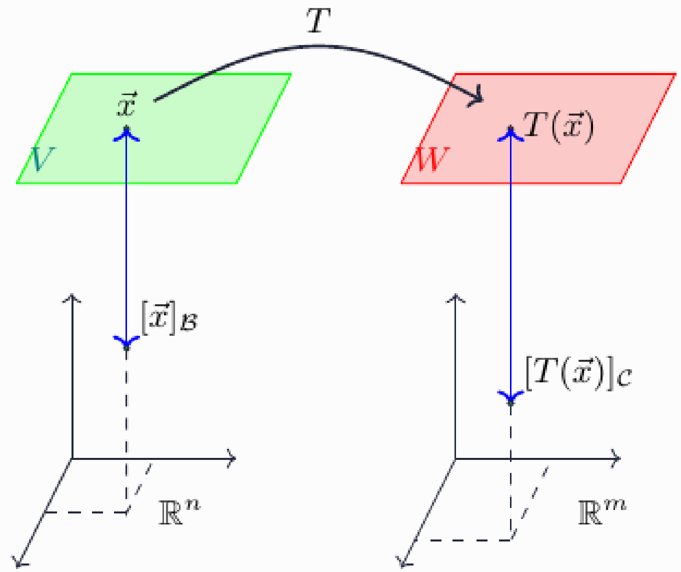
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 13.

Ядро і образ лінійного відображення



Олексій Панасенко

1 травня 2023 р.

День в історії

1 травня 1840 року — у Великій Британії з’явилася в продажу перша у світі поштова марка — «Чорний пенні».

1 травня 1994 року — під час змагань «Гран-прі Сан-Марино» на трасі в Імолі загинув 34-річний бразильський автогонщик, трикратний чемпіон світу в класі машин «Формула-1» Айртон Сенна.

Ядро, образ, дефект, ранг лінійного відображення

Нехай V і W — векторні простори, задані над деяким полем.

Означення

Ядром лінійного відображення $T\colon V \to W$ (позначається $\operatorname{Ker} T$) називається множина усіх векторів простору V, образами яких є $\vec{0}$ простору W:

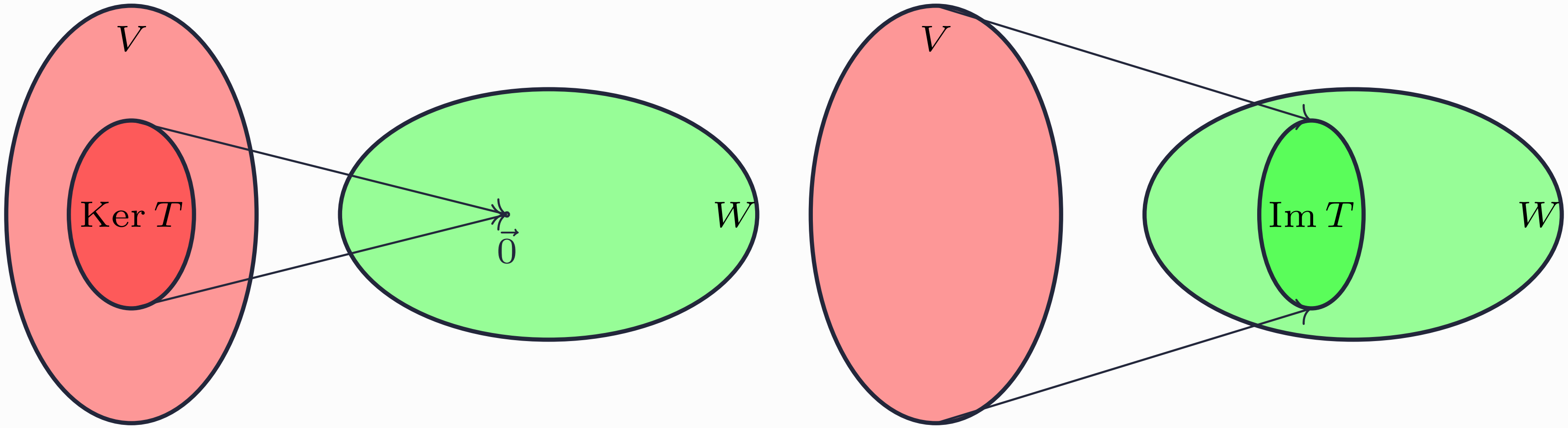
$$\operatorname{Ker} T = \left\{\vec{x} \in V : T(\vec{x}) = \vec{0}_W\right\}.$$

Означення

Образом (областю значень) лінійного відображення $T\colon V \to W$ (позначається $\operatorname{Im} T$) називається множина усіх векторів простору W, що є образами векторів простору V при відображенні T:

$$\operatorname{Im} T = \{T(\vec{x})\colon \vec{x} \in V\}.$$

Ядро, образ, дефект, ранг лінійного відображення



Ядро, образ, дефект, ранг лінійного відображення

Теорема

*Ядро лінійного відображення $T\colon V \to W$ — **підпростір** простору V, а образ — **підпростір** простору W.*

Доведення. Оскільки $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, то множини $\operatorname{Ker} T$ та $\operatorname{Im} T$ непорожні і містять $\vec{0}_V$ та $\vec{0}_W$ відповідно.

Достатньо показати, що множини $\operatorname{Ker} T$ та $\operatorname{Im} T$ замкнені відносно операцій додавання векторів і множення на число.

Нехай $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \operatorname{Ker} T$. Тоді $T(\vec{x}_1) = \vec{0}$, $T(\vec{x}_2) = \vec{0}$. В силу лінійності T:

$$T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = T(\vec{x}_1) + T(\vec{x}_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0};$$
$$T(\alpha\vec{x}_1) = \alpha T(\vec{x}_1) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

і тому $\operatorname{Ker} T$ є підпростором простору V.

Аналогічними міркуваннями доводимо, що $\operatorname{Im} T$ — підпростір W.

Ядро, образ, дефект, ранг лінійного відображення

Означення

Для лінійного відображення $T\colon V \to W$ розмірність підпростору $\operatorname{Ker} T$ називається дефектом відображення T, а розмірність підпростору $\operatorname{Im} T$ — рангом відображення T.

Деякі твердження, пов'язані із ядром, образом, дефектом і рангом

Нагадування

Лінійне відображення $T\colon V \to W$ є сюр'єктивним, якщо $\operatorname{Im} T = W$, а ін'єктивним, якщо з того, що $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ випливає, що $T(\vec{x}_1) \neq T(\vec{x}_2)$.

Теорема

Лінійне відображення $T\colon V \to W$ ін'єктивне тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$.

Доведення. Нехай T — ін'єктивне. Тоді різні вектори відображаються в різні, проте $T(\vec{0}) = \vec{0}$, а значить $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$ і припустимо, що існують такі $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, що $T(\vec{x}_1) = T(\vec{x}_2)$. Тоді

$$\vec{0} = T(\vec{x}_1) - T(\vec{x}_2) = T(\vec{x}_1 - \vec{x}_2),$$

звідки $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}$, що суперечить припущенню.

Деякі твердження, пов'язані із ядром, образом, дефектом і рангом

Лема

*Нехай $A - m \times n$ матриця. Множина $\{A\vec{x}\colon \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ є підпростором простору $\mathbb{R}^m$ і **розмірність** цього підпростору **дорівнює рангу матриці** A.*

Розглядатимемо ранг матриці A як її стовпцевий ранг (максимальна кількість лінійно незалежних векторів-стовпців). Нехай $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$. Тоді

$$\{A\vec{x}\colon \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} = \left\{x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\right\}$$

і ця множина є лінійною оболонкою системи векторів $\left\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right\}$.

Добре відомо, що *лінійна оболонка* системи векторів є *підпростором* і розмірність цього підпростору визначається максимальною кількістю лінійно незалежних векторів серед векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, що і потрібно було довести.

Деякі твердження, пов'язані із ядром, образом, дефектом і рангом

Теорема

Якщо A — *матриця лінійного відображення* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
то *ранг відображення* T *дорівнює рангу матриці* A.

Доведення. Справді, для кожного відображення $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ існує така матриця A, що $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Таким чином, маємо справу з відображенням, образом $\operatorname{Im} T$ якого є множина $\{A\vec{x}\colon \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$, яка за попереду доведеною лемою є підпростором простору $\mathbb{R}^m$, розмірність якого співпадає з рангом матриці A.

Наслідок

Якщо A — *матриця лінійного відображення* $T\colon V \to W$,
то *ранг відображення* T *дорівнює рангу матриці* A.

Деякі твердження, пов'язані із ядром, образом, дефектом і рангом

Приклад

Нехай дано лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ x-z \end{bmatrix}.$$

Знайти ядро та образ відображення T; обчислити його дефект і ранг.

Деякі твердження, пов'язані із ядром, образом, дефектом і рангом

Приклад

Нехай дано лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ x-z \end{bmatrix}.$$

Знайти ядро та образ відображення T; обчислити його дефект і ранг.

Маємо:

$$\operatorname{Ker} T = \{(x,y,z)\colon x+y = y+z = x-z = 0\};$$

$$\operatorname{Im} T = \{(x+y, y+z, x-z)\colon x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x+y = 0, \\ y+z = 0, \\ x-z = 0. \end{cases}$$

Її розв'язком є $(t,-t,t), t \in \mathbb{R}$. Отже, $\operatorname{Ker} T = \{(t,-t,t)\colon t \in \mathbb{R}\}$.

Дефект дорівнює 1.

Деякі твердження, пов’язані із ядром, образом, дефектом і рангом

Приклад

Нехай дано лінійне відображення $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ x-z \end{bmatrix}.$$

Знайти ядро та образ відображення T; обчислити його дефект і ранг.

Нагадаємо, що $\operatorname{Im} T = \{(x+y, y+z, x-z)\colon x,y,z \in \mathbb{R}\}$. Розглянемо систему

$$\begin{cases} x+y = a, \\ y+z = b, \\ x-z = c. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ + \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+c-a \end{array}\right].$$

Таким чином, $b+c-a=0$ ($c = a-b$). Отже, $\operatorname{Im} T = \{a, b, a-b\colon a,b \in \mathbb{R}\}$. Ранг дорівнює 2.

Теорема про суму дефекта і ранга

Теорема

Нехай $T\colon V \to W$ — лінійне відображення скінченновимірного простору V у простір W. Сума дефекту і рангу відображення T дорівнює розмірності простору V:

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V.$$

Схема доведення

• Ядро лінійного відображення є скінченновимірним підпростором простору V. Нехай $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d\}$ — базис $\operatorname{Ker} T$ (тобто дефект дорівнює d).

• Оскільки $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d\}$ є лінійно незалежною системою векторів, то вона може бути доповнена до базису простору V.

• Нехай таким базисом буде $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$.

• Доведемо, що $\mathcal{C} = \{T(\vec{e}_{d+1}), \ldots, T(\vec{e}_n)\}$ є базисом $\operatorname{Im} T$.

• Для цього слід показати, що:

1) кожний вектор з $\operatorname{Im} T$ є лінійною комбінацією векторів системи $\mathcal{C}$;
2) $\mathcal{C}$ — лінійно незалежна система.

Підсумок

1. В цій лекції ми ввели поняття ядра, образу лінійного відображення $T\colon V \to W$.
2. Ядро і образ — це *підпростори* просторів V і W відповідно.
3. Їхні розмірності називають відповідно дефект і ранг.
4. Сума дефекту і рангу дорівнює розмірності простору V.
5. Ранг лінійного відображення дорівнює рангу матриці цього відображення.
6. В наступній лекції ми звузимо розгляд лінійних відображень до випадку, коли $W = V$. В цьому випадку ми маємо справу з так званими лінійними перетвореннями (операторами) простору V.