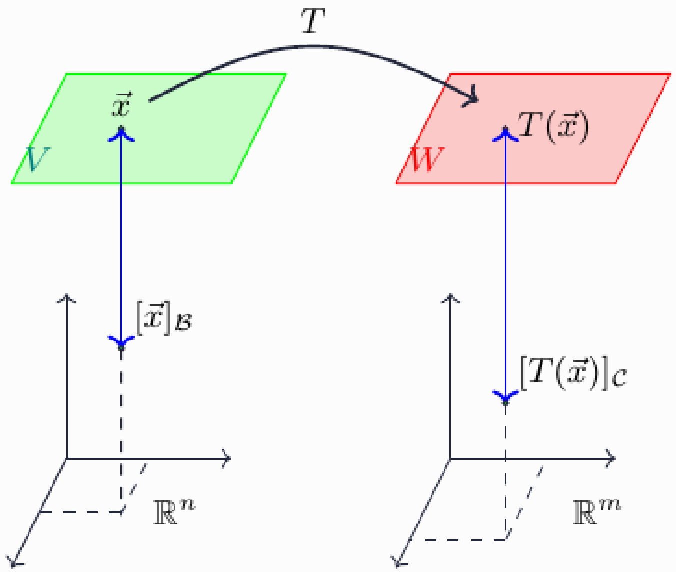
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 15.

Власні значення і власні вектори лінійного оператора



Олексій Панасенко

8 травня 2023 р.

День в історії

8 травня 1945 року — після капітуляції Німеччини Друга світова війна в Європі офіційно закінчилася опівночі цього дня, хоча війна на Тихому океані тривала до капітуляції Японії у вересні.

8 травня 1970 року — через місяць після того, як Пол Маккартні оголосив, що покидає «The Beatles», британський рок-гурт випустив «Let It Be» — свій останній оригінальний студійний альбом.

8 травня 1980 року — після глобальної програми вакцинації ВООЗ офіційно оголосила про ліквідацію віспи; протягом століть ця гостра інфекційна хвороба була однією з найстрашніших хвороб світу.

Підпростори, інваріантні відносно лінійного оператора

Приклад

Нехай відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано своєю стандартною матрицею: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Знайти образи векторів $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Підпростори, інваріантні відносно лінійного оператора

Приклад

Нехай відображення $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано своєю стандартною матрицею: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Знайти образи векторів $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$T(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$T(\vec{v}) = A \cdot \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{v}.$$

- Вектор $\alpha\vec{v}$ відображається у вектор $2 \cdot (\lambda\vec{v})$:

$$T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v}) = \alpha \cdot 2\vec{v} = 2 \cdot (\alpha\vec{v}).$$

- Отже, ми одержали таку множину $U = \{\alpha\vec{v} \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$ (а вона є підпростором простору $\mathbb{R}^2$), що $T(U) \subset U$.

Підпростори, інваріантні відносно лінійного оператора

Означення

Підпростір U простору V називається інваріантним відносно оператора T, якщо для довільного $\vec{a} \in U$ $T(\vec{a}) \in U$, тобто $T(U) \subset U$.

Приклад

$U = \{\vec{0}\}$ і $U = V$ — це *тривіальні* інваріантні підпростори кожного векторного простору V.

Приклад

Нехай T — оператор повороту на кут α навколо осі Oz в просторі $\mathbb{R}^3$.

Прикладом інваріантного одновимірного підпростору простору $\mathbb{R}^3$ відносно оператора T є вісь Oz, а прикладом інваріантного двовимірного підпростору — площина xOy.

Власні вектори лінійного оператора

Розглянемо випадок, коли інваріантні підпростори простору V є одновимірними.

Означення

Ненульовий вектор $\vec{u}$ простору V називається власним вектором лінійного оператора T цього простору, якщо існує таке $\lambda \in P$, що $T(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$.
При цьому число λ називається власним значенням лінійного оператора T, що відповідає власному вектору $\vec{u}$.

Власні вектори лінійного оператора

Приклад

Чи є вектор $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ власним вектором лінійного оператора T, заданого своєю стандартною матрицею

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}?$$

Знайдемо образ вектора $\vec{x}$ при заданому відображенні:

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{x},$$

тобто $\vec{x}$ є власним вектором лінійного оператора.

Власні вектори лінійного оператора

Отже,

- Якщо знайдеться таке λ, що рівняння $A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$ має ненульовий розв'язок $\vec{x}$, то $\vec{x}$ — власний вектор лінійного оператора з матрицею A.
- Останнє матричне рівняння рівносильне такому:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0},$$

  що є матричною формою запису однорідної системи лінійних рівнянь.
- Відомо, що однорідна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриця цієї системи є виродженою.

Власні вектори лінійного оператора

Приклад

Нехай $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Доведіть, що число 7 є власним значенням цієї матриці і знайти власні вектори, які йому відповідають.

Справді, матриця $A-7I = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ є *виродженою*. Власні вектори знаходимо з системи: $(A-7I)\vec{x} = \vec{0}$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 6x_2 = 0, \\ 5x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Власними векторами є усі вектори виду $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Власні вектори лінійного оператора

- Як відомо, множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з n невідомими утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.
- Якщо λ — власне значення матриці A, то загальний розв'язок системи $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ називається власним підпростором, що відповідає власному значенню λ.
- Для визначення простору достатньо знати його базисні вектори. Тому надалі, розв'язуючи задачу відшукання власних векторів лінійного оператора (матриці), що відповідають власному значенню λ, ми будемо обмежуватись знаходженням лінійно незалежних власних векторів, що відповідають цьому значенню (знаходити фундаментальну систему розв'язків системи $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$).

Власні вектори лінійного оператора

Приклад

Довести, що $\lambda = 6$ є власним значенням матриці $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ і знайти базис власного підпростору, що відповідає цьому значенню.

Оскільки матриця

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

є виродженою (її ранг дорівнює 1), то *6 справді є власним значенням матриці A.*

Власний підпростір U, що відповідає власному значенню 6 — це загальний розв'язок системи

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Одержуємо $x_1 = -x_2 + 2x_3$, звідки знаходимо загальний розв'язок системи

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} -a + 2b \\ a \\ b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

В якості базису власного підпростору можна взяти власні вектори $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ та $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Характеристичний многочлен лінійного оператора

Характеристичний многочлен лінійного оператора

- Нехай лінійний оператор T простору V задано своєю матрицею A в деякому базисі $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$.
- Нехай λ — власне значення цього лінійного оператора.
- Тоді існує $\vec{x} \neq \vec{0}$ такий, що $T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$, тобто $A\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \lambda\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.
- Це рівносильне однорідній системі рівнянь: $(A - \lambda I)\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \vec{0}$.
- Нам відомо, що ця *система має ненульовий розв'язок*, отже *визначник матриці $A - \lambda I$ дорівнює нулю*.

Висновок: усі власні значення лінійного оператора T — це корені λ рівняння $\det(A - \lambda I) = 0$.

Означення

• $\det(A - \lambda I)$ є многочленом n-го степеня відносно λ і називається **характеристичним многочленом** лінійного оператора T, який задано в деякому базисі $\mathcal{B}$ простору V матрицею A.

• Рівняння ж $\det(A - \lambda I) = 0$ назвемо **характеристичним рівнянням** лінійного оператора T, який в базисі $\mathcal{B}$ задано матрицею A.

Теорема

Характеристичний многочлен лінійного оператора T не залежить від вибору базису.

- Нехай лінійний оператор T простору V в базисі $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ задається матрицею A, а в базисі $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\}$ — матрицею A'.
- $\boxed{A' = P \cdot A \cdot (P)^{-1}}$, де $P \equiv P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ — матриця переходу від $\mathcal{B}$ до $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}\det(A' - \lambda I) &= \det(P \cdot A \cdot P^{-1} - \lambda I) = \det(PAP^{-1} - \lambda \cdot PIP^{-1}) = \\ &= \det(P \cdot (A - \lambda I) \cdot P^{-1}) = \det P \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P^{-1} = \\ &= \det(P \cdot P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I).\end{aligned}$$

Характеристичний многочлен лінійного оператора

Корекція означення

Оскільки характеристичний многочлен лінійного оператора не залежить від вибору базису, замість слів «*характеристичний многочлен лінійного оператора T в базисі $\mathcal{B}$*» можна говорити просто «характеристичний многочлен лінійного оператора T».

Означення

Характеристичним многочленом матриці A називається многочлен (відносно змінної λ) $\det(A - \lambda I)$.

Характеристичний многочлен лінійного оператора

Теорема (Основна теорема алгебри многочленів)

Кожний многочлен степеня $n \geqslant 1$ з комплексними коефіцієнтами має принаймні один комплексний корінь.

Теорема

Многочлен n-го степеня (з комплексними/дійсними коефіцієнтами) не може мати більше ніж n дійсних коренів.

Зауваження

Якщо векторний простір розглядається над полем $\mathbb{C}$, то кожний лінійний оператор цього простору має принаймні один власний вектор.
Якщо ж векторний простір розглядається над полем $\mathbb{R}$, то лінійний оператор може взагалі не мати власних векторів.

Алгоритм пошуку власних значень і власних векторів

Алгоритм пошуку власних значень і власних векторів

1. Складаємо характеристичний многочлен матриці A: $\det(A - \lambda I)$.
2. Розв'язуємо характеристичне рівняння $\det(A - \lambda I) = 0$ і знаходимо власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.
3. Для кожного власного значення λ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ знаходимо базис простору розв'язків однорідної системи $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ (фундаментальну систему розв'язків цієї системи) — це і будуть лінійно незалежні власні вектори, що відповідають λ_i.
   Загальний розв'язок системи $(A - \lambda_i I)\vec{x} = \vec{0}$ — це власний підпростір, що відповідає λ_i.

Зауваження

Знаходження власних значень і власних векторів *лінійного оператора* **рівносильне** знаходженню власних значень і власних векторів *матриці цього оператора* в довільному базисі.

Приклад

Знайдіть власні значення і власні вектори матриці $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

- Знайдемо характеристичний многочлен матриці A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(-4\lambda + \lambda^2 + 5) + 2 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

- Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0;$$

$$-(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0.$$

Характеристичне рівняння має двократний корінь 1 ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) і однократний корінь 2 ($\lambda_3 = 2$). Отже, 1 і 2 — власні значення матриці A.

• Знайдемо власні вектори, що відповідають власному значенню 1. Для цього слід розв'язати систему $(A - 1 \cdot I)\vec{x} = \vec{0}$. Маємо:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{cases} -x_1 + x_2 \phantom{{}+3x_3} = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$$

Загальним розв'язком системи (власним підпростором, що відповідає власному значенню 1) є $\{(a, a, a) \colon a \in \mathbb{R}\}$. В якості базисного вектору можна взяти вектор $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Алгоритм пошуку власних значень і власних векторів

- Аналогічно знайдемо власні вектори, що відповідають власному значенню 2. Для цього розв'яжемо систему $(A - 2 \cdot I)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо **загальний розв'язок** $\{(a, 2a, 4a) \colon a \in \mathbb{R}\}$. Отже, усі власні вектори, що відповідають власному значенню 2, колінеарні вектору $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Деякі властивості матриць (лінійних операторів), пов’язані із власними значеннями та власними векторами

Деякі властивості матриць

Теорема

Власними значеннями трикутної матриці є ті її елементи, що розташовані на головній діагоналі.

Нехай A — верхня трикутна матриця:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді матриця $A - \lambda I$ є також верхньою трикутною. Тому

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda).$$

Очевидно, що коренями характеристичного рівняння є $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Деякі властивості матриць

Теорема

*Квадратна матриця A є оборотною **тоді і тільки тоді**, коли число 0 **не є** власним значенням цієї матриці.*

Необхідність.

- Нехай матриця A оборотна, тоді $\det A \neq 0$.
- Припустимо, що 0 є її власним значенням.
- Це означає, що детермінант матриці $A - 0 \cdot I = A$ дорівнює нулю — протиріччя.

Достатність.

- Нехай 0 не є власним значенням матриці A.
- Припустимо, що до матриці A не існує оберненої.
- Тоді $\det A = 0$.
- Тоді $0 = \det A = \det(A - 0 \cdot I)$, тобто 0 є власним значенням цієї матриці — протиріччя.

Деякі властивості матриць

Теорема

Нехай A — квадратна матриця, λ — її власне значення, що відповідає власному вектору $\vec{u}$.

1. *Для кожного $n \in \mathbb{N}$ $\vec{u}$ є власним вектором матриці A^n, а λ^n є власним значенням, що відповідає цьому власному вектору.*
2. *Якщо A — оборотна, то $\frac{1}{\lambda}$ є власним значенням матриці A^{-1}, що відповідає власному вектору $\vec{u}$.*

$\boxed{1}$ Доведення методом математичної індукції. **База індукції** очевидна.

Крок індукції. Припустимо, що для довільного, але фіксованого k, твердження теореми має місце (тобто λ^k є власним значенням матриці A^k, а $\vec{u}$ є власним вектором, що відповідає цьому власному значенню: $A^k\vec{u} = \lambda^k\vec{u}$).

Тоді

$$A^{k+1}\vec{u} = A^k \cdot A\vec{u} = A^k \cdot \lambda\vec{u} = \lambda \cdot A^k\vec{u} = \lambda^{k+1}\vec{u},$$

тобто твердження теореми має місце і для $n = k + 1$.

Деякі властивості матриць

$\boxed{2}$ Нехай матриця A оборотна і $\lambda \neq 0$ — її власне значення, що відповідає власному вектору $\vec{u}$. Маємо: $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Домножимо обидві частини останньої рівності на λ^{-1} і зліва на A^{-1}:

$$\frac{1}{\lambda}A^{-1}A\vec{u} = \frac{1}{\lambda}A^{-1} \cdot \lambda\vec{u},$$

звідки $\boxed{\frac{1}{\lambda}\vec{u} = A^{-1}\vec{u}}$, що і означає, що $\frac{1}{\lambda}$ є власним значенням матриці A^{-1}, що відповідає власному вектору $\vec{u}$.

Деякі властивості матриць

Теорема

Система $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ власних векторів лінійного оператора T n-вимірного простору V ($k \leqslant n$), яким відповідають попарно різні власні значення, є лінійно незалежною.

Доведення проводиться методом математичної індукції за кількістю векторів системи.

Симпатична задача

Приклад

Обчисліть $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Симпатична задача

Приклад

Обчисліть $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Позначення: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Отже, нам необхідно обчислити $A^{10}\vec{x}$.
- Знайдемо власні значення і власні вектори матриці A. Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ має корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Власні вектори, що відповідають цим власним значенням відповідно $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ та $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- **Вектори $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$ лінійно незалежні, більше того: утворюють базис простору $\mathbb{R}^2$.**
- Знайдемо координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі. Нехай $\vec{x} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2$. Тоді

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 5, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Знаходимо: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$. Таким чином, $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.

$$A^{10} \cdot \vec{x} = A^{10} \cdot (3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) = 3(A^{10} \cdot \vec{u}_1) + 2(A^{10} \cdot \vec{u}_2) = 3(\lambda_1^{10}\vec{u}_1) + 2(\lambda_2^{10}\vec{u}_2) =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot 2^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 2^{11} \\ -3 + 2^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2051 \\ 4093 \end{bmatrix}.$$

Підсумок

1. Ми ввели поняття власного вектора і власного значення лінійного оператора (матриці).
2. Ми встановили алгоритм відшукання власних значень і власних векторів.
3. Власні значення — розв'язки характеристичного рівняння $A - \lambda I = 0$.
4. Власні вектори, що відповідають λ — ненульові розв'язки однорідної системи $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.
5. Ми встановили, що якщо $\vec{u}$ — власний вектор матриці A, то $\vec{u}$ — власний вектор усіх матриць A^k, в тому числі і A^{-1}.
6. Власні вектори, які відповідають *попарно різним* власним значенням — лінійно незалежні.
7. В наступній лекції **«Діагоналізація матриць»** ці поняття допоможуть розв'язати задачу знаходження того базису векторного простору, в якому матриця лінійного оператора є діагональною (якщо такий базис існує).