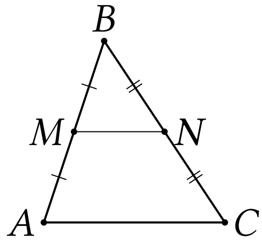
VII Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач
8-9 клас (базовий варіант)

1. У трикутнику ABC відмітили середини сторін AB і BC — точки M і N відповідно. Відомо, що периметр трикутника MBN дорівнює 12 см, а периметр чотирикутника $AMNC$ — 20 см. Знайдіть довжину відрізка MN.

Розв'язання.

Оскільки $AM = MB$, $CN = NB$, то периметр чотирикутника $AMNC$ можна записати як $P(MBC) + AC$. Тоді $20 = 12 + AC$, звідки $AC = 8$ см. А оскільки $MN = \frac{1}{2}AC$, то значить $MN = 4$ см.



Відповідь. 4 см.

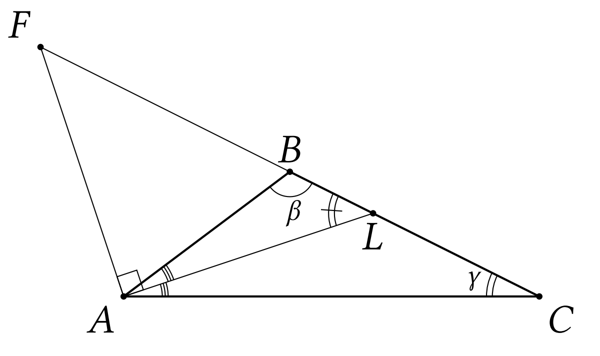
□

2. У трикутнику ABC різниця кутів B та C дорівнює 90°, AL — бісектриса трикутника ABC. Бісектриса зовнішнього кута A трикутника ABC перетинає пряму BC в точці F. Доведіть, що $AL = AF$.

(*Олександр Дзюняк*)

Розв'язання.

Позначимо $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. За умовою задачі $\beta = 90^\circ + \gamma$.



Маємо:

$$\angle LAC = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\left(180^\circ - (\beta + \gamma)\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}(90^\circ + 2\gamma) = 45^\circ - \gamma.$$

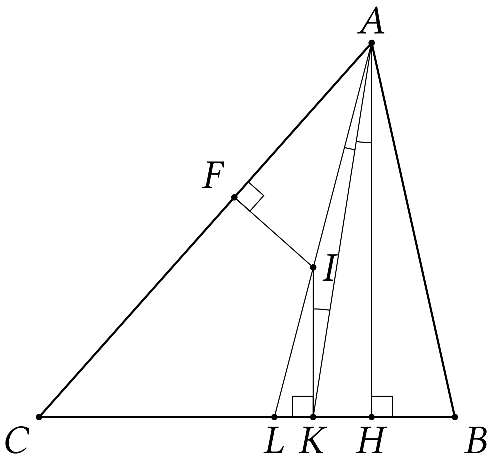
Тоді $\angle ALB = \angle LAC + \angle LCA = 45^\circ$ (як зовнішній кут трикутника ALC).

$\angle FAL = 90^\circ$ (бісектриси суміжних кутів перпендикулярні), $\angle ALF = 45^\circ$, тобто трикутник FAL є рівнобедреним прямокутним, і, отже, $AL = AF$. □

3. Точки H і L — відповідно основи висоти і бісектриси, проведених з вершини A трикутника ABC, K — точка дотику вписаного в трикутник ABC кола зі стороною BC. За яких умов AK буде бісектрисою кута $\angle LAH$?

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



Нехай точка I — центр вписаного в трикутник ABC кола і виявилось, що AK є бісектрисою кута $\angle LAH$, тобто $\angle LAK = \angle KAH$ (рис. 3).

Оскільки $IK \parallel AH$ (вони перпендикулярні до BC), то $\angle IKA = \angle KAH$ (як внутрішні різносторонні). Отже, $\angle LAK = \angle IKA$. Тоді трикутник KIA є рівнобедреним, а значить $AI = IK$.

Нехай F — точка дотику вписаного кола зі стороною AC. Тоді у трикутнику AFI катет FI дорівнює гіпотенузі AI, що неможливо.

Таким чином, ні за яких умов AK не може бути бісектрисою кута $\angle LAH$. □

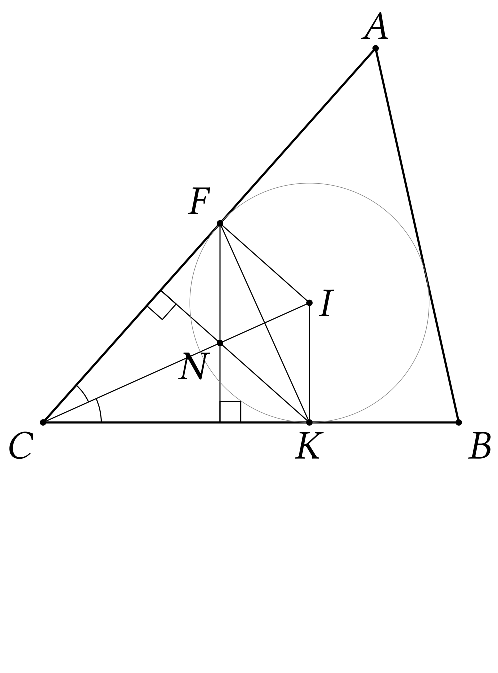
4. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до AC в точці F. Перпендикуляр з точки F до BC перетинає бісектрису кута C в точці N. Доведіть, що відрізок FN дорівнює радіусу кола, вписаного в трикутник ABC.

(*Олексій Карлюченко*)

Розв'язання.

Нехай вписане коло дотикається до сторони BC в точці K (рис. 4). Очевидно, що $CI \perp FK$ ($CF = CK$ і трикутник FCK — рівнобедрений).

Тоді точка N є точкою перетину висот трикутника CFK. Отже, $KN \perp AC$ і $FIKN$ — паралелограм (протилежні сторони паралельні). Таким чином, $FN = IK$, тобто FK дорівнює радіусу кола, вписаного в трикутник ABC, що і треба було довести.



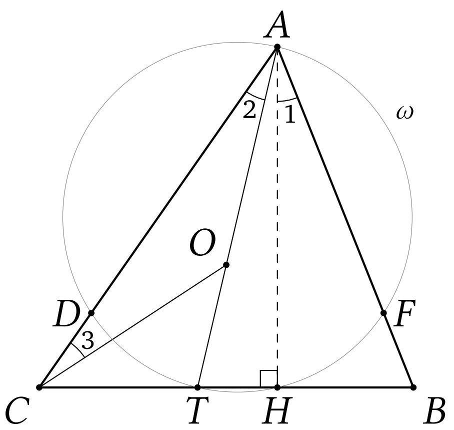
Зауваження. Чотирикутник $FIKN$ навіть є ромбом.

□

5. Точка O — центр описаного кола трикутника ABC. Промінь AO перетинає сторону BC в точці T. На AT як на діаметрі побудовано коло ω. При перетині зі сторонами трикутника ABC зовні нього утворилися три дуги. Доведіть, що більша з цих дуг дорівнює сумі двох інших.

(*Олексій Карлюченко*)

Розв'язання.



Очевидно, що коло ω перетне сторону BC в основі висоти, проведеної з вершини A. Позначимо цю точку як H.

Нехай $\smile AD = m$, $\smile AF = n$ і $\smile TH = k$, причому m — найбільша з цих дуг. Маємо:

$$\angle 1 = 90^\circ - \angle B \quad \text{(з трикутника } ABH\text{)},$$

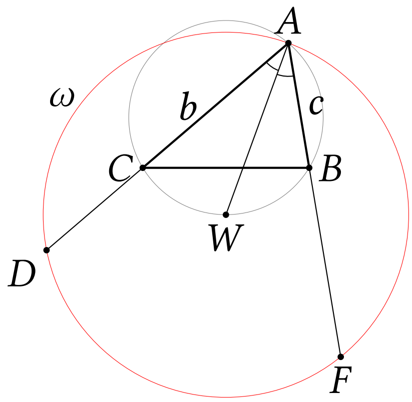
$$\angle AOC = 2\angle B \quad \text{(як центральний)},$$

$$\angle 2 = \angle 3 = \frac{180^\circ - 2\angle B}{2} = 90^\circ - \angle B.$$

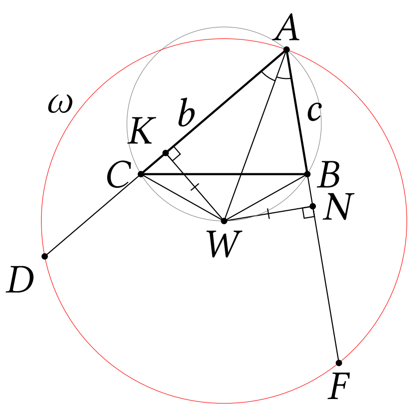
Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то $\smile FH = \smile DT$. Але $\smile m + \smile DT = 180^\circ$ (AT — діаметр) і $\smile n + \smile FH + \smile k = 180^\circ$. Таким чином, $\smile m = \smile n + \smile k$. □

6. В трикутнику ABC зі сторонами $AC = b$ і $AB = c$ бісектрису кута A продовжено до перетину з описаним навколо цього трикутника колом в точці W. Коло ω з центром W і радіусом WA перетинає прямі AC і AB в точках D і F відповідно. Знайдіть довжини відрізків CD і BF.

(*Євген Свістунов*)



Розв'язання.



Нехай $b > c$. Проведемо $WK \perp AC$ і $WN \perp AB$. Очевидно, $WK = WN$ — з рівності трикутників AWK і AWN (за гіпотенузою та гострим кутом). Оскільки $CW = BW$ ($\smile CW = \smile BW$), то трикутники WKC і WNB рівні за катетом та гіпотенузою.

Нехай $CK = BN = x$. Тоді $b - x = c + x$ (з рівності трикутників AWK і AWN: $AK = AN$). Звідси $x = \frac{1}{2}(b - c)$. Тоді $AK = AN = b - \frac{1}{2}(b - c) = \frac{1}{2}(b + c)$.

Очевидно, $AK = KD$ і $AN = NF$ (діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл). Отже, $AD = AF = b + c$. Тоді $CD = c$ і $BF = b$.

□

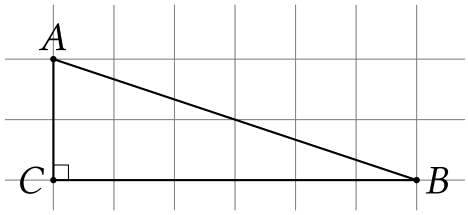
VII Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10-11 клас (базовий варіант)

1. Необхідно побудувати кут, синус якого в три рази більший за його косинус. Опишіть, як можна це зробити.

Розв'язання.



Маємо: $\sin\alpha = 3\cos\alpha$. Отже, $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

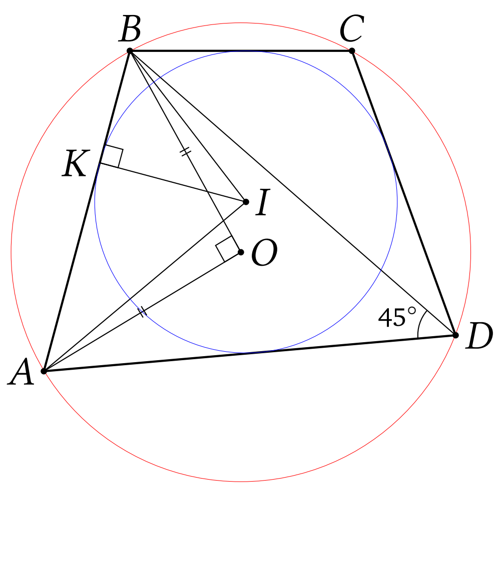
Отже, будуємо прямокутний трикутник, в якому один катет в три рази більший за інший. Кут, який лежить навпроти більшого катета — шуканий.

□

2. Чотирикутник $ABCD$ є вписаним у коло радіуса R, а також описаним навколо кола радіуса r. Відомо, що $\angle ADB = 45^\circ$. Знайдіть площу трикутника AIB, де точка I — центр кола, вписаного в $ABCD$.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання.



Нехай точка O — центр кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$. Оскільки те ж саме коло описане навколо $\triangle ABD$, то $\angle AOB = 90^\circ$ (центральний кут, вдвічі більший за $\angle ADB$).

В $\triangle AOB$: $AO = BO = R$ і $\angle AOB = 90^\circ$. Отже, $AB = R\sqrt{2}$. Тоді

$$S_{\triangle AIB} = \frac{1}{2}AB \cdot IK;$$

$$S_{\triangle AIB} = \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{2} \cdot r = \frac{Rr}{\sqrt{2}}.$$

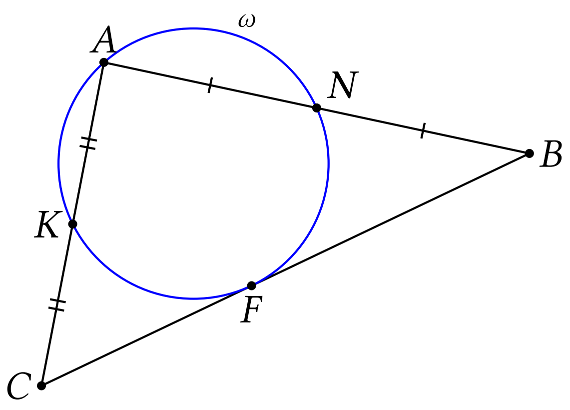
Відповідь. $\frac{Rr}{\sqrt{2}}$.

□

3. Точки K і N — середини сторін AC і AB трикутника ABC. Описане коло ω трикутника AKN дотикається до BC. Знайдіть BC, якщо $AC + AB = n$.

(*Олексій Карлюченко*)

Розв'язання.



Нехай коло ω дотикається до BC в точці F. За теоремою про квадрат дотичної, маємо:

$$CF^2 = CA \cdot CK = \frac{CA^2}{2} \ \left(CK = \frac{1}{2}CA\right);$$

$$BF^2 = BA \cdot BN = \frac{BA^2}{2} \ \left(BN = \frac{1}{2}BA\right).$$

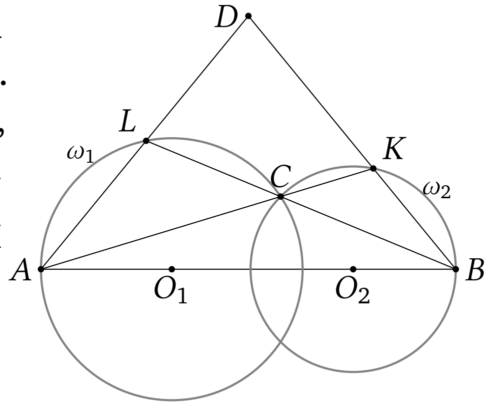
Отже, $CF = \frac{CA}{\sqrt{2}}$ і $BF = \frac{BA}{\sqrt{2}}$. Тоді

$$BC = CF + BF = \frac{CA + BA}{\sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

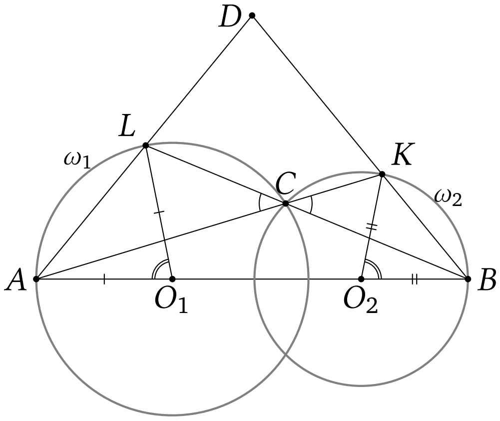
Відповідь. $\frac{n}{\sqrt{2}}$. □

4. Нехай C — одна з двох точок перетину кіл ω_1 і ω_2 з центрами в точках O_1 та O_2 відповідно. Пряма O_1O_2 перетинає кола в точках A і B так, як показано на рисунку. Нехай K — друга точка перетину прямої AC з колом ω_2, L — друга точка перетину прямої BC з колом ω_1. Прямі AL і BK перетинаються в точці D. Доведіть, що $AD = BD$.

(*Юрій Білецький*)



Розв'язання.



Нехай $\angle LCA = \alpha$. Тоді $\angle KCB = \angle LCA = \alpha$ (як вертикальні).

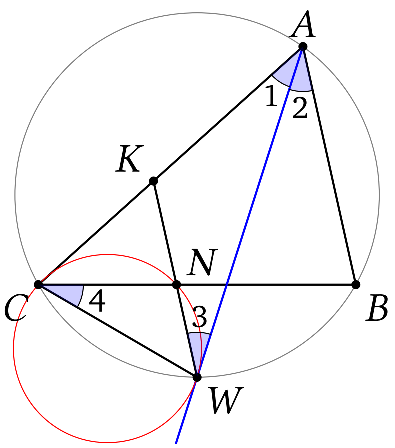
$\angle AO_1L = \angle KO_2B = 2\alpha$ (як центральні кути в колах ω_1 і ω_2).

Трикутники AO_1L і KO_2B рівнобедрені з кутами при вершинах 2α. Тоді $\angle LAO_1 = 90^\circ - \alpha$ і $\angle KBO_2 = 90^\circ - \alpha$. Це означає, що у трикутнику ADB два кути рівні ($\angle DAB = \angle DBA$), тобто він є рівнобедреним, а значить $AD = BD$, що і потрібно було довести. □

5. Бісектрису кута A трикутника ABC продовжено до перетину з описаним колом цього трикутника в точці W. Через W проведено пряму, яка паралельна до сторони AB та перетинає сторони BC і AC — в точках N і K відповідно. Доведіть, що пряма AW є дотичною до описаного кола $\triangle CNW$.

(*Сергій Яковлєв*)

Розв'язання.



Позначимо кути так, як показано на рисунку. Зрозуміло, що $\angle 1 = \angle 2$ (оскільки AW — співпадає з бісектрисою кута A).

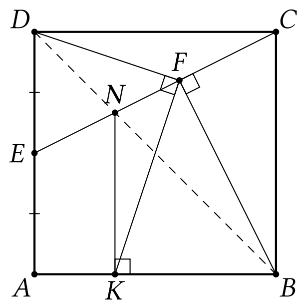
Також: $\angle 3 = \angle 2$ (внутрішні різносторонні кути при $KW \parallel AB$) і $\angle 4 = \angle 2$ (як вписані, що спираються на одну дугу).

Отже, $\angle 4 = \angle 3$. А це і означає, що пряма AW є дотичною для описаного кола трикутника CNW, що і потрібно було довести.

□

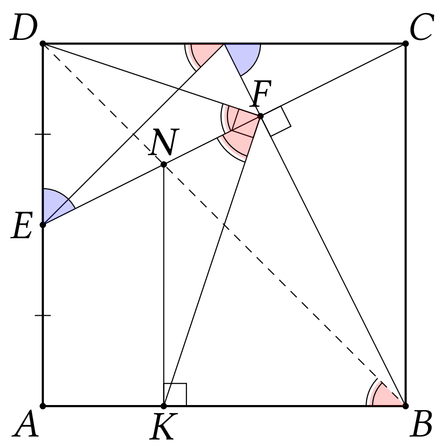
6. Дано квадрат $ABCD$, точка E — середина AD. Нехай F — основа перпендикуляру, опущеного з точки B на EC. Точка K на AB така, що $\angle DFK = 90°$. Точка N на CE така, що $\angle NKB = 90°$. Доведіть, що точка N належить відрізку BD.

(*Матвій Курський*)



Розв'язання.

Нехай M — середина DC. Тоді $\angle BMC = \angle CED$, отже, чотирикутник $EDMF$ — вписаний. Якщо припустити, що EC перетинає BM в точці F', то $\angle MF'E + \angle EDC = 180°$, отже, $\angle MF'E = 90°$, тоді F' співпадає із F.



Оскільки $DM = DE$, то $\angle DFE = \angle DME = 45°$. З останнього $\angle NFK = 90° - \angle DFE = 45°$. Оскільки $\angle NFB + \angle NKB = 180°$, то чотирикутник $NFBK$ є вписаним і $\angle NBK = \angle NFK = 45°$. Отже, BN лежить на діагоналі квадрата BD, що і потрібно було довести.

□