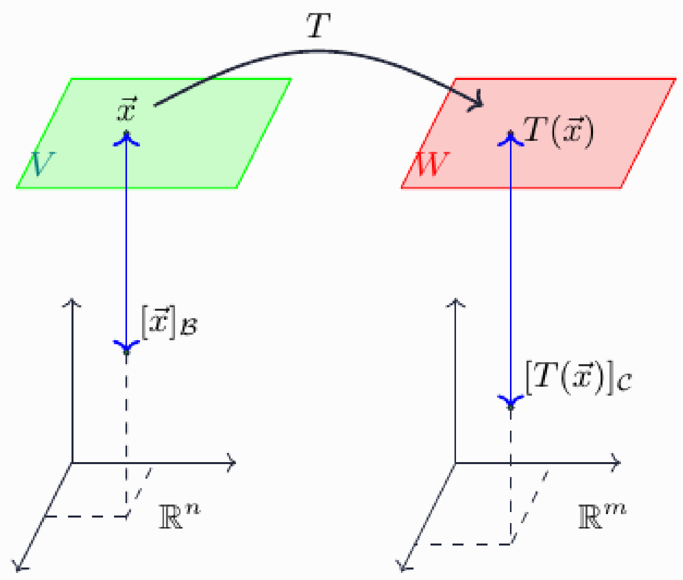
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 10.

Лінійна залежність векторів.
Базис і розмірність векторного простору



Олексій Панасенко

10 квітня 2023 р.

Лінійна залежність у векторному просторі

Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів

Означення

Система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ називається лінійно залежною, якщо існують такі числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, серед яких хоча б одне відмінне від нуля, що виконується рівність

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}. \tag{$\star$}$$

Якщо ж рівність $(\star)$ виконується лише при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, то система векторів називається лінійно незалежною.

Теорема

Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.

Доведення проводиться цілком аналогічно як і для простору $\mathbb{R}^n$.

Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів

Приклад

В просторі M_{22} задано матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система векторів цього простору $\{A, B, C\}$ є лінійно залежною, оскільки $C = A + B$.

Приклад

В просторі $\mathcal{F}$ система функцій $\left\{ \sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x \right\}$ є лінійно залежною, оскільки $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів

Приклад

Довести, що в просторі $\mathcal{P}_n$ система многочленів $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ є лінійно незалежною.

Складемо рівність $(\star)$ для вказаної системи векторів:

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0.$$

Якщо покласти в цю рівність $x = 0$, то дістанемо $\alpha_0 = 0$.
Продиференціювавши цю рівність і підставивши $x = 0$, знайдемо, що і $\alpha_1 = 0$.
Диференціюючи рівність далі і підставляючи $x = 0$ послідовно дістанемо, що $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, тобто система многочленів є лінійно незалежною.

Базис векторного простору

Базис векторного простору

Означення

Підмножина $\mathcal{B}$ векторного простору V називається *базисом* цього простору якщо виконуються умови:

1) $L(\mathcal{B}) = V$;
2) $\mathcal{B}$ — лінійно незалежна система.

Базис векторного простору

Означення

Підмножина $\mathcal{B}$ векторного простору V називається *базисом* цього простору якщо виконуються умови:

1) $L(\mathcal{B}) = V$;
2) $\mathcal{B}$ — лінійно незалежна система.

Приклад

Вектори

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad , \dots , \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

утворюють базис простору $\mathbb{R}^n$. Його називають стандартним базисом простору $\mathbb{R}^n$.

Базис векторного простору

Означення

Підмножина $\mathcal{B}$ векторного простору V називається *базисом* цього простору якщо виконуються умови:

1) $L(\mathcal{B}) = V$;
2) $\mathcal{B}$ — лінійно незалежна система.

Приклад

Система многочленів $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ утворює *стандартний базис простору* $\mathcal{P}_n$.

Базис векторного простору

Означення

Підмножина $\mathcal{B}$ векторного простору V називається *базисом* цього простору якщо виконуються умови:

1) $L(\mathcal{B}) = V$;
2) $\mathcal{B}$ — лінійно незалежна система.

Приклад

Множина матриць

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, E_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

утворює так званий стандартний базис простору M_{mn}.

Базис векторного простору

Приклад

Довести, що $\mathcal{B} = \left\{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\right\}$ — базис простору $\mathcal{P}_2$.

Покажемо, що кожний многочлен з простору $\mathcal{P}_2$ може бути поданий у вигляді лінійної комбінації многочленів з $\mathcal{B}$. Для цього доведемо, що існують такі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, що рівність

$$\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 + x^2) + \alpha_3(x + x^2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

виконується для кожного x при фіксованих довільних a_0, a_1, a_2.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = a_0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = a_1, \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = a_2. \end{cases}$$

Система має єдиний розв'язок при всіх значеннях a_0, a_1, a_2.

Базис векторного простору

Нехай V — векторний простір, $\mathcal{B} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right\}$ — деякий базис V.

Теорема

Кожний вектор $\vec{a} \in V$ однозначно виражається через вектори базису.

Те, що принаймні одне представлення вектора $\vec{a}$ у вигляді лінійної комбінації векторів базису існує, випливає з означення базису. Доведемо єдиність.

Припустимо, що існує такий вектор $\vec{a}$, який має два різних подання через базисні вектори:

$$\begin{aligned} \vec{a} =& \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n, \\ \vec{a} =& \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Віднявши:

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{e}_n.$$

Одержали рівність $(\star)$. Вона за означенням виконується лише при $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$, тобто $\alpha_i = \beta_i$ для кожного i, що суперечить припущенню того, що представлення різні.

Базис векторного простору

Нехай $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — базис векторного простору V і нехай $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$.

Означення

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\mathcal{B}$, а вектор-стовпець

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \equiv [\vec{a}]_{\mathcal{B}}$$

вектором координат (координатним стовпцем) $\vec{a}$ в базисі $\mathcal{B}$.

Базис векторного простору

Зауваження. Координатний стовпець — це вектор з простору $\mathbb{R}^n$. Тоді між впорядкованими n-ками дійсних чисел (елементами простору $\mathbb{R}^n$) і векторами простору V при вибраному базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ існує взаємно однозначна відповідність:

кожному вектору $\vec{a} \in V$ ставиться у відповідність вектор його координат в базисі $\mathcal{B}$, а кожному вектору $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ — вектор $\alpha_1\vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n \in V$.

Базис векторного простору

Приклад

Вектором координат многочлена $P(x) = 1 - 3x + 4x^2$ в базисі $\mathcal{B} = (1,x,x^2)$ векторного простору $\mathcal{P}_2$ є $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, а в базисі $\mathcal{B} = (x^2,x,1)$ – $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Базис векторного простору

Приклад

Координатами матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ в стандартному базисі простору M_{22} є

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Базис векторного простору

Нехай $\mathcal{B}$ — базис векторного простору V заданого над деяким полем P, $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $\lambda \in P$.

Теорема

Мають місце рівності:

$$\left[\vec{a} + \vec{b}\right]_{\mathcal{B}} = [\vec{a}]_{\mathcal{B}} + \left[\vec{b}\right]_{\mathcal{B}};$$

$$[\lambda \vec{a}]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [\vec{a}]_{\mathcal{B}}.$$

Наслідок

Для довільних векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ простору V і скалярів $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ при вибраному базисі $\mathcal{B}$ виконується рівність

$$[\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k]_{\mathcal{B}} = \alpha_1 [\vec{a}_1]_{\mathcal{B}} + \ldots + \alpha_k [\vec{a}_k]_{\mathcal{B}};$$

Базис векторного простору

Теорема

Нехай $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ — базис векторного простору V, $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ — деяка система векторів цього простору. Ця система є лінійно незалежною тоді і тільки тоді, коли лінійно незалежною є система векторів $[\vec{a}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\vec{a}_k]_{\mathcal{B}}$ простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. *Необхідність.*

Дано: система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ — лінійно незалежна.
Довести: система $[\vec{a}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\vec{a}_k]_{\mathcal{B}}$ лінійно незалежна.

Запишемо рівність $(\star)$ для векторів простору $\mathbb{R}^n$

$$\alpha_1 [\vec{a}_1]_{\mathcal{B}} + \ldots + \alpha_k [\vec{a}_k]_{\mathcal{B}} = \vec{0}.$$

Тоді: $[\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k]_{\mathcal{B}} = \vec{0}$, звідки $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$.

Тоді $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Отже, система векторів $[\vec{a}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\vec{a}_k]_{\mathcal{B}}$ лінійно незалежна.

Доведення. *Достатність* доводиться аналогічними міркуваннями.

Розмірність векторного простору

Розмірність векторного простору

Теорема (Основна теорема про лінійну залежність)

Якщо кожний вектор системи з більшою кількістю векторів лінійно виражається через вектори системи з меншою кількістю векторів, то перша система лінійна залежна.

Теорема

Нехай $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ *— базис векторного простору* V. *Тоді:*

1. *Кожна система, що містить більше* n *векторів, є лінійно залежною.*
2. *Лінійна оболонка кожної системи, що містить менше, ніж* n *векторів не співпадає з* V.

Наслідок

Кожний базис векторного простору містить однакову кількість векторів.

Розмірність векторного простору

Означення

Векторний простір V називається скінченновимірним, якщо він має базис, що складається зі скінченної кількості векторів.

Розмірністю векторного простору називається кількість векторів його базису (позначається $\dim V$). Розмірність нульового векторного простору $\{\vec{0}\}$ вважають рівною нулю.

Векторний простір, що не має скінченного базису називається нескінченновимірним.

Розмірність векторного простору

Приклад

Розмірність векторного простору $\mathbb{R}^n$ дорівнює n, оскільки стандартний базис цього простору складається з n векторів.

Приклад

Розмірність векторного простору $\mathcal{P}_n$ дорівнює $n+1$, оскільки стандартний базис цього простору складається з $n+1$-го многочлена.

Приклад

Розмірність векторного простору M_{mn} дорівнює mn, оскільки стандартний базис цього простору складається з mn матриць.

Приклад

Векторні простори $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}_{[a,b]}$, $\mathcal{C}_{[a,b]}$ є нескінченновимірними, оскільки усі вони містять нескінченну лінійно незалежну систему функцій (наприклад, $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$).

Розмірність векторного простору

Теорема

Нехай V — n-вимірний векторний простір, $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k$, $k < n$ — лінійно незалежна система векторів цього простору. Тоді її можна доповнити до базису простору V.

Доведення. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис простору V.

Виберемо з цього базису такий вектор, який лінійно не виражається через вектори системи $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k$. Він існує.

Нехай таким вектором є $\vec{e}_{i_1}$. Розглянемо систему $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k, \vec{e}_{i_1}$. Якщо $k+1=n$, то ця система буде базисом простору V. В іншому випадку, застосовуючи аналогічні міркування до нової системи векторів, знайдемо вектор $\vec{e}_{i_2}$, який лінійно не виражається через вектори цієї системи.

Цей процес скінченний і за $n-k$ кроків ми побудуємо лінійно незалежну систему $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k, \vec{e}_{i_1}, \ldots, \vec{e}_{n-k}$, яка буде базисом простору V.

Перехід від одного базиса до іншого

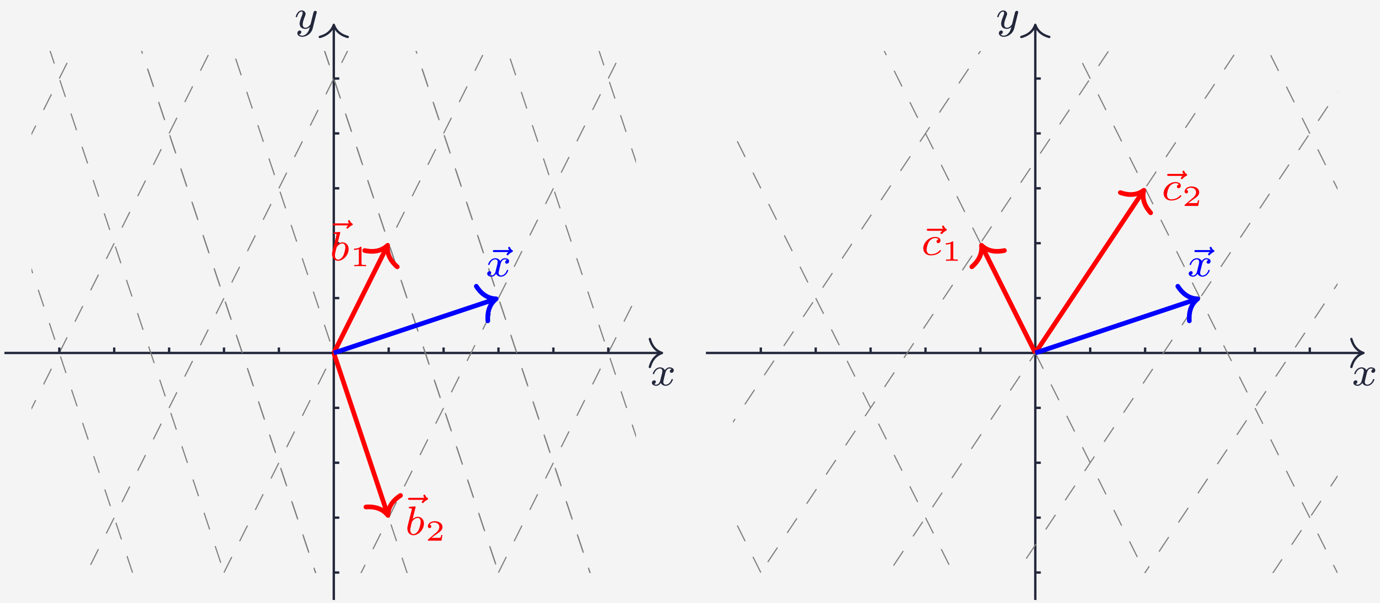
Перехід від одного базиса до іншого

Приклад

Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^2$ два різних базиси:

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ та } \vec{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Вектор $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ в базисі $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2\}$ має координатний стовпець $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, а в базисі $\{\vec{c}_1,\vec{c}_2\}$ — $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



Перехід від одного базиса до іншого

Нехай $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$, $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\}$ — два базиси векторного простору V. Виразимо вектори першого базису через вектори другого:

$$\begin{cases} \vec{b}_1 &= p_{11}\vec{c}_1 &+& p_{21}\vec{c}_2 &+& \ldots &+& p_{n1}\vec{c}_n, \\ \vec{b}_2 &= p_{12}\vec{c}_1 &+& p_{22}\vec{c}_2 &+& \ldots &+& p_{n2}\vec{c}_n, \\ \ldots \\ \vec{b}_n &= p_{1n}\vec{c}_1 &+& p_{2n}\vec{c}_2 &+& \ldots &+& p_{nn}\vec{c}_n, \end{cases} \tag{1}$$

Означення

Матриця

$$\left[\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}} \quad \left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}} \quad \ldots \quad \left[\vec{b}_n\right]_{\mathcal{C}} \right] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

називається матрицею переходу від базису $\mathcal{B}$ до базису $\mathcal{C}$ і позначається $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

Перехід від одного базиса до іншого

Теорема (Зв'язок між координатами вектора в різних базисах)

Нехай $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$, $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\}$ *— два базиси векторного простору* V, $\vec{x} \in V$. *Тоді*

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\vec{x}]_{\mathcal{B}} .$$

Нехай $\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{b}_n$.

Тоді:

$$\begin{aligned} [\vec{x}]_{\mathcal{C}} &= \left[\alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{b}_n\right]_{\mathcal{C}} = \\ &= \alpha_1 \left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}} + \ldots + \alpha_n \left[\vec{b}_n\right]_{\mathcal{C}} = \\ &= \left[\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}} \quad \ldots \quad \left[\vec{b}_n\right]_{\mathcal{C}}\right] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\vec{x}]_{\mathcal{B}} . \end{aligned}$$

Перехід від одного базиса до іншого

Зауваження

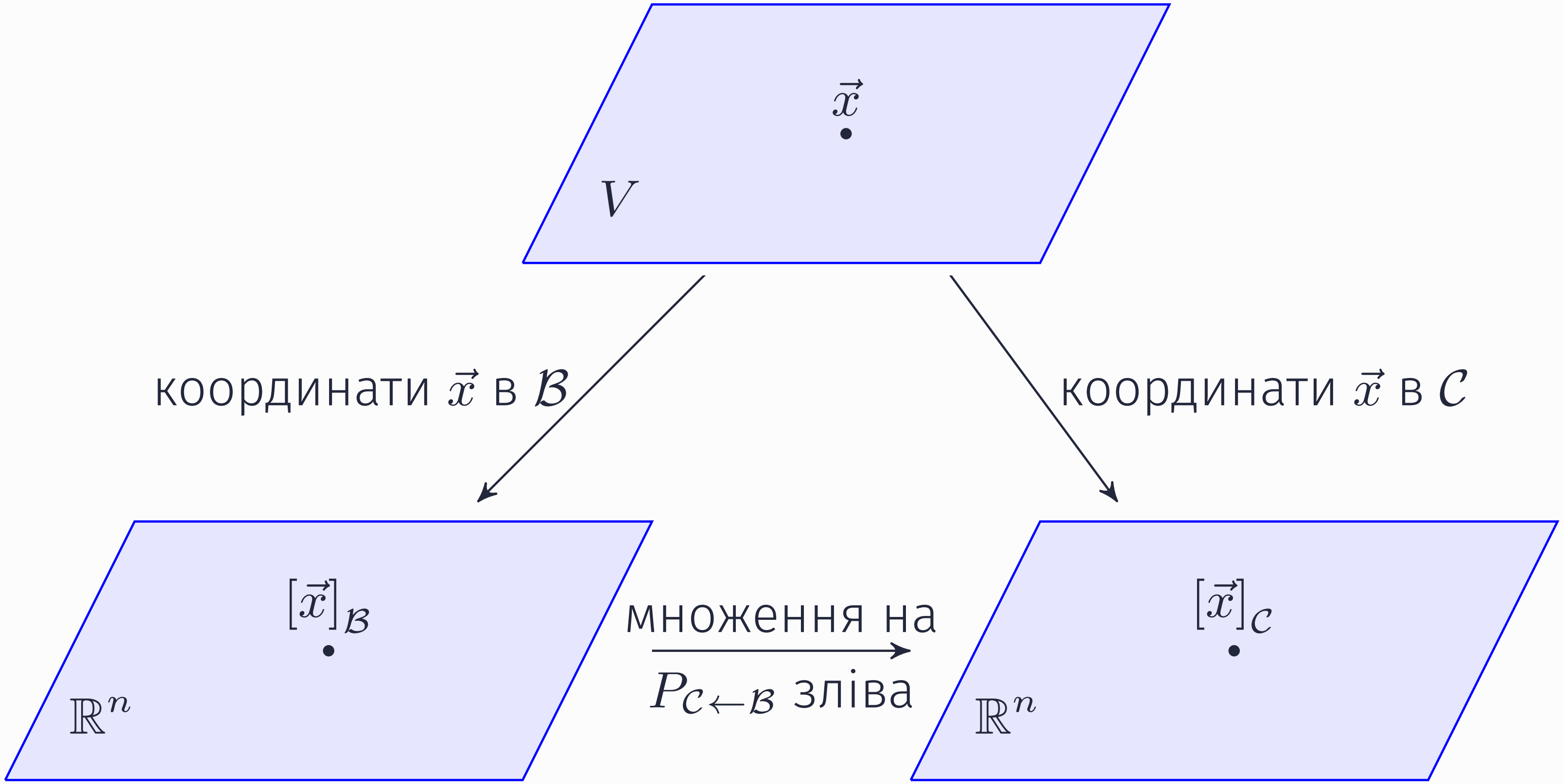
Зауважимо, що матриця $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ є єдиною матрицею P такою, що рівність $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ виконується для кожного $\vec{x}$.

Теорема

Матриця переходу $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ *оборотна, причому* $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

Перехід від одного базиса до іншого

Зв'язок між координатами вектора $\vec{x}$ в різних базисах:



Перехід від одного базиса до іншого

1. Вектори-стовпці матриці переходу $\left[\left[\vec{b}_1\right]_{\mathcal{C}} \quad \left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad \left[\vec{b}_2\right]_{\mathcal{C}}\right]$ є лінійно незалежними.
2. Тому за основною теоремою оборотних матриць вона є оборотною.
3. Тоді домноживши зліва обидві частини рівності на $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1}$ дістанемо

$$(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1}\,[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}\,.$$

4. З іншого боку $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\,[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$.
5. Оскільки дві останні рівності виконуються для довільного $\vec{x}$, то

$$(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\,.$$

Перехід від одного базиса до іншого

Приклад

1. Знайти матрицю переходу від базису $\mathcal{B} = \{1,x,x^2\}$ до базису $\mathcal{C} = \{1+x,x+x^2,1+x^2\}$ в векторному просторі $\mathcal{P}_2$.
2. Знайти координати вектора $p(x) = 1 + 2x - x^2$ в базисі $\mathcal{C}$.

Розв'язання. Легше знайти матрицю переходу від базису $\mathcal{C}$ до базису $\mathcal{B}$. Справді:

$$[1+x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [x+x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, [1+x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а тому

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перехід від одного базиса до іншого

Тоді

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[p(x)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\,[p(x)]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Підсумок

1. В цій лекції ми розглядали можливості вираження одного вектора через інші: ввели поняття лінійно залежної і лінійно незалежної системи векторів так само, як і для простору $\mathbb{R}^n$.
2. Ми ввели поняття базису лінійного простору — лінійно незалежної системи, через яку виражаються усі вектори простору.
3. Кількість векторів базису — розмірність простору. Ми довели, що:
   - Розмірність простору $\mathcal{P}_n$ дорівнює $n+1$.
   - Розмірність простору M_{mn} дорівнює mn.
   - Розмірність простору $\mathbb{R}^n$ дорівнює n.
   - Простори $\mathcal{C}_{[a,b]}$, $\mathcal{F}_{[a,b]}$, $\mathcal{D}_{[a,b]}$ нескінченновимірні.
4. Кожну лінійно незалежну систему завжди можна доповнити до базису простору.
5. Ми встановили зв'язок між координатами вектора у різних базисах:

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\, [\vec{x}]_{\mathcal{B}}\,.$$