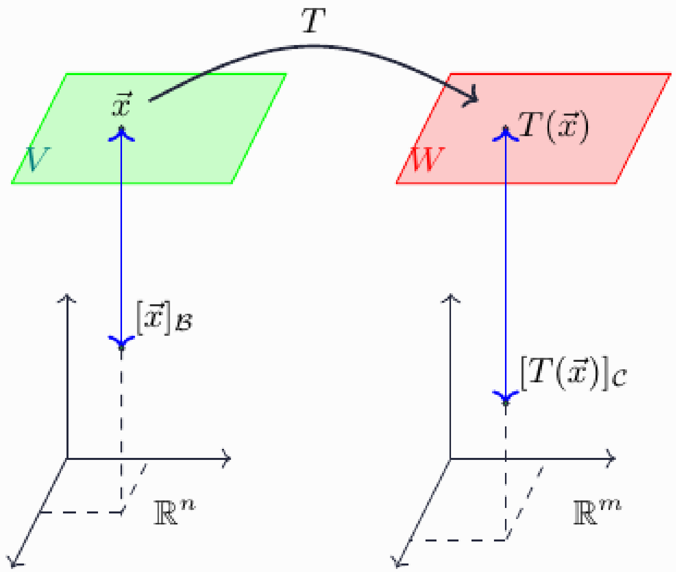
# ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

## Тема 5.

## Матриці. Дії над матрицями





Олексій Панасенко


6 березня 2023 р.

*День в історії*

*6 березня 1899 року* — німецька компанія Bayer отримала патент на торговельну марку «аспірин».

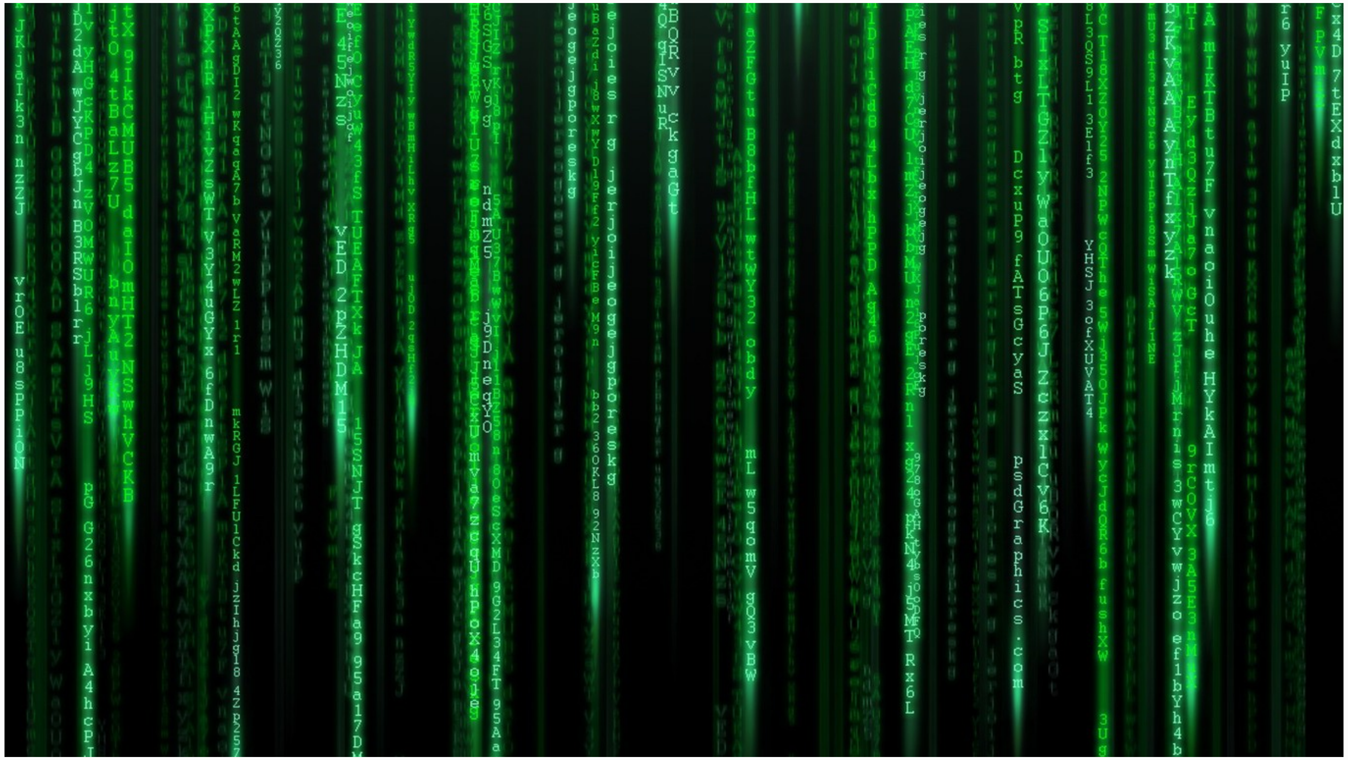
*6 березня 1902 року* — засновано футбольний клуб «Реал Мадрид».

*6 березня 1933 року* — новий президент США Ф. Д. Рузвельт на тиждень зупинив усі банківські операції, що допомогло відновити довіру американців до банківської системи у розпал Великої депресії.

*Нео*: Що таке «Матриця»?

*Трініті*: Відповідь там, Нео, і вона шукає тебе, і знайде тебе, якщо ти цього захочеш.

*х/ф «Матриця» (1999)*



# Поняття матриці. Дії над матрицями

# Означення матриці

## Означення

Матрицею над полем $P$ називається прямокутна таблиця елементів цього поля:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in P, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Позначення: $A$, $A_{m\times n}$, $[a_{ij}]_{m\times n}$.

# Означення матриці

$$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \leftarrow \boxed{i\text{-й рядок}} \\ \uparrow & \\ \boxed{j\text{-й стовпець}} & \end{array}$$

- Дві матриці називаються рівними, якщо їх розміри однакові і відповідні елементи рівні.
- $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$, де $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — стовпці матриці.

# Означення матриці

Якщо $m = n$ (кількість рядків співпадає з кількістю стовпців), то матриця називається квадратною матрицею порядку $n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Побічна діагональ

Головна діагональ

# Означення матриці

Верхня (ліворуч) і нижня (праворуч) трикутні матриці:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Означення матриці

Діагональна матриця:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Лінійні операції над матрицями

### Означення

Сумою двох $m \times n$ матриць $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ та $B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$ називається матриця $A + B$, стовпці якої є сумами відповідних стовпців матриць $A$ та $B$: $A + B = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 + \vec{b}_1 & \dots & \vec{a}_n + \vec{b}_n \end{bmatrix}$.

### Означення

Добутком матриці $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ називається матриця $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda\vec{a}_1 & \dots & \lambda\vec{a}_n \end{bmatrix}$.

- Різницею двох матриць $A$ і $B$ однакових розмірів називається матриця $A - B = A + (-1) \cdot B$.
- Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю (нульовому елементу поля $P$), називається нульовою і позначається $O$.
- Матриця $-A = (-1) \cdot A$ називається протилежною до $A$.

# Лінійні операції над матрицями

## Теорема (Властивості лінійних операцій над матрицями)

*Нехай* $A, B, C$ *— матриці однакових розмірів,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Тоді справедливі такі тотожності:*

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(асоціативність додавання матриць);*
2. $A + B = B + A$ *(комутативність додавання матриць);*
3. $A + O = A$ *(властивість нульової матриці);*
4. $A + (-A) = O$ *(властивість протилежної матриці);*
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(дистрибутивність множення матриці на число відносно додавання матриць);*
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(дистрибутивність множення матриці на число відносно додавання чисел);*
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
8. $1 \cdot A = A$.

Позначення: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ — множина всіх матриць розмірів $m \times n$ з дійсними елементами.

# Множення матриць

## Означення

Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Тоді добутком матриці $A$ на вектор $\vec{x}$ називається вектор

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

# Множення матриць

## Означення

Добутком матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times p}$ називається матриця

$$A\cdot B = A\cdot\begin{bmatrix}\vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \ldots & \vec{b}_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \ldots & A\vec{b}_p\end{bmatrix}.$$

Результатом множення є матриця розмірів $m\times p$.

## Зауваження

$$\begin{array}{ccccc} A & \cdot & B & = & C \\ m\times n & & n\times p & & m\times p \end{array}$$

однакові

розміри $AB$

# Множення матриць

## Приклад

Обчислити $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця $A$ розмірів $2 \times 2$, а матриця $B$ розмірів $2 \times 3$, то множення матриць $A \cdot B$ визначене.

$$A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix} \qquad A\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} 21 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Множення $B \cdot A$ невизначене, оскільки розміри матриць $A$ та $B$ не узгоджуються з означенням.

# Множення матриць

Правило множення матриць «рядок на стовпчик»:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-5) \cdot (-2) & 1 \cdot 6 + (-5) \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}.$$

# Властивості множення матриць

## Теорема

*Нехай* $A, B, C$ *— матриці таких розмірів, для яких визначені операції, що наведені нижче;* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тоді мають місце тотожності:*

1. $A(BC) = (AB)C$ *(асоціативність множення матриць);*
2. $A(B + C) = AB + AC$ *(ліва дистрибутивність множення відносно додавання);*
3. $(A + B)C = AC + BC$ *(права дистрибутивність множення відносно додавання);*
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Зверніть увагу, що, взагалі кажучи,

$$\boxed{AB \neq BA}$$

# Властивості множення матриць

Для доведення асоціативності множення матриць спочатку доведемо таке допоміжне твердження.

**Лема**

*Нехай дано матриці $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times p}$ і вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$. Тоді*

$$\boxed{A \cdot (B\vec{x}) = (AB)\vec{x}}.$$

**Доведення.** Нехай $B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_p \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$. Тоді:

$$\begin{aligned} A \cdot (B\vec{x}) =& A \cdot (x_1\vec{b}_1 + \ldots + x_p\vec{b}_p) = A(x_1\vec{b}_1) + \ldots + A(x_p\vec{b}_p) = \\ =& x_1(A\vec{b}_1) + \ldots + x_p(A\vec{b}_p) = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & \dots & A\vec{b}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = (AB)\vec{x}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

# Властивості множення матриць

$$\boxed{A(BC) = (AB)C}$$

**Доведення.** Нехай маємо три матриці

$$A_{m\times n},$$

$$B_{n\times p},$$

$$C_{p\times q} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_q \end{bmatrix}.$$

Тоді: $BC = \begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & \dots & B\vec{c}_q \end{bmatrix}$. Враховуючи лему:

$$A(BC) = \begin{bmatrix} A(B\vec{c}_1) & \dots & A(B\vec{c}_q) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} (AB)\vec{c}_1 & \dots & (AB)\vec{c}_q \end{bmatrix} = (AB)C.$$

Асоціативність множення доведено.

# Властивості множення матриць

$$\boxed{A(B+C) = AB + AC}$$

Нехай маємо три матриці

$$\begin{aligned} &A_{m\times n}, \\ &B_{n\times p} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_p \end{bmatrix}, \\ &C_{n\times p} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} A(B+C) &= A\begin{bmatrix} (\vec{b}_1+\vec{c}_1) & \dots & (\vec{b}_p+\vec{c}_p) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A(\vec{b}_1+\vec{c}_1) & \dots & A(\vec{b}_p+\vec{c}_p) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A\vec{b}_1+A\vec{c}_1 & \dots & A\vec{b}_p+A\vec{c}_p \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & \dots & A\vec{b}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A\vec{c}_1 & \dots & A\vec{c}_p \end{bmatrix} = AB + AC. \end{aligned}$$

# Властивості множення матриць

$$\boxed{(A+B)C = AC + BC}$$

Нехай маємо три матриці $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{n\times p}$.

Тоді:

- $(A+B)C$ і $AC+BC$ мають розміри $m \times p$.
- Елемент $i$-го рядка і $j$-го стовпчика матриці $(A+B)C$ дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj}.$$

- Елемент $i$-го рядка і $j$-го стовпчика матриці $AC+BC$ дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj},$$

тобто відповідні елементи матриць рівні, що і треба було довести.

# Властивості множення матриць

$$\boxed{\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)}$$

Доводиться аналогічно: варто показати, що відповідні елементи матриць $\alpha(AB)$, $(\alpha A)B$, $A(\alpha B)$ рівні.

# Властивості множення матриць

Таким чином, операція множення матриць:

- асоціативна: $(AB)C = A(BC)$;
- не є комутативною (взагалі кажучи, $AB \neq BA$);
- ліво- і праводистрибутивна відносно додавання: $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$;
- не допускає скорочень, тобто з того, що $AB = AC$ не випливає, що $B = C$ *(спробуйте придумати самостійно контрприклад)*;
- допускає дільники нуля, тобто якщо $AB = O$, то не обов'язково, що хоча б одна з матриць $A$, $B$ є нульовою (*спробуйте придумати самостійно контрприклад*).

# Підсумок

- Ми ввели поняття матриці над полем.
- На множині матриць заданої розмірності ввели «лінійні операції»: додавання і множення на число.
- Означили операцію множення матриць (для матриць певних розмірів).
- Довели властивості операції множення (асоціативність, ліву і праву дистрибутивності тощо).
- В наступній лекції ми введемо поняття одиничної і оберненої матриці, встановимо умови існування і метод знаходження до заданої матриці оберненої.