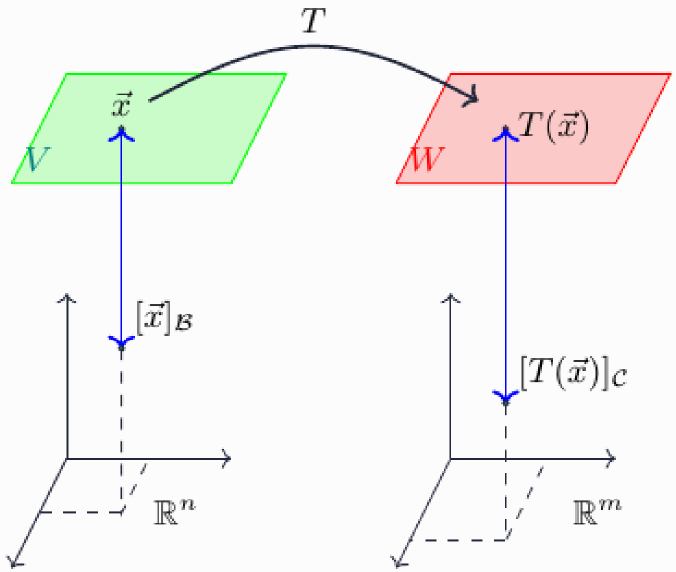
# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

## Тема 18. Лінійні оператори у евклідовому просторі





Олексій Панасенко


29 травня 2023 р.

***День в історії***

*29 травня 1953 року* — Едмунд Гілларі та Тензінґ Норґей стали першими альпіністами, які підкорили Еверест, найвищу гору світу (8 848 метрів).

# Оператор, спряжений до даного

# Транспоновані матриці та деякі їх властивості

## Означення

Транспонованою до матриці $A$ розміру $m \times n$ називається матриця $A^T$ розміру $n \times m$, стовпці якої є рядками матриці $A$.

## Приклад

Якщо

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

то

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Означення

Матриця $A$ називається симетричною, якщо $A^T = A$.

# Транспоновані матриці та деякі їх властивості

**Теорема**

*Нехай* $A, B$ — *матриці (таких розмірів, щоб операції, які описані нижче, виконувались),* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тоді:*

*1)* $(A^T)^T = A$*;*

*2)* $(A+B)^T = A^T + B^T$*;*

*3)* $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$*;*

*4)* $(AB)^T = B^T A^T$*;*

*5) якщо* $A$ *оборотна, то* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$*;*

*6)* $A \cdot A^T$ *та* $A^T \cdot A$ — *симетричні матриці.*

# Оператор, спряжений до даного

Нехай $E_n$ — евклідовий векторний простір

**Означення**

Оператор $T^*$ називається спряженим до лінійного оператора $T$, якщо для довільних $\vec{x}, \vec{y} \in E_n$:

$$\big(T(\vec{x}),\vec{y}\big) = \big(\vec{x},T^*(\vec{y})\big)$$

# Оператор, спряжений до даного

**Теорема**

*Для кожного лінійного оператора* $T$ *евклідового векторного простору* $E_n$ *існує єдиний спряжений до нього оператор* $T^*$*, матриця якого в будь-якому ортонормованому базисі є транспонованою до матриці перетворення* $T$*.*

### Приклад

Нехай $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — оператор повороту на кут $\varphi$. Стандартна матриця цього перетворення має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Тоді оскільки стандартна матриця є матрицею оператора у ортономованому базисі і

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix},$$

то оператор, спряжений до $T$ — це поворот на кут $-\varphi$.

# Оператор, спряжений до даного

Властивості спряжених лінійних операторів аналогічні властивостям транспонованих матриць.

## Теорема

*Нехай* $T$ *та* $S$ — *лінійні оператори евклідового векторного простору* $E_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тоді:*

*1)* $(T^*)^* = T$;

*2)* $(T + S)^* = T^* + S^*$;

*3)* $(\lambda T)^* = \lambda T^*$;

*4)* $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$;

*5) Якщо оператор* $T$ *невироджений, то спряжений до нього оператор також невироджений, причому* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

# Ортогональні лінійні оператори

# Ортогональні матриці та деякі їх властивості

## Означення

Квадратна матриця $Q$ називається ортогональною, якщо її стовпці утворюють ортонормовану систему векторів.

## Теорема

*Для того, щоб матриця $Q$ була ортогональною необхідно і достатньо, щоб $Q^{-1} = Q^T$ (тобто $Q^TQ = I$).*

## Приклад

Матриці

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

є ортогональними, тому

$$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad B^{-1} = B^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

# Ортогональні матриці та деякі їх властивості

**Теорема**

*Нехай* $Q$ *— матриця* $n$*-го порядку. Наступні твердження є еквівалентними:*
*1)* $Q$ *— ортогональна матриця.*
*2)* $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ *для довільного* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
*3)* $\left(Q\vec{x}, Q\vec{y}\right) = \left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ *для довільних* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

**Теорема**

*Якщо матриця* $Q$ *ортогональна, то її рядки утворюють ортонормовану систему векторів.*

# Ортогональні матриці та деякі їх властивості

**Теорема**

*Нехай $Q$ — ортогональна матриця. Тоді:*
*1. $Q^{-1}$ також ортогональна.*
*2. $\det Q = \pm 1$.*
*3. Якщо $\lambda$ — власне значення матриці $Q$, то $|\lambda| = 1$.*
*4. Якщо $Q_1$ і $Q_2$ — ортогональні матриці, то матриця $Q_1 Q_2$ також ортогональна.*

# Ортогональні матриці другого порядку

## Теорема

*Ортогональні матриці другого порядку мають вигляд*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

*де* $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ *— одиничний вектор.*

## Наслідок

Кожна ортогональна матриця другого порядку має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Матриця $A$ задає перетворення повороту простору $\mathbb{R}^2$ на кут $\varphi$, а матриця $B$ — композицію симетрії відносно першого координатного вектора та повороту на кут $\varphi$.

При цьому зауважимо, що $\det A = 1$, $\det B = -1$.

# Ортогональні лінійні оператори та їх властивості

## Означення

Лінійний оператор $T$ називається ортогональним, якщо він зберігає скалярний добуток векторів, тобто для довільних $\vec{x}, \vec{y} \in E$ $\big(T(\vec{x}),T(\vec{y})\big) = (\vec{x},\vec{y})$.

## Теорема

*Ортогональний лінійний оператор зберігає довжини векторів та кут між ними.*

Справді,

$$\|T(\vec{x})\|^2 = \big(T(\vec{x}),T(\vec{x})\big) = (\vec{x},\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2,$$

звідки $\|T(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. Тоді також:

$$\cos(T(\vec{x})\widehat{,}T(\vec{y})) = \frac{\big(T(\vec{x}),T(\vec{y})\big)}{\|T(\vec{x})\|\|T(\vec{y})\|} = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} = \cos(\vec{x}\widehat{,}\vec{y}).$$

# Ортогональні лінійні оператори та їх властивості

**Теорема**

*Матриця ортогонального лінійного оператора в ортонормованому базисі є ортогональною.*

**Теорема**

*Нехай $T$ — ортогональний лінійний оператор евклідового векторного простору. Тоді він невироджений, причому $T^{-1}$ — також ортогональний.*

**Теорема**

*Якщо $\lambda$ — власне значення ортогонального лінійного оператора $T$, то $|\lambda| = 1$.*

**Теорема**

*Композиція двох ортогональних лінійних операторів є ортогональний оператор.*

# Діагоналізація симетричних матриць

# Діагоналізація симетричних матриць

## Означення

Квадратна матриця $A$ називається ортогонально діагоналізовною, якщо існують ортогональна матриця $Q$ і діагональна матриця $D$ такі, що

$$A = QDQ^T.$$

# Діагоналізація симетричних матриць

**Теорема**

*Якщо матриця $A$ симетрична, то будь-які два власні вектори, яким відповідають різні власні значення, є ортогональними.*

**Теорема**

*Якщо матриця є ортогонально діагоналізовною, то вона симетрична.*

## Діагоналізація симетричних матриць

**Теорема (Спектральна теорема для симетричних матриць)**

*Нехай* $A$ *— дійсна симетрична матриця* $n$*-го порядку. Тоді:*

*1.* $A$ *має* $n$ *дійсних власних значень, враховуючи кратність.*

*2.* $A$ *ортогонально діагоналізовна.*

*3. Якщо* $\lambda$ *— власне значення кратності* $k$*, то цьому власному значенню відповідає* $k$ *попарно ортогональних власних векторів (власний підпростір має ортонормований базис, що складається з власних векторів).*

*4. Власні підпростори, що відповідають різним власним значенням, попарно ортогональні.*

# Підсумок

- Нами введено нові типи лінійних операторів у евклідових векторних просторах: оператор, спряжений до даного і ортогональний оператори.
- Матриця оператора, спряженого до даного лінійного оператора, у кожному ортонормованому базисі є транспонованою до матриці даного оператора.
- Якщо у ортонормованому базисі матриця лінійного оператора є симетричною, то такий оператор називається самоспряженим.
- Ортогональний лінійний оператор зберігає відстані (рух, ізометрія).
- Матриця ортогонального лінійного оператора в ортонормованому базисі є ортогональною.
- Кожна симетрична матриця з дійсними елементами є ортогонально діагоналізовною, тобто подається у вигляді $QDQ^T$, де $Q$ — ортогональна, $D$ — діагональна.

# Підсумок


З кінофільму «Список Шиндлера» (1994 р., режисер Стівен Спілберґ)