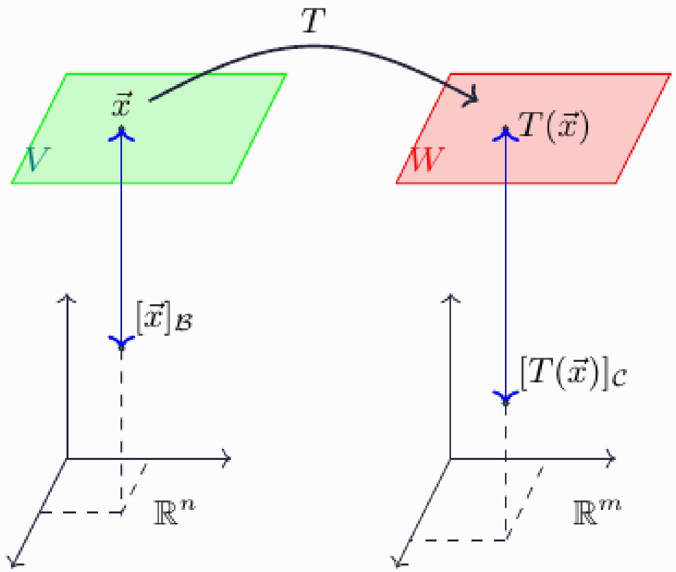
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 16.

Діагоналізація матриць



Олексій Панасенко

15 травня 2023 р.

День в історії

15 травня 1618 року — Йоганн Кеплер підтвердив своє раніше відкинуте відкриття третього закону руху планет (він вперше відкрив його 8 березня, але незабаром відкинув цю ідею після того, як були зроблені деякі початкові розрахунки).

15 травня 1905 року — у штаті Невада (США) засновано місто Лас-Вегас.

15 травня 1963 року — запуск останньої місії на Меркурій, «Меркурій-Атлас 9» з астронавтом Гордоном Купером на борту. Він став першим американцем, який провів у космосі більше доби, і останнім американцем, який полетів у космос наодинці.

Діагоналізація матриць

Умови, за яких матриця зводиться до діагонального виду

Означення

Матриця A n-го порядку називається діагоналізовною (або зводиться до діагонального виду), якщо вона подібна до діагональної матриці, тобто існують невироджена матриця P і діагональна D такі, що $A = PDP^{-1}$ (або, що те ж саме, $AP = PD$).

Умови, за яких матриця зводиться до діагонального виду

Приклад

Чи зводиться до діагональної матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$?

Доведемо, що відповідь позитивна, і шуканими є матриці $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ і $P = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix}$, де $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — власні вектори, що відповідають власним значенням λ_1 і λ_2 відповідно.

Знайдемо власні значення матриці A. Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо: $\lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0$, звідки $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 7$.

Умови, за яких матриця зводиться до діагонального виду

Приклад

Чи зводиться до діагональної матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$?

Власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = -4$, є розв'язком системи

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1 \\ -4x_2 \end{bmatrix}.$$

Таким вектором є вектор $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$. Аналогічно знаходимо, що власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda_2 = 7$, є вектор $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Формуємо матриці $P = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Умови, за яких матриця зводиться до діагонального виду

Приклад

Чи зводиться до діагональної матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$?

Нарешті, обчислюємо:

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 7 \\ 20 & 7 \end{bmatrix};$$

$$PD = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 7 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}.$$

Таким чином матриця A зводиться до діагональної.

Умови, за яких матриця зводиться до діагонального виду

Теорема

Матриця n-го порядку зводиться до діагональної тоді і тільки тоді, коли вона має n лінійно незалежних власних векторів.

Необхідність. Нехай матриця A зводиться до діагональної. Це означає, що існують невироджена матриця P та діагональна D такі, що $AP = PD$. Нехай

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$AP = A \cdot \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \dots & A\vec{v}_n \end{bmatrix};$$

$$PD = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} \alpha_1\vec{v}_1 & \alpha_2\vec{v}_2 & \dots & \alpha_n\vec{v}_n \end{bmatrix}.$$

Тоді $A\vec{v}_i = \alpha_i\vec{v}_i$ для кожного $1 \leqslant 1 \leqslant n$. Це означає, що $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ — власні вектори матриці A і вони є лінійно незалежними, оскільки формують стовпці невиродженої матриці P.

Умови, за яких матриця зводиться до діагонального виду

Теорема

Матриця n-го порядку зводиться до діагональної тоді і тільки тоді, коли вона має n лінійно незалежних власних векторів.

Достатність. Нехай, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ — лінійно незалежні власні вектори матриці A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — відповідні їм власні значення (зауважимо, що серед власних значень можуть бути і однакові числа). Складемо матрицю $P = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \ldots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$, $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Тоді

$$AP = \begin{bmatrix} A\vec{u}_1 & A\vec{u}_2 & \ldots & A\vec{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{u}_1 & \lambda_2\vec{u}_2 & \ldots & \lambda_n\vec{u}_n \end{bmatrix} = PD,$$

що і означає, що матриця A зводиться до діагонального виду.

Алгоритм діагоналізації квадратної матриці

1. Знаходимо усі власні значення матриці A. Якщо коренів менше n (з урахуванням кратності), то матриця не зводиться до діагонального виду; якщо коренів рівно n, то переходимо до наступного кроку.
2. Знаходимо усі лінійно незалежні власні вектори $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$, що відповідають знайденим власним значенням. Якщо $k = n$ (n — розмірність матриці), то матриця A зводиться до діагонального виду і переходимо до кроку 3, якщо ж $k < n$ — то не зводиться.
3. Складаємо матриці $P = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \ldots & \vec{u}_n \end{bmatrix}$ та $D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, причому власному вектору $\vec{u}_k$ повинно відповідати його власне значення λ_k, $k = \overline{1,n}$. Тоді
$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Приклад

Приклад

Звести до діагонального виду матрицю

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ця матриця розглядалась нами раніше. Вона має лише два лінійно незалежні власні вектори: $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ та $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Отже, за теоремою стверджуємо, що дана матриця не зводиться до діагонального виду.

Застосування діагоналізації матриць

Знаходження степенів матриці

Теорема

Нехай A — квадратна матриця n-го порядку, яка зводиться до діагонального виду: $A = PDP^{-1}$. Тоді для довільного натурального n:

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}.$$

Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження має місце для довільного, але фіксованого k, тобто $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$. Тоді

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = (P \cdot D^k \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) = \\ &= PD^k(P^{-1}P)DP^{-1} = P(D^kD)P^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Знаходження степенів матриці

Приклад

Знайти A^{100}, якщо $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Власні значення та власні вектори цієї матриці:

$$\lambda_1 = -1, \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_2 = 2, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця A другого порядку, а лінійно незалежних власних векторів також 2, то її можна звести до діагонального виду, причому

$$A = PDP^{-1}, \qquad \text{де} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2^{100} \\ -1 & 2^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2^{100} + 2 & 2^{100} - 1 \\ 2^{101} - 2 & 2^{101} + 1 \end{bmatrix}.$$

Підсумок

1. Ми дізнались умови, за яких матриця n-го порядку може бути представлена у вигляді PDP^{-1}, де D — діагональна.
2. Для цього необхідно і достатньо, щоб матриця мала n лінійно незалежних власних векторів.
3. Тоді стовпці P — це лінійно незалежні власні вектори матриці, а D — діагональна із відповідними власними значеннями на діагоналі.
4. Таке подання матриці є корисним, наприклад, для знаходження степенів матриці.
5. На мові лінійних опреаторів це означає, що матриця лінійного оператора в базисі, що складається із власних векторів, є діагональною.
6. Далі ми розглянемо векторні простори, в яких означена відстань між векторами, а також лінійні оператори в таких просторах.