VII Олімпіада геометричної творчості
імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач
8 клас (складний варіант)

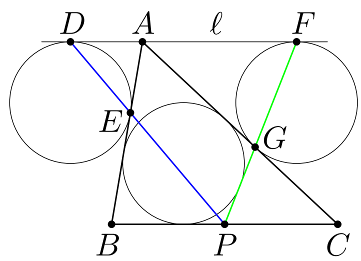
1. У трикутнику ABC точка O є центром описаного кола, пряма AO перетинає BC у точці T, а перпендикуляри, проведені з точки T до AB та AC, перетинають прямі OB та OC у точках E та F відповідно. Доведіть, що $BE = CF$.

2. Дано трикутник ABC, у якому відмічено центр вписаного кола I та K_1 і K_2 — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC і AC відповідно. Користуючись циркулем та лінійкою, побудуйте центр кола, вписаного у трикутник CK_1K_2, за допомогою найменшої можливої кількості ліній (лінія — пряма або коло).

3. Нехай ABC — прямокутний трикутник ($\angle C = 90^\circ$), N — середина дуги BAC описаного кола та K — точка перетину CN з AB. На продовженні AK за точку K відклали відрізок $TK = KA$. Доведіть, що коло з центром T та радіусом TK дотикається до BC.

4. Нехай ABC — гострокутний трикутник, AD, BE та CF — його висоти та H — точка перетину висот. На променях AD, BE та CF відклали відрізки $AA_1 = HD$, $BB_1 = HE$ та $CC_1 = HF$ відповідно. Нехай A_2, B_2 та C_2 — середини A_1D, B_1E та C_1F. Доведіть, що точки H, A_2, B_2 та C_2 лежать на одному колі.

5. Через вершину A трикутника ABC провели пряму $\ell \parallel BC$. Два кола, рівні вписаному колу трикутника ABC, дотикаються до прямих ℓ, AB та AC як показано на рисунку. Прямі DE та FG перетинаються у точці P, яка належить BC. Доведіть, що P — середина BC.



6. Дано рівнобедрений трикутник ABC, в якому $\angle BAC = 108^\circ$. Бісектриса кута ABC перетинає описане коло трикутника у точці D. На відрізку BC відмітили точку E таку, що $AB = BE$. Доведіть, що серединний перпендикуляр до CD дотикається до описаного кола трикутника ABE.

Тривалість олімпіади — 4 години

10 грудня 2023 року

VII Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач
9 клас (складний варіант)

1. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BD та CE, які перетинаються у точці H. На стороні AC обрали точку F так, що $FH \perp CE$. Відрізок FE перетинає описане коло трикутника CDE у точці K. Доведіть, що $HK \perp EF$.

2. Нехай BC та BD — дотичні, проведені з точки B до кола з діаметром AC, та E — друга точка перетину прямої CD з описаним колом трикутника ABC. Доведіть, що $CD = 2DE$.

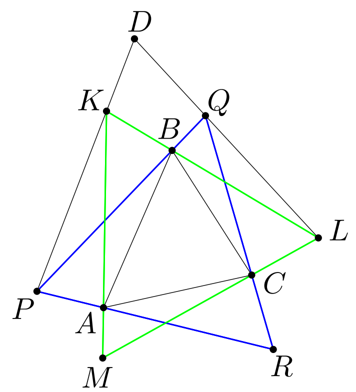
3. Дано трикутник ABC, у якому відмічено центр вписаного кола I та K_1 і K_2 — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC і AC відповідно. Користуючись циркулем та лінійкою, побудуйте центр зовнівписаного кола трикутника CK_1K_2, яке дотикається до CK_2, за допомогою щонайбільше 4 ліній (лінія — пряма або коло).

4. Нехай BE та CF — висоти гострокутного трикутника ABC, H — ортоцентр цього трикутника, M — середина BC, K та L — точки перетину серединного перпендикуляра до BC з BE та CF відповідно, Q — ортоцентр трикутника KLH. Доведіть, що Q лежить на медіані AM.

5. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, K — точка дотику цього кола зі стороною BC. На відрізках BI та CI відмітили точки X та Y так, що $KX \perp AB$ та $KY \perp AC$. Описане коло трикутника XYK вдруге перетинає пряму BC у точці D. Доведіть, що $AD \perp BC$.

6. Навколо гострокутного трикутника ABC описали рівносторонні трикутники KLM та PQR як показано на рисунку. Прямі PK та QL перетинаються у точці D. Доведіть, що

$$\angle ABC + \angle PDQ = 120^\circ.$$



Тривалість олімпіади — 4 години

10 грудня 2023 року

VII Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10-11 клас (складний варіант)

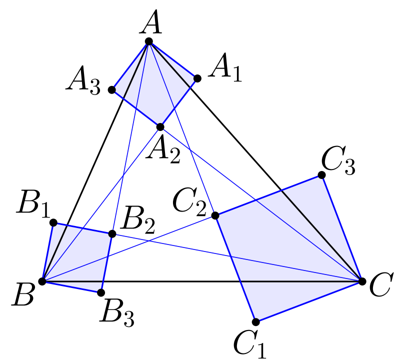
1. Кола ω_1 та ω_2 дотикаються до прямої ℓ у точках A та B відповідно, а також дотикаються одне одного зовнішнім чином у точці D. На меншій дузі BD кола ω_2 вибрано довільну точку E. Пряма DE вдруге перетинає коло ω_1 у точці C. Доведіть, що $BE \perp AC$.

2. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC, в якому $\angle A = 60°$, D — точка дотику вписаного кола зі стороною BC. На відрізках BI та CI відмітили точки X та Y так, що $DX \perp AB$ та $DY \perp AC$. Точку Z обрали так, що трикутник XYZ рівносторонній, причому точки Z та I лежать по одну сторону від прямої XY. Доведіть, що $AZ \perp BC$.

3. Дано гострокутний трикутник ABC. Квадрати $AA_1A_2A_3$, $BB_1B_2B_3$ та $CC_1C_2C_3$ розташовані так, що прямі A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 проходять через точки B, C та A відповідно, а прямі A_2A_3, B_2B_3 та C_2C_3 — через точки C, A та B відповідно. Доведіть, що

а) прямі AA_2, B_1B_3 та C_1C_3 перетинаються в одній точці;

б) прямі AA_2, BB_2 та CC_2 перетинаються в одній точці.



4. На півколі з діаметром AB відмітили довільну точку C. Нехай P та Q — точки на відрізку AB, для яких $AP = AC$ та $BQ = BC$, а O та H — центр описаного кола та ортоцентр трикутника CPQ. Доведіть, що при всіх можливих положеннях точки C пряма OH проходить через фіксовану точку.

5. Дано нерівнобедрений трикутник ABC, у якому відмічено центр вписаного кола I та K_1, K_2 і K_3 — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC, AC і AB відповідно. Користуючись лише лінійкою, побудуйте центр кола, описаного навколо трикутника ABC.

6. Дано нерівнобедрений трикутник ABC. Через точку B провели пряму ℓ, яка не перетинає трикутник та утворює різні кути зі сторонами AB та BC. Нехай M — середина AC, а H_a та H_c — основи перпендикулярів, проведених з точок A та C до ℓ. Описане коло трикутника MBH_a перетинає AB у точці A_1, а описане коло трикутника MBH_c перетинає BC у точці C_1. Точка A_2 симетрична до A відносно точки A_1, а точка C_2 симетрична до C відносно точки C_1. Доведіть, що прямі ℓ, AC_2 та CA_2 перетинаються в одній точці.