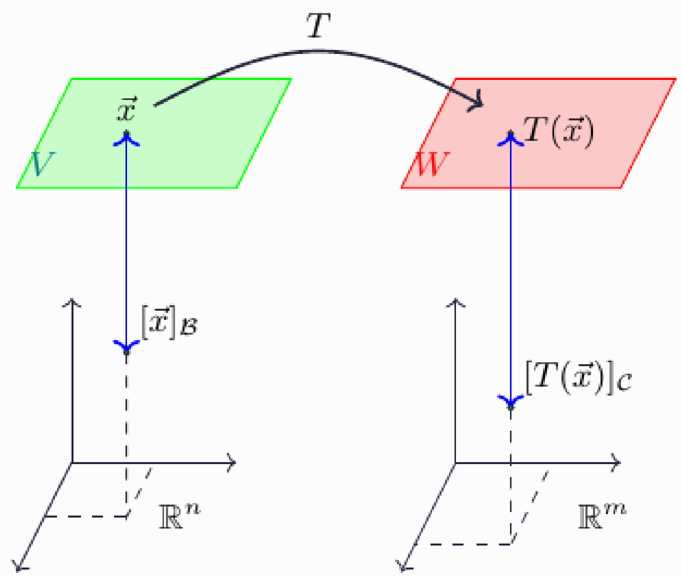
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 6.

Обернена матриця



Олексій Панасенко

13 березня 2023 р.

День в історії

13 березня 1781 року — англійський астроном Вільям Гершель відкрив сьому планету від Сонця — Уран — вперше описаний ним як «цікава чи то туманна зірка, чи то, можливо, комета».

13 березня 1940 року — Фінляндія і СРСР підписали мирний договір. Закінчення Зимової війни.

13 березня 1888 року — народився Макаренко Антон Семенович (1888–1939), український письменник та педагог, один із засновників системи дитячо-підліткового виховання.

Поняття оберненої матриці

Поняття оберненої матриці

Нехай $M_n(\mathbb{R})$ — множина всіх квадратних дійсних матриць n-го порядку.

Означення

Матриця n-го порядку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \end{bmatrix}$$

називається одиничною.

Позначається: I (або I_n; в деяких джерелах — E).

Назва «*одинична*», оскільки $AI = IA = A$:

$$AI = A \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{e}_1 & \dots & A\vec{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = A.$$

Поняття оберненої матриці

Означення

Матриця A' називається обереною до матриці A, якщо має місце рівність

$$A \cdot A' = A' \cdot A = I.$$

Теорема

Якщо до матриці існує обернена матриця, то лише одна.

Доведення. Припустимо, що для деякої матриці A існує дві різні обернені матриці A' і A''. Тоді з одного боку

$$A'AA'' = (A'A)A'' = IA'' = A'',$$

а з іншого

$$A'AA'' = A'(AA'') = A'I = A',$$

звідки $A' = A''$, що суперечить припущенню.

Обернену матрицю до матриці A позначатимемо A^{-1} (не можна писати $\frac{1}{A}$!). Матриця, до якої існує обернена, називається оборотною.

Приклад

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Поняття оберненої матриці

Приклад

Доведемо, що матриця $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ не має оберненої.

Нехай $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — матриця, обернена до A. Тоді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2(a+c) & 2(b+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} a+c & = 1, \\ 2(a+c) & = 0. \end{cases}$$

Остання система є несумісною. Таким чином матриця A оберненої не має.

Поняття оберненої матриці

Теорема (Обертання матриці другого порядку)

Нехай $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Якщо $ad - bc \neq 0$, *то матриця* A *є оборотною, причому*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Якщо $ad - bc = 0$, *то до матриці* A *не існує оберненої.*

Доведення.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & ab - ba \\ cd - dc & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно: $A^{-1}A = I$.

Доведення іншої частини теореми буде доведено згодом у більш загальному формулюванні для матриць $n \times n$.

Властивості оборотних матриць

Теорема (Властивості оборотних матриць)

1. *Якщо* A *— оборотна матриця, то матриця* A^{-1} *також оборотна, причому*
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
2. *Якщо* A *— оборотна матриця,* $c \neq 0$*, то тоді матриця* cA *також оборотна, причому*
$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{-1}.$$
3. *Якщо квадратні матриці однакового порядку* A *та* B *є оборотними, то матриця* AB *також оборотна, причому*
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Властивості оборотних матриць

1.
$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A.}$$

Потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Очевидно, що $X = A$ підходить. А обернена матриця, як відомо, єдина.

Властивості оборотних матриць

1.

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A.}$$

Потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Очевидно, що $X = A$ підходить. А обернена матриця, як відомо, єдина.

2.

$$\boxed{(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}.}$$

Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = A \cdot A^{-1} = I.$$

Властивості оборотних матриць

1.

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A.}$$

Потрібно знайти таку матрицю X, що $A^{-1}X = XA^{-1} = I$. Очевидно, що $X = A$ підходить. А обернена матриця, як відомо, єдина.

2.

$$\boxed{(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}.}$$

Маємо:

$$cA \cdot \frac{1}{c}A^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1} \cdot cA = A \cdot A^{-1} = I.$$

3.

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.}$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I;$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = (B^{-1}I)B = B^{-1}B = I.$$

Критерій оборотності

Теорема

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно і достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Критерій оборотності

Теорема

Для того, щоб до матриці n-го порядку існувала обернена, необхідно і достатньо, щоб ранг цієї матриці дорівнював n.

Доведемо тут лише **необхідність**.

Дано: матриця $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ порядку n є оборотною.
Довести: ранг матриці A дорівнює n.

Оборотна, отже існує $X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_n \end{bmatrix}$, що $AX = XA = I$.

$$AX = A \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \dots & \vec{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{x}_1 & \dots & A\vec{x}_n \end{bmatrix},$$

звідки $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$, тобто: $x_{1i}\vec{a}_1 + \ldots + x_{ni}\vec{a}_n = \vec{e}_i$.

$$\text{Отже, } \vec{e}_i \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n.$$

Якби $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ була лінійно залежною, то тоді лінійно залежною мала б бути і система $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, що неправильно.
Отже, система векторів $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ є лінійно незалежною, а, значить, ранг матриці A дорівнює n.

Критерій оборотності

Теорема (Основна теорема оборотних матриць)

Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. *Наступні твердження є еквівалентними:*

1) *матриця* A *— оборотна;*
2) *ранг матриці* A *дорівнює* n*;*
3) *стовпці матриці* A *лінійно незалежні;*
4) *система* $A\vec{x} = \vec{b}$ *є визначеною для кожного* $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$*;*
5) *однорідна система* $A\vec{x} = \vec{0}$ *має лише нульовий розв'язок;*
6) *матриця* A *рядково еквівалентна одиничній матриці.*

Елементарні матриці

Означення

Матриця n-го порядку називається елементарною, якщо вона одержана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Елементарні матриці

Означення

Матриця n-го порядку називається елементарною, якщо вона одержана з відповідної одиничної матриці шляхом одного елементарного перетворення над її рядками.

Приклад

Встановимо, чи є елементарними матриці

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і обчислимо добутки $E_1 A$, $E_2 A$, $E_3 A$, де

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Елементарні матриці

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}.$$

Теорема

Нехай E — елементарна матриця n-го порядку, яку одержано з одиничної матриці I_n з допомогою певного рядкового елементарного перетворення. Якщо ж це саме перетворення застосувати до матриці A, то результатом буде матриця EA.

Знаходження оберненої матриці

Нехай A оборотна.
Тоді її ранг дорівнює n.
Тоді рядковими перетвореннями її можна звести до одиничної. Тому:

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I$$

для деяких елементарних матриць $E_1, E_2, \dots, E_k$.
Помноживши останню рівність справа на A^{-1}, дістанемо:

$$\boxed{E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 I = A^{-1}}$$

Спосіб відшукання оберненої матриці

Ті ж самі перетворення, що переводять матрицю A в одиничну, переводять одиничну матрицю в обернену:

$$[A \mid I] \sim \dots \sim \left[I \mid A^{-1}\right].$$

Знаходження оберненої матриці

Приклад

Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Знаходження оберненої матриці

Приклад

Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Запишемо матрицю $[A \mid I]$ і приведемо її до вигляду $\left[I \mid A^{-1}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

Знаходження оберненої матриці

Приклад

Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Запишемо матрицю $[A \mid I]$ і приведемо її до вигляду $\left[I \mid A^{-1}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$

Знаходження оберненої матриці

Приклад

Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Запишемо матрицю $[A \mid I]$ і приведемо її до вигляду $[I \mid A^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$, де A — квадратна матриця n-го порядку.

Цю систему можна сприймати як матричне рівняння з невідомою матрицею $\vec{x}$ розмірів $n \times 1$.

Припустимо, що A — оборотна. Тоді має місце рівність

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}.$$

Але звідси знаходимо: $A^{-1}(A\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}$, тому

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1}\vec{b}}$$

Такий метод відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь називається матричним.

Підсумок

- В множині квадратних матриць n-го порядку матриця I володіє такою властивістю: $AI = IA = A$ для кожної матриці A. Її називають одиничною.
- Якщо для матриці A існує така матриця A', що $AA' = A'A = I$, то $A' \equiv A^{-1}$ — обернена до A.
- До матриці n-го порядку існує обернена тоді і тільки тоді, коли її ранг дорівнює n.
- Знайти обернену можна так: виписати поруч матрицю A і одиничну; звести A до одиничної (рядковими перетвореннями), тоді I «перетвориться» в A^{-1}.
- Якщо A — квадратна матриця, а система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок, то цей розв'язок — $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ (матричний метод розв'язування систем).
- Кожній квадратній матриці ми поставимо у відповідність певне число, тобто «припишемо» певну числову характеристику. Ця характеристика матриці відіграє важливу роль в теорії матриць. Наступна тема: «Детермінант (визначник) матриці».