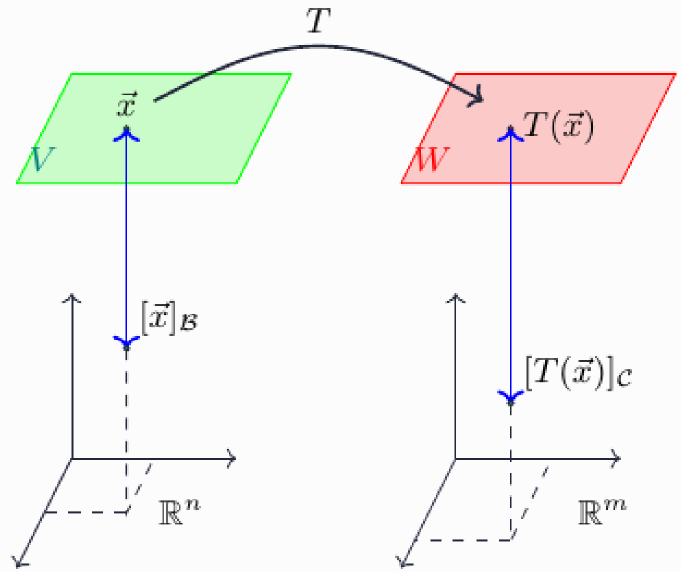
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 8.
Детермінанти і операції над матрицями



Олексій Панасенко

27 березня 2023 р.

День в історії

27 березня 1857 року — народився Карл Пірсон — англійський математик, філософ, фундатор математичної статистики.

27 березня 1860 року — мешканець Нью-Йорку Майкл Бірн запатентував штопор.

27 березня 1963 року — народився Квентін Тарантіно, американський актор, режисер.

Детермінанти елементарних матриць

Теорема

Нехай E — елементарна матриця порядку n.

1. *Якщо E одержується з одиничної матриці переставленням двох рядків, то $\det E = -1$.*
2. *Якщо E одержується з одиничної матриці множенням рядка на деяке число $k \neq 0$, то $\det E = k$.*
3. *Якщо E одержується з одиничної матриці додаванням до деякого рядка якогось іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$.*

Наслідок

Детермінант елементарної матриці відмінний від нуля.

Детермінанти елементарних матриць

Лема

Нехай A — деяка квадратна матриця, E — елементарна матриця того ж порядку. Тоді
$$\det(EA) = \det E \cdot \det A.$$

Доведення. Враховуючи властивості визначників:

1) якщо E утворена з одиничної перестановкою двох рядків, то
$$\det(EA) = -\det A = \det E \det A;$$
2) якщо E утворена з одиничної множенням рядка матриці I на k, то $\det E = k$ і
$$\det(EA) = k \det A = \det E \det A;$$
3) якщо E утворена з одиничної додаванням до деякого рядка іншого, помноженого на певне число, то $\det E = 1$ і
$$\det(EA) = \det E \det A.$$

Критерій оборотності матриць №2

Теорема

Квадратна матриця A оборотна тоді і тільки тоді, коли $\det A \neq 0$.

Необхідність.

Дано: матриця A є оборотною.
Довести: $\det A \neq 0$.

- Оскільки A оборотна, то рядковими перетвореннями вона зводиться до одиничної.
- Тоді існують такі елементарні матриці $E_1, \ldots, E_m$, що

$$E_m \ldots E_1 A = I.$$

- Перейдемо до детермінантів:

$$1 = \det I = \det(E_m \ldots E_1 A) = \det E_m \cdot \ldots \cdot \det E_1 \cdot \det A$$

Критерій оборотності матриць №2

Теорема

Квадратна матриця A *оборотна тоді і тільки тоді, коли* $\det A \neq 0$.

Достатність.

Дано: матрицю A n-го порядку, причому $\det A \neq 0$.
Довести: матриця A є оборотною.

- Зведемо A до східчастої форми.
- Якщо її ранг дорівнює n, то вона оборотна за критерієм оборотності про ранг.
- Якщо її ранг менше n, то у східчастій формі B є нульовий рядок, а тому $\det B = 0$.
- Тоді $B = E_m \dots E_1 A$ і, перейшовши до детермінантів,

$$0 = \det B = \det E_m \cdot \ldots \cdot \det E_1 \cdot \det A.$$

- Тоді $\det A = 0$, що суперечить умові, тому цей випадок неможливий.

Критерій оборотності матриць №2

Означення

Матриця A, детермінант якої дорівнює нулю, називається виродженою (особливою), в іншому випадку — невиродженою (неособливою).

Отже, терміни «оборотна матриця» і «невироджена (неособлива) матриця» є синонімами.

Детермінанти і операції над матрицями

Постановка проблеми

Дано: Припустимо, нам відомо $\det A$, $\det B$.

Питання: Що можна сказати про:

- $\det(A^T)$;
- $\det(A+B)$;
- $\det(\lambda A)$;
- $\det(AB)$;
- $\det(A^{-1})$?

Детермінанти і операції над матрицями

1. Вже доведено (властивість 2 детермінантів), що

$$\boxed{\det A^T = \det A}$$

Детермінанти і операції над матрицями

1. Вже доведено (властивість 2 детермінантів), що

$$\boxed{\det A^T = \det A}$$

2. Взагалі кажучи,

$$\boxed{\det(A + B) \neq \det A + \det B}$$

Детермінанти і операції над матрицями

1. Вже доведено (властивість 2 детермінантів), що

$$\boxed{\det A^T = \det A}$$

2. Взагалі кажучи,

$$\boxed{\det(A + B) \neq \det A + \det B}$$

Справді, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A + B) = \det I = 1$.

Детермінанти і операції над матрицями

1. Вже доведено (властивість 2 детермінантів), що

$$\boxed{\det A^T = \det A}$$

2. Взагалі кажучи,

$$\boxed{\det(A+B) \neq \det A + \det B}$$

Справді, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то $\det A = \det B = 0$, але $\det(A+B) = \det I = 1$.

3.

Теорема (Наслідок властивості 5 визначників)

Якщо A *— матриця порядку* n, $\lambda \in \mathbb{R}$, *то*

$$\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A}$$

4.

Теорема

Якщо A та B квадратні матриці однакових розмірів, то

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$$

4.

Теорема

Якщо A та B квадратні матриці однакових розмірів, то

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$$

Доведення. Два випадки: коли A оборотна і коли необоротна.

а) Нехай A — оборотна. Тоді

$$\begin{aligned} E_m \dots E_1 \cdot A &= I; && \Rightarrow \\ E_m \dots E_1 &= A^{-1}; && \Rightarrow \\ (E_m \dots E_1)^{-1} &= A; && \Rightarrow \\ E_1^{-1} \dots E_m^{-1} &= A; && \Rightarrow \\ A &= E_1' \dots E_m', \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\det(AB) = \det(E_1' \dots E_m' B) = \det E_1' \cdot \ldots \cdot \det E_n' \cdot \det B = \\ = \det(E_1' \dots E_m') \cdot \det B = \det A \det B.$$

Детермінанти і операції над матрицями

4.

Теорема

Якщо A та B квадратні матриці однакових розмірів, то

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$$

б) Нехай A — необоротна. Тоді AB також необоротна.

Доведемо це

- Припустимо супротивне і AB оборотна.
- Тоді існує C така, що $(AB)C = I$.
- З асоціативності множення $A(BC) = I$, тому $A^{-1} = BC$, тобто A — оборотна.

Тоді маємо $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, а тому $\det(AB) = \det A \det B$.

Детермінанти і операції над матрицями

Теорема

Якщо A — оборотна, то

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}}$$

- $A \cdot A^{-1} = I$;
- $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I$;
- тобто $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$, що і треба було довести.

Формули Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Дано систему лінійних рівнянь

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Позначення: $A_i(\vec{b})$ — матриця, яка одержується з A заміною її i-ого стовпця на $\vec{b}$:

$$A_i(\vec{b}) = \begin{array}{ccccc} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{b} & \cdots & \vec{a}_n \\ & & \uparrow & & \\ & & i\text{-й стовпець} & & \end{array}$$

Теорема (Правило Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь)

Якщо A — оборотна матриця n-го порядку, то система $A\vec{x} = \vec{b}$ має єдиний розв'язок, причому

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Приклад

Розв’язати систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 &= 2, \\ -5x_1 - x_2 &= 1. \end{cases}$$

Формули Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & = 2, \\ -5x_1 - x_2 & = 1. \end{cases}$$

Обчислюємо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3 - (-10) = 7.$$

$\Delta \neq 0$, тому система має єдиний розв'язок.

Знаходимо далі:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13.$$

Відповідь. $\left(-\frac{4}{7}, \frac{13}{7}\right)$.

Формула для оберненої матриці

Означення

Нехай $A_{n\times n} = [a_{ij}]$. Обчислимо алгебраїчні доповнення усіх елементів цієї матриці. Матриця

$$C^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

називається приєднаною матрицею.

Формула для оберненої матриці

Лема (про фальшивий розклад визначника)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) матриці дорівнює нулю.

Формула для оберненої матриці

Теорема

Якщо A — *оборотна, то*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^{*}.$$

Формула для оберненої матриці

Теорема

Якщо A — оборотна, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*.$$

Доведення. Безпосередньо обчислимо добуток $A \cdot C^*$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix}.$$

Недіагональні елементи матриці $A \cdot C^*$ дорівнюють нулю за лемою про фальшивий розклад визначника, а діагональні ”— визначнику матриці A за теоремою Лапласа.

Таким чином, $A \cdot \frac{1}{\det A} C^* = I$, а це і означає, що $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C^*$.

Підсумок

- В цій лекції ми довели важливий критерій оборотності матриць: матриця є оборотною тоді і тільки тоді, коли її детермінант відмінний від нуля.
- Ми обґрунтували, зокрема, таке:
    1. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
    2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$;
    3. зауважили, що $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.
- Виведено формули, які виражають розв'язок системи лінійних рівнянь через детермінанти матриць (формули Крамера).
- Нарешті, знайдено явну формулу для обчислення оберненої матриці: вона дорівнює $\frac{1}{\det A} \cdot C^*$.
- Далі ми «переключаємось» на новий розділ лінійної алгебри. Ми бачили, що різні множини з однією внутрішньою і однією зовнішньою бінарною операцією володіють схожими властивостями. Їх об'єднає нове поняття: «векторний (лінійний) простір».