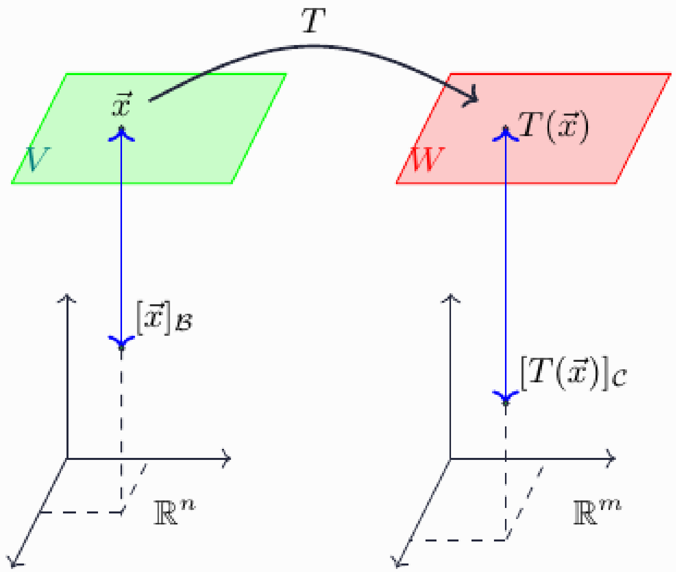
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 11.

Лінійні відображення векторних просторів



Олексій Панасенко

17 квітня 2023 р.

День в історії

17 квітня 1982 року — набув чинності Акт про Канаду, також відомий як Акт про Конституцію, який встановив певні індивідуальні права, зберіг верховенство парламенту і зробив Канаду цілком незалежною, повністю суверенною державою.

17 квітня 2011 року — телесеріал «Гра престолів», заснований на серії фентезійних книг Джорджа Мартіна «Пісня льоду й полум'я», дебютував на каналі HBO.

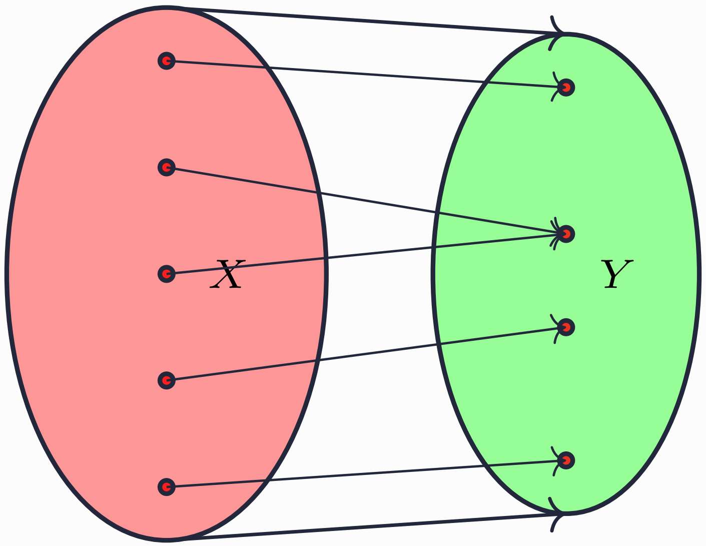
Відображення між множинами

Відображення між множинами

Нехай X, Y — дві множини. Розглянемо відображення $F\colon X \to Y$.

Означення

Відображення $F\colon X \to Y$ називається сюр'єктивним (також говорять відображенням X **на** Y), якщо кожний елемент $y \in Y$ є образом хоча б одного $x \in X$.

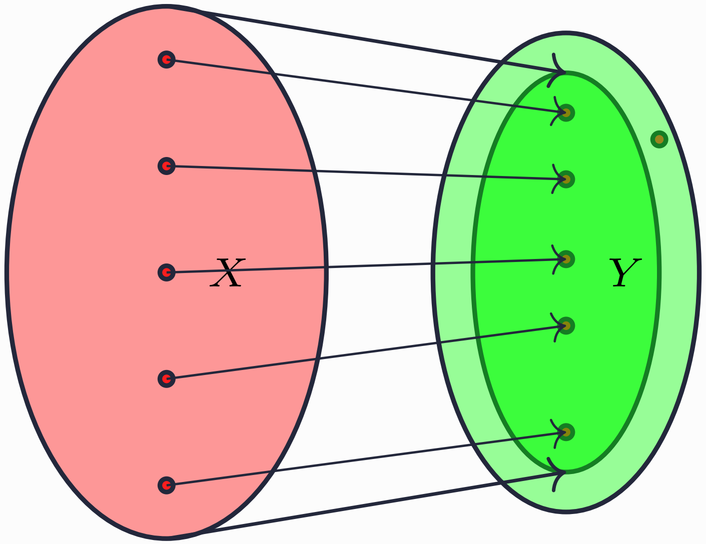


Відображення між множинами

Нехай X, Y — дві множини. Розглянемо відображення $F\colon X \to Y$.

Означення

Відображення $F\colon X \to Y$ називається ін'єктивним, якщо різні елементи множини X відображаються в різні елементи множини Y.

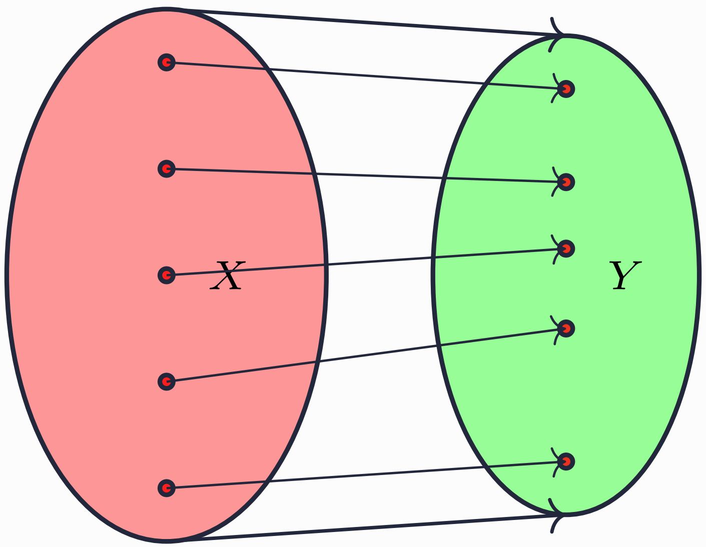


Відображення між множинами

Нехай X, Y — дві множини. Розглянемо відображення $F\colon X \to Y$.

Означення

Відображення $F\colon X \to Y$ називається біективним (взаємно однозначним відображенням X **на** Y), якщо у кожного елемента $y \in Y$ існує прообраз, причому єдиний.



Поняття ізоморфізму векторних просторів

Поняття ізоморфізму векторних просторів

Нехай $(V, +\,, \cdot)$ і $(V', +\,, \cdot)$ — векторні простори, які задані над полем P.

Означення

Взаємно однозначне відображення $\varphi\colon V \to V'$ називається ізоморфізмом цих просторів (а самі простори називаються ізоморфними, що позначається $V \cong V'$), якщо для довільних $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $\alpha \in P$ виконуються умови:

1) $\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$;
2) $\varphi(\alpha\vec{a}) = \alpha\varphi(\vec{a})$.

Поняття ізоморфізму векторних просторів

Деякі властивості ізоморфізмів векторних просторів:

$\boxed{1}$ При ізоморфізмі $\vec{0}$ простору V відображається в $\vec{0}$ простору V'.

$\boxed{2}$ При ізоморфізмі **лінійно незалежна система** векторів простору V **переходить в лінійно незалежну систему** векторів простору V'.

Доведення

Нехай $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ — лінійно незалежна система векторів простору V; $\varphi(\vec{a}_1), \ldots, \varphi(\vec{a}_k)$ — образи векторів цієї системи відносно ізоморфізму φ.

Припустимо, що система $\varphi(\vec{a}_1), \ldots, \varphi(\vec{a}_k)$ є лінійно залежною. Це означає, що рівність

$$\alpha_1\varphi(\vec{a}_1) + \ldots + \alpha_k\varphi(\vec{a}_k) = \vec{0}_{V'}$$

виконується не при всіх $\alpha_i = 0$. Але враховуючи означення ізоморфізму і властивість $\boxed{1}$:

$$\varphi(\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k) = \varphi(\vec{0}_V),$$

звідки знаходимо, що рівність $\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}$ виконується не при всіх $\alpha_i = 0$, що суперечить лінійній незалежності системи векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$.

Наслідок

При ізоморфізмі простору V на простір V' базис простору V переходить в базис простору V', а тому якщо простори V і V' ізоморфні, то вони мають однакову розмірність.

Поняття ізоморфізму векторних просторів

Теорема

Нехай $(V, +, \cdot)$ *—* n*-вимірний векторний простір, заданий над полем* $\mathbb{R}$*. Тоді простір* V *ізоморфний простору* $\mathbb{R}^n$*.*

Доведення

Нехай $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — деякий базис векторного простору V. В цьому базисі кожному вектору цього простору відповідає його координатний стовпець, який є вектором простору $\mathbb{R}^n$. Тобто ми маємо відповідність

$$\varphi(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

якщо $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$. Це відображення задовольняє означення ізоморфізму.

Поняття ізоморфізму векторних просторів

Наслідок

Будь-які два n-вимірні векторні простори, задані над полем $\mathbb{R}$, ізоморфні, оскільки кожний з них ізоморфний з n-вимірним арифметичним векторним простором $\mathbb{R}^n$.

Лінійні відображення векторних просторів

Лінійні відображення векторних просторів

Нехай V і W — векторні простори, задані над полем P.

Означення

Відображення $T\colon V \to W$ називається лінійним відображенням, якщо для довільних $\vec{a}$, $\vec{b} \in V$, $\alpha \in P$ виконуються умови:
1) $T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$;
2) $T(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot T(\vec{a})$.

Якщо відображення T задовольняє умови 1 та 2, то говорять, що воно зберігає операції додавання векторів і множення на вектора на число.

Лінійні відображення векторних просторів

Приклад

Нехай відображення $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ визначається правилом: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (таке відображення називається проекцією).

Воно є лінійним, оскільки для $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ та $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$:

$$T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2);$$

$$T(c \cdot \vec{x}_1) = T\left(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix} = c \cdot T(\vec{x}_1).$$

Приклад

Нехай A — фіксована матриця розмірності $m \times n$. Відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ означимо таким чином:

$$\text{якщо } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ то } T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}.$$

Таке відображення назвемо матричним.

Вказане відображення є лінійним, оскільки для довільних $\vec{x}_1, \vec{x}_2$, $c \in \mathbb{R}$:

$$T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A \cdot \vec{x}_1 + A \cdot \vec{x}_2 = T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2);$$

$$T(\alpha \cdot \vec{x}_1) = A \cdot (\alpha \cdot \vec{x}_1) = \alpha \cdot (A \cdot \vec{x}_1) = \alpha \cdot T(\vec{x}_1).$$

Приклад

Відображення $T\colon V \to W$ означимо так: якщо $\vec{x} \in V$, то $T(\vec{x}) = \vec{0}_W$. Таке відображення, очевидно, задовольняє означення лінійного відображення. Воно називається нульовим.

Лінійні відображення векторних просторів

Приклад

Нехай $C^1_{[a,b]}$ — простір неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій, $C_{[a,b]}$ — простір неперервних на $[a,b]$ функцій.
Відображення $D\colon C^1_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ означимо так:

$$\text{якщо } f \in C^1_{[a,b]}, \text{ то } D(f) = f'.$$

Як відомо з аналізу, для кожних $f, g \in C^1_{[a,b]}$, $c \in \mathbb{R}$ виконуються рівності

$$D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g)$$

та

$$D(c \cdot f) = c \cdot D(f).$$

Таким чином, диференціювання є лінійним відображенням між відповідними векторними просторами.

Лінійні відображення векторних просторів

Приклад

Відображення $S\colon C_{[a,b]} \to \mathbb{R}$ визначимо рівністю

$$S(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

для довільного елемента (функції) f простору $C_{[a,b]}$.

Оскільки

$$S(f+g) = \int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx = S(f) + S(g)$$

та

$$S(c \cdot f) = \int\limits_a^b (c \cdot f(x))\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx = c \cdot S(f),$$

то вказане відображення S є лінійним.

Лінійні відображення векторних просторів

Приклад

Довести, що відображення $F_1 \colon M_{22} \to \mathbb{R}$ таке, що $F_1(A) = \det A$ не є лінійним відображенням відповідних векторних просторів.

Для розв'язання вказаної задачі слід вказати контрприклад, який би вказував на те, що якась із умов в означенні лінійного відображення порушується.

Взагалі кажучи, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$. Наприклад:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді $\det A = \det B = 0$, $\det(A+B) = 1$, $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

Властивості лінійних відображень векторних просторів

Властивості лінійних відображень векторних просторів

Нехай V і W — два векторні простори, що задані над деяким полем.

Теорема (1)

Нехай $T\colon V \to W$ *— лінійне відображення. Тоді:*
1) $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$*;*
2) для довільного $\vec{x} \in V$*:* $T(-\vec{x}) = -T(\vec{x})$*;*
3) для довільних $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k \in V$ *і* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in P$*:*

$$T(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k) = \alpha_1 T(\vec{x}_1) + \alpha_2 T(\vec{x}_2) + \ldots + \alpha_k T(\vec{x}_k).$$

Властивості лінійних відображень векторних просторів

Теорема (2)

Нехай $T_1, T_2 \colon V \to W$ *— два лінійні відображення. Нехай також* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n\}$ *— базис простору* V. *Якщо для кожного* $i \in \{1, \ldots, n\}$ $T_1(\vec{e}_i) = T_2(\vec{e}_i)$, *то* $T_1 \equiv T_2$.

Доведення. Нехай $\vec{a} \in V$. Оскільки $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n\}$ — базис, то існують $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такі, що $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$.

Тоді

$$\begin{aligned} T_1(\vec{a}) &= T_1(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n) = \\ &= \alpha_1 T_1(\vec{e}_1) + \alpha_2 T_1(\vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n T_1(\vec{e}_n) = \\ &= \alpha_1 T_2(\vec{e}_1) + \alpha_1 T_2(\vec{e}_1) + \ldots + \alpha_n T_2(\vec{e}_n) = T_2(\vec{a}). \end{aligned}$$

Отже, для довільного $\vec{a} \in V$ $T_1(\vec{a}) = T_2(\vec{a})$, а це і означає, що $T_1 \equiv T_2$.

Властивості лінійних відображень векторних просторів

Теорема (3)

Нехай $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ *— базис простору* V*. Нехай також* $\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_n$ *— довільний набір векторів простору* W *(не обов'язково різних). Тоді існує, причому єдине, лінійне відображення* $T\colon V\to W$ *таке, що* $T(\vec{e}_i)=\vec{w}_i$ *для кожного* $i=1,2,\ldots,n$*.*

Доведення. Якщо таке відображення існує, то воно за попередньою теоремою єдине. Отже, залишається показати, що воно справді існує.

Нехай $\vec{x}\in V$. Оскільки $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ — базис, то існує, причому єдиний, набір скалярів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ такий, що $\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n$. Тоді нехай

$$T(\vec{x})=T(\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n)=\alpha_1T(\vec{e}_1)+\ldots+\alpha_nf(\vec{e}_n)=$$
$$=\alpha_1\vec{w}_1+\ldots+\alpha_n\vec{w}_n.$$

Те, що побудоване відображення є лінійним, легко перевіряється.

Властивості лінійних відображень векторних просторів

Теорема (4)

Нехай $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — лінійне відображення. Будемо записувати елементи простору $\mathbb{R}^n$ як стовпці.

1. *Існує $m \times n$ матриця A така, що $T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.*
2. *Стовпці матриці A — відповідно $T(\vec{e}_1), \ldots, T(\vec{e}_n)$, де $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ — стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$:*

$$A = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \ldots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Матриця A з теореми називається стандартною матрицею лінійного відображення T і ми її позначатимемо так: $[T]$.

Властивості лінійних відображень векторних просторів

Приклад

Знайти стандартну матрицю лінійного відображення $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, заданого за правилом:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y + z \\ x - z \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. З одного боку, очевидно, що

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

тобто матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ є стандартною матрицею заданого відображення.

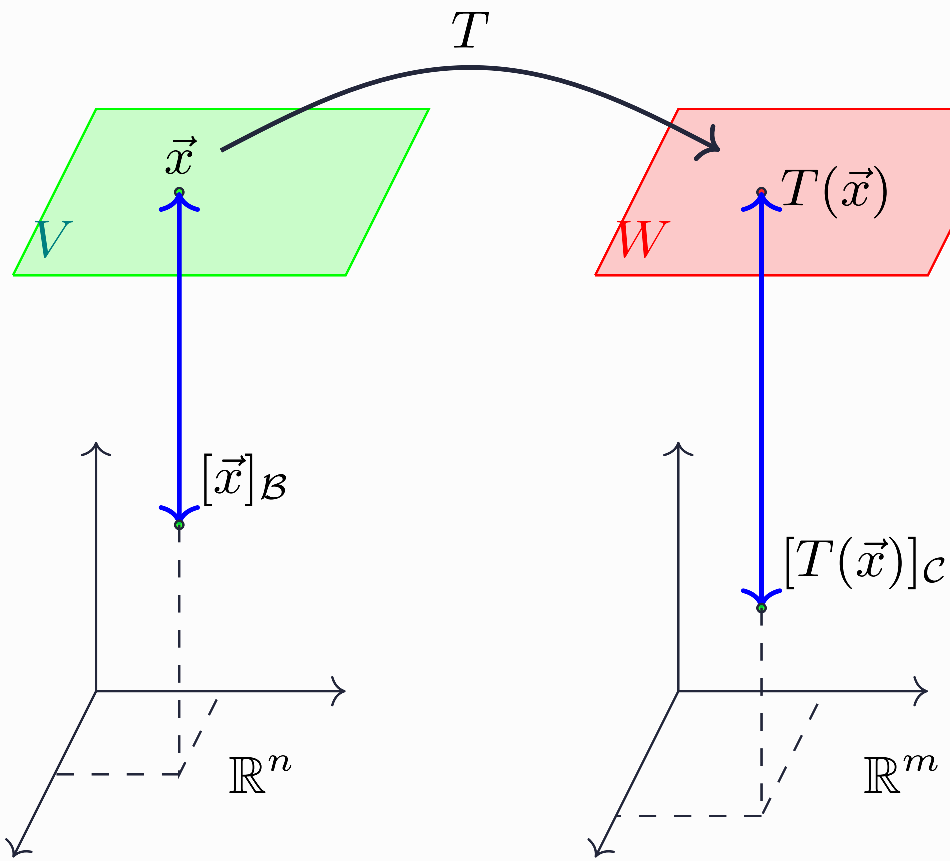
Властивості лінійних відображень векторних просторів

З іншого боку, за п. 2 теореми (4) знаходимо:

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Перехід до арифметичного векторного простору



$$\begin{tikzcd}
\vec{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow] & T(\vec{x}) \arrow[d, leftrightarrow] \\
{[\vec{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\text{множимо зліва на матрицю } M"'] & {[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}}}
\end{tikzcd}$$

Підсумок

1. Спочатку ми виділили три типи відображення між множинами: сюр'єктивні, ін'єктивні та бієктивні.
2. Далі ми почали розглядати не стільки відображення між множинами, скільки відображення векторних просторів.
3. Перший тип відображень: **ізоморфізми**. Це бієктивні відображення, для яких виконуються дві спеціальні умови (умови *лінійності*).
4. Більш загальний тип — лінійні відображення (немає умови бієктивності). Ми розглянули приклади таких відображень та основні властивості лінійних відображень векторних просторів.
5. Ми зрозуміли, що вибір базисів у векторних просторах дозволяє *перейти до лінійних відображень між арифметичними векторними просторами*, які ізоморфні даним просторам.
6. Ми довели, що усі лінійні відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — матричні, тобто існує така матриця A, що $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.
7. В наступній лекції ми перейдемо до розгляду множини всіх лінійних відображень між заданими векторними просторами і цю множину наділимо алгебраїчною структурою (введемо на ній операції).