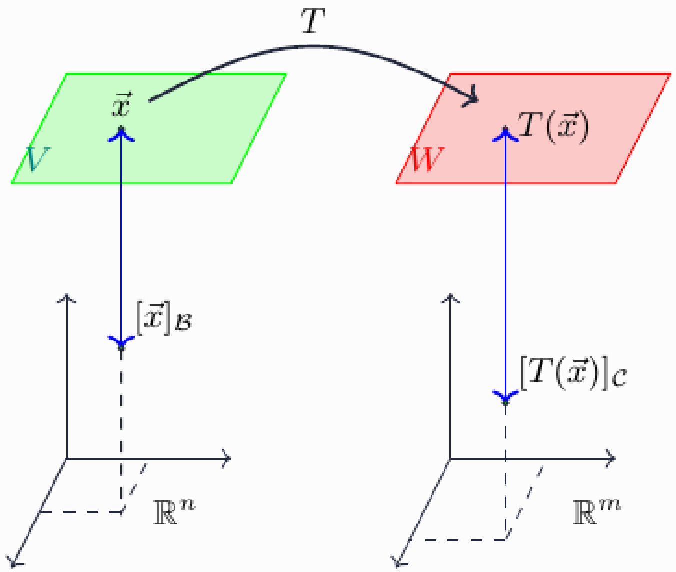
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 7.
Детермінант (визначник) матриці



Олексій Панасенко

20 березня 2023 р.

День в історії

20 березня 1815 року — Наполеон I Бонапарт повернувся до Парижа після ув'язнення на острові Ельба. Початок правління «ста днів».

20 березня 1969 року — Джон Леннон, лідер британського рок-гурту «The Beatles», одружився з японською художницею і музикантом Йоко Оно в Гібралтарі.

20 березня 1999 року — Бертран Піккар і Брайан Джонс стали першими авіаторами, які здійснили безпосадочний обліт земної кулі на повітряній кулі.

Означення детермінанту матриці

Основні означення

Історична довідка

- Поняття детермінанта виникло набагато раніше, ніж була розроблена теорія матриць.
- Вперше поняття детермінанта було введено Секі Такакадзу в 1683 році; незалежно: Годфрідом Лейбніцем у 1693 році.
- Теорія матриць формувалась у середині XIX століття.

Секі Такакадзу

Г. В. Лейбніц

Основні означення

Розглянемо квадратну матрицю $A = [a_{ij}]$ n-го порядку. Поставимо у відповідність даній матриці деяке число, яке назвемо детермінантом (визначникóм) матриці.

Різні підходи до означення детермінанта

- Комбінаторний (вираження детермінанта матриці через її елементи);
- індукційний (детермінант матриці n-го порядку означається через детермінант матриці $n-1$-го порядку);
- аксіоматичний (визначник як індикатор лінійної залежності системи векторів).

Основні означення

Означення

Детермінантом 1×1 матриці $A = [a_{11}]$ назвемо число a_{11}.
Детермінантом (визначником) $n \times n$ матриці, $n > 1$ називається число

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k} M_{1k},$$

де M_{1k} — детермінант матриці порядку $n-1$, яка одержується з заданої шляхом викреслення першого рядка та k-го стовпця.

Позначатимемо визначник матриці A через $\det A$ або $|A|$. Також, щоб не говорити «детермінант матриці n-го порядку», ми вживатимемо термін «детермінант n-го порядку».

Означення

Мінором елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається детермінант матриці, яка утворюється з матриці A викресленням i-го рядка та j-го стовпця.
Позначається M_{ij}.

Означення

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці $A = [a_{ij}]$ називається число $(-1)^{i+j} M_{ij}$.
Позначається A_{ij}.

Означення

Детермінантом (визначником) матриці A n-го порядку $(n > 1)$ називається сума добутків елементів першого рядка цієї матриці на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Формули для обчислення визначника матриці другого порядку

Розглянемо визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Схематично:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Формули для обчислення визначника матриці третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Формули для обчислення визначника матриці третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Схематично:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Формули для обчислення визначника матриці третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Інший спосіб («правило Саррюса»):

$$\left|\begin{matrix} \color{blue}{a_{11}} & \color{green}{a_{12}} & a_{13} \\ \color{blue}{a_{21}} & \color{green}{a_{22}} & a_{23} \\ \color{blue}{a_{31}} & \color{green}{a_{32}} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \color{blue}{a_{11}} & \color{green}{a_{12}} \\ \color{blue}{a_{21}} & \color{green}{a_{22}} \\ \color{blue}{a_{31}} & \color{green}{a_{32}} \end{matrix}$$

Формули для обчислення визначника матриці третього порядку

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =
$$

$$
= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -
$$

$$
- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.
$$

Інший спосіб («правило Саррюса»):

$$
\begin{array}{|ccc|cccc}
{\color{blue}a_{11}} & {\color{green}a_{12}} & a_{13} & {\color{blue}a_{11}} & {\color{green}a_{12}} & & \\
{\color{blue}a_{21}} & {\color{green}a_{22}} & a_{23} & {\color{blue}a_{21}} & {\color{green}a_{22}} & & \\
{\color{blue}a_{31}} & {\color{green}a_{32}} & a_{33} & {\color{blue}a_{31}} & {\color{green}a_{32}} & & \\
\multicolumn{3}{c}{} & {\color{blue}+} & {\color{blue}+} & {\color{blue}+} &
\end{array}
$$

Формули для обчислення визначника матриці третього порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Інший спосіб («правило Саррюса»):

$$\begin{array}{|ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} - & - & - \\ + & + & + \end{array}$$

Теорема Лапласа

Теорема (Теорема Лапласа про розклад визначника)

Детермінант матриці $A = [a_{ij}]$ *дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) матриці на їх алгебраїчні доповнення:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \qquad i = \overline{1,n},$$

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Приклад

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Теорема Лапласа

Приклад

Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 3 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-12) \cdot (-8 - 0) = 96.$$

Теорема Лапласа

Теорема

Детермінант трикутної матриці дорівнює добутку елементів, які розташовані на головній діагоналі цієї матриці.

Стандартне доведення методом математичної індукції (за розміром матриці).

Нехай $A = [a_{ij}]$ — квадратна матриця.

Властивість 1

Якщо A містить нульовий рядок (стовпець), то $\det A = 0$.

Доведення. Розкласти детермінант за нульовим рядком (стовпцем) і все стає очевидним.

Властивості детермінантів

Означення

Матриця $A^T = [a_{ji}]$ називається *транспонованою* до матриці $A = [a_{ij}]$.

Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, то $A^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$.

Властивість 2

При транспонуванні детермінант матриці не змінюється: $\det A = \det A^T$.

Доведення методом математичної індукції.

Властивість 3

Якщо матриця B одержується з матриці A переставленням двох рядків (стовпців), то $\det B = -\det A$.

Ідея доведення:

- Доводити методом математичної індукції.
- Довести крок індукції спочатку для сусідніх рядків.
- Перестановку двох довільних рядків можна замінити на непарну кількість перестановок сусідніх рядків.

Властивості детермінантів

Властивість 4

Якщо матриця A має два однакових рядки (стовпці), то $\det A = 0$.

Властивість 5

Якщо матриця B одержується з матриці A множенням деякого рядка (стовпця) матриці A на число k, то $\det B = k \cdot \det A$.

Нехай

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді розкладаючи детермінант матриці B за i-им рядком, знаходимо:

$$\det B = ka_{i1}A_{i1} + \ldots + ka_{in}A_{in} = k \cdot \det A.$$

Властивості детермінантів

Властивість 6

Якщо квадратні матриці A, B, C однакові за винятком елементів i-го рядка (стовпця), причому i-ий рядок (стовпець) матриці C дорівнює сумі i-их рядків (стовпців) матриць A та B, то

$$\det C = \det A + \det B.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det C =& (a_{1j} + b_{1j})A_{1j} + \ldots + (a_{nj} + b_{nj})A_{nj} = \\ =& a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} + b_{1j}A_{1j} + \ldots + b_{nj}A_{nj} = \det A + \det B. \end{aligned}$$

Властивість 7

Якщо до деякого рядка (стовпця) матриці додати будь-який інший рядок (стовпець), помножений на довільне число, то детермінант матриці не зміниться.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & \dots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Властивості детермінантів

Розкладаючи детермінант матриці B за j-м рядком, дістанемо:

$$\det B = \det A + k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det A.$$

Приклади

Приклад

Обчислити

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Приклади

Приклад

Обчислити
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Маємо:
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклади

Приклад

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приклади

Приклад

Обчислити $\det A$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 4 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -13 \\ 0 & 15 & -33 \\ -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 15 & -33 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot 15 \cdot (-13) = 585.$$

Підсумок

- Кожній квадратній матриці ми поставили у відповідність число: *детермінант (визначник) матриці.*
- Означення було індукційне: знаходження детермінанта матриці n-го порядку зводиться до знаходження детермінантів $n-1$-го порядку.
- Теорема Лапласа: детермінант матриці є сумою добутків елементів певного рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.
- Серед властивостей відмітимо такі:
  1) при перестановці рядків детермінант змінює знак;
  2) якщо деякий рядок матриці помножити на число k, то детермінант нової матриці збільшиться в k разів;
  3) якщо до рядка матриці додати інший рядок, помножений на довільне число, то детермінант не зміниться.
- Далі, зокрема, досліджуватимемо таке питання: чи існує зв'язок між детермінантами матриць A, B та детермінантами матриць $A+B$, λA, AB, A^{-1}? Наступна лекція: «Детермінанти і операції над матрицями».