вокаліст, гітарист і автор пісень. Засновник і лідер гурту «Nirvana»

20 лютого 2014 року — Десятки антиурядових протестувальників Євромайдану загинули в Києві; багато з них були вбиті снайперами.

Системи лінійних рівнянь

Основні означення

Означення

Лінійним рівнянням з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P називається рівняння, яке може бути записане у вигляді

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — елементи поля P (зазвичай відомі).

Приклад

1) $4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1$ — лінійне рівняння з двома невідомими;
2) $x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3$ — лінійне рівняння з трьома невідомими;
3) $x_1x_2 = 6 + x_1 + x_2$ не є лінійним.

Основні означення

Означення

Лінійним рівнянням з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P називається рівняння, яке може бути записане у вигляді

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — елементи поля P (зазвичай відомі).

Означення

Розв'язком лінійного рівняння (1) називається впорядкована множина чисел $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, яка при підстановці в це рівняння замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює його на правильну числову рівність.

Основні означення

Означення

Системою лінійних рівнянь називається набір з одного чи більше лінійних рівнянь відносно однієї і тієї ж множини змінних (наприклад, $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{2}$$

Означення

Розв'язком системи лінійних рівнянь (2) називається впорядкована множина чисел $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, яка при підстановці в дану систему відповідно замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$ перетворює кожне рівняння системи на правильну числову рівність.

Основні означення

Розв’язати систему — означає знайти множину її розв’язків.

Означення

Якщо множина розв’язків непорожня, то система називається сумісною.

Якщо система розв’язків не має, то система називається несумісною.

Якщо сумісна система має єдиний розв’язок, то вона називається визначеною.

Якщо сумісна система має більше одного розв’язку, то вона називається невизначеною.

Основні означення

Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

називається однорідною.

Якщо $(0,0,\dots,0)$ не є розв'язком системи лінійних рівнянь, то така система називається неоднорідною.

Приклад

Дослідимо на сумісність систему

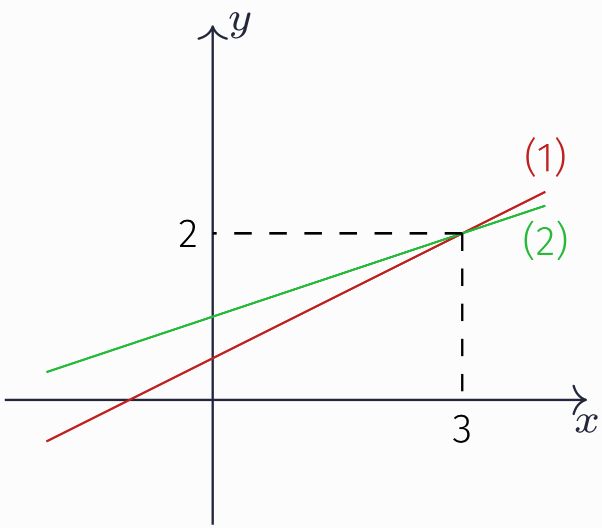
$$\begin{cases} \quad x - 2y = -1, \\ -x + 3y = 3. \end{cases}$$

Основні означення

Приклад

Дослідимо на сумісність систему

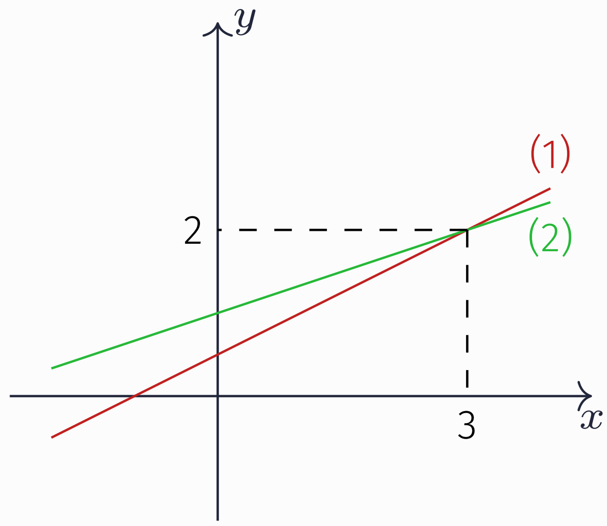
$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ -x + 3y = 3. \end{cases}$$



Приклад

Дослідимо на сумісність систему

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ -x + 3y = 3. \end{cases}$$



Отже, система сумісна (причому $(3,2)$ — розв'язок системи).

Елементрарні перетворення систем лінійних рівнянь.

Означення

Дві системи називаються еквівалентними (рівносильними), якщо множини їхніх розв'язків співпадають.

Основна ідея при розв'язуванні систем лінійних рівнянь — заміна даної системи на еквівалентну (яку розв'язати з якихось міркувань простіше).

Елементрарні перетворення систем лінійних рівнянь.

Елементарні перетворення системи:

1. Перестановка двох рівнянь системи;

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases} \quad \text{(переставимо 1-е і 2-е рівняння)}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Елементрарні перетворення систем лінійних рівнянь.

Елементарні перетворення системи:

1. Перестановка двох рівнянь системи;
2. Множення (ділення) будь-якого рівняння системи на відмінний від нуля елемент поля P.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3; \end{cases} \quad \text{(поділимо 1-е рівняння на 2)}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Елементрарні перетворення систем лінійних рівнянь.

Елементарні перетворення системи:

1. Перестановка двох рівнянь системи;
2. Множення (ділення) будь-якого рівняння системи на відмінний від нуля елемент поля P.
3. Додавання до будь-якого рівняння системи будь-якого іншого рівняння, помноженого на довільний елемент поля P.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \end{cases}$$ *(до 2-го рівняння додамо 1-е, помножене на 2)*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 \qquad - 3x_3 = 4, \end{cases}$$

Елементрарні перетворення систем лінійних рівнянь.

Елементарні перетворення системи:

1. Перестановка двох рівнянь системи;
2. Множення (ділення) будь-якого рівняння системи на відмінний від нуля елемент поля P.
3. Додавання до будь-якого рівняння системи будь-якого іншого рівняння, помноженого на довільний елемент поля P.
4. Вилучення із системи рівняння виду $0 = 0$ або приписування до системи такого рівняння.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2 = 2, \quad \text{(вилучаємо третє рівняння)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Елементрарні перетворення систем лінійних рівнянь.

Елементарні перетворення системи:

1. Перестановка двох рівнянь системи;
2. Множення (ділення) будь-якого рівняння системи на відмінний від нуля елемент поля P.
3. Додавання до будь-якого рівняння системи будь-якого іншого рівняння, помноженого на довільний елемент поля P.
4. Вилучення із системи рівняння виду $0 = 0$ або приписування до системи такого рівняння.

Теорема

Елементарне перетворення кожної системи лінійних рівнянь переводить її у еквівалентну систему.

Приклади розв'язування систем лінійних рівнянь

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ \qquad y + 3z = 5, \\ \qquad\qquad 5z = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. З останнього рівняння однозначно знаходимо, що $z = 2$. Тоді з другого знаходимо, що $y = 5 - 3z = -1$, а з першого $x = 2 + y + z = 3$.

Відповідь. $\{(3, -1{,}2)\}$.

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

Приклади розв'язування систем лінійних рівнянь

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

Приклади розв'язування систем лінійних рівнянь

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases} \xrightarrow[\text{IIIр.}-2\cdot\text{Iр.}]{\text{IIр.}-3\cdot\text{Iр.}}$$

Приклади розв'язування систем лінійних рівнянь

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases} \xrightarrow[\text{IIIр.}-2\cdot\text{Iр.}]{\text{IIр.}-3\cdot\text{Iр.}} \begin{cases} x - y - z = 2, \\ 5z = 10, \\ y + 3z = 5. \end{cases}$$

Приклади розв'язування систем лінійних рівнянь

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases} \xrightarrow[\text{IIIр.}-2\cdot\text{Iр.}]{\text{IIр.}-3\cdot\text{Iр.}} \begin{cases} x - y - z = 2, \\ 5z = 10, \\ y + 3z = 5. \end{cases} \xrightarrow{\text{IIр.}\leftrightarrow\text{IIIр.}}$$

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases} \xrightarrow[\text{IIIр.}-2\cdot\text{Iр.}]{\text{IIр.}-3\cdot\text{Iр.}} \begin{cases} x - y - z = 2, \\ 5z = 10, \\ y + 3z = 5. \end{cases} \xrightarrow{\text{IIр.}\leftrightarrow\text{IIIр.}}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ y + 3z = 5, \\ 5z = 10. \end{cases}$$

Приклади розв'язування систем лінійних рівнянь

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ 3x - 3y + 2z = 16, \\ 2x - y + z = 9. \end{cases} \xrightarrow[\text{IIIр.}-2\cdot\text{Iр.}]{\text{IIр.}-3\cdot\text{Iр.}} \begin{cases} x - y - z = 2, \\ 5z = 10, \\ y + 3z = 5. \end{cases} \xrightarrow{\text{IIр.}\leftrightarrow\text{IIIр.}}$$

$$\begin{cases} x - y - z = 2, \\ y + 3z = 5, \\ 5z = 10. \end{cases}$$

Відповідь. $\{(3, -1, 2)\}$.

Східчаста форма матриці

Матриця системи лінійних рівнянь.

Нехай є система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Це основна матриця системи

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Це розширена матриця системи

Східчаста форма матриці системи

Означення

Матриця у східчастій формі (або рядково східчастій формі), якщо:

1) усі ненульові рядки знаходяться вище всіх нульових рядків;
2) в кожному ненульовому рядку перший ненульовий елемент (він називається ведучим елементом рядка) знаходиться в стовпці справа від ведучого елемента у рядку над ним.

Східчаста форма матриці системи

Означення

Матриця у східчастій формі (або рядково східчастій формі), якщо:

1) усі ненульові рядки знаходяться вище всіх нульових рядків;
2) в кожному ненульовому рядку перший ненульовий елемент (він називається ведучим елементом рядка) знаходиться в стовпці справа від ведучого елемента у рядку над ним.

Приклад

Наступні матриці мають східчасту форму (тут ведучі елементи кожного рядка обведені в рамку; $\star$ — довільний елемент, $\boxed{\star}$ — довільний ненульовий елемент):

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \boxed{\star} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\star} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\star} & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\star} \end{bmatrix}.$$

Елементарні перетворення рядків матриці

Означення

Елементарними перетвореннями рядків матриці:

1. Перестановка двох рядків місцями.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

Означення

Елементарними перетвореннями рядків матриці:

1. Перестановка двох рядків місцями.
2. Множення рядка матриці на ненульовий елемент поля P.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot 7 \\ \\ \\ \end{array}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

Означення

Елементарними перетвореннями рядків матриці:

1. Перестановка двох рядків місцями.
2. Множення рядка матриці на ненульовий елемент поля P.
3. Додавання до одного рядка іншого, помноженого на певне число.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ + \end{array}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

Означення

Елементарними перетвореннями рядків матриці:

1. Перестановка двох рядків місцями.
2. Множення рядка матриці на ненульовий елемент поля P.
3. Додавання до одного рядка іншого, помноженого на певне число.
4. Вилучення нульового рядка, якщо він є (або ж приписування нульового рядка).

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\mid\cdot 7\\ \\ \quad\cdot 5\\ \quad +\\ \\ \end{array}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

Означення

Елементарними перетвореннями рядків матриці:

1. Перестановка двох рядків місцями.
2. Множення рядка матриці на ненульовий елемент поля P.
3. Додавання до одного рядка іншого, помноженого на певне число.
4. Вилучення нульового рядка, якщо він є (або ж приписування нульового рядка).

Означення

Дві матриці називаються рядково еквівалентними, якщо існує послідовність елементарних рядкових операцій, які переводять одну матрицю в іншу.

Елементарні перетворення рядків матриці

Означення

Елементарними перетвореннями рядків матриці:

1. Перестановка двох рядків місцями.
2. Множення рядка матриці на ненульовий елемент поля P.
3. Додавання до одного рядка іншого, помноженого на певне число.
4. Вилучення нульового рядка, якщо він є (або ж приписування нульового рядка).

Означення

Дві матриці називаються рядково еквівалентними, якщо існує послідовність елементарних рядкових операцій, які переводять одну матрицю в іншу.

Теорема

Кожну матрицю шляхом елементарних перетворень можна звести до східчастої форми (можливо, не єдиним способом).

Елементарні перетворення рядків матриці

Приклад

Звести до східчастої форми матрицю

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ \\ \\ \end{array}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\
2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\
-1 & 1 & 3 & 6 & 5
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\
+ \\
\qquad\quad + \\

\end{array}
$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{array}{l}\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}\end{array}
\begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\ + \\ \quad + \\ \qquad + \end{array}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\
2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\
2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\
-1 & 1 & 3 & 6 & 5
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\
+ \\
+ \\
+
\end{array}
\sim
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\
0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\
0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\
0 & 3 & -1 & 2 & 10
\end{bmatrix}
$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \mid : 8 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\ + \\ \quad + \\ \quad\quad + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid :8 \\ \\ \\ \end{array}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : 8 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \ \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : 8 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&-4&-4&5\\2&4&0&0&2\\2&3&2&1&5\\-1&1&3&6&5\end{bmatrix}\begin{array}{l}\cdot(-2)\quad\cdot(-2)\\+\\+\\+\end{array}\sim\begin{bmatrix}1&2&-4&-4&5\\0&0&8&8&-8\\0&-1&10&9&-5\\0&3&-1&2&10\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \mid:8\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&-4&-4&5\\0&\boxed{-1}&10&9&-5\\0&0&1&1&-1\\0&3&-1&2&10\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \cdot 3\\ \\ +\end{array}$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$
\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \mid : 8 \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \\ + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}
$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$
\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \mid : 8 \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \\ + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix}
$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \ \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : 8 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-29) \\ + \end{array} \sim$$

Елементарні перетворення рядків матриці

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : 8 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \\ + \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 29 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-29) \\ + \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Поради щодо зведення матриці до східчастої форми

- Обрати крайній зліва стовпець, не всі елементи якого дорівнюють нулю. Створити ведучий елемент першого рядка (він повинен бути ненульовим; зручно, якщо ведучий елемент дорівнює ± 1), використовуючи елементарне перетворення «перестановка рядків».

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Поради щодо зведення матриці до східчастої форми

- Обрати крайній зліва стовпець, не всі елементи якого дорівнюють нулю. Створити ведучий елемент першого рядка (він повинен бути ненульовим; зручно, якщо ведучий елемент дорівнює ± 1), використовуючи елементарне перетворення «перестановка рядків».

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-1} & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Поради щодо зведення матриці до східчастої форми

- Обрати крайній зліва стовпець, не всі елементи якого дорівнюють нулю. Створити ведучий елемент першого рядка (він повинен бути ненульовим; зручно, якщо ведучий елемент дорівнює ± 1), використовуючи елементарне перетворення «перестановка рядків».
- Використовуючи цей ведучий елемент, створити в стовпці під ним нулі. Цього завжди можна досягти, додаючи до кожного рядка перший рядок, що помножений на відповідний коефіцієнт.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-1} & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

Поради щодо зведення матриці до східчастої форми

- Обрати крайній зліва стовпець, не всі елементи якого дорівнюють нулю. Створити ведучий елемент першого рядка (він повинен бути ненульовим; зручно, якщо ведучий елемент дорівнює ± 1), використовуючи елементарне перетворення «перестановка рядків».
- Використовуючи цей ведучий елемент, створити в стовпці під ним нулі. Цього завжди можна досягти, додаючи до кожного рядка перший рядок, що помножений на відповідний коефіцієнт.
- Повторити описані вище дії для підматриці, яка одержується з даної після викреслення першого рядка і першого (ненульового) стовпця.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-1} & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

Метод Гауса розв’язування систем лінійних рівнянь

Алгоритм розв'язування систем методом Гауса

Метод Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь (метод послідовного виключення невідомих) полягає в наступному:

1. Виписати розширену матрицю системи лінійних рівнянь.
2. За допомогою елементарних перетворень рядків матриці звести її до східчастої форми.
3. Повернутись від одержаної матриці до системи та розв'язати її.

Приклади розв'язування систем методом Гауса

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \phantom{2x_1+{}} 2x_2+3x_3 = 8, \\ 2x_1+3x_2+x_3 = 5, \\ x_1-x_2-2x_3 = -5. \end{cases}$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \quad\quad\;\; 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + \;x_3 = 5, \\ \;x_1 - \;x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \phantom{2x_1+{}} 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

Зводимо її до східчастої форми.

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \color{green}{0} & \color{green}{2} & \color{green}{3} & \color{green}{8} \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ \color{blue}{1} & \color{blue}{-1} & \color{blue}{-2} & \color{blue}{-5} \end{array}\right]$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Приклади розв’язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
0 & 2 & 3 & 8 \\
2 & 3 & 1 & 5 \\
1 & -1 & -2 & -5
\end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & -2 & -5 \\
2 & 3 & 1 & 5 \\
0 & 2 & 3 & 8
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\cdot(-2) \\
+ \\

\end{array}
\sim
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & -2 & -5 \\
0 & 5 & 5 & 15 \\
0 & 2 & 3 & 8
\end{array}\right]
$$

Приклади розв’язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |:5 \\ \end{array} \sim$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |:5 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \; | : 5 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |:5 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |:5 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -5, \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 + x_3 = 3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid : 5 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -5, \\ \qquad\ \ x_2 + x_3 = 3, \\ \qquad\qquad\ \ x_3 = 2. \end{cases}$$

Відповідь. $\{(0,1,2)\}$.

Приклади розв'язування систем методом Гауса

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Приклади розв’язування систем методом Гауса

Приклад

Розв’язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв’язання. Виписуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо розширену матрицю:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Зводимо її до східчастої форми.

Приклади розв’язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \sim$$

Приклади розв’язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Приклади розв’язування систем методом Гауса

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\
2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & -3
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\cdot(-2) \\
+ \\
+
\end{array}
\sim
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 2 & -2
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
\cdot 2 \\
+
\end{array}
\sim
$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ + \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Приклади розв’язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Приклади розв’язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ \qquad\qquad\; x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

x_1, x_3 — *основні* змінні; x_2, x_4 — *вільні* змінні.

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

x_1, x_3 — *основні* змінні; x_2, x_4 — *вільні* змінні. Виражаємо основні зміні через вільні.

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

x_1, x_3 — *основні* змінні; x_2, x_4 — *вільні* змінні. Виражаємо основні зміні через вільні.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 + 1, \\ x_3 = x_4 + 1; \end{cases}$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

x_1, x_3 — *основні* змінні; x_2, x_4 — *вільні* змінні. Виражаємо основні зміні через вільні.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 + 1, \\ x_3 = x_4 + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 + 2, \\ x_3 = x_4 + 1. \end{cases}$$

Приклади розв'язування систем методом Гауса

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

x_1, x_3 — *основні* змінні; x_2, x_4 — *вільні* змінні. Виражаємо основні зміні через вільні.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 - 2x_4 + 1, \\ x_3 = x_4 + 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 + 2, \\ x_3 = x_4 + 1. \end{cases}$$

Відповідь. $\{(a-b+2, a, b+1, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$.

Підсумок лекції 1

- Ми з'ясували, що таке системи лінійних рівнянь з n невідомими; ввели поняття сумісної, несумісної, визначеної, невизначеної, однорідної, неоднорідної системи.
- Елементарні перетворення забезпечують рівносильність перетворень.
- Для спрощення записів ми працюємо лише з коефіцієнтами системи — розширеною матрицею.
- Усі системи можуть бути розв'язані методом Гауса. Основна ідея: елементарними перетвореннями зводимо матрицю до східчастої форми.
- Розв'язки систем — впорядковані набори чисел. Далі ми поглянемо на них під іншим кутом зору: як на самостійний математичний об'єкт. Наступна тема: «n-вимірний арифметичний векторний простір».