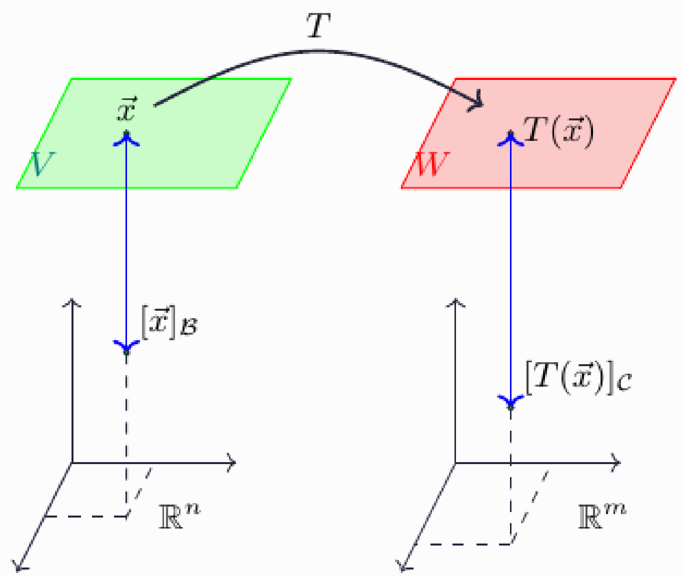
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 17. Векторні простори зі скалярним множенням



Олексій Панасенко

22 травня 2023 р.

День в історії

22 травня 1906 року — літальний апарат братів Райт було запатентовано. Патент ілюстрував безмоторний літальний апарат (планер). Важливість патенту полягає в тому, що в ньому заявлено новий і корисний спосіб керування літальним апаратом, як з двигуном, так і без нього.

22 травня 1980 року — вийшла аркадна гра Pac-Man. Гра з круглою жовтою фігуркою, яка рухається лабіринтом, стала однією з найвідоміших відеоігор в історії. Її випустила компанія Namco.

Скалярне множення у векторному просторі

Скалярне множення

Означення

Скалярним множенням у дійсному векторному просторі V називається операція, яка кожній парі $\vec{a}, \vec{b} \in V$ співставляє таке дійсне число (позначається $(\vec{a},\vec{b})$), що для довільних $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються умови (аксіоми скалярного множення):

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$;

2) $(\vec{a},\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}) + (\vec{a},\vec{c})$;

3) $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b})$;

4) $(\vec{a},\vec{a}) \geqslant 0$, причому $(\vec{a},\vec{a}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$.

Зазвичай скалярний добуток векторів позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $(\vec{a},\vec{b})$.

Означення

Дійсний векторний простір зі скалярним множенням називається евклідовим.

Скалярне множення

Приклад

У арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^n$ скалярне множення векторів можна означити так: якщо $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, то $(\vec{x},\vec{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

Так означене скалярне множення називається стандартним. Зазначимо, що розглядаючи вектори простору $\mathbb{R}^n$ як матриці-стовпці, можемо стандартне скалярне множення записати у вигляді матричного множення:

$$(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x}^T \cdot \vec{y}.$$

Скалярне множення

Приклад

Розглянемо ще один варіант введення скалярного множення в просторі $\mathbb{R}^n$.

Зафіксуємо додатні дійсні числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ і парі векторів $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ поставимо у відповідність число $(\vec{x}, \vec{y}) = \omega_1 x_1 y_1 + \ldots + \omega_n x_n y_n$. Така відповідність задовольняє означення 1 і називається **ваговим скалярним множенням в просторі $\mathbb{R}^n$**.

Вагове скалярне множення можна подати у такому вигляді:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \cdot W \cdot \vec{y}, \quad \text{де } W = \begin{bmatrix} \omega_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \omega_n \end{bmatrix}.$$

Скалярне множення

Приклад

В просторі $\mathcal{P}_2$ скалярне множення можна означити так: якщо $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, то $\big(p(x),q(x)\big) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$. Це стандартне скалярне множення простору $\mathcal{P}_2$.

Скалярне множення

Приклад

Розглянемо простір неперервних функцій $\mathcal{C}_{[a,b]}$. Довільним двом функціям f та g з цього простору поставимо у відповідність число

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{1}$$

Умови 1–4 означення скалярного множення виконуються.

Властивості скалярного множення

Властивості скалярного множення

Теорема

Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *— вектори векторного простору* E *зі скалярним множенням,* λ *— скаляр. Тоді*

$$1^\circ \quad (\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}).$$

$$2^\circ \quad (\vec{a},\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

$$3^\circ \quad (\vec{a},\vec{0}) = 0.$$

Властивості скалярного множення

Теорема

Будь-який дійсний скінченновимірний векторний простір завжди можна перетворити в евклідовий векторний простір.

Доведення. Нехай V — n-вимірний дійсний векторний простір, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — деякий базис цього простору. Для векторів

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n,$$
$$\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n$$

покладемо

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n.$$

Легко перевірити, що умови 1–4 означення скалярного множення виконуються. Цим самим векторний простір V перетворено в евклідовий.

Довжина, ортогональність і відстань у евклідовому векторному просторі

Ортогональні вектори

Означення

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ евклідового простору E називаються ортогональними, якщо $(\vec{a},\vec{b}) = 0$.

Те, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні позначатимемо так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Норма вектора

Означення

Нормою, або довжиною вектора $\vec{a}$ евклідового векторного простору E називається дійсне число $\|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.
Вектор $\vec{a}$ називається одиничним (нормованим), якщо $\|\vec{a}\| = 1$.

Будь-який ненульовий вектор $\vec{a}$ евклідового векторного простору E можна перетворити в нормований вектор:

$$\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\| = \sqrt{(\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}, \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a})} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1.$$

Властивості норми

Властивість 1

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\|\vec{a}\| > 0$.

Властивість 2

$\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$.

Справді, $\|\lambda\vec{a}\| = \sqrt{(\lambda\vec{a},\lambda\vec{a})} = \sqrt{\lambda^2(\vec{a},\vec{a})} = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$.

Властивості норми

Властивість 3 (нерівність Коші–Буняковського–Шварца)

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \leqslant \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

Потрібно довести, що

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) \leqslant \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|,$$

$$-\left(\vec{a},\vec{b}\right) \leqslant \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|.$$

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює $\vec{0}$, то нерівність, очевидно, виконується. Розглянемо випадок, коли обидва вектори ненульові. За властивістю 1° для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\left(\alpha\vec{a} - \beta\vec{b},\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}\right) \geqslant 0;$$

$$\alpha^2\left(\vec{a},\vec{a}\right) - 2\alpha\beta\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \beta^2\left(\vec{b},\vec{b}\right) \geqslant 0.$$

Покладемо $\alpha = \|\vec{b}\|$, $\beta = \|\vec{a}\|$. Тоді

$$\|\vec{b}\|^2\left(\vec{a},\vec{a}\right) - 2\|\vec{b}\|\|\vec{a}\|\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \|\vec{a}\|^2\left(\vec{b},\vec{b}\right) \geqslant 0,$$

$$\|\vec{b}\|^2\|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{b}\|\|\vec{a}\|\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \geqslant 0; \quad |: \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|,$$

$$\|\vec{b}\|\|\vec{a}\| - 2\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \geqslant 0,$$

звідки $\left(\vec{a},\vec{b}\right) \leqslant \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$.

Поклавши замість $\vec{a}$ в останню рівність вектор $-\vec{a}$ одержимо $-\left(\vec{a},\vec{b}\right) \leqslant \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$, що і потрібно було довести.

Властивість 4 (нерівність трикутника)

$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$

Справді:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \big(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\big) = \|\vec{a}\|^2 + 2\big(\vec{a},\vec{b}\big) + \|\vec{b}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\vec{a}\|^2 + 2\left|\big(\vec{a},\vec{b}\big)\right| + \|\vec{b}\|^2 \overset{3^\circ}{\leqslant}$$
$$\leqslant \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2,$$

Властивості норми

Властивість 5 (теорема Піфагора: критерій ортогональності векторів)

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ евклідового векторного простору V є ортогональними тоді і тільки тоді, коли

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2.$$

За аксіомами і властивостями скалярного множення маємо:

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 =& \left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right) = \\
=& \left(\vec{a},\vec{a}\right) + \left(\vec{a},\vec{b}\right) + \left(\vec{b},\vec{a}\right) + \left(\vec{b},\vec{b}\right) = \\
=& \|\vec{a}\|^2 + 2\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \|\vec{b}\|^2,
\end{aligned}$$

з чого і випливає твердження теореми.

Кут між векторами

Означення

Кутом між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається кут φ, що визначається співвідношенням

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Коректність означення кута між векторами випливає з нерівності Коші–Буняковського–Шварца.

Поняття відстані

Означення

Відстанню називається кожне відображення, яке двом векторам $\vec{a}, \vec{b}$ простору V співвідносить таке дійсне число $d(\vec{a},\vec{b})$, що виконуються наступні три умови для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ простору:

1) $d(\vec{a},\vec{b}) \geqslant 0$, причому $d(\vec{a},\vec{b}) = 0$ лише тоді, коли $\vec{a} = \vec{b}$;
2) $d(\vec{a},\vec{b}) = d(\vec{b},\vec{a})$ (аксіома симетрії);
3) $d(\vec{a},\vec{b}) \leqslant d(\vec{a},\vec{c}) + d(\vec{b},\vec{c})$ (аксіома трикутника).

Функція $d(\vec{a},\vec{b}) = ||\vec{a} - \vec{b}||$ визначає відстань у евклідовому векторному просторі.

Ортогональні системи векторів

Ортогональні системи векторів

Означення

Система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ евклідового векторного простору E називається ортогональною, якщо кожний вектор цієї системи ортогональний до будь-якого іншого вектора системи.

Ортогональні системи векторів

Теорема

Ортогональна система ненульових векторів векторного простору зі скалярним множенням є лінійно незалежною.

Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — ортогональна система ненульових векторів простору V. Потрібно показати, що складена для неї рівність $(\star)$:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0} \tag{2}$$

виконується лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Домножимо обидві частини останньої рівності скалярно на вектор $\vec{a}_1$ і скористаємось властивостями скалярного множення:

$$\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k, \vec{a}_1\right) = \left(\vec{0}, \vec{a}_1\right),$$
$$\alpha_1\left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right) + \alpha_2\underbrace{\left(\vec{a}_2, \vec{a}_1\right)}_{=0} + \ldots + \alpha_k\underbrace{\left(\vec{a}_k, \vec{a}_1\right)}_{=0} = 0,$$

звідки $\alpha_1\left(\vec{a}_1, \vec{a}_1\right) = 0$, що можливо лише при $\alpha_1 = 0$, оскільки $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$.

Помноживши послідовно на $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ одержимо, що $\alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, а тому $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ є лінійно незалежною.

Ортогональні системи векторів

Означення

Ортогональна система ненульових векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ n-вимірного простору E називається ортогональним базисом цього простору.

Означення

Система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ евклідового векторного простору V називається ортонормованою, якщо вона ортогональна і кожний її вектор нормований.

Означення

Система ненульових векторів n-вимірного евклідового простору E називається ортонормованим базисом цього простору, якщо вона ортонормована і містить n векторів.

Процес ортогоналізації лінійно незалежної системи векторів (процес Грама–Шмідта)

Теорема Грама–Шмідта

Теорема

Нехай $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$ *— лінійно незалежна система векторів евклідового простору* E*. Нехай також*

$$\begin{aligned}
\vec{b}_1 &= \vec{a}_1, \\
\vec{b}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{a}_2)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \vec{b}_1, \\
\vec{b}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{a}_3)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \vec{b}_1 - \frac{(\vec{b}_2, \vec{a}_3)}{(\vec{b}_2, \vec{b}_2)} \vec{b}_2, \\
&\vdots \\
\vec{b}_k &= \vec{a}_k - \frac{(\vec{b}_1, \vec{a}_k)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \vec{b}_1 - \ldots - \frac{(\vec{b}_{k-1}, \vec{a}_k)}{(\vec{b}_{k-1}, \vec{b}_{k-1})} \vec{b}_{k-1}.
\end{aligned}$$

Тоді $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\}$ *є ортогональною системою векторів простору* E*, причому* $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = L\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\right)$.

Підсумок

- Ми ввели у векторному просторі операцію скалярного добутку векторів, яка породила у векторному просторі нові поняття: норма вектора, відстань між векторами, ортогональність.
- Якщо у дійсному векторному просторі введено скалярне множення, то його називають евклідовим.
- Виявилось, що система ортогональних векторів завжди лінійно незалежна.
- Серед властивостей норми відмітимо нерівність Коші–Буняковського–Шварца, яка дає можливість до введення поняття «кут між векторами» у векторному просторі.
- Кожну лінійно незалежну систему векторів евклідового векторного простору можна перетворити у ортогональну в тому розумінні, що у підпросторі, який вона породжує буде знайдено ортогональний базис
- На заключній лекції курсу лінійної алгебри ми розглянемо (доволі поверхнево) лінійні оператори у евклідових просторах.