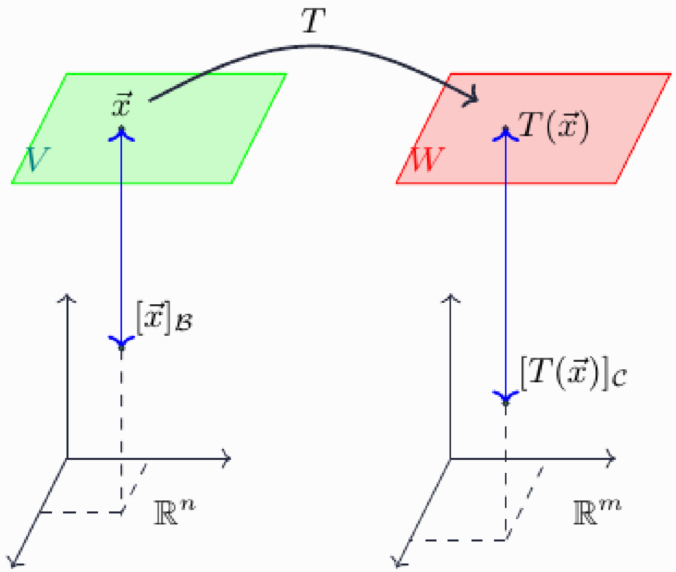
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 14.

Лінійні оператори векторних просторів



Олексій Панасенко

1 травня 2023 р.

День в історії

1 травня 1840 року — у Великій Британії з’явилася в продажу перша у світі поштова марка — «Чорний пенні».

1 травня 1994 року — під час змагань «Гран-прі Сан-Марино» на трасі в Імолі загинув 34-річний бразильський автогонщик, трикратний чемпіон світу в класі машин «Формула-1» Айртон Сенна.

Поняття лінійного оператора векторного простору

Поняття лінійного оператора векторного простору

Перетворення лінійного простору V — відображення, яке кожному вектору $\vec{x}$ цього простору ставить у відповідність деякий вектор $\vec{x}'$ цього ж простору.

Означення

Перетворення T векторного простору V називається лінійним перетворенням (або лінійним оператором), якщо для довільних $\vec{a}, \vec{b} \in V$, $\alpha \in P$:

1) $T(\vec{a} + \vec{b}) = T(\vec{a}) + T(\vec{b})$;

2) $T(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot T(\vec{a})$.

Поняття лінійного оператора векторного простору

Теорема

Нехай T — лінійний оператор простору $\mathbb{R}^n$.

1. *Існує $n \times n$ матриця A така, що $T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.*
2. *Стовпці матриці A — відповідно $T(\vec{e}_1), \ldots, T(\vec{e}_n)$, де $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ — стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$:*

$$A = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \ldots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Матриця A — стандартна матриця лінійного оператора T.

Поняття лінійного оператора векторного простору

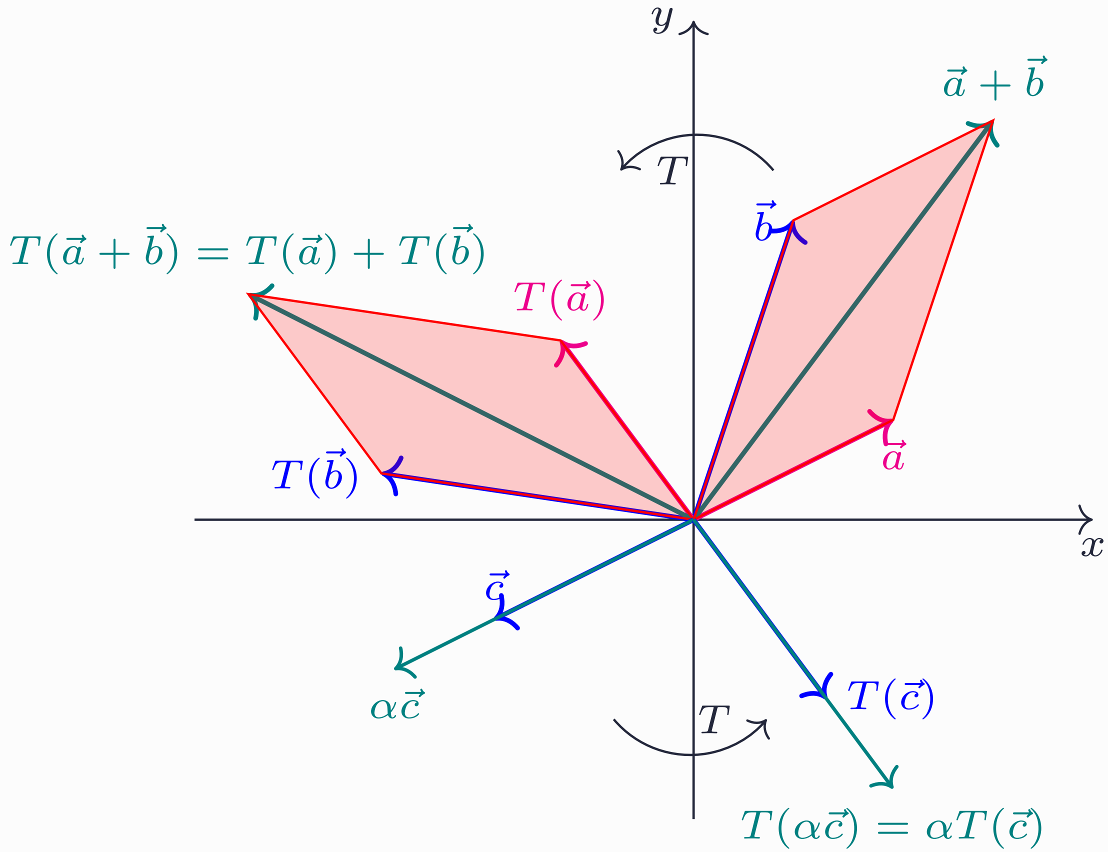
Приклад

Відображення $I\colon V \to V$ таке, що $I(\vec{x}) = \vec{x}$ для кожного $\vec{x} \in V$, є лінійним оператором простору V. Такий оператор називається тотожним. Стандартною матрицею цього лінійного оператора є одинична матриця n-го порядку:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

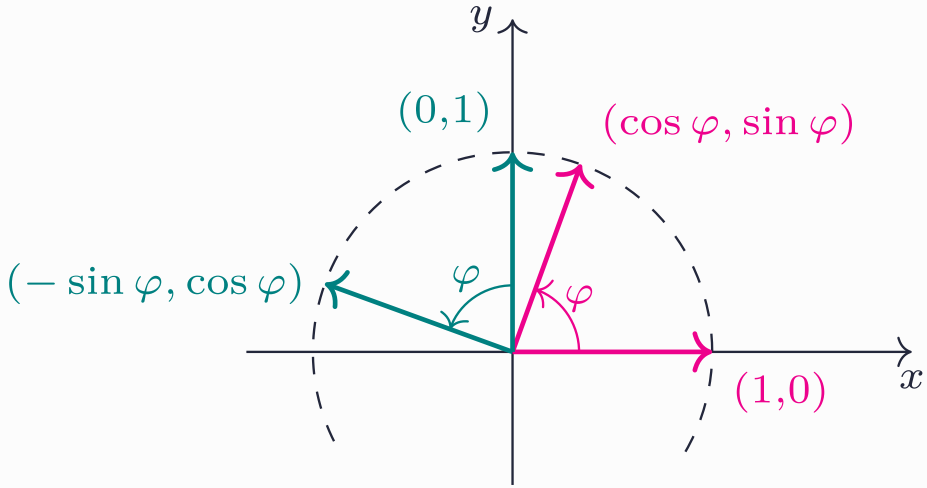
Поняття лінійного оператора векторного простору

Нехай $R_O^{\varphi}\colon W_2 \to W_2$ — перетворення простору W_2, яке повертає кожну точку цього на кут φ проти годинникової стрілки відносно початку координат. Це перетворення є лінійним.



Поняття лінійного оператора векторного простору

Знайдемо матрицю цього лінійного оператора. Для цього знайдемо образи базисних векторів:



$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix},\qquad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Тому матриця оператора повороту на кут φ простору W_2 має вигляд

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

Ядро і образ лінійного оператора

Нехай V — векторний простір, заданий над деяким полем.

Означення

Ядром лінійного оператора $T: V \to V$ (позначається $\operatorname{Ker} T$) називається множина усіх векторів простору V, образами яких є $\vec{0}$:

$$\operatorname{Ker} T = \left\{ \vec{x} \in V : T(\vec{x}) = \vec{0} \right\}.$$

Означення

Образом (областю значень) лінійного оператора $T: V \to V$ (позначається $\operatorname{Im} T$) називається множина усіх векторів, для яких є прообраз при відображенні T:

$$\operatorname{Im} T = \{ T(\vec{x}) : \vec{x} \in V \}.$$

Ядро і образ лінійного оператора

- $\operatorname{Ker} T$ та $\operatorname{Im} T$ є підпросторами простору V.
- Розмірність ядра лінійного оператора називається його дефектом, а розмірність образу — рангом.
- *Сума рангу і дефекту дорівнює розмірності простору* V.

Зв'язок між матрицями оператора в різних базисах

Нехай V — n-вимірний векторний простір, заданий над полем P;
$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ і $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\}$ — два базиси цього простору;

T — лінійний оператор простору V.

Існує така матриця M, яка пов'язує координати довільного вектора $\vec{x} \in V$ в базисі $\mathcal{B}$ з координатами його образу $T(\vec{x})$ в базисі $\mathcal{C}$:

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = M \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}},$$

причому $M = \left[\left[T(\vec{b}_1)\right]_{\mathcal{C}} \quad \left[T(\vec{b}_2)\right]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad \left[T(\vec{b}_n)\right]_{\mathcal{C}} \right] \equiv [T]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

• Якщо $\mathcal{C} = \mathcal{B}$, то матрицю $M = [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$ позначатимемо просто $[T]_{\mathcal{B}}$ і називатимемо матрицею лінійного оператора T в базисі $\mathcal{B}$.
• У випадку, коли B є стандартним базисом, її називаються *стандартною матрицею оператора* T і позначають $[T]$.
• Вибір базису в просторі V встановлює взаємно однозначну відповідність між лінійними операторами цього простору та квадратними матрицями n-го порядку.

Зв'язок між матрицями оператора в різних базисах

Теорема

Матриці лінійного оператора T в базисах $\mathcal{B}$ і $\mathcal{C}$ пов'язані співвідношенням:

$$[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot \left(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\right)^{-1},$$

де $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ — матриця переходу від базису $\mathcal{B}$ до базису $\mathcal{C}$.

Зв'язок між матрицями оператора в різних базисах

$$\boxed{[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot (P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1}}$$

Доведення.

$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}}\,, \tag{1}$$

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}}\,, \tag{2}$$

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}}\,, \tag{3}$$

$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{C}} \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{C}}\,. \tag{4}$$

Тоді підставимо (2) в (4):

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C}} \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{C}}\,; \tag{5}$$

(3) в (5):

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C}} \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{C}}\,; \tag{6}$$

(1) в (6): $$\left(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}\right) \cdot [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\right) [\vec{x}]_{\mathcal{B}}\,,$$

звідки $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$, і, домноживши на $(P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}})^{-1}$, одержуємо потрібну формулу.

Подібні матриці

Подібні матриці та їхні властивості

Нехай A та B — дві квадратні матриці n-го порядку.

Означення

Говорять, що матриця A **подібна** до матриці B (позначається $A \sim B$), якщо існує невироджена матриця Q така, що $A = QBQ^{-1}$.

Матриці лінійного оператора T в різних базисах подібні між собою, бо вони, нагадаємо, пов'язуються співвідношенням:

$$[T]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot \left(P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

Подібні матриці та їхні властивості

Теорема

Детермінанти подібних матриць однакові.

Proof.

Нехай A і B — подібні матриці. Це означає, що існує невироджена матриця Q така, що $A = QBQ^{-1}$. Тоді

$$\det A = \det(QBQ^{-1}) = \det Q \cdot \det B \cdot \det Q^{-1} = \det Q \cdot \det Q^{-1} \cdot \det B =$$
$$= \det(Q \cdot Q^{-1}) \cdot \det B = \det B.$$

□

Подібні матриці та їхні властивості

В просторі $M_n(\mathbb{R})$ розглянемо відношення «бути подібним» (відношення подібності матриць).

Теорема

Відношення подібності матриць в просторі $M_n(\mathbb{R})$ є відношенням еквівалентності.

Доведення. Відношення подібності — рефлексивне, симетричне і транзитивне.

1. Рефлексивність ($A \sim A$) виконується: $A = I \cdot A \cdot I^{-1}$, I — одинична матриця.
2. Нехай $A \sim B$. Тоді існує така матриця Q, що $A = QBQ^{-1}$. Цю рівність можна переписати так: $B = Q^{-1}AQ = Q^{-1}A(Q^{-1})^{-1}$, тобто $B \sim A$ і симетричність виконується.
3. Нехай $A \sim B$, $B \sim C$. Це означає, що існують невироджені матриці Q та S такі, що $A = QBQ^{-1}$, $B = SCS^{-1}$. Маємо:
$$A = QBQ^{-1} = Q(SCS^{-1})Q^{-1} = (QS) \cdot C \cdot (S^{-1}Q^{-1}) = (QS) \cdot C \cdot (QS)^{-1},$$
звідки $A \sim C$. Транзитивність виконується.

Подібні матриці та їхні властивості

Тоді:

- Відношення подібності матриць *породжує розбиття* простору квадратних матриць *на класи еквівалентності*.
- Важливою задачею є *відшукання* в різних класах еквівалентності в певному розумінні *найпростіших представників*. Такими представниками могли би бути, наприклад, діагональні матриці, оскільки ними зручно оперувати.
- На мові лінійних операторів це б означало відшукання такого базису простору V, при якому матриця даного лінійного оператора була б діагональною.
- Втім, як ми покажемо пізніше, не в кожному з класів еквівалентності можна обрати представником діагональну матрицю.

Алгебра лінійних операторів

Алгебра лінійних операторів

Означення

Алгеброю над полем P називається множина L з визначеними на ній внутрішніми бінарними операціями додавання $(+)$ і множення $(\bullet)$ та зовнішньою бінарною операцією множення на елементи поля P $(\cdot)$ такими, що виконуються умови:
1) $(L, +, \cdot)$ — векторний простір;
2) $(L, +, \bullet)$ — кільце;
3) операції $\bullet$ та $\cdot$ пов'язані співвідношенням: $(\lambda \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b})$ для довільних $\lambda \in P$, $\vec{a}, \vec{b} \in L$.

Алгебра лінійних операторів

Приклад

1. Множина C комплексних чисел з визначеними операціями додавання, множення комплексних чисел і множення на дійсні числа є алгеброю над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.
2. Множина $M_n(\mathbb{R})$ $(M_n(C))$ квадратних матриць n-го порядку з дійсними (комплексними) коефіцієнтами і визначеними на ній операціями додавання, множення матриць і множення матриці на дійсні (комплексні) числа є алгеброю над відповідним полем.
3. $(\mathcal{L}(V), +\,, \circ\,, \cdot)$ – множина лінійних операторів n-вимірного векторного простору V з операцією додавання, множення відображень (композиція) та множення на число є алгеброю на полем $\mathbb{R}$.

Алгебра лінійних операторів

Відображення алгебр називається *ізоморфізмом*, якщо воно одночасно є ізоморфізмом відповідних векторних просторів та кілець.

Теорема

Алгебри $(M_n(\mathbb{R}), +, \bullet, \cdot)$[1] *та* $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), +, \circ, \cdot)$ *ізоморфні*.

[1] Знаком $\bullet$ позначена операція множення матриць, а знаком $\cdot$ — операція множення матриці на число

Вироджені, невироджені, оборотні лінійні оператори

Вироджені і невироджені лінійні оператори

Означення

Лінійний оператор T n-вимірного простору V називається невиродженим, якщо його ранг дорівнює n. Якщо ж його ранг менший n, то оператор називається виродженим.

$$T \text{ — невироджений} \quad \Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Im} T = n \quad \Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker} T = 0$$

Вироджені і невироджені лінійні оператори

Приклад

Нехай $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — симетрія відносно осі Ox. Стандартна матриця цього відображення $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; її ранг дорівнює 2, що співпадає з розмірністю простору $\mathbb{R}^2$. Отже, T — невироджений оператор.

Приклад

Нехай $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — проекція на вісь Ox. Стандартна матриця цього відображення $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; ранг дорівнює 1 і менше розмірності простору $\mathbb{R}^2$. Таким чином, T — вироджений оператор.

Вироджені і невироджені лінійні оператори

Теорема

Лінійний оператор T простору V є невиродженим тоді і тільки тоді, коли матриця цього оператора в довільному базисі є невиродженою.

Теорема

Невироджений лінійний оператор простору V є взаємнооднозначним відображенням цього простору.

Таким чином, *невироджений* лінійний оператор є *ізоморфізмом* векторного простору на себе.

Оборотні лінійні оператори

Нагадаємо, що лінійний оператор $I\colon V \to V$ називається тотожним, якщо для кожного $\vec{x} \in V$ $I(\vec{x}) = \vec{x}$.

Означення

Лінійний оператор T' називається оберненим до лінійного оператора T, якщо $T \circ T' = T' \circ T = I$. Оператор T називається оборотним, якщо до нього існує обернений (позначається T^{-1}).

Приклад

В просторі $\mathbb{R}^2$ лінійний оператор повороту проти годинникової стрілки на кут 60° є оборотним, причому обернений до нього — оператор повороту на 60° за годинниковою стрілкою

Оборотні лінійні оператори

Теорема

Лінійний оператор T є оборотним тоді і тільки тоді, коли він невироджений.

Доведення. *Необхідність.*

- Нехай A — матриця оборотного лінійного оператора T; B — матриця оператора T^{-1}.
- Тоді за теоремою про матрицю композиції відображень знаходимо, що $AB = BA = I$, тобто $B = A^{-1}$.
- Отже, $\det A \neq 0$, A — невироджена, значить і T невироджений.

Достатність.

- Нехай T — невироджений лінійний оператор. Тоді матриця цього оператора також невироджена. Тому існує обернена матриця A^{-1}.
- В силу того, що між лінійними відображеннями та матрицями відповідної розмірності існує взаємно однозначна відповідність, стверджуємо, що існує оператор T^{-1}, такий що $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$.

Підсумок

1. В цій лекції ми розглядали лінійні відображення $T\colon V \to V$ — лінійні оператори (лінійні перетворення) простору V.
2. Перенесено на цей випадок основні поняття і результати, які стосувались загалом лінійних відображень.
3. Виявилось, що матриці лінійного оператора у різних базисах пов'язані певним співвідношенням і є подібними.
4. Відношення подібності матриць є відношенням еквівалентності, тому множина всіх матриць розбивається на класи подібних матриць.
5. Алгебри лінійних операторів n-вимірного простору і матриць n-го порядку ізоморфні.
6. Ми ввели поняття виродженого, невиродженого, оборотного лінійного оператора. Критерій оборотності оператора — його невиродженість.
7. В наступній лекції ми вивчимо питання відшукання векторів $\vec{x}$, які під дією лінійного оператора відображаються у вектор виду $\lambda\vec{x}$. Тема наступної лекції: «Власні значення і власні вектори лінійного оператора».