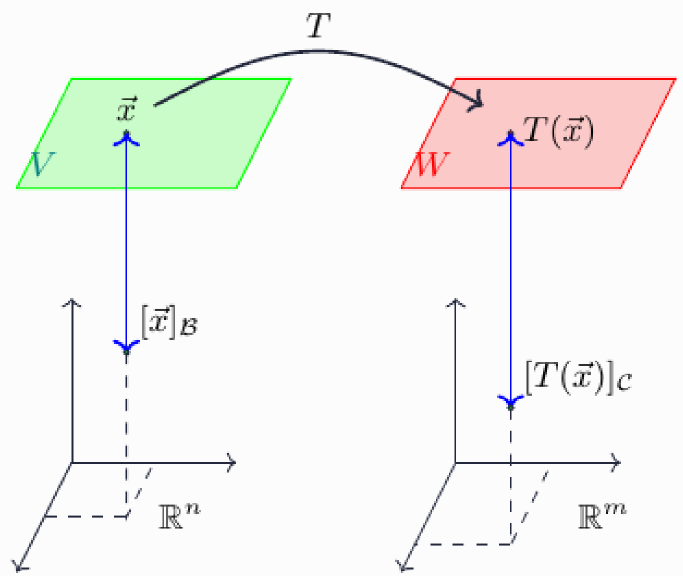
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 9.
Поняття векторного простору та підпростору векторного простору



Олексій Панасенко

3 квітня 2023 р.

День в історії

3 квітня 1948 року — президент США Ґаррі Трумен підписав план Джорджа Маршалла після Другої світової війни, спрямований на відродження економіки країн Західної та Південної Європи з метою сприяння розвитку демократії в регіоні.

3 квітня 2016 року — приватні документи панамської юридичної фірми були оприлюднені і показали, як заможні клієнти приховували свої статки та уникали сплати податків; «Панамський архів» став одним з найбільших витоків конфіденційних даних.

Означення векторного (лінійного) простору

Нехай V — це множина, на якій задана внутрішня бінарна алгебраїчна операція додавання і зовнішня операція множення елементів множини V на елементи поля P (ми розглядатимемо лише випадок, коли P — це множина дійсних чисел $\mathbb{R}$).

Якщо $\vec{a}, \vec{b} \in V$, то їх сума позначається через $\vec{a} + \vec{b}$, а добуток скаляра $\alpha \in P$ на $\vec{a}$ позначається через $\alpha \cdot \vec{a}$ або $\alpha\vec{a}$.

Означення векторного (лінійного) простору

Означення

Якщо наступні умови виконуються для всіх елементів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ множини V і довільних елементів $\alpha_1, \alpha_2 \in P$, то множина V називається векторним (лінійним) простором над полем P, а її елементи називаються векторами:

1) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
3) існує $\vec{0} \in V$ (він називається *нуль-вектором*), що $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4) для кожного $\vec{a} \in V$ існує такий елемент $(-\vec{a}) \in V$, що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
5) $\alpha_1(\alpha_2\vec{a}) = (\alpha_1\alpha_2)\vec{a}$;
6) $\alpha_1(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha_1\vec{a} + \alpha_1\vec{b}$;
7) $(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{a}$;
8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Приклади векторних просторів

Приклад

Для $n \geqslant 1$ n-вимірний арифметичний векторний простір $\mathbb{R}^n$ є дійсним векторним простором.

Приклад

Множина матриць фіксованих розмірів $m \times n$ з операціями додавання матриць і множення на скаляр є векторним простором. Цей векторний простір позначатимемо $M_{m \times n}$.

Приклади векторних просторів

Приклад

Нехай $\mathcal{P}_2$ — множина многочленів від однієї змінної з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує 2. Означимо в природний спосіб на цій множині операції додавання на множення на число, а саме: якщо

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

то

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) =& (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2, \\ \alpha P(x) =& \alpha a_0 + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2. \end{aligned}$$

Очевидно, що ця множина є замкненою відносно введених операцій і усі аксіоми виконуються, в чому можна переконатись безпосередньо. Отже, $\mathcal{P}_2$ — векторний простір.

В загальному випадку $\mathcal{P}_n$ — множина многочленів від однієї змінної, степінь яких не перевищує n, є векторним простором.

Приклади векторних просторів

Приклад

Нехай $\mathcal{F}_{[a,b]}$ — множина функцій дійсної змінної визначених на відрізку $[a,b]$. На цій множині введемо операції додавання функцій і множення функції на число:
якщо $f(x)$ та $g(x)$ — дві функції, то їх **сумою** називається функція

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

а **добутком** функції **на число** α функція

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

$\mathcal{F}_{[a,b]}$ замкнена відносно введених операцій і умови 1–8 означення векторного простору виконуються. Отже, $\mathcal{F}_{[a,b]}$ — векторний простір.

Приклади векторних просторів

Приклад

Нехай $\mathcal{C}_{[a,b]}$ — множина неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. З курсу математичного аналізу відомо, що сума двох неперервних на $[a,b]$ функцій є неперервною функцією на $[a,b]$, і добуток неперервної на відрізку функції на число також є неперервною на цьому ж відрізку. При цьому виконуються аксіоми 1–8 векторного простору. Отже, $\mathcal{C}_{[a,b]}$ — векторний простір.

Приклад

Множина $\mathbb{Z}$ цілих чисел не є дійсним векторним простором. Справді, множина $\mathbb{Z}$ не є замкненою відносно операції множення на дійсне число.

Найпростіші властивості

Теорема (Найпростіші властивості векторних просторів)

Нехай V — векторний простір, $\vec{a} \in V$, $\alpha \in P$. Тоді:

1) $0\vec{a} = \vec{0}$;
2) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$;
3) $(-\alpha)\vec{a} = -\alpha\vec{a}$.

Доведення. 1) Проведемо ланцюжок рівносильних перетворень:

$$\vec{a} \stackrel{8}{=} (0+1)\vec{a}$$

Додамо до обох частин вектор $-\vec{a}$. Тоді, використовуючи аксіоми 4 та 2, дістанемо:

$$\vec{0} = (0\vec{a} + \vec{a}) + (-\vec{a}) \stackrel{1}{=} 0\vec{a} + (\vec{a} + (-\vec{a})) \stackrel{4}{=} 0\vec{a} + \vec{0} \stackrel{3}{=} 0\vec{a}.$$

Теорема (Найпростіші властивості векторних просторів)

Нехай V — векторний простір, $\vec{a} \in V$, $\alpha \in P$. Тоді:

1) $0\vec{a} = \vec{0}$;
2) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$;
3) $(-\alpha)\vec{a} = -\alpha\vec{a}$.

2) Зафіксуємо вектор $\vec{a}$. Тоді маємо:

$$\alpha\vec{a} \overset{3}{=} \alpha(\vec{a} + \vec{0}) \overset{6}{=} \alpha\vec{a} + \alpha\vec{0}.$$

Додамо до обох частин вектор $-\alpha\vec{a}$. Тоді:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= (\alpha\vec{a} + \alpha\vec{0}) + (-\vec{\alpha}a) = \\ &= (\alpha\vec{0} + \alpha\vec{a}) + (-\vec{\alpha}a) = \\ &= \alpha\vec{0} + (\alpha\vec{a} + (-\vec{\alpha}a)) = \alpha\vec{0} + \vec{0} = \alpha\vec{0}.\end{aligned}$$

Теорема (Найпростіші властивості векторних просторів)

Нехай V — векторний простір, $\vec{a} \in V$, $\alpha \in P$. Тоді:

1) $0\vec{a} = \vec{0}$;
2) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$;
3) $(-\alpha)\vec{a} = -\alpha\vec{a}$.

3) Проведемо ланцюжок рівносильних перетворень:

$$\vec{0} = (\alpha + (-\alpha))\vec{a} = \alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a}.$$

Додамо до лівої та правої частини останньої рівності вектор $(-\alpha\vec{a})$:

$$\begin{aligned} -\alpha\vec{a} &= \alpha\vec{a} + (-\alpha)\vec{a} - \alpha\vec{a} = \\ &= (-\alpha)\vec{a} + (\alpha\vec{a} - \alpha\vec{a}) = (-\alpha)\vec{a} + \vec{0} = (-\alpha)\vec{a}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Поняття підпростору векторного простору

Означення

Нехай V — векторний простір, заданий над полем P, U — підмножина множини V. Якщо множина U сама є векторним простором над полем P з тими ж самими операціями додавання і множення на скаляр, то U називається підпростором простору V.

Поняття підпростору векторного простору

Теорема (Критерій підпростору)

Для того, щоб непорожня підмножина U простору V заданого над полем P була його підпростором, необхідно і достатньо, щоб вона була замкнена відносно операції додавання векторів і відносно операції множення векторів на елементи поля P.

Дано: $U \subset V$ замкнена відносно операцій $+$ і $\cdot$;
Довести: U є підпростором V (достатність).

Аксіоми 1, 2, 5–8 виконуються для всіх елементів простору V, а значить вони виконуються і для всіх елементів множини U. Доведемо виконання третьої та четвертої аксіом векторного простору.

U непорожня $\Rightarrow$ вона містить принаймні один вектор $\vec{a}$
$\Rightarrow (-1)\vec{a} \in U$
$\Rightarrow$ за властивістю 3 теореми 1 $-\vec{a} \in U$.
$\Rightarrow$ до кожного елемента існує протилежний (аксіома 4)
$\Rightarrow \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \in U$ (третя аксіома також має місце).

Приклади підпросторів

Приклад

Нехай U — множина симетричних матриць n-го порядку.
Легко переконатись в тому, що сума двох симетричних матриць є знову симетричною матрицею; добуток симетричної матриці на число є симетричною матрицею.
Отже, U — підпростір векторного простору M_n квадратних матриць.

Приклади підпросторів

Приклад

Нехай

$\mathcal{F}_{[a,b]}$ — множина усіх функцій $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$;

$\mathcal{C}_{[a,b]}$ — множина усіх неперервних функцій $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$;

$\mathcal{D}_{[a,b]}$ — множина усіх диференційовних функцій $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Приклади підпросторів

Приклад

Нехай

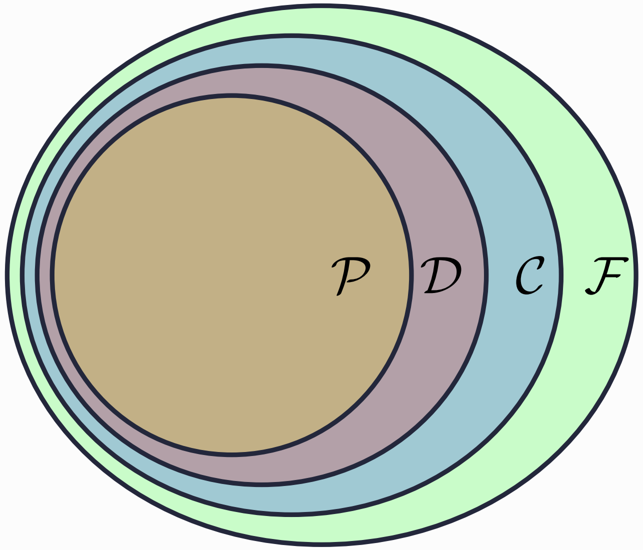
$\mathcal{F}_{[a,b]}$ — множина усіх функцій $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$;

$\mathcal{C}_{[a,b]}$ — множина усіх неперервних функцій $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$;

$\mathcal{D}_{[a,b]}$ — множина усіх диференційовних функцій $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Має місце таке включення: $\mathcal{D}_{[a,b]} \subset \mathcal{C}_{[a,b]} \subset \mathcal{F}_{[a,b]}$.

$\mathcal{F}_{[a,b]}$, як ми показали раніше, є векторним простором, а усі множини функцій $\mathcal{C}_{[a,b]}$ та $\mathcal{D}_{[a,b]}$ замкнені відносно операцій додавання і множення на скаляр. Таким чином, вони також є векторними просторами.



Приклади підпросторів

Приклад

Нехай S — множина функцій, що задовольняють рівняння $f'' + f = 0$. Зрозуміло, що $S \subset \mathcal{D}$ і S непорожня множина $\big(f(x) \equiv 0 \in S\big)$. Нехай f та g належать S і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{aligned}(f+g)'' + (f+g) &= f'' + g'' + f + g = (f'' + f) + (g'' + g) = 0 + 0 = 0, \\ (\alpha f)'' + (\alpha f) &= \alpha(f'' + f) = \alpha \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

тобто S замкнена відносно операцій додавання та множення на число, а тому є векторним простором.

Приклади підпросторів

Приклад

Якщо V векторний простір, то він може мислитись підпростором самого себе.
$\{\vec{0}\}$ також є підпростором простору V — він називається *нуль-простором*.
$\{\vec{0}\}$ та V називають *тривіальними* підпросторами простору V.

Приклади підпросторів

Твердження (наслідок критерію підпростору)

Якщо U — підпростір векторного простору V, то U містить $\vec{0}$ простору V.

Приклад

Чи є множина W матриць виду

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b+1 & a \end{bmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

підпростором векторного простору M_2?

Розв'язання. Оскільки нульова матриця (нульовий елемент простору M_2) вказаній множині не належить, то W не є підпростором простору M_2.

Лінійна оболонка системи векторів

Нехай $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k\}$ — система векторів простору V заданого над полем P.

Означення

Вектор $\vec{b}$ простору V називається лінійною комбінацією векторів цієї системи, якщо існують такі $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k \in P$, що

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k.$$

Позначення: $\vec{b} \xrightarrow{\text{л.в.}} \vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$ (позначення «л.в.» є скороченням від «лінійно виражається»).

Означення

Сукупність усіх лінійних комбінацій векторів даної системи називається її лінійною оболонкою і позначається $L\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k\right)$ або $\mathrm{Span}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k)$.

Лінійна оболонка системи векторів

Приклад

Векторний простір $\mathcal{P}_2$ є лінійною оболонкою векторів 1, x, x^2.

Приклад

Векторний простір M_2 є лінійною оболонкою системи

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

оскільки довільна матриця з M_2 подається у вигляді:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4.$$

Лінійна оболонка системи векторів

Приклад

Чи належить функція $y = \sin 2x$ лінійній оболонці $L(\sin x, \cos x)$ векторного простору $\mathcal{F}$?

Припустимо, що належить. Це означає, що існують такі a, b, що рівність $a \sin x + b \cos x = \sin 2x$ виконується для кожного x. Підставимо послідовно $x = 0$ та $x = \frac{\pi}{2}$. Дістанемо:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 1 & = 0, \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 & = 0, \end{cases}$$

звідки $a = b = 0$. Тоді $\sin 2x \equiv 0$, що, очевидно, є неправдою. Таким чином, наше припущення невірне і $\sin 2x$ не належить $L(\sin x, \cos x)$.

Лінійна оболонка системи векторів

Теорема

Лінійна оболонка системи векторів $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\}$ *простору* V *є підпростором цього простору.*

Доведення. Потрібно показати, що множина $L(\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k)$ є замкненою відносно операцій додавання та множення на скаляр.

Нехай

$$\vec{b}_1 = \alpha_{11}\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_{1k}\vec{a}_k, \quad \vec{b}_2 = \alpha_{21}\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_{2k}\vec{a}_k.$$

Тоді

$$\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \underbrace{(\alpha_{11} + \alpha_{21})}_{\beta_1}\vec{a}_1 + \ldots + \underbrace{(\alpha_{1k} + \alpha_{2k})}_{\beta_k}\vec{a}_k,$$

$$\alpha\vec{b}_1 = \underbrace{(\alpha\alpha_{11})}_{\gamma_1}\vec{a}_1 + \ldots + \underbrace{(\alpha\alpha_{1k})}_{\gamma_k}\vec{a}_k.$$

тобто одержали лінійні комбінації системи векторів $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k$. Отже, $\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \alpha\vec{b}_1 \in L(\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k)$.

Лінійна оболонка системи векторів

Зауваження

$L\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\right)$ — найменший підпростір, що містить вектори $\vec{a}_1, \ldots \vec{a}_k$, тобто $L\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k\right)$ є підпростором кожного іншого простору, що містить ці вектори.

Підсумок

1. Ми ввели поняття векторного (лінійного) простору — множини з двома операціями, для якої виконується 8 умов.
2. Ми розглянули основні приклади векторних просторів, зокрема:
   - множина прямокутних матриць з операціями додавання і множення на число;
   - множина многочленів степеня не вище n;
   - множини функцій, визначених на відрізку $[a,b]$ (усіх / неперервних / диференційовних).
3. Розглянули поняття підпростору лінійного простору.
4. Ввели поняття лінійної оболонки системи векторів і довели, що лінійна оболонка — підпростір.
5. Далі ми по аналогії з простором $\mathbb{R}^n$ введемо поняття лінійно залежних і лінійно незалежних систем векторів, базису простору. Наступна тема: «Лінійна залежність векторів. Базис і розмірність векторного простору.»