VII Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач
8-9 клас (базовий варіант)

1. У трикутнику ABC відмітили середини сторін AB і BC — точки M і N відповідно. Відомо, що периметр трикутника MBN дорівнює 12 см, а периметр чотирикутника $AMNC$ — 20 см. Знайдіть довжину відрізка MN.

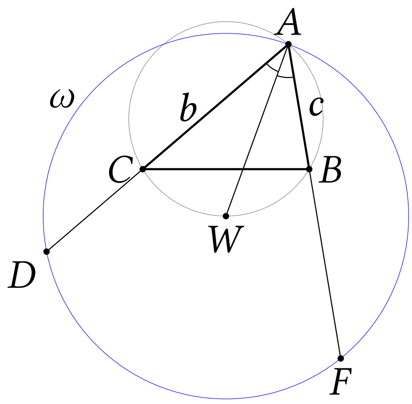
2. У трикутнику ABC різниця кутів B та C дорівнює 90°, AL — бісектриса трикутника ABC. Бісектриса зовнішнього кута A трикутника ABC перетинає пряму BC в точці F. Доведіть, що $AL = AF$.

3. Точки H і L — відповідно основи висоти і бісектриси, проведених з вершини A трикутника ABC, K — точка дотику вписаного в трикутник ABC кола зі стороною BC. За яких умов AK буде бісектрисою кута $\angle LAH$?

4. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до AC в точці F. Перпендикуляр з точки F до BC перетинає бісектрису кута C в точці N. Доведіть, що відрізок FN дорівнює радіусу кола, вписаного в трикутник ABC.

5. Точка O — центр описаного кола трикутника ABC. Промінь AO перетинає сторону BC в точці T. На AT як на діаметрі побудовано коло ω. При перетині зі сторонами трикутника ABC зовні нього утворилися три дуги. Доведіть, що більша з цих дуг дорівнює сумі двох інших.

6. В трикутнику ABC зі сторонами $AC = b$ і $AB = c$ бісектрису кута A продовжено до перетину з описаним навколо цього трикутника колом в точці W. Коло ω з центром W і радіусом WA перетинає прямі AC і AB в точках D і F відповідно. Знайдіть довжини відрізків CD і BF.



Тривалість олімпіади — 4 години

9 грудня 2023 року

VII Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

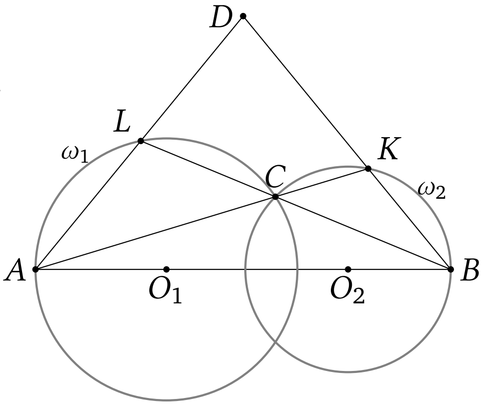
10-11 клас (базовий варіант)

1. Необхідно побудувати кут, синус якого в три рази більший за його косинус. Опишіть, як можна це зробити.

2. Чотирикутник $ABCD$ є вписаним у коло радіуса R, а також описаним навколо кола радіуса r. Відомо, що $\angle ADB = 45^\circ$. Знайдіть площу трикутника AIB, де точка I — центр кола, вписаного в $ABCD$.

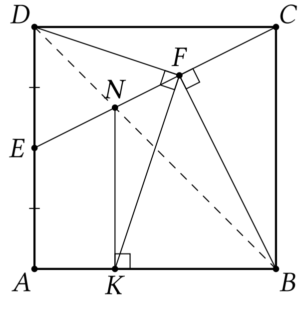
3. Точки K і N — середини сторін AC і AB трикутника ABC. Описане коло ω трикутника AKN дотикається до BC. Знайдіть BC, якщо $AC + AB = n$.

4. Нехай C — одна з двох точок перетину кіл ω_1 і ω_2 з центрами в точках O_1 та O_2 відповідно. Пряма O_1O_2 перетинає кола в точках A і B так, як показано на рисунку. Нехай K — друга точка перетину прямої AC з колом ω_2, L — друга точка перетину прямої BC з колом ω_1. Прямі AL і BK перетинаються в точці D. Доведіть, що $AD = BD$.



5. Бісектрису кута A трикутника ABC продовжено до перетину з описаним колом цього трикутника в точці W. Через W проведено пряму, яка паралельна до сторони AB та перетинає сторони BC і AC — в точках N і K відповідно. Доведіть, що пряма AW є дотичною до описаного кола $\triangle CNW$.

6. Дано квадрат $ABCD$, точка E — середина AD. Нехай F — основа перпендикуляру, опущеного з точки B на EC. Точка K на AB така, що $\angle DFK = 90^\circ$. Точка N на CE така, що $\angle NKB = 90^\circ$. Доведіть, що точка N належить відрізку BD.



Тривалість олімпіади — 4 години

9 грудня 2023 року