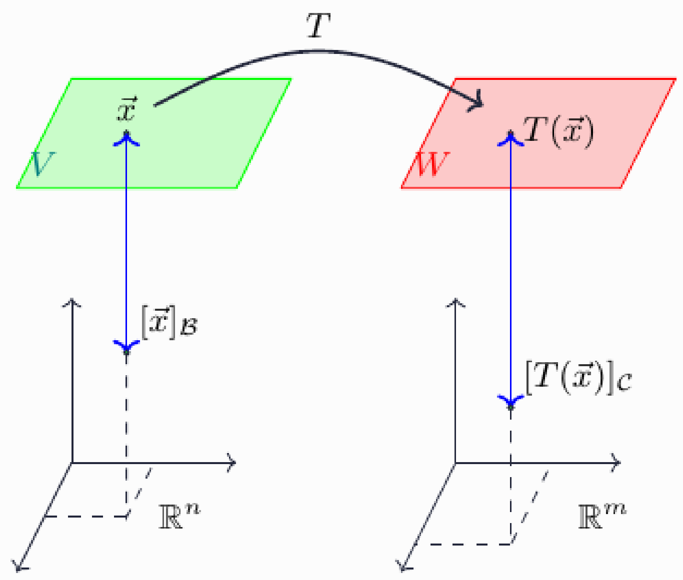
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 12.

Операції над лінійними відображеннями векторних просторів



Олексій Панасенко

24 квітня 2023 р.

День в історії

24 квітня 1909 року — вперше кінооператор здійснив політ на аероплані. Це відбулось у Сентоселле, поблизу Рима. Як пасажира його взяв на борт свого біплану Вілбур Райт.

24 квітня 1967 року — радянський космонавт Володимир Комаров став першою людиною, яка загинула під час космічної місії, коли його космічний корабель заплутався в парашуті під час спроби приземлення.

Сума лінійних відображень

Нехай V і W — два векторні простори, задані над полем P.

Нехай $T_1 : V \to W$, $T_2 : V \to W$ — лінійні відображення.

Означення

Сумою лінійних відображень T_1 і T_2 називається відображення, що позначається $T_1 + T_2$, таке, що

$$(T_1 + T_2)(\vec{x}) = T_1(\vec{x}) + T_2(\vec{x})$$

для кожного $\vec{x} \in V$.

Сума лінійних відображень

Нехай V і W — два векторні простори, задані над полем P.

Нехай $T_1 : V \to W$, $T_2 : V \to W$ — лінійні відображення.

Означення

Сумою лінійних відображень T_1 і T_2 називається відображення, що позначається $T_1 + T_2$, таке, що

$$(T_1 + T_2)(\vec{x}) = T_1(\vec{x}) + T_2(\vec{x})$$

для кожного $\vec{x} \in V$.

Відображення $T_1 + T_2$ є лінійним. Справді, нехай $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$, $\lambda \in P$:

$$\begin{aligned}
(T_1 + T_2)(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &\overset{df}{=} T_1(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + T_2(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \\
&= T_1(\vec{x}_1) + T_1(\vec{x}_2) + T_2(\vec{x}_1) + T_2(\vec{x}_2) = \\
&= (T_1 + T_2)(\vec{x}_1) + (T_1 + T_2)(\vec{x}_2); \\
(T_1 + T_2)(\alpha\vec{x}_1) &\overset{df}{=} T_1(\alpha\vec{x}_1) + T_2(\alpha\vec{x}_1) = \\
&= \alpha T_1(\vec{x}_1) + \alpha T_2(\vec{x}_1) = \alpha(T_1 + T_2)(\vec{x}_1).
\end{aligned}$$

Сума лінійних відображень

Якщо M_1 — матриця лінійного відображення T_1 відносно базисів $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$,
M_2 — матриця лінійного відображення T_2 відносно базисів $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$,
то $M_1 + M_2$ — матриця відображення $T_1 + T_2$ відносно базисів $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}(\forall \vec{x} \in V): \ [T_1(\vec{x})]_{\mathcal{C}} &= M_1 \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}} \, ; \\ [T_2(\vec{x})]_{\mathcal{C}} &= M_2 \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}} \, .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(T_1 + T_2)(\vec{x})]_{\mathcal{C}} &= [T_1(\vec{x}) + T_2(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [T_1(\vec{x})]_{\mathcal{C}} + [T_2(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = \\ &= M_1 \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}} + M_2 \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = (M_1 + M_2) \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}},\end{aligned}$$

Для відображень $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

Якщо A_1 — стандартна матриця лінійного відображення T_1,
A_2 — стандартна матриця лінійного відображення T_2,
то $A_1 + A_2$ — стандартна матриця лінійного відображення $T_1 + T_2$.

Добуток лінійного відображення на скаляр

Означення

Добутком лінійного відображення T на число (скаляр) $\lambda \in P$ називається відображення, що позначається λT, таке, що

$$(\lambda T)(\vec{x}) = \lambda \cdot T(\vec{x})$$

для довільного $\vec{x} \in V$.

Відображення λT є **лінійним**, оскільки для довільних $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$, $c \in P$:

$$(\lambda T)(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \overset{df}{=} \lambda \cdot T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda \cdot T(\vec{x}_1) + \lambda \cdot T(\vec{x}_2) =$$
$$= (\lambda T)(\vec{x}_1) + (\lambda T)(\vec{x}_2);$$
$$(\lambda T)(\alpha \cdot \vec{x}_1) \overset{df}{=} \lambda \cdot T(\alpha \cdot \vec{x}_1) = \lambda \cdot \alpha \cdot T(\vec{x}_1) = \alpha \cdot \lambda \cdot T(\vec{x}_1) =$$
$$= \alpha \cdot (\lambda T)(\vec{x}_1).$$

Добуток лінійного відображення на скаляр

Якщо M — матриця лінійного відображення T відносно базисів $\mathcal{B}$ та $\mathcal{C}$,
то $\lambda \cdot M$ — матриця відображення λT відносно цих самих базисів.

Справді,

$$\forall \vec{x} \in V: \ [T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = M \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}} \,.$$

Тоді

$$[(\lambda T)(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = \lambda \cdot [T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = (\lambda M)\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Для відображень $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

Якщо A — стандартна матриця лінійного відображення T,
то λA — стандартна матриця лінійного відображення λT.

Композиція лінійних відображень

Нехай U, V, W — векторні простори задані над деяким полем,

$T\colon U \to V$, $S\colon V \to W$ — лінійні відображення.

Означення

Композицією (добутком) відображень T та S називається таке відображення $S \circ T\colon U \to W$, що для довільного $\vec{x} \in U$:

$$(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})).$$

Композиція лінійних відображень

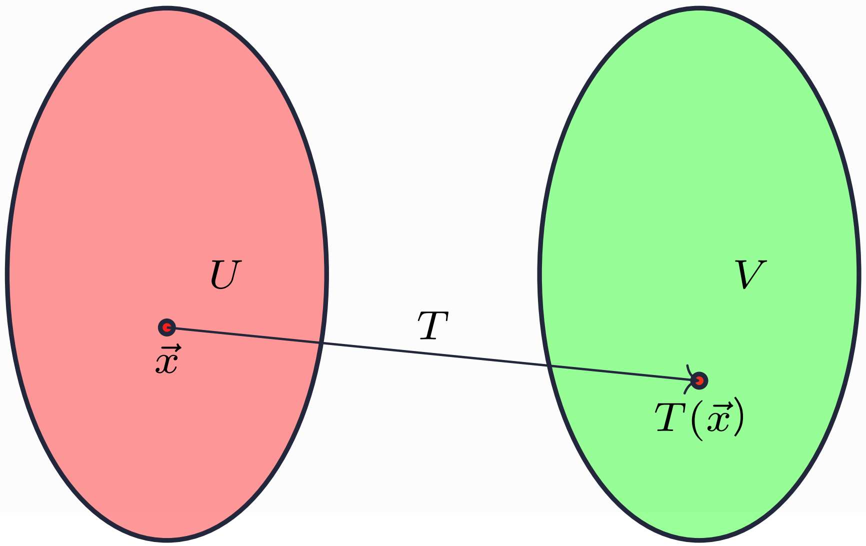
Нехай U, V, W — векторні простори задані над деяким полем,

$T : U \to V$, $S : V \to W$ — лінійні відображення.

Означення

Композицією (добутком) відображень T та S називається таке відображення $S \circ T : U \to W$, що для довільного $\vec{x} \in U$:

$$(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})).$$



Композиція лінійних відображень

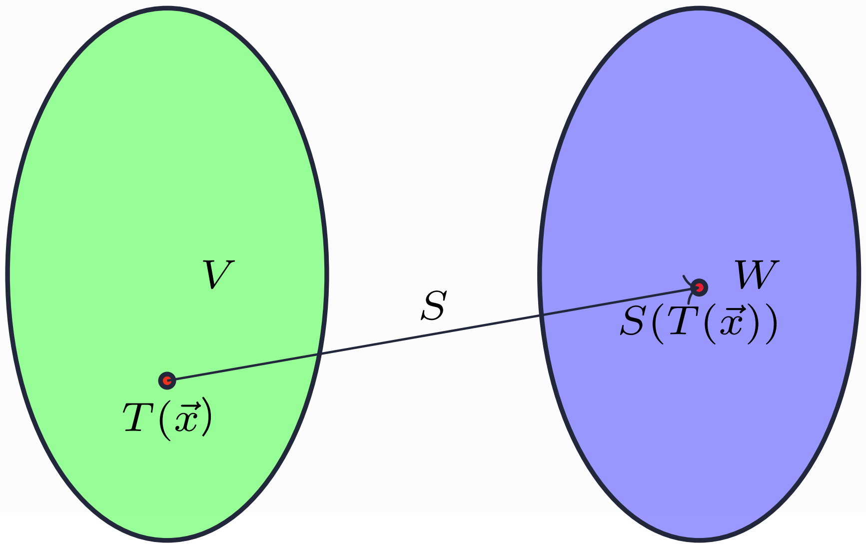
Нехай U, V, W — векторні простори задані над деяким полем,

$T\colon U \to V$, $S\colon V \to W$ — лінійні відображення.

Означення

Композицією (добутком) відображень T та S називається таке відображення $S \circ T\colon U \to W$, що для довільного $\vec{x} \in U$:

$$(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})).$$



Композиція лінійних відображень

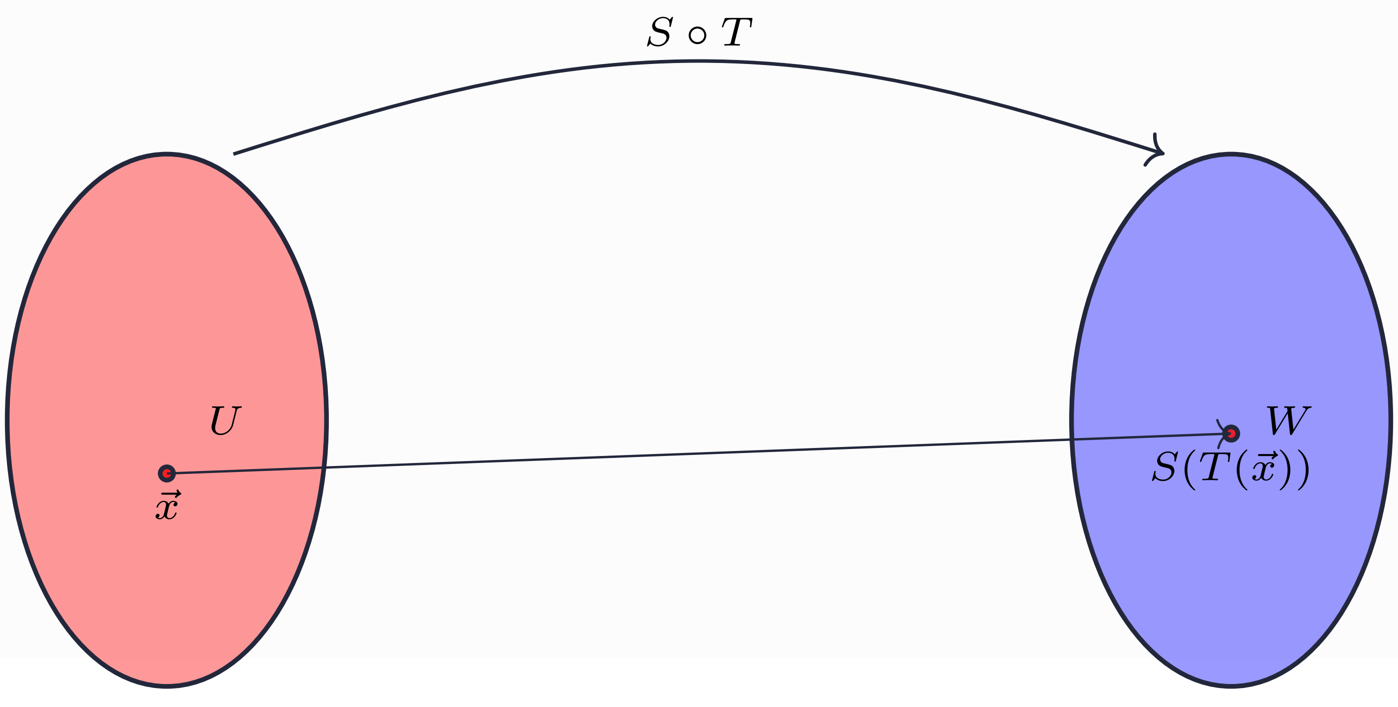
Нехай U, V, W — векторні простори задані над деяким полем,

$T: U \to V$, $S: V \to W$ — лінійні відображення.

Означення

Композицією (добутком) відображень T та S називається таке відображення $S \circ T: U \to W$, що для довільного $\vec{x} \in U$:

$$(S \circ T)(\vec{x}) = S(T(\vec{x})).$$



Композиція лінійних відображень

Приклад

Нехай $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$, $S\colon \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ такі, що:

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a + (a+b)x; \qquad S(p(x)) = x \cdot p(x).$$

Знайти $(S \circ T)\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$, $(S \circ T)\left(\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\right)$.

Маємо:

$$(S \circ T)\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = S\left(T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)\right) = S(3+x) = x(3+x) = x^2 + 3x.$$

$$(S \circ T)\left(\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\right) = S\left(T\left(\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\right)\right) = S(a+2ax) = x(a+2ax) = 2ax^2 + ax.$$

Композиція лінійних відображень

Доведемо, що $S \circ T$ — лінійне відображення. Справді,

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &= S(T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = S(T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2)) = \\
&= S(T(\vec{x}_1)) + S(T(\vec{x}_2)) = (S \circ T)(\vec{x}_1) + (S \circ T)(\vec{x}_2); \\
(S \circ T)(\alpha \vec{x}_1) &= S(T(\alpha \vec{x}_1)) = S(\alpha T(\vec{x}_1)) = \\
&= \alpha S(T(\vec{x}_1)) = \alpha (S \circ T)(\vec{x}_1).
\end{aligned}$$

Композиція лінійних відображень

Нехай U, V та W — скінченновимірні векторні простори з базисами $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ відповідно.

Теорема

Нехай $T\colon U \to V$, $S\colon V \to W$ — лінійні відображення. Тоді:

$$[S \circ T]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \, [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \, .$$

Композиція лінійних відображень

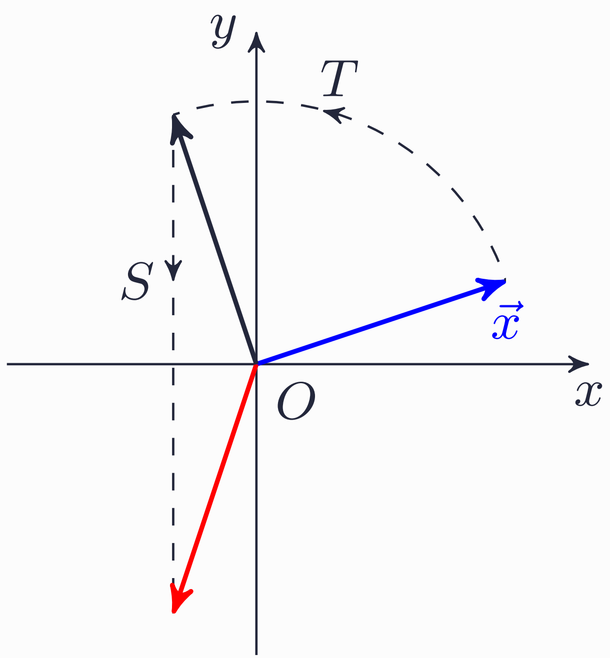
Наслідок

Якщо A — *стандартна матриця лінійного відображення* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
B — *стандартна матриця лінійного відображення* $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$,
то BA *є стандартною матрицею відображення* $S \circ T$.

Композиція лінійних відображень

Приклад

Знайти стандартну матрицю відображення $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке спочатку повертає точку площини на 90° проти годинникової стрілки, а потім одержану точку симетрично відображає відносно осі Ox.

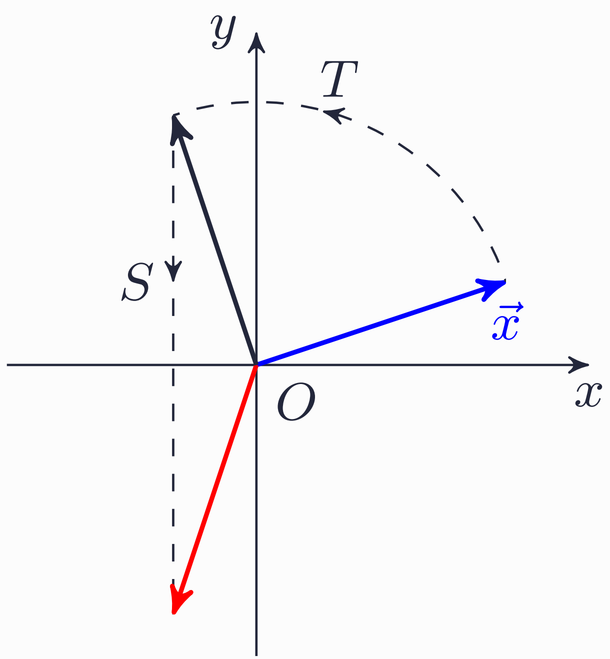


Композиція лінійних відображень

Приклад

Знайти стандартну матрицю відображення $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке спочатку повертає точку площини на 90° проти годинникової стрілки, а потім одержану точку симетрично відображає відносно осі Ox.

Розв'язання. *Спосіб 1.*



Знайдемо образи векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$.

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

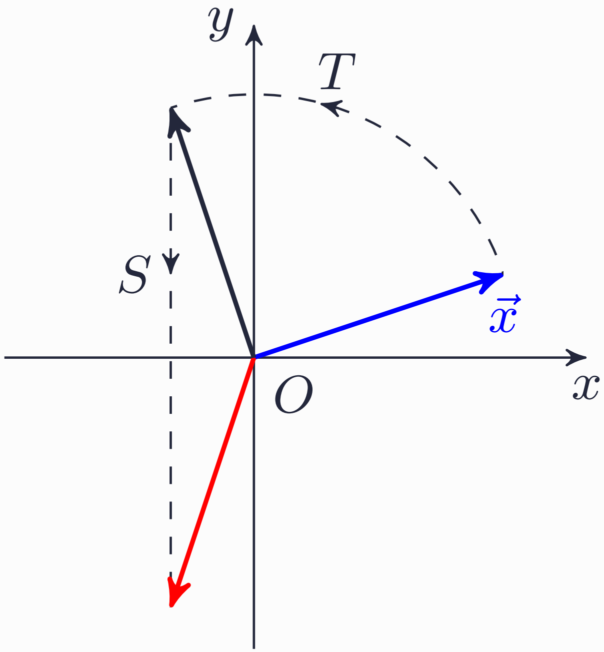
Таким чином, $F(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Аналогічно $F(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Тоді шукана матриця $A = \begin{bmatrix} F(\vec{e}_1) & F(\vec{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Композиція лінійних відображень

Спосіб 2.



T — відображення повороту на кут $90°$;

S — відображення симетрії відносно осі Ox;

F — композиція відображень T і S.

Стандартні матриці перетворень T і S відповідно:

$$A_1 = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} S(\vec{e}_1) & S(\vec{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Тоді матриця відображення $F = S \circ T$:

$$A = A_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Простір лінійних відображень

Нехай V, W — векторні простори, задані над полем P.
Позначимо через $\mathcal{L}(V,W)$ множину усіх лінійних відображень $V \to W$.

Теорема

$\mathcal{L}(V,W)$ відносно операцій суми відображень і їх добутку на число є векторним простором.

Доведення

Очевидно, що множина $\mathcal{L}(V,W)$ замкнена відносно операцій суми відображень і добутку на число. Тому для доведення теореми потрібно показати, що для множини $\mathcal{L}(V,W)$ виконуються 8 умов з означення векторного простору, в чому легко переконатись безпосередньою перевіркою (зокрема, нульовим елементом цього простору є нульове відображення).

Підсумок

1. В природній спосіб ми ввели три операції над лінійними відображеннями: суми, добутку на скаляр і композиції.
2. Виявилось, що сума, добуток на скаляр і композиція лінійних відображень — лінійні відображення.
3. Якщо відомо матриці відображень, то можна дізнатись і матриці суми, добутку на скаляр і композиції відображень. Для цього потрібно виконати відповідні операції над матрицями (сума, добуток на скаляр, добуток матриць).
4. Ми встановили, що множина всіх лінійних відображень між двома векторними просторами з операціями суми і добутку на скаляр — векторний простір.
5. В наступній лекції ми розглянемо детальніше два нових поняття, які пов'язані з лінійними відображеннями — ядро і образ лінійного відображення.