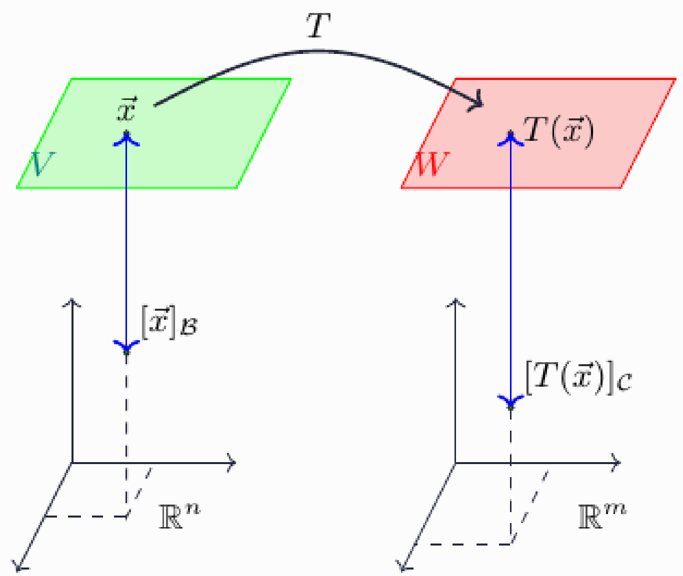
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 4.

Поняття підпростору простору $\mathbb{R}^n$



Олексій Панасенко

27 лютого 2023 р.

День в історії

27 лютого 1933 року — підпал Німецького Рейхстагу, що був використаний Адольфом Гітлером як привід для розпуску Рейхстагу і встановлення диктатури в Третьому Рейху.

27 лютого 2014 року — війська російського спецназу у військовій формі без розпізнавальних знаків захопили будівлі парламенту і Ради міністрів Криму і вивісили над ними російські прапори

27 лютого 2015 року — в Москві застрелений один з головних лідерів політичної опозиції путінському режиму Борис Нємцов.

Означення підпростору і приклади

Означення підпростору

Означення

Підпростором арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається довільна множина S векторів з $\mathbb{R}^n$ така, що виконуються умови:

1) якщо $\vec{u}, \vec{v} \in S$, то $\vec{u} + \vec{v} \in S$ (говорять, що S замкнена відносно операції додавання);
2) якщо $\vec{u} \in S$, то для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$ вектор $\alpha\vec{u}$ також належить S (говорять, що S замкнена відносно операції множення на число).

Означення підпростору

Означення

Підпростором арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається довільна множина S векторів з $\mathbb{R}^n$ така, що виконуються умови:

1) якщо $\vec{u}, \vec{v} \in S$, то $\vec{u} + \vec{v} \in S$ (говорять, що S замкнена відносно операції додавання);
2) якщо $\vec{u} \in S$, то для довільного $\alpha \in \mathbb{R}$ вектор $\alpha\vec{u}$ також належить S (говорять, що S замкнена відносно операції множення на число).

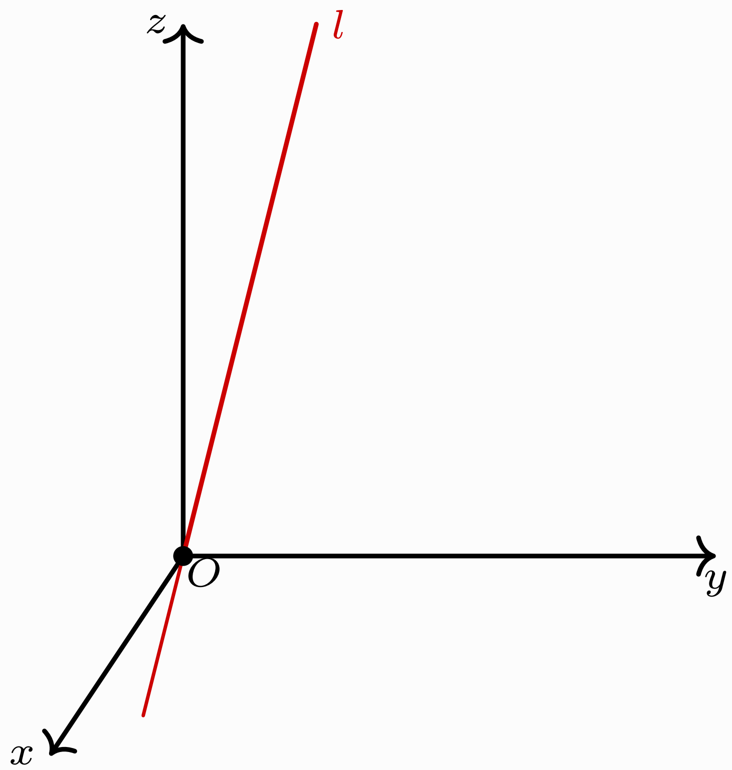
Підпростір завжди містить $\vec{0}$.

Приклади

Приклад

Простір: $\mathbb{R}^3$.

Множина векторів, що розташовані на деякій прямій, яка проходить через початок координат — підпростір.

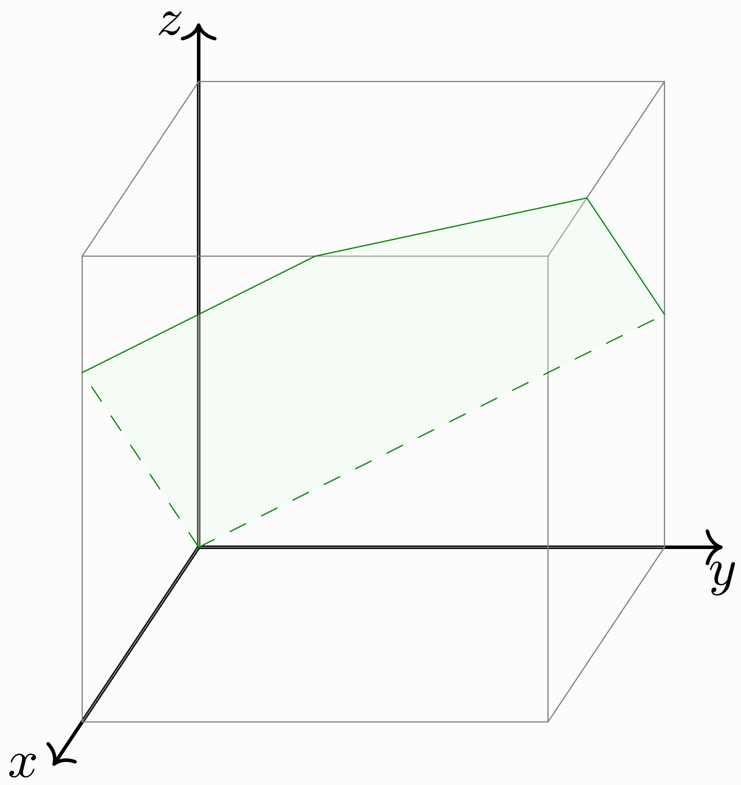


Приклади

Приклад

Простір: $\mathbb{R}^3$.

Множина векторів, що розташовані на деякій площині, яка проходить через початок координат — підпростір.



Приклади

Приклад

Простір: $\mathbb{R}^n$.

$\{\vec{0}\}$ — підпростір.

$\mathbb{R}^n$ — підпростір.

Це тривіальні підпростори арифметичного векторного простору.

Лінійна оболонка як підпростір

Теорема

Нехай $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ *— деякі вектори простору* $\mathbb{R}^n$*. Тоді їх лінійна оболонка* $L\left(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k\right)$ *— підпростір простору* $\mathbb{R}^n$*.*

Лінійна оболонка як підпростір

Теорема

Нехай $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ *— деякі вектори простору* $\mathbb{R}^n$*. Тоді їх лінійна оболонка* $L\left(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k\right)$ *— підпростір простору* $\mathbb{R}^n$*.*

Доведення. Нехай $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in L\left(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k\right)$:

$$\vec{u}_1 = \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k,$$
$$\vec{u}_2 = \beta_1\vec{v}_1 + \ldots + \beta_k\vec{v}_k.$$

Тоді:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 + \vec{u}_2 &= (\alpha_1 + \beta_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)\vec{v}_k \in L\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\right) \\
c \cdot \vec{u}_1 &= c \cdot (\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k) = \\
&= (c \cdot \alpha_1)\vec{v}_1 + \ldots + (c \cdot \alpha_k)\vec{v}_k \in L\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\right)
\end{aligned}$$

Лінійна оболонка як підпростір

Теорема

Нехай $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ — деякі вектори простору $\mathbb{R}^n$. Тоді їх лінійна оболонка $L(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k)$ — підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in L(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k)$:

$$\vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k,$$
$$\vec{u}_2 = \beta_1 \vec{v}_1 + \ldots + \beta_k \vec{v}_k.$$

Тоді:

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)\vec{v}_k \in L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$$
$$c \cdot \vec{u}_1 = c \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k) =$$
$$= (c \cdot \alpha_1)\vec{v}_1 + \ldots + (c \cdot \alpha_k)\vec{v}_k \in L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$$

Лінійна оболонка векторів $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ — підпростір, що породжений векторами $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$.

Підпростори, пов’язані з матрицями

Простір рядків і простір стовпців

Означення

Нехай A — $m \times n$ матриця.

Простором рядків матриці A називається підпростір $\mathrm{row}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що породжений векторами-рядками матриці A.

Простором стовпців матриці A називається підпростір $\mathrm{col}(A)$ простору $\mathbb{R}^m$, що породжений векторами-стовпцями матриці A.

Простір рядків і простір стовпців

Приклад

Чи належить вектор $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ простору стовпців матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$?

Приклад

Чи належить вектор $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ простору стовпців матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Одержали систему лінійних рівнянь з розширеною матрицею

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Отже, система несумісна.

Відповідь. Не належить.

Нуль-простір

Теорема

Нехай A — $m \times n$-матриця. Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Тоді

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0},$$
$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0},$$

тобто $\vec{u} + \vec{v}$ і $c\vec{u}$ — розв'язки вихідної системи, що і треба було довести.

Нуль-простір

Теорема

Нехай A — $m \times n$-матриця. Множина розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$ утворює підпростір простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Нехай $\vec{u}$ та $\vec{v}$ — два розв'язки системи $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}.$$

Тоді

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = \vec{0},$$
$$A(c\vec{u}) = c \cdot A\vec{u} = \vec{0},$$

тобто $\vec{u} + \vec{v}$ і $c\vec{u}$ — розв'язки вихідної системи, що і треба було довести.

Означення

Нуль-простором матриці A (інша назва: *ядром матриці*) називається підпростір $\mathrm{null}(A)$ простору $\mathbb{R}^n$, що складається з усіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{0}$.

Базис і розмірність підпростору

Означення

Базис підпростору простору $\mathbb{R}^n$ — кожна лінійно незалежна множина векторів підпростору, що його породжує.

Означення

Розмірність підпростору S — кількість векторів базису. Позначення $\dim S$.

Рядковий ранг — $\dim(\operatorname{row} A)$.
Стовпцевий ранг — $\dim(\operatorname{col} A)$.
Дефект матриці — $\dim(\operatorname{null} A)$.

Однорідна і неоднорідна системи лінійних рівнянь

Розв'язки однорідної і неоднорідної систем

Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

і відповідну до неї однорідну систему

$$A\vec{x} = \vec{0}. \tag{2}$$

Теорема

Якщо $\vec{x}_{\text{част}}$ — *деякий частинний (фіксований) розв'язок системи (1),*
Z — *множина всіх розв'язків системи (2),*
то *множина* $\{\vec{z} + \vec{x}_{\text{част}} : \vec{z} \in Z\}$ — *множина всіх розв'язків системи (1).*

$$A(\vec{z} + \vec{x}_{\text{част}}) = A\vec{z} + A\vec{x}_{\text{част}} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}.$$

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Розв'язки однорідної і неоднорідної систем

Можливий алгоритм розв'язування неоднорідної системи:

1. Підібрати один з розв'язків цієї системи.
2. Знайти усі розв'язки відповідної однорідної системи лінійних рівнянь.
3. До знайденого розв'язку системи (1) додати усі розв'язки системи (2). В результаті одержимо усі розв'язки системи (1).

Лінійний многовид

Означення

Нехай U — довільний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Множина

$$M = \vec{a} + U = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \vec{x} = \vec{a} + \vec{u}, \vec{u} \in U\}$$

називається лінійним многовидом простору $\mathbb{R}^n$, що утворений паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$.

Множина всіх розв'язків *неоднорідної* системи лінійних рівнянь з n невідомими **є лінійний многовид** $\vec{a} + U$ простору $\mathbb{R}^n$, де $\vec{a}$ — деякий частинний розв'язок неоднорідної системи, U — підпростір розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

Фундаментальна система розв'язків однорідної системи

- Множина розв'язків однорідної системи — підпростір простору $\mathbb{R}^n$.
- У кожного підпростору (ненульового) є базис.
- Ті розв'язки однорідної системи, що утворюють базис підпростору — фундаментальна система розв'язків.

Теорема

Нехай A — $m \times n$ матриця; r — її ранг. Тоді фундаментальна система розв'язків системи $A\vec{x} = \vec{0}$ містить рівно $n - r$ векторів.

Підсумок

- Ми ввели поняття *підпростору* арифметичного векторного простору.
- Лінійна оболонка векторів — підпростір арифметичного векторного простору.
- З кожною матрицею пов'язується три підпростори: *підпростір рядків* (лінійна оболонка векторів-рядків), *підпростір стовпців* (лінійна оболонка векторів-стовпців) і *нуль-підпростір* (множина розв'язків відповідної однорідної системи).
- Встановили такий зв'язок між розв'язками однорідної і неоднорідної систем:

$$\boxed{\vec{x}_{\text{заг.неодн.}} = \vec{z}_{\text{заг.одн.}} + \vec{x}_{\text{част.неодн.}}}$$

- *Фундаментальна система розв'язків* однорідної системи — базис множини її розв'язків.
- Далі ми поглянемо на матриці під іншим кутом зору: не як на набори векторів, а як на самостійні математичні об'єкти. На множині матриць в певний спосіб введемо операції додавання, множення на число, множення. Наступна тема: «Матриці. Дії над матрицями.»