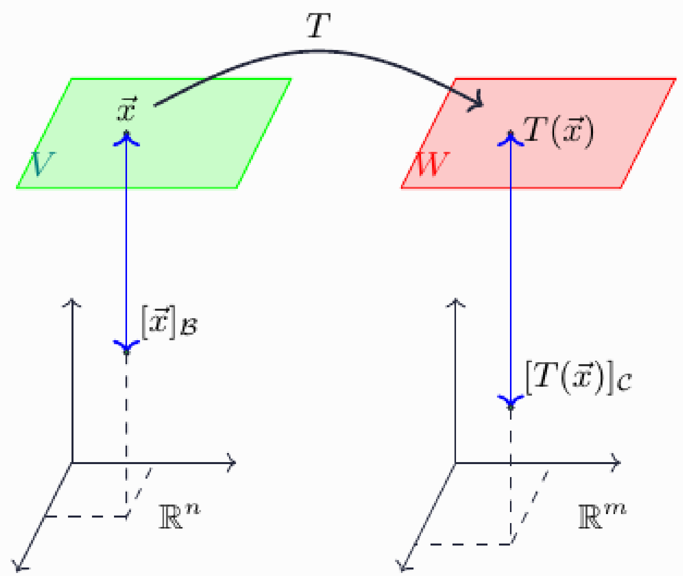
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 3.

Матриці як системи векторів



Олексій Панасенко

21 лютого 2023 р.

День в історії

21 лютого 1962 року — народився Чак Поланік, американський сатирик, письменник-фантаст і вільний журналіст українського походження. Найвідомішим романом автора є «Бійцівський клуб», який було екранізовано.

21 лютого 1993 року — у Донецьку український легкоатлет Сергій Бубка встановив світовий рекорд у стрибках із жердиною в закритих приміщеннях — 6 м 15 см. Цей рекорд протримався майже 21 рік до 15 лютого 2014 року, коли його покращив на 1 см французький легкоатлет Рено Лавіллені.

Елементарні перетворення систем векторів

Елементарні перетворення систем векторів

Нехай $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — деяка система векторів простору $\mathbb{R}^n$.

Означення

Наступні перетворення системи векторів називаються *елементарними*:

1. перестановка місцями будь-яких векторів системи;
2. множення будь-якого із векторів системи на число $\alpha \neq 0$;
3. додавання до будь-якого із векторів системи іншого вектора, помноженого на α (заміщення);
4. відкидання від векторів системи $\vec{0}$ (якщо він там є) або приписування до векторів системи $\vec{0}$.

Елементарні перетворення систем векторів

Нехай $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ — деяка система векторів простору $\mathbb{R}^n$.

Означення

Наступні перетворення системи векторів називаються *елементарними*:

1. перестановка місцями будь-яких векторів системи;
2. множення будь-якого із векторів системи на число $\alpha \neq 0$;
3. додавання до будь-якого із векторів системи іншого вектора, помноженого на α (заміщення);
4. відкидання від векторів системи $\vec{0}$ (якщо він там є) або приписування до векторів системи $\vec{0}$.

Теорема

При елементарних перетвореннях системи векторів її ранг не змінюється.

Матриці як системи векторів

Нехай маємо систему з розширеною матрицею

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Матриці як системи векторів

Нехай маємо систему з розширеною матрицею

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Її можна розглядати:

- як систему з m векторів-рядків простору $\mathbb{R}^{n+1}$;

Матриці як системи векторів

Нехай маємо систему з розширеною матрицею

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Її можна розглядати:

- як систему з m векторів-рядків простору $\mathbb{R}^{n+1}$;
- як систему з $(n+1)$-го вектора-стовпця простору $\mathbb{R}^m$.

Матриці як системи векторів

Нехай маємо систему з розширеною матрицею

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Її можна розглядати:

- як систему з m векторів-рядків простору $\mathbb{R}^{n+1}$;
- як систему з $(n+1)$-го вектора-стовпця простору $\mathbb{R}^m$.

Теорема

Ненульові вектори-рядки матриці у східчастій формі є лінійно незалежними.

Матриці як системи векторів

Нехай маємо систему з розширеною матрицею

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Її можна розглядати:

- як систему з m векторів-рядків простору $\mathbb{R}^{n+1}$;
- як систему з $(n+1)$-го вектора-стовпця простору $\mathbb{R}^m$.

Теорема

Ненульові вектори-рядки матриці у східчастій формі є лінійно незалежними.

Означення

Рангом матриці називається кількість ненульових рядків у її східчастій формі. Позначення: $r(A)$ або $\mathrm{rank}(A)$.

Рядковий і стовпцевий ранг

Означення

Рядковий ранг матриці — ранг системи векторів-рядків (по суті — те, що раніше означено як *ранг матриці*).

Означення

Стовпцевий ранг матриці — ранг системи векторів-стовпців.

Рядковий і стовпцевий ранг

Означення

Рядковий ранг матриці — ранг системи векторів-рядків (по суті — те, що раніше означено як *ранг матриці*).

Означення

Стовпцевий ранг матриці — ранг системи векторів-стовпців.

Теорема

Рядковий і стовпцевий ранги матриці співпадають.

Теорема дає право замінити терміни *рядковий ранг* і *стовпцевий ранг* на одне поняття — ранг матриці.

Матрично-векторна форма запису системи лінійних рівнянь

Добуток матриці на вектор

Нехай A — $m \times n$ матриця зі стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Означення

Добутком матриці A *на вектор* $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n.$$

Добуток матриці на вектор

Нехай A — $m \times n$ матриця зі стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Означення

Добутком матриці A на вектор $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n.$$

Приклад

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Добуток матриці на вектор

Нехай A — $m \times n$ матриця зі стовпцями $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Означення

Добутком матриці A на вектор $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n.$$

Приклад

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Добуток матриці на вектор

Нехай A — $m \times n$ матриця зі стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Означення

Добутком матриці A на вектор $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n.$$

Приклад

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Добуток матриці на вектор

Нехай A — $m \times n$ матриця зі стовпцями $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Означення

Добутком матриці A на вектор $\vec{x}$ (позначається $A \cdot \vec{x}$ або $A\vec{x}$) називається лінійна комбінація стовпців матриці A з використанням відповідних координат вектора $\vec{x}$ як ваг:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n.$$

Приклад

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Векторна форма запису системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Векторна форма запису системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Векторна форма запису системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Систему можна записати так:

$$\boxed{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}}$$

Векторна форма запису системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Позначення:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Систему можна записати так:

$$\boxed{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}}$$

Це — векторна форма запису системи лінійних рівнянь.

Матрично-векторна форма запису системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Позначення:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Матрично-векторна форма запису системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Позначення:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Систему можна записати так:

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

Матрично-векторна форма запису системи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

Позначення:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Систему можна записати так:

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

Це — матрично-векторна форма запису системи лінійних рівнянь

Властивості множення матриці на вектор

Теорема

Якщо A *—* $m \times n$*-матриця,* $\vec{u}$ *і* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, то:*

1) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$;
2) $A(\alpha\vec{u}) = \alpha \cdot A\vec{u}$.

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Теорема Кронекера–Капеллі

Теорема (Кронекера–Капеллі)

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг головної матриці цієї системи співпадав з рангом її розширеної матриці.

Теорема Кронекера–Капеллі

Необхідність.

Дано: Система $A\vec{x} = \vec{b}$ сумісна.

Довести: Ранг матриці A дорівнює рангу матриці $\left[A \mid \vec{b}\right]$.

У векторній формі:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Оскільки сумісна, то:

$$s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \ldots + s_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Отже, $\vec{b} \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Теорема Кронекера–Капеллі

Необхідність.

Дано: Система $A\vec{x} = \vec{b}$ сумісна.

Довести: Ранг матриці A дорівнює рангу матриці $\left[A \mid \vec{b}\right]$.

У векторній формі:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Оскільки сумісна, то:

$$s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \ldots + s_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Отже, $\vec{b} \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Тоді системи векторів $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right\}$ та $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}\right\}$ є еквівалентними.

Отже, вони мають однаковий ранг. Необхідність доведено.

Теорема Кронекера–Капеллі

Достатність.

Дано: Ранг матриці $A = [\vec{a}_1 \ \ldots \ \vec{a}_n]$ дорівнює рангу матриці $\left[A \mid \vec{b}\right]$.

Довести: Система $A\vec{x} = \vec{b}$ сумісна.

Оскільки від додавання вектора $\vec{b}$ до системи $\left\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right\}$ ранг не змінюється, то $\vec{b} \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.
Тоді існують $(s_1, \ldots s_n)$ такі, що

$$s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \ldots + s_n\vec{a}_n = \vec{b}.$$

А це і означає, що система $A\vec{x} = \vec{b}$ сумісна. Достатність доведено.

Підсумок

- Ми ввели поняття ранг матриці — кількість ненульових рядків у її східчастій формі.
- Для спрощення записів введено операцію множення матриці, що має n стовпців, на n-вимірний вектор.
- Тоді система лінійних рівнянь записується так: $A\vec{x} = \vec{b}$.
- Довели критерій сумісності системи лінійних рівнянь (теорему Кронекера–Капеллі).
- Далі ми розглядатимемо такі підмножини простору $\mathbb{R}^n$, виконуючи дії над елементами яких, ми не виходимо на межі цих підмножин. Наступна тема: «Підпростори арифметичного векторного простору».