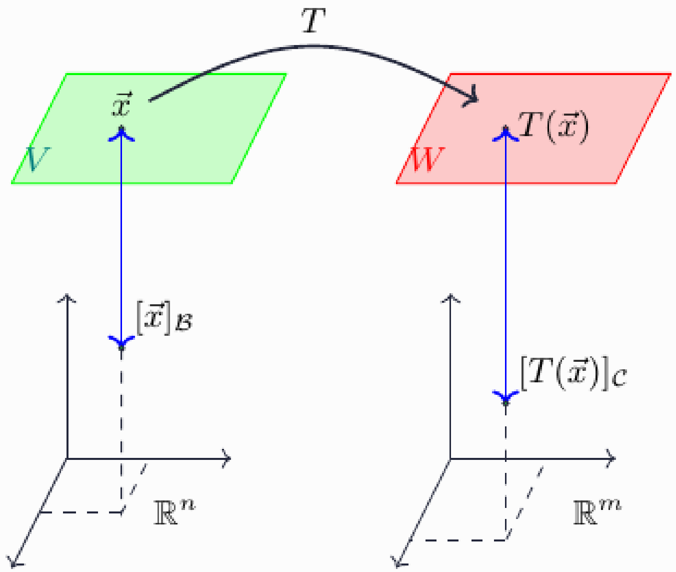
# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

## Тема 2.

## Арифметичний векторний простір





Олексій Панасенко


20 лютого 2023 р.

*День в історії*

*20 лютого 1967 року* — народився Курт Кобейн (1967–1993), американський рок-музикант, вокаліст, гітарист і автор пісень. Засновник і лідер гурту «Nirvana».

*20 лютого 2014 року* — Десятки антиурядових протестувальників Євромайдану загинули в Києві; багато з них були вбиті снайперами.

# Основні означення

## Поняття $n$-вимірного вектора

**Означення**

Дійсним $n$-вимірним вектором ($n$-вимірним вектором над полем $\mathbb{R}$) назвемо впорядкований набір з $n$ дійсних чисел.

Позначаємо: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Скорочено: $\vec{x}$ або $\boldsymbol{x}$.

# Поняття $n$-вимірного вектора

## Означення

Дійсним $n$-вимірним вектором ($n$-вимірним вектором над полем $\mathbb{R}$) назвемо впорядкований набір з $n$ дійсних чисел.

Позначаємо: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Скорочено: $\vec{x}$ або $\boldsymbol{x}$.

## Означення

Два $n$-вимірних вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ називаються рівними (позначається $\vec{x} = \vec{y}$), якщо їх відповідні компоненти однакові.

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \qquad \boxed{\vec{x} = \vec{y} \quad \leftrightarrow \quad x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n}$$

Вектор $(0, 0, \ldots, 0)$ називається нульовим і позначається $\vec{0}$.

# Операції в $\mathbb{R}^n$

*Позначення*: $\mathbb{R}^n$ — множина всіх дійсних $n$-вимірних векторів.

Вводимо 2 операції:

- додавання;
- множення на число $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Означення**

Сума двох $n$-вимірних векторів $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ та $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — це вектор

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

**Означення**

Добуток вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ — це вектор

$$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

# Властивості операцій над векторами

1) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (асоціативність);
2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (комутативність);
3) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
4) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \forall c \in \mathbb{R}$: $c(\vec{x} + \vec{y}) = c\vec{x} + c\vec{y}$ (дистрибутивність);

# Властивості операцій над векторами

1) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (асоціативність);
2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (комутативність);
3) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
4) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall c \in \mathbb{R}$: $c(\vec{x} + \vec{y}) = c\vec{x} + c\vec{y}$ (дистрибутивність);
5) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall c, d \in \mathbb{R}$: $(c + d)\vec{x} = c\vec{x} + d\vec{x}$ (дистрибутивність);
6) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall c, d \in \mathbb{R}$: $(cd)\vec{x} = c(d\vec{x})$;
7) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;
8) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

# Властивості операцій над векторами

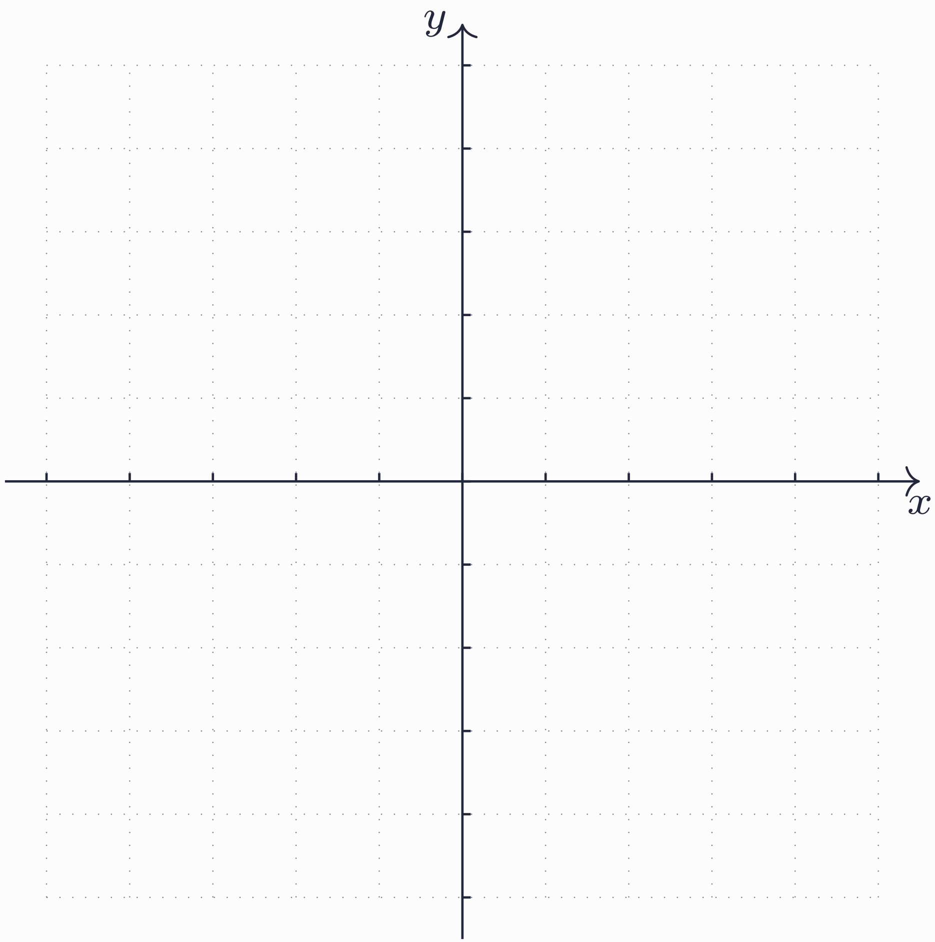
1) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$: $\quad \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (асоціативність);
2) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$: $\quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (комутативність);
3) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$;
4) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall c \in \mathbb{R}$: $\quad c(\vec{x} + \vec{y}) = c\vec{x} + c\vec{y}$ (дистрибутивність);
5) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall c, d \in \mathbb{R}$: $\quad (c + d)\vec{x} = c\vec{x} + d\vec{x}$ (дистрибутивність);
6) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall c, d \in \mathbb{R}$: $\quad (cd)\vec{x} = c(d\vec{x})$;
7) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;
8) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\quad 0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

## Означення

Множина $\mathbb{R}^n$, що розглядається з визначеними в ній операціями додавання і множення на число, називається $n$-вимірним арифметичним векторним простором.

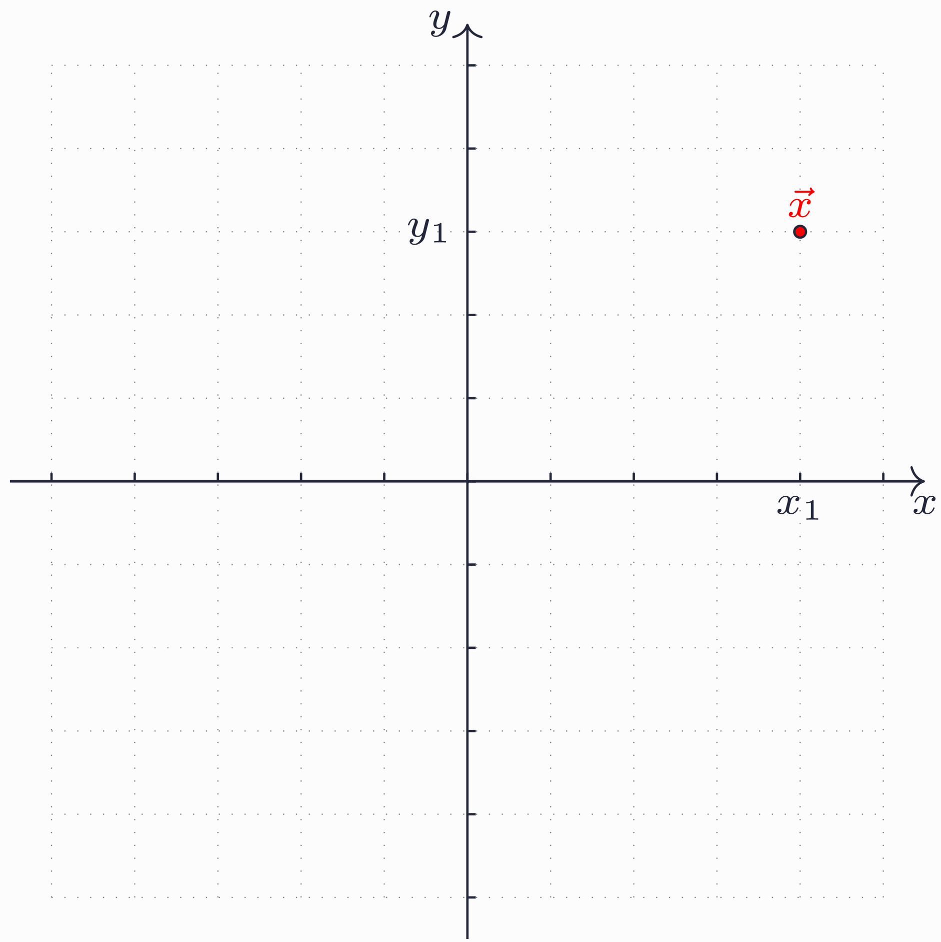
# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$



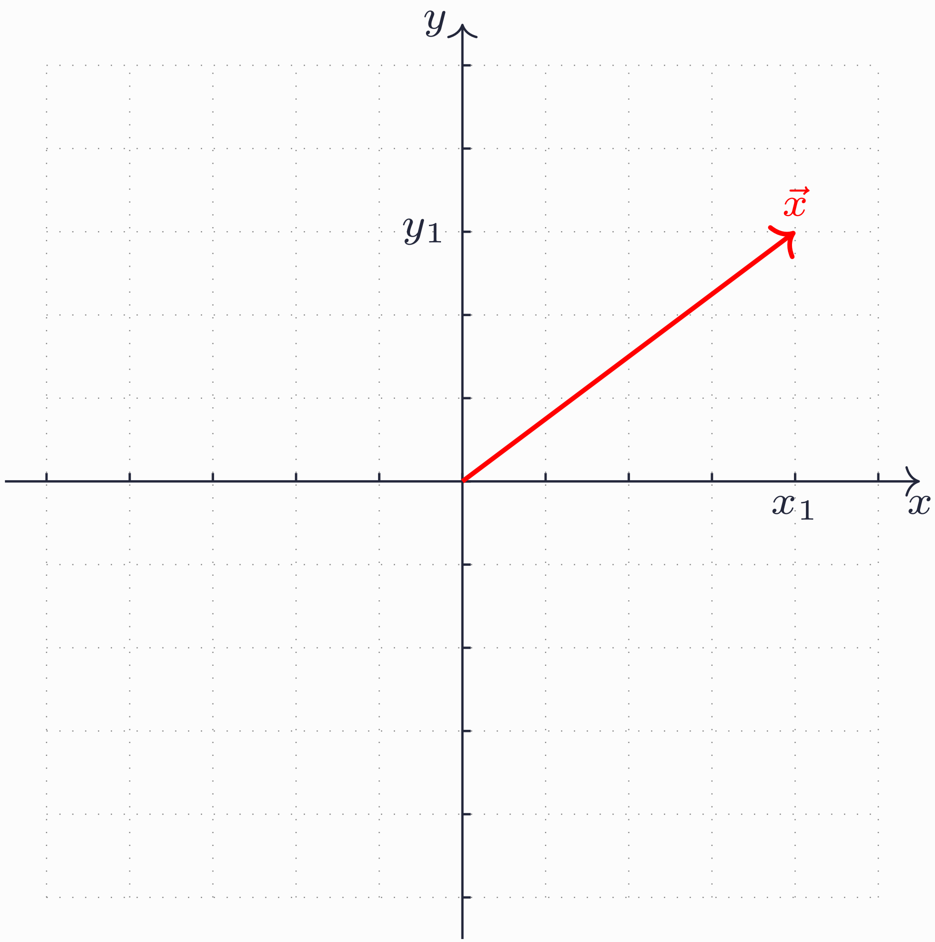
# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$



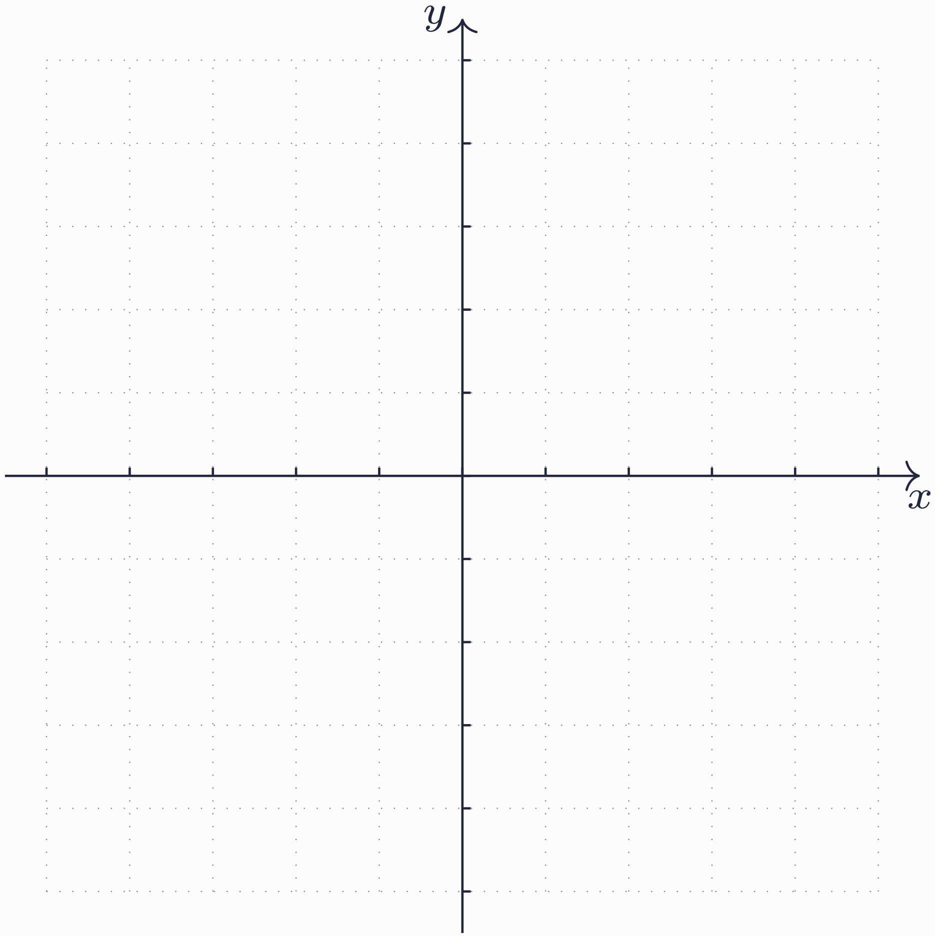
# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$



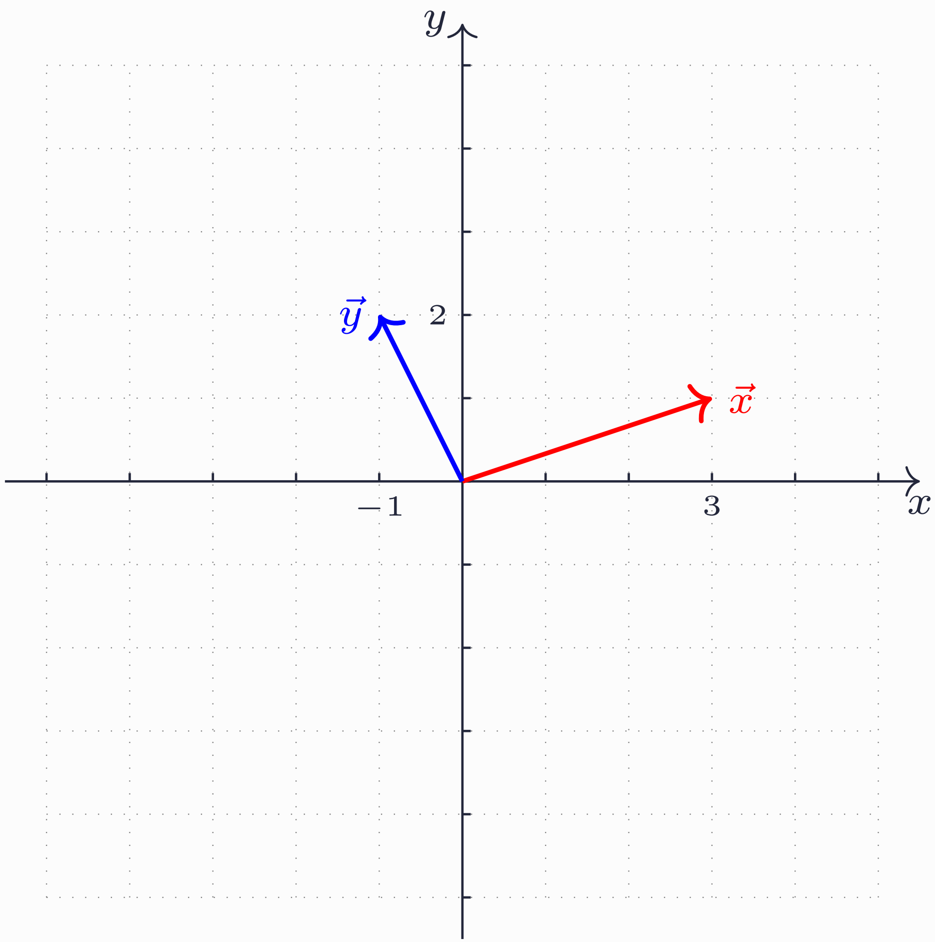
# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

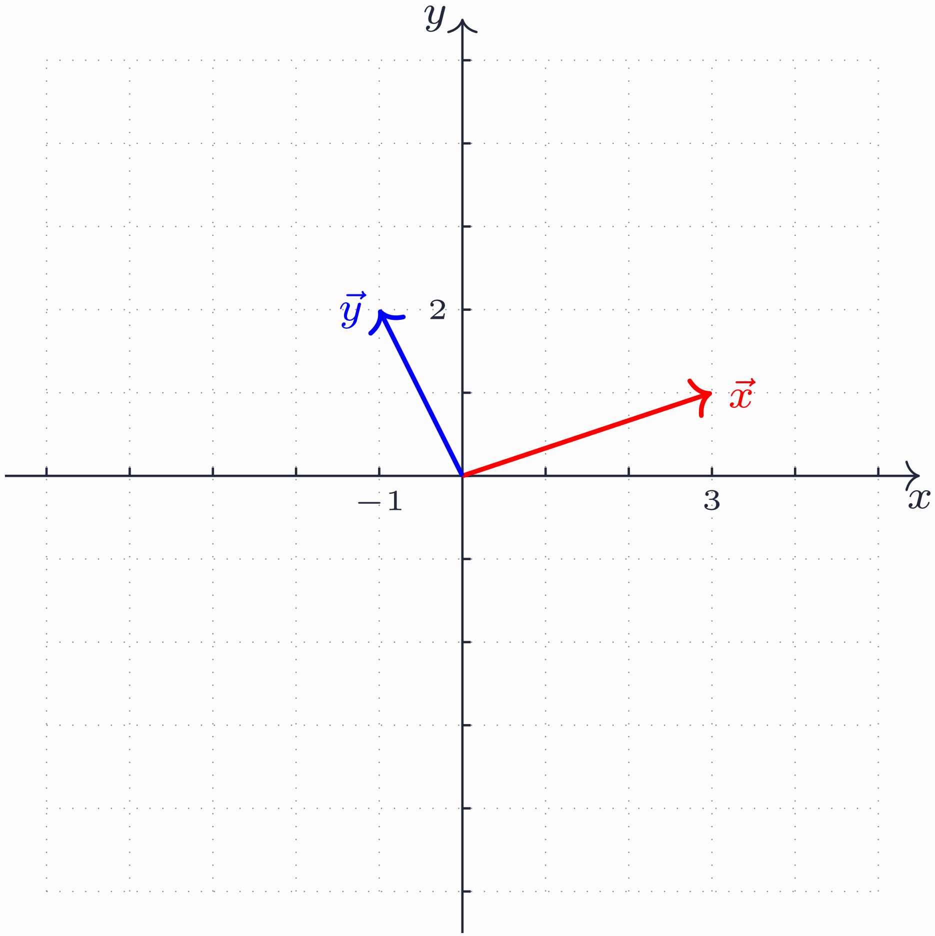
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

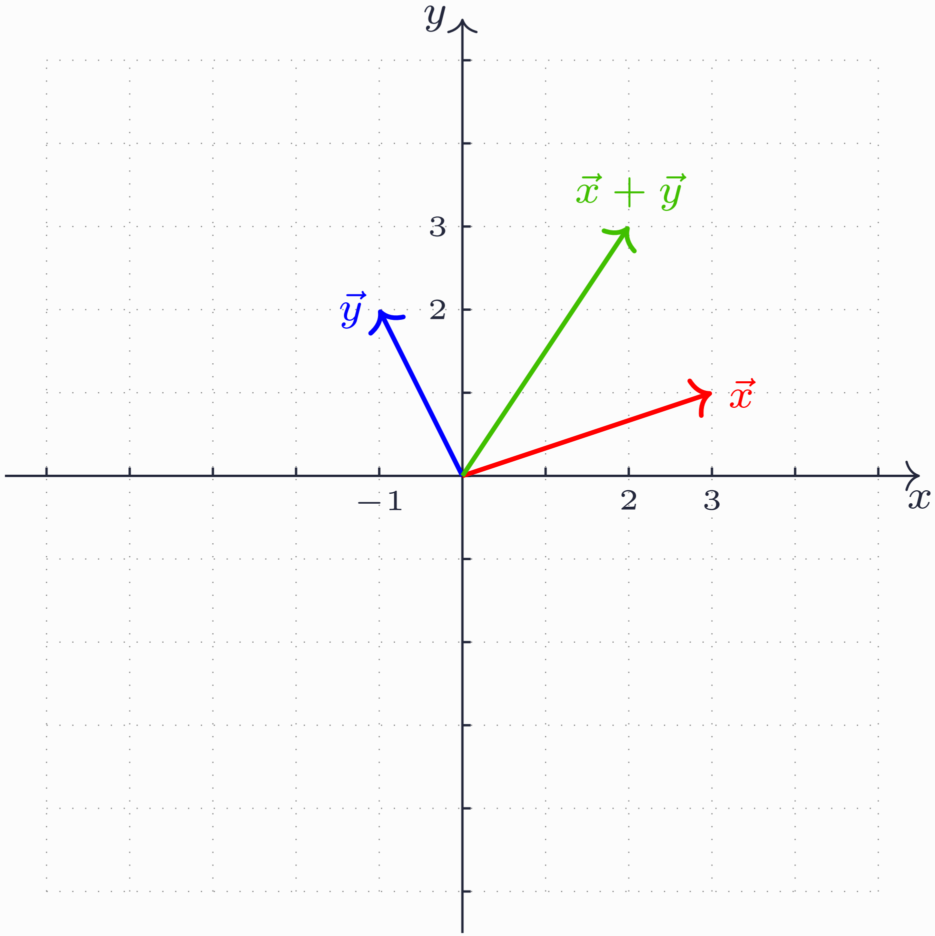
$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

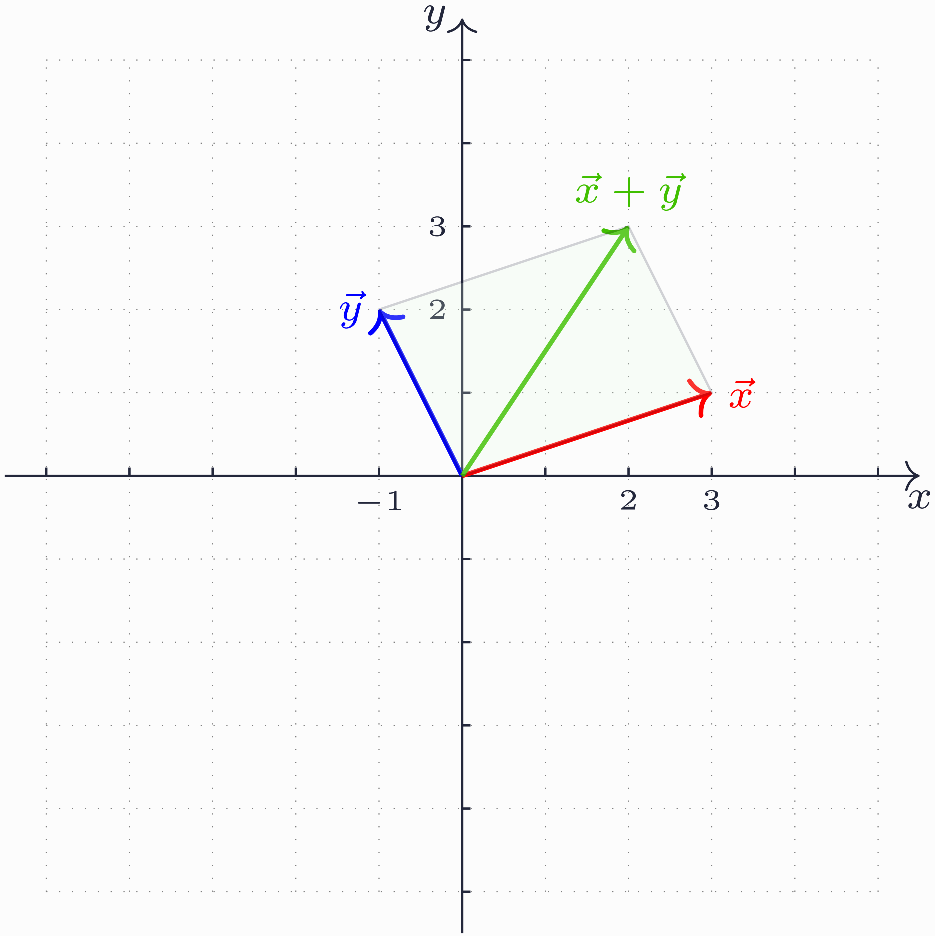
$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

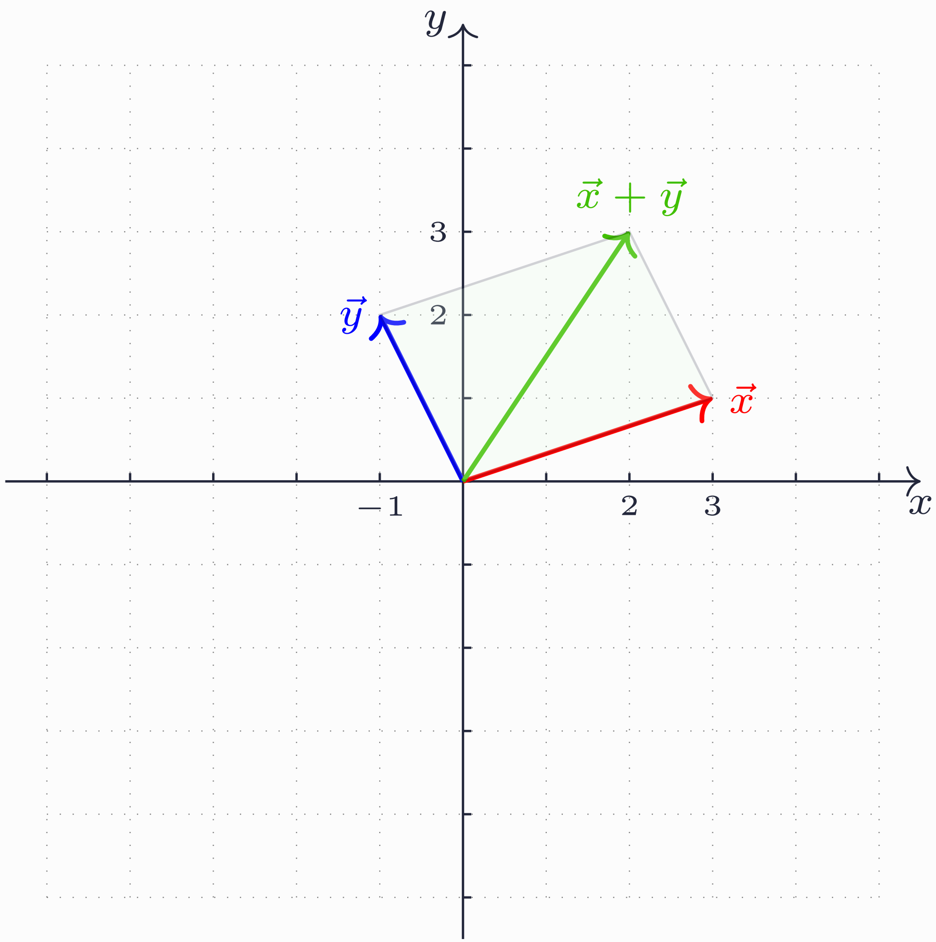


# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot \vec{x} = -\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

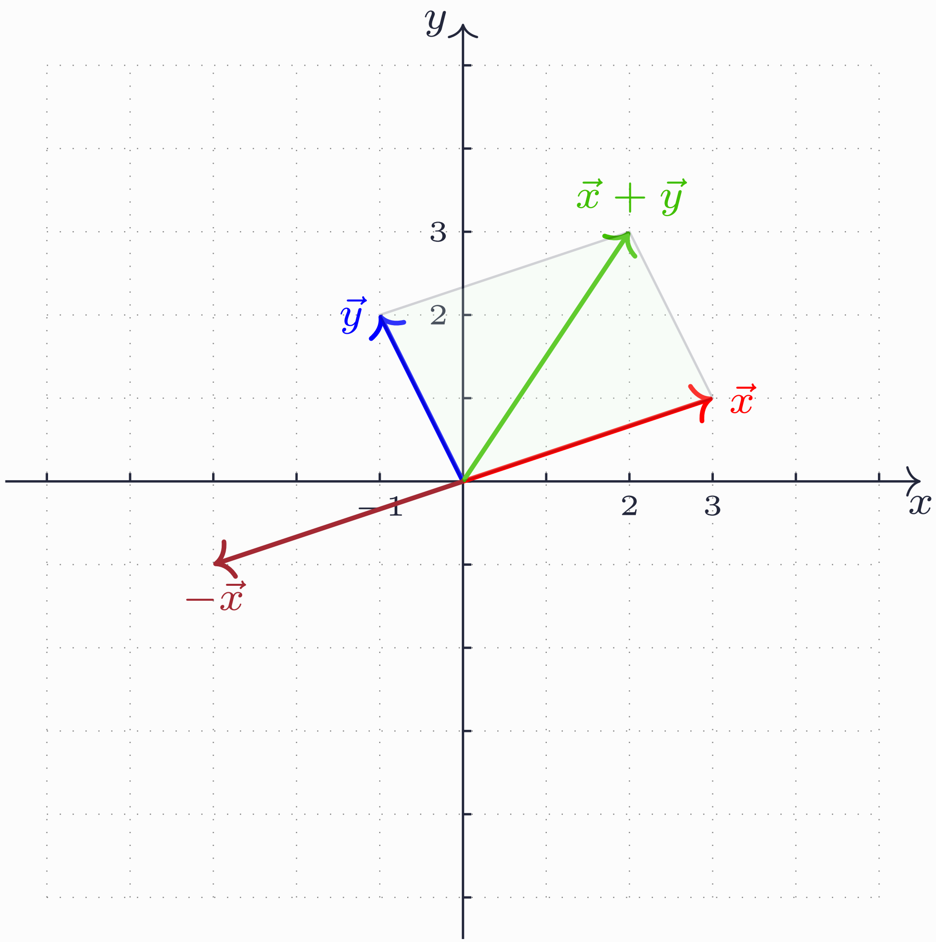


# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot \vec{x} = -\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



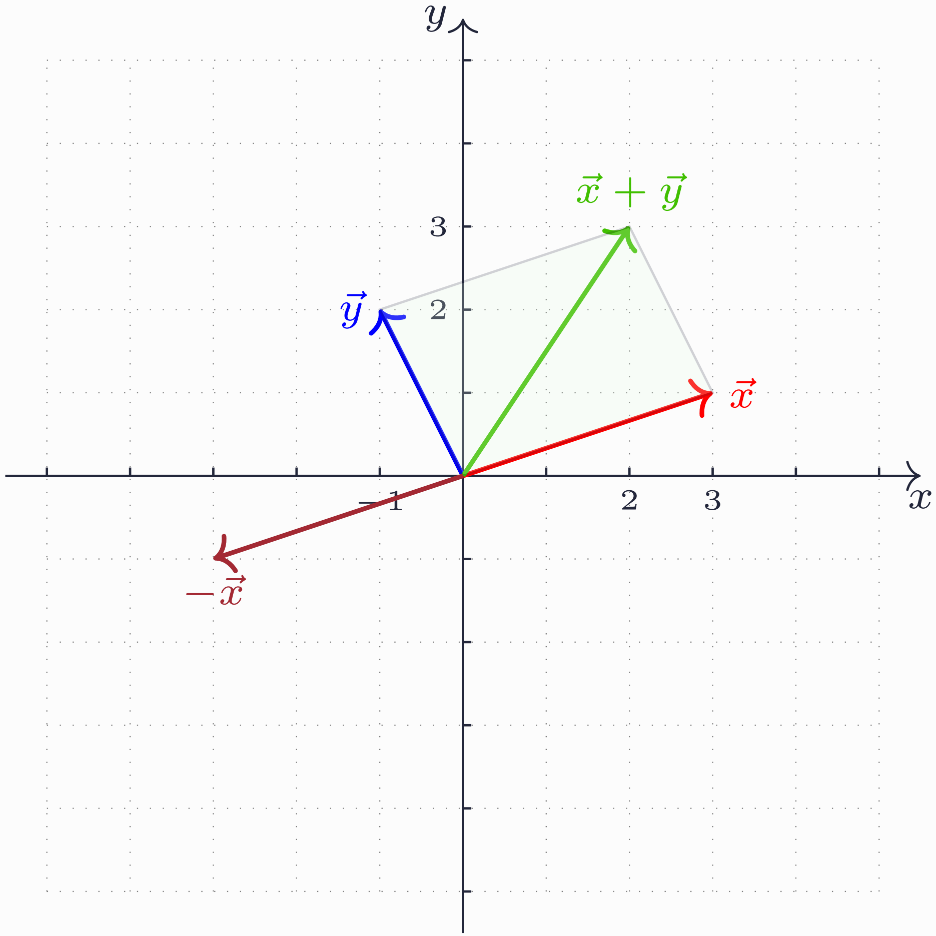
# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot \vec{x} = -\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



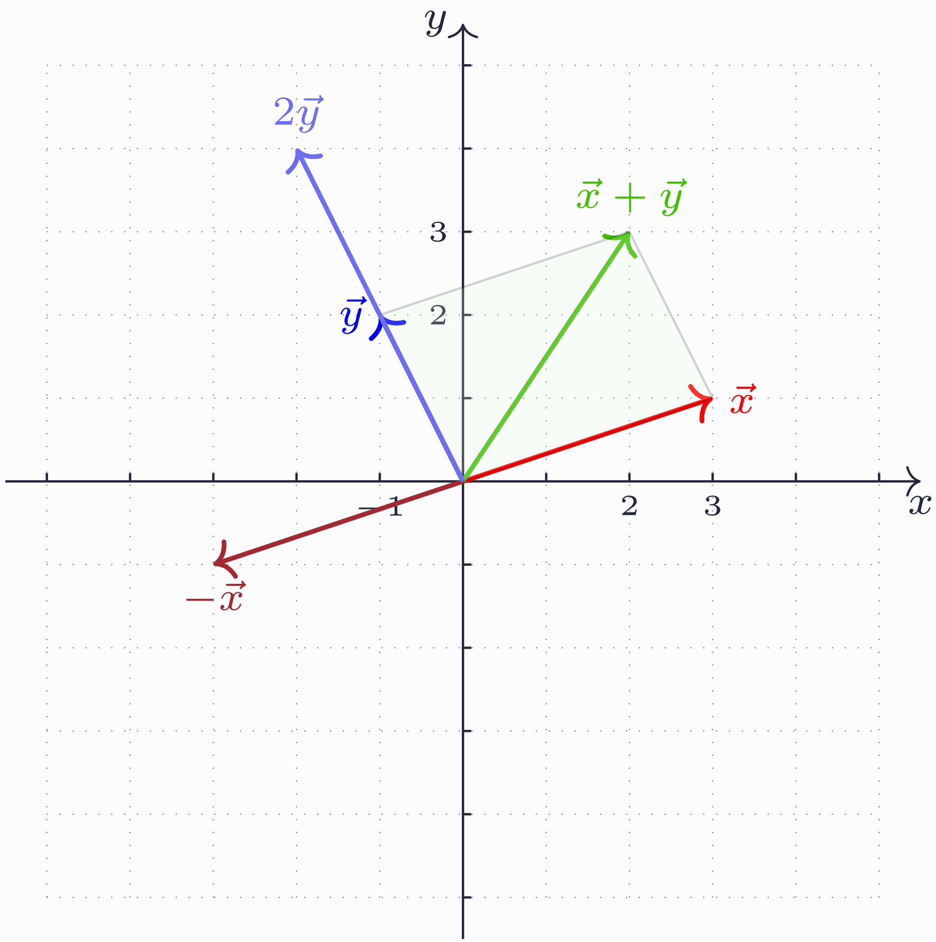
# Геометрична інтерпретація простору $\mathbb{R}^2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$-1 \cdot \vec{x} = -\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



# Лінійна комбінація і лінійна оболонка векторів

## Означення

Вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, якщо існують $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ такі, що:

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k.$$

*Інша назва*: вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

*Позначення*:

$$\boxed{\vec{b} \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k.}$$

# Лінійна комбінація і лінійна оболонка векторів

## Означення

Вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, якщо існують $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ такі, що:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k.$$

*Інша назва*: вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.
*Позначення*:

$$\boxed{\vec{b} \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k.}$$

## Означення

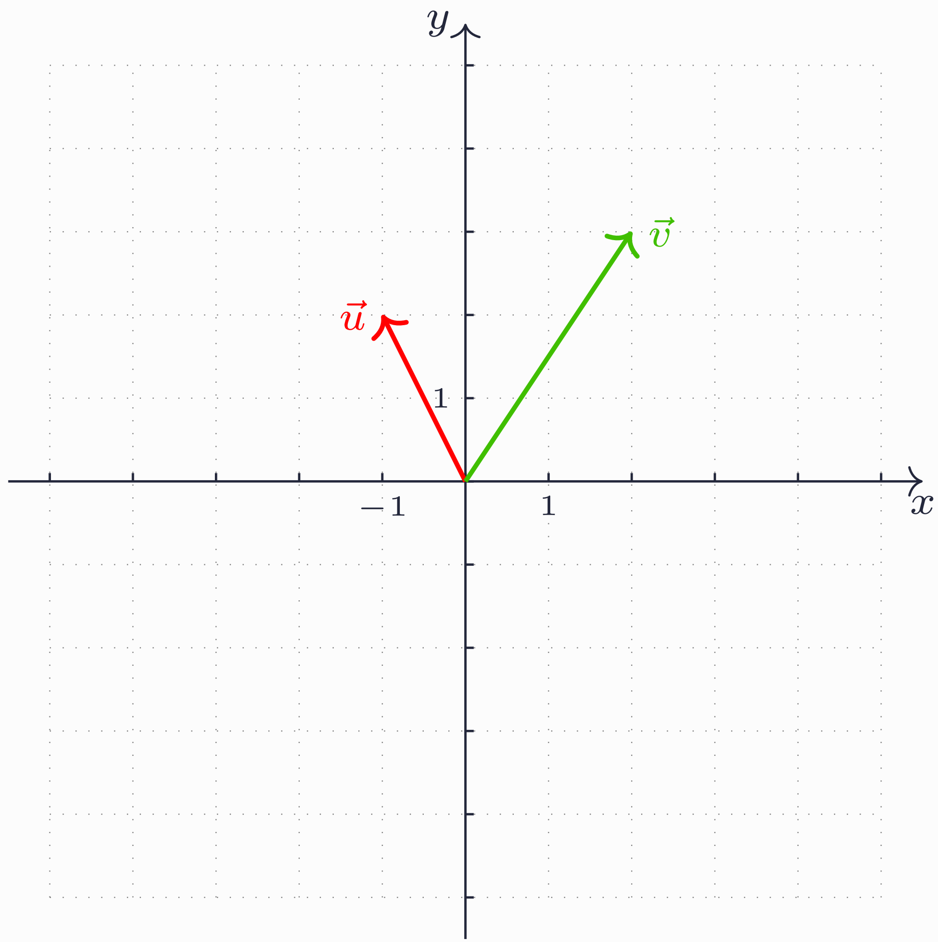
*Множина всіх можливих лінійних комбінацій* векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ простору $\mathbb{R}^n$ називається лінійною оболонкою цих векторів і позначається $L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)$:

$$\boxed{L(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) = \left\{\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k : \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,k}\right\}}$$

# Ілюстрація лінійної комбінації у просторі $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

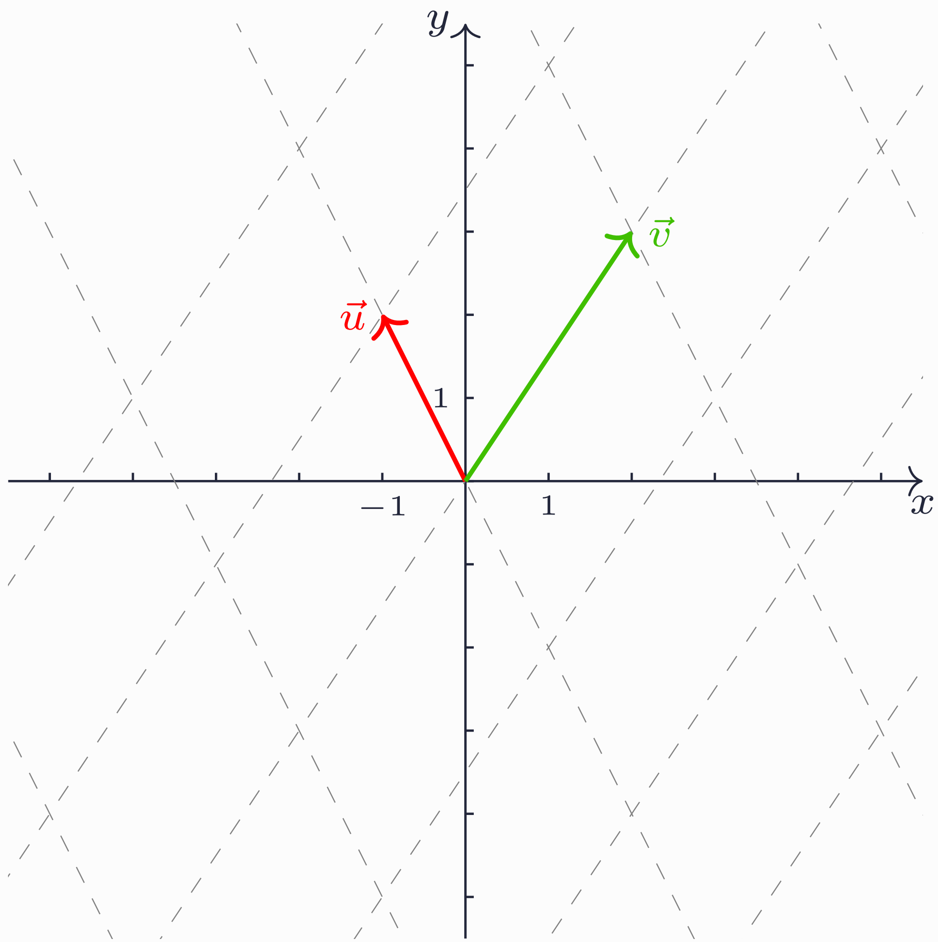
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



# Ілюстрація лінійної комбінації у просторі $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

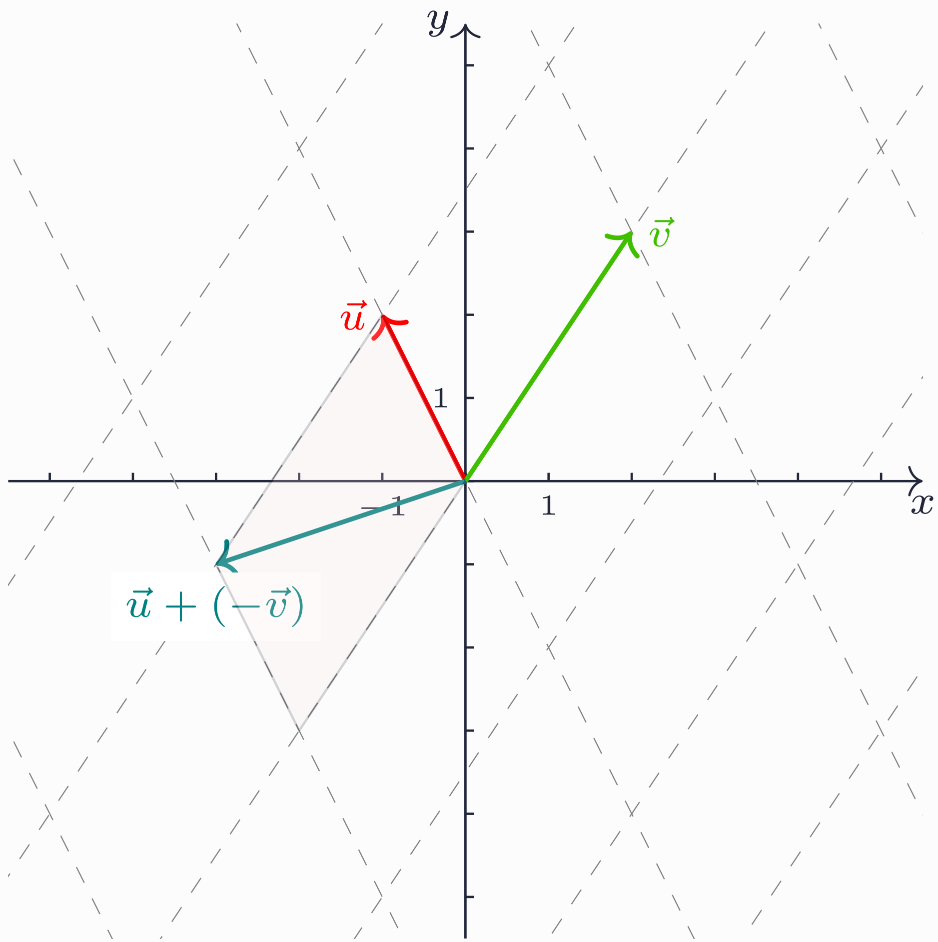


# Ілюстрація лінійної комбінації у просторі $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} + (-\vec{v}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



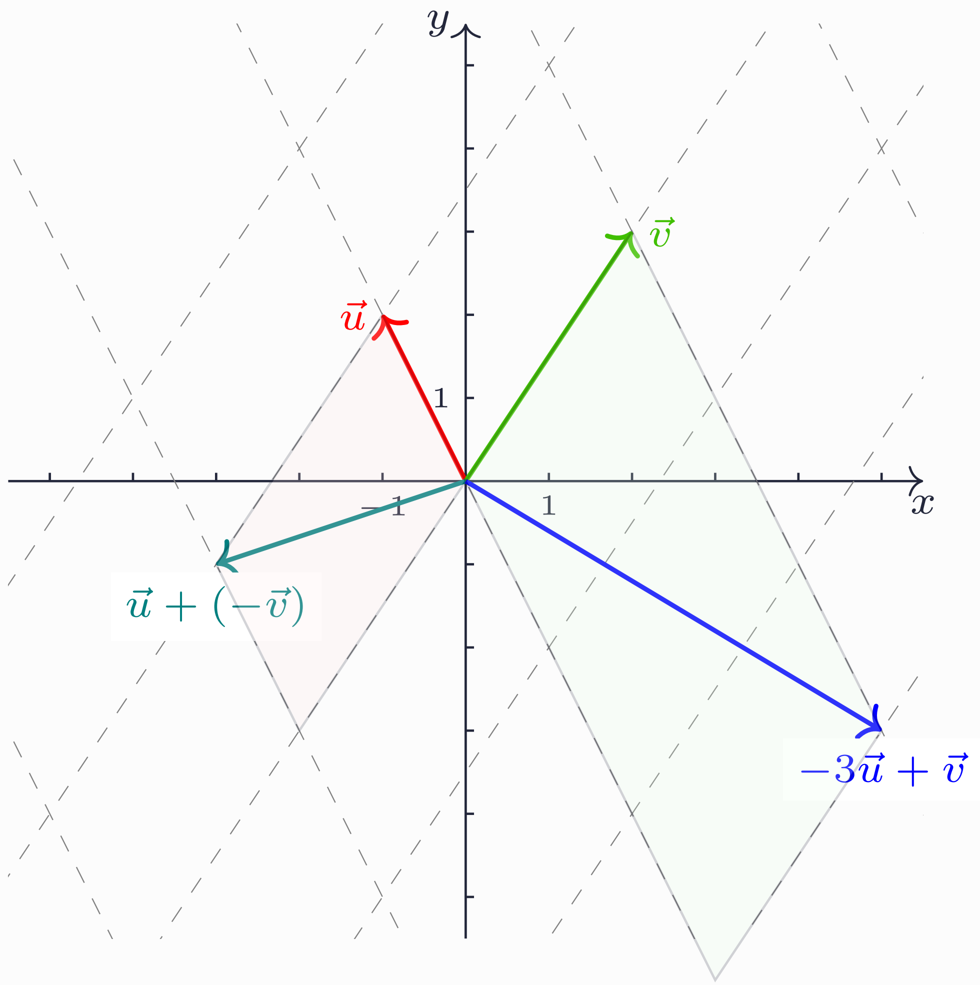
# Ілюстрація лінійної комбінації у просторі $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} + (-\vec{v}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-3\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$



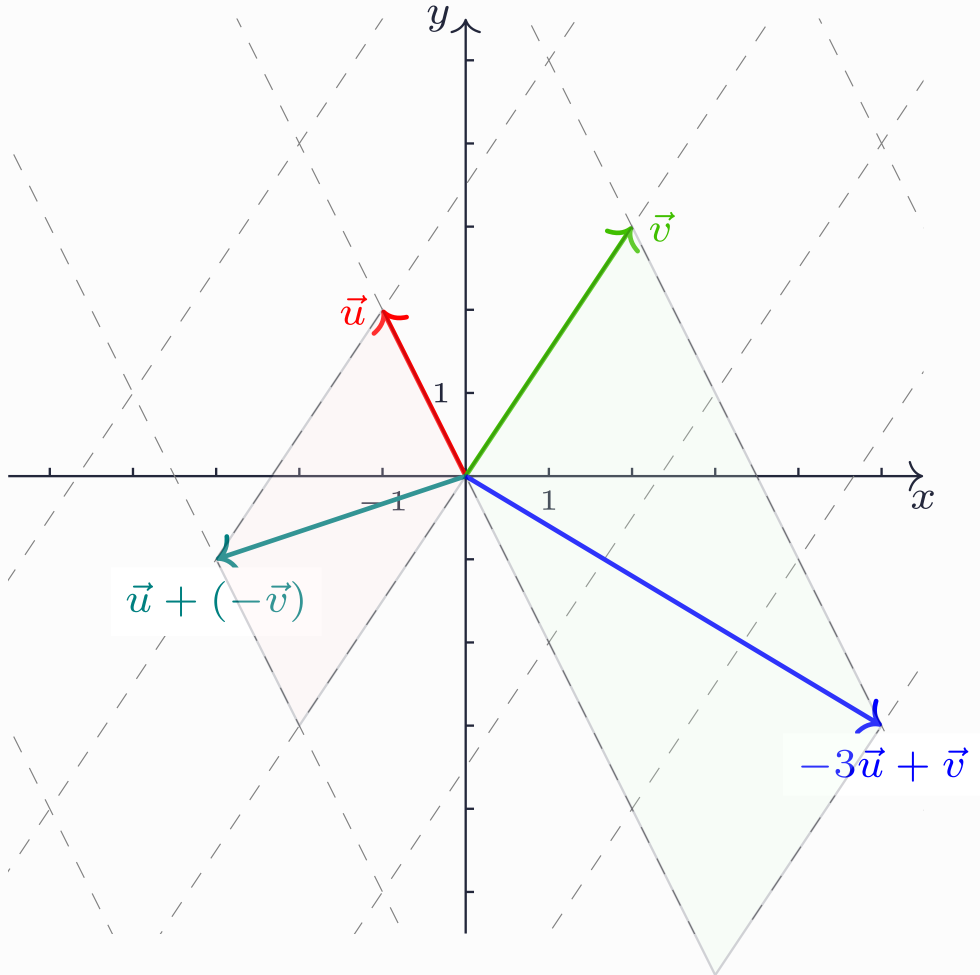
# Ілюстрація лінійної комбінації у просторі $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} + (-\vec{v}) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$-3\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

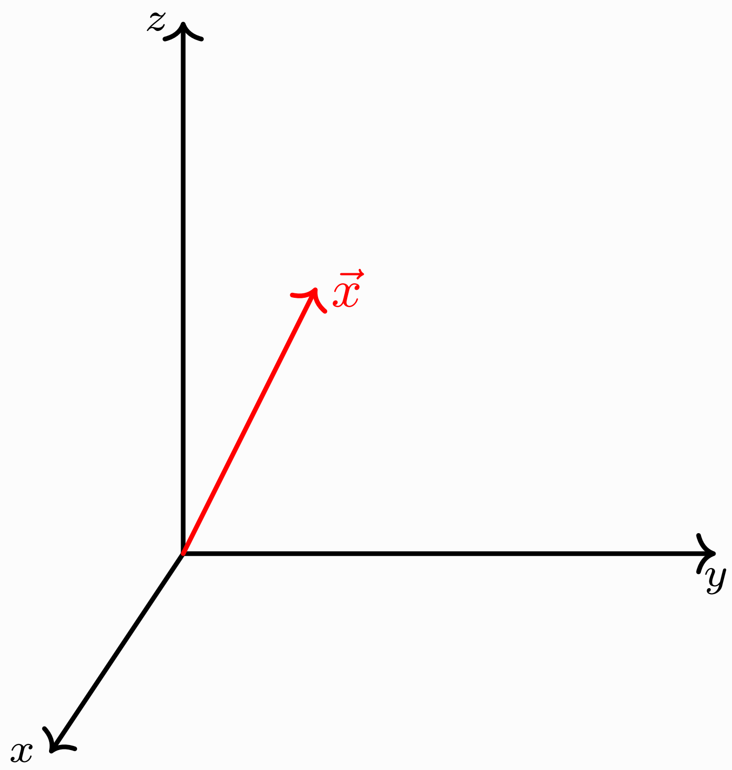



$$L(\vec{u},\vec{v}) = \mathbb{R}^2.$$

# Приклади в просторі $\mathbb{R}^3$

## Приклад

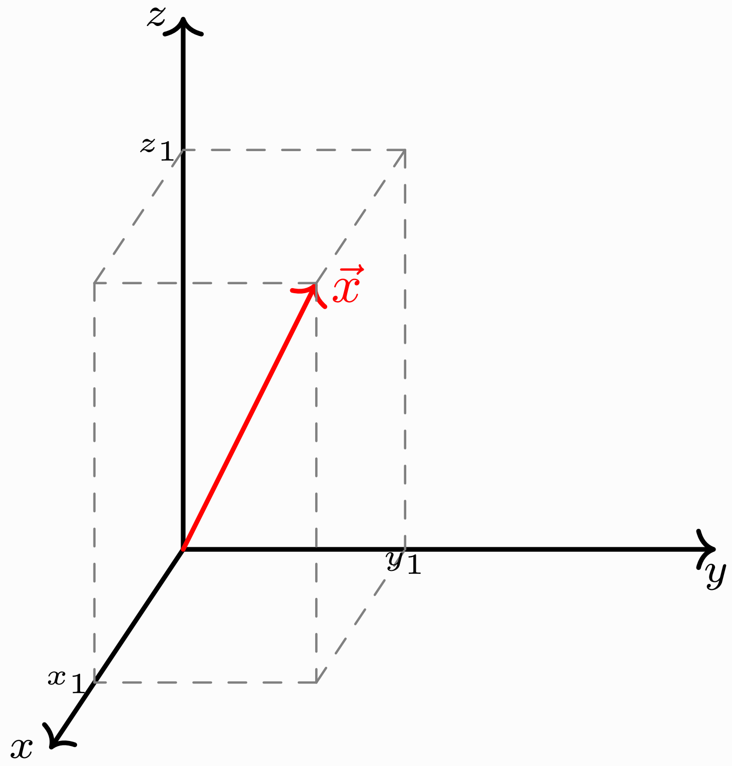
Нехай $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$ — ненульовий вектор простору $\mathbb{R}^3$.



# Приклади в просторі $\mathbb{R}^3$

## Приклад

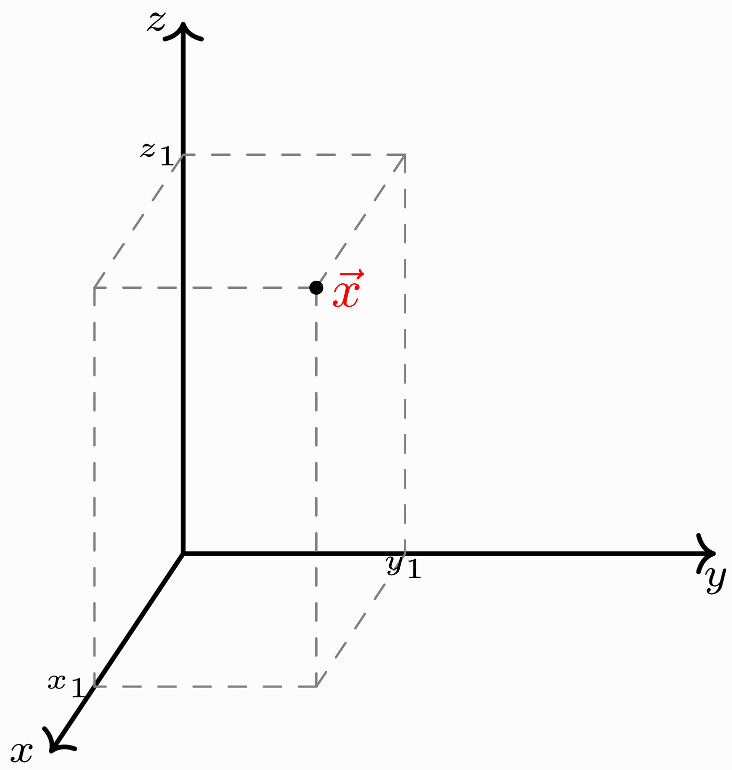
Нехай $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$ — ненульовий вектор простору $\mathbb{R}^3$.



# Приклади в просторі $\mathbb{R}^3$

## Приклад

Нехай $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$ — ненульовий вектор простору $\mathbb{R}^3$.

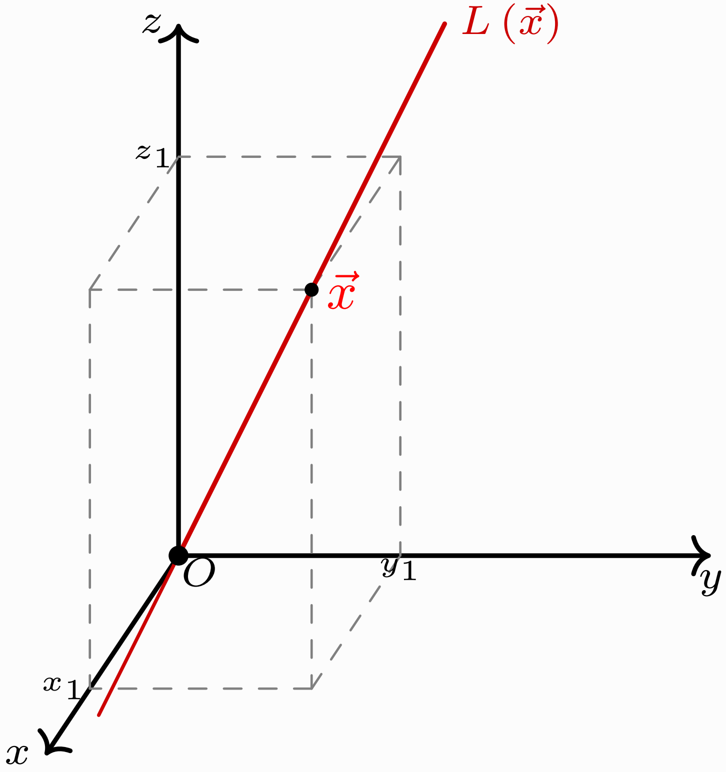


## Приклади в просторі $\mathbb{R}^3$

### Приклад

Нехай $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$ — ненульовий вектор простору $\mathbb{R}^3$.

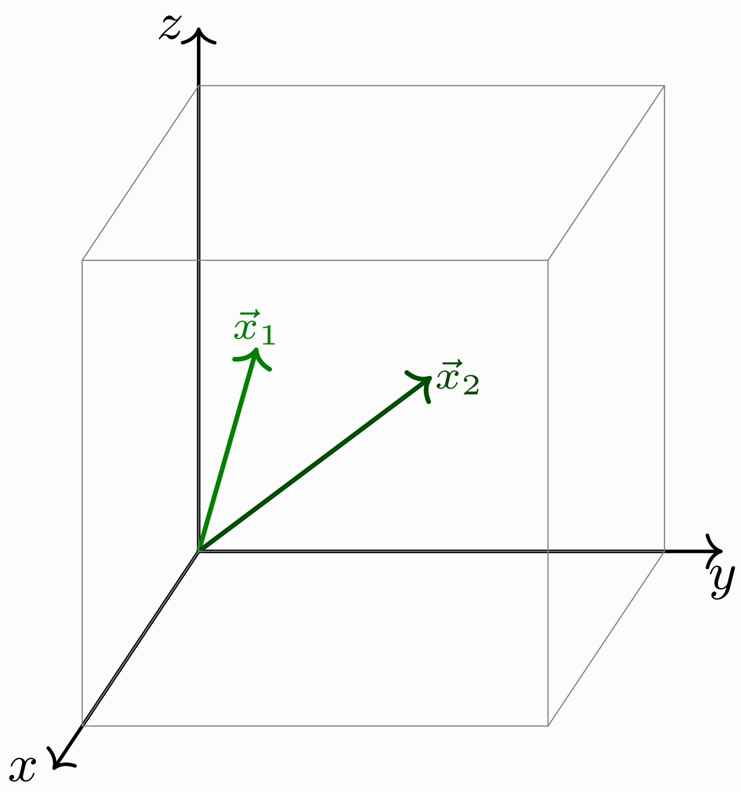
$$\boxed{L(\vec{x}) = \{\alpha\vec{x} \colon \alpha \in \mathbb{R}\}}$$



# Приклади в просторі $\mathbb{R}^3$

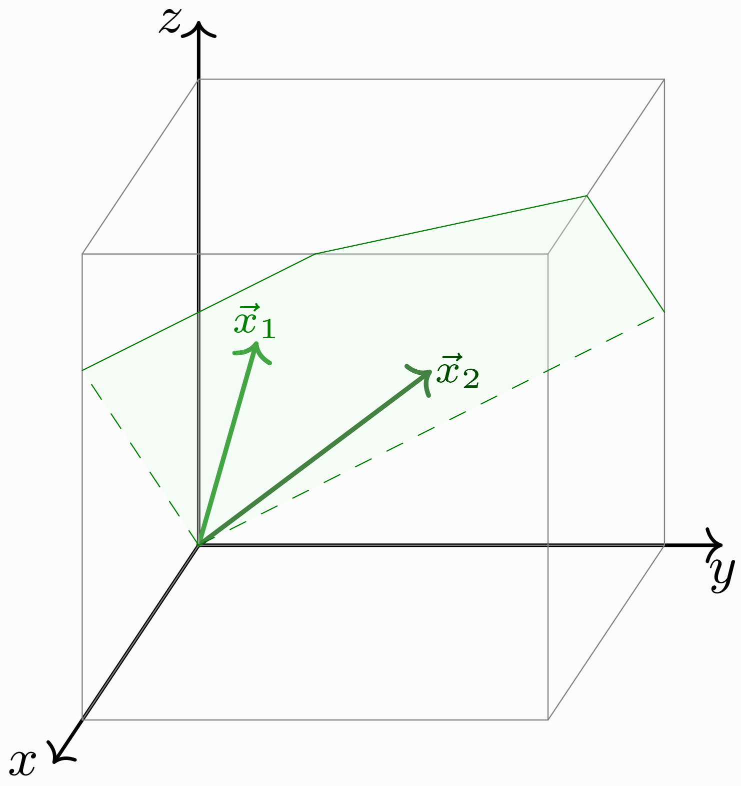
**Приклад**

Нехай $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — ненульові вектори простору $\mathbb{R}^3$.



**Приклад**

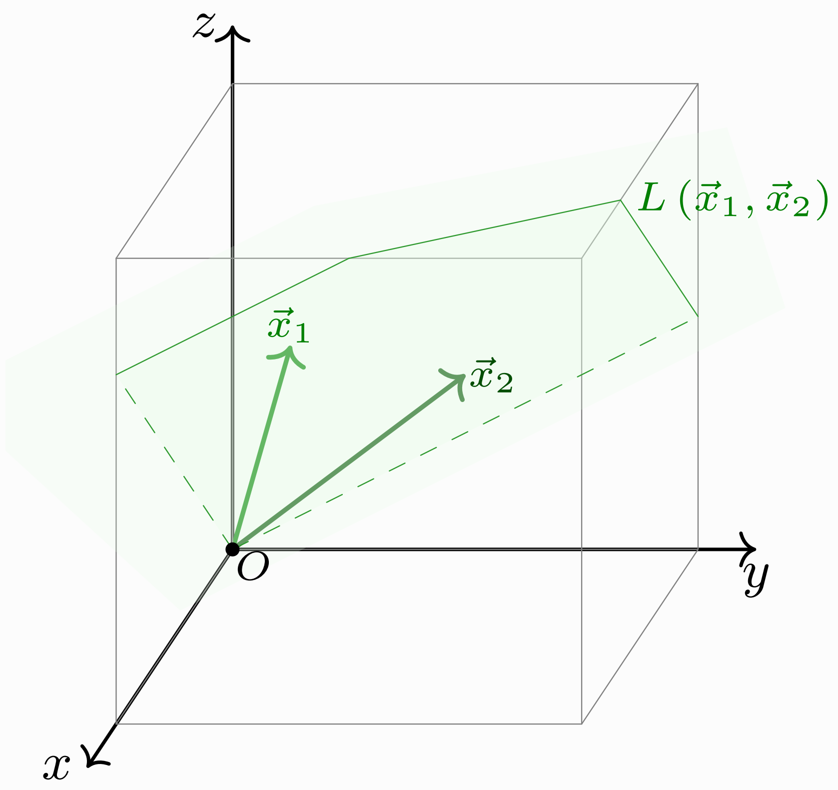
Нехай $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — ненульові вектори простору $\mathbb{R}^3$.



## Приклад

Нехай $\vec{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — ненульові вектори простору $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{L(\vec{x}, \vec{y}) = \{\alpha_1 \vec{x} + \alpha \vec{y} \colon \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}}$$



# Лінійна залежність векторів

# Лінійна залежність векторів

## Означення

Система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ називається лінійно залежною, якщо існують такі числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, *серед яких хоча б одне відмінне від нуля*, що виконується рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}. \tag{$\star$}$$

Якщо ж рівність ($\star$) виконується **лише при** $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, то система векторів називається лінійно незалежною.

# Лінійна залежність векторів

## Приклад

Дослідити, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Лінійна залежність векторів

### Приклад

Дослідити, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

*Розв'язання.* Складемо рівність $(\star)$ для векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

## Лінійна залежність векторів

### Приклад

Дослідити, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:
$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

*Розв'язання.* Складемо рівність $(\star)$ для векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 = 0, \end{cases}$$

# Лінійна залежність векторів

## Приклад

Дослідити, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Розв'язання.* Складемо рівність $(\star)$ для векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 = 0, \end{cases}$$

**Відповідь.** Лінійно незалежна.

# Лінійна залежність векторів

## Приклад

Дослідити, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

# Лінійна залежність векторів

## Приклад

Дослідити, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:
$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

$$3\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

**Відповідь.** Лінійно залежна.

# Критерій лінійної залежності

$$\boxed{\alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (\star)$$

**Теорема**

*Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.*

# Критерій лінійної залежності

$$\boxed{\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (\star)$$

**Теорема**

*Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.*

*Необхідність.*

Дано: $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — лінійно залежна.

Довести: існує $\vec{a}_i$ такий, що $\vec{a}_i \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_k$.

# Критерій лінійної залежності

$$\boxed{\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (\star)$$

**Теорема**

*Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.*

*Необхідність.*

Дано: $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — лінійно залежна.

Довести: існує $\vec{a}_i$ такий, що $\vec{a}_i \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_k$.

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_i\vec{a}_i + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}, \quad \alpha_i \neq 0.$$

# Критерій лінійної залежності

$$\boxed{\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (\star)$$

**Теорема**

*Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.*

*Необхідність.*

Дано: $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — лінійно залежна.
Довести: існує $\vec{a}_i$ такий, що $\vec{a}_i \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_k$.

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_i\vec{a}_i + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}, \quad \alpha_i \neq 0.$$

$$\vec{a}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\vec{a}_1 - \ldots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\vec{a}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\vec{a}_{i+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i}\vec{a}_k,$$

тобто вектор $\vec{a}_i$ є лінійною комбінацією інших векторів.

# Критерій лінійної залежності

$$\boxed{\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (\star)$$

**Теорема**

*Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.*

*Достатність.*

Дано: існує $\vec{a}_i$ такий, що $\vec{a}_i \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_{i_1}, \ldots \vec{a}_{i_l}$.
Довести: $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — лінійно залежна.

# Критерій лінійної залежності

$$\boxed{\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (\star)$$

**Теорема**

*Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.*

*Достатність.*

Дано: існує $\vec{a}_i$ такий, що $\vec{a}_i \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_{i_1}, \ldots \vec{a}_{i_l}$.
Довести: $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — лінійно залежна.

$$\vec{a}_i = c_{i_1}\vec{a}_{i_1} + \ldots + c_{i_l}\vec{a}_{i_l}.$$

# Критерій лінійної залежності

$$\boxed{\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (\star)$$

**Теорема**

*Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.*

*Достатність.*

Дано: існує $\vec{a}_i$ такий, що $\vec{a}_i \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_{i_1}, \ldots \vec{a}_{i_l}$.
Довести: $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — лінійно залежна.

$$\vec{a}_i = c_{i_1}\vec{a}_{i_1} + \ldots + c_{i_l}\vec{a}_{i_l}.$$

Запишемо різницю між лівою і правою частинами і доповнимо доданками виду $0 \cdot \vec{a}_j$, яких не вистачає.

# Критерій лінійної залежності

$$\boxed{\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (\star)$$

**Теорема**

*Для того, щоб система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб хоча б один вектор цієї системи лінійно виражався через інші.*

*Достатність.*

Дано: існує $\vec{a}_i$ такий, що $\vec{a}_i \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_{i_1}, \ldots \vec{a}_{i_l}$.
Довести: $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — лінійно залежна.

$$\vec{a}_i = c_{i_1}\vec{a}_{i_1} + \ldots + c_{i_l}\vec{a}_{i_l}.$$

Запишемо різницю між лівою і правою частинами і доповнимо доданками виду $0 \cdot \vec{a}_j$, яких не вистачає.
Отримаємо ($\star$) для системи векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$.
Коефіцієнт при $\vec{a}_i$ дорівнює 1.

# Ознаки лінійно залежних систем

**Теорема**

*Якщо* система векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ містить лінійно залежну підсистему $\{\vec{a}_{i_1}, \ldots, \vec{a}_{i_l}\}$,
*то* вона лінійно залежна.

**Теорема**

*Система векторів, що містить нуль-вектор, є лінійно залежною.*

**Теорема (Основна теорема про лінійну залежність)**

*Якщо* кожний вектор системи *з більшою кількістю* векторів *лінійно виражається* через вектори системи *з меншою кількістю* векторів,
*то* перша система — лінійна залежна.

# Стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$

## Теорема

*Система векторів*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

*є лінійно незалежною, причому кожний вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.*

# Стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$

## Теорема

*Система векторів*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

*є лінійно незалежною, причому кожний вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.*

Якщо $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – довільний вектор,

то $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$

# Стандартний базис простору $\mathbb{R}^n$

## Теорема

*Система векторів*

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

*є лінійно незалежною, причому кожний вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.*

## Наслідок

*Кожна множина з $m$ векторів простору $\mathbb{R}^n$ при $m > n$ є лінійно залежною.*

# Базис системи векторів

# Базис системи векторів

### Означення

Дві системи векторів $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ і $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l\}$ простору $\mathbb{R}^n$ називаються **еквівалентними**, якщо кожен вектор першої системи лінійно виражається через вектори другої і навпаки.

### Теорема

*Дві еквівалентні лінійно незалежні системи містять однакову кількість векторів.*

### Теорема

*Якщо* *система векторів* $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ *лінійно незалежна,*
$\{\vec{b}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ *— лінійно залежна,*
*то* $\vec{b} \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$.

$$\alpha \cdot \vec{b} + \alpha_1 \vec{a}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

# Базис системи векторів

## Означення

Підсистема векторів $\{\vec{a}_{i_1}, \ldots, \vec{a}_{i_l}\}$ системи $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ називається *базисом цієї системи*, якщо:
1) вона лінійно незалежна;
2) для довільного вектора $\vec{a}_s$ системи $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ підсистема $\{\vec{a}_s, \vec{a}_{i_1}, \ldots, \vec{a}_{i_l}\}$ є лінійно залежною.

## Означення

Підсистема векторів $\{\vec{a}_{i_1}, \ldots, \vec{a}_{i_l}\}$ системи $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ називається її *базисом*, якщо ця підсистема є лінійно незалежною і через її вектори лінійно виражається будь-який вектор даної системи.

# Властивості базису

1. Будь-яка система векторів еквівалентна з базисом цієї системи.
2. Будь-які два базиси системи векторів еквівалентні між собою.
3. Будь-які два базиси однієї і тієї ж системи векторів містять однакову кількість векторів.

**Означення**

Рангом системи векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ називається кількість векторів її базису.

# Властивості базису

1. Будь-яка система векторів еквівалентна з базисом цієї системи.
2. Будь-які два базиси системи векторів еквівалентні між собою.
3. Будь-які два базиси однієї і тієї ж системи векторів містять однакову кількість векторів.

**Означення**

Рангом системи векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ називається кількість векторів її базису.

**Означення**

Якщо в якості системи векторів розглянути *усі* вектори простору $\mathbb{R}^n$,
то довільний базис цієї системи називається базисом простору $\mathbb{R}^n$,
а ранг цієї системи — розмірністю простору $\mathbb{R}^n$.

Розмірність простору $\mathbb{R}^n$ дорівнює $n$.

# Підсумок

- Ми ввели поняття $n$-вимірного вектора, означили дві операції на множині всіх $n$-вимірних векторів.
- Ввели поняття лінійної комбінації векторів.
- Набори векторів можуть бути або лінійно незалежними (ніякий вектор через інші не виражається) або ж лінійно залежними.
- Максимальний набір лінійно-незалежних векторів в системі — це базис цієї системи.
- У просторі $\mathbb{R}^n$ базис містить $n$ векторів.
- Далі ми повернемося до систем лінійних рівнянь і поглянемо на матриці систем, як на впорядковані набори векторів. Наступна тема: **«Матриці як системи векторів»**.