Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

Інститут математики, фізики і технологічної освіти
Кафедра алгебри та методики виконання математики

Перший випуск збірника публікацій студентів напряму підготовки “Математика” за тематичним напрямом

Задача одна - способи розв’язання різні

присвячується 50-річчю кафедри алгебри і методики викладання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Вінниця 2011

УДК 51(07)
ББК 22.1р30
М54

Методичний пошук. Задача одна – способи розв'язання різні // Студентський науково-методичний збірник. Випуск 1. –Вінниця: СамІздат, 2011. – 250 с.

Затверджено до друку
вченою радою Інституту математики,
фізики і технологічної освіти
(протокол № від 16 травня 2011 року)

Відповідальність за автентичність цитат, правильність фактів і посилань несуть автори статей.

Основу першого збірника складають праці студентів різних курсів напряму підготовки «Математика» Інституту математики, фізики і технологічної освіти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, присвячені актуальній проблемі фахової підготовки майбутніх вчителів математики: місце і роль різних способів розв'язання математичних задач у процесі формування знань та умінь учнів з математики.

Для студентів та вчителів напряму підготовки «Математика».

Рецензенти:

О.І. Матяш, кандидат педагогічних наук, доцент
В.А. Ясінський, Заслужений вчитель України, доцент
В.С. Гарвацький, кандидат фізико-математичних наук, доцент

ЗМІСТ

Розділ І. Рівняння. Системи рівнянь

Бондар Марія Миколаївна
студентка 3 курсу, напрям підготовки ”Математика”

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Одним із засобів активізації пізнавальної діяльності учнів є використання різних методів і способів під час розв’язування задач. Психологи вважають, що для учнів корисніше розв’язати одну задачу п’ятьма способами, ніж п’ять задач, але одним способом. Інтерес до відшукання різних способів розв’язування задач сприяє розвитку дослідницьких здібностей, формуванню пізнавальної активності учнів, систематизації знань з різних розділів математики.

Нова програма з математики орієнтує вчителя на формування в учнів умінь розв’язувати задачі різними способами. Учитель повинен прагнути до того, щоб учні усвідомлювали можливість різних способів розв’язання задач і свідомо вибирали найбільш раціональні з відомих їм способів. Зокрема, в процесі вивчення рівнянь та нерівностей, в тому числі ірраціональних, варто теж демонструвати різні способи їх розв’язування. Ірраціональні рівняння у школі вивчаються у 10 класі. Ірраціональними називаються рівняння, в яких змінна знаходиться під знаком кореня, або під знаком операції піднесення до степеня з дробовим показником.

Основними методами розв’язування ірраціональних рівнянь є наступні:

1) метод рівносильних перетворень;
2) метод піднесення обох частин рівняння до одного й того ж степеня;
3) метод введення нової змінної.

Щоб позбавитися від громіздких обчислень в деяких випадках є доцільним застосування графічного методу, використання властивостей функцій, множення обох частин рівняння на вираз, спряжений з однією із його частин. [3]

Розглянемо способи розв’язування ірраціональних рівнянь, наведених у різних підручниках для учнів десятих класів. У підручнику авторів М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.Д.Дубинчук [1] розглядаються такі способи розв’язування ірраціональних рівнянь: піднесення до степеня обох частин рівняння; використання властивостей функцій; відокремлення радикала, а потім піднесення до степеня обох частин рівнянь; заміна змінних; множення рівняння на вираз із змінною (множення на спряжений вираз). Недоліком є відсутність графічного способу та рівносильних перетворень. Перевагою є те, що в підручнику наведена достатня кількість розв’язаних прикладів.

У підручнику автора Г.П.Бевз [2] розглядаються такі способи розв’язування ірраціональних рівнянь: піднесення до степеня обох частин рівнянь; замінна змінних; графічний метод. Перевагою є те, що в підручнику наведено теорему про рівносильні перетворення, хоча не розглядається метод використання властивостей функцій та наведено розв'язання тільки чотирьох прикладів.

Продемонструємо розв'язування ірраціонального рівняння різними способами.

Розв'язати рівняння $2x^3 - x\sqrt{x} = 120$ **.**

Перший спосіб розв'язання

Розв'язання рівняння за допомогою рівносильних перетворень

$$x\sqrt{x} = 2x^3 - 120 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 120 \ge 0; \\ (x\sqrt{x})^2 = (2x^3 - 120)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \ge 60; \\ x^3 = 4x^6 - 480x^3 + 1440; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \ge \sqrt[3]{x}; \\ 4x^6 - 481x^3 + 14400 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \sqrt{60}; \\ x_1 = 4; \\ x_2 = \sqrt[3]{56,25}; \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Відповідь. $x = 4.$

Другий спосіб розв'язання

Розв'язання рівняння за допомогою піднесення до степеня обох частин рівняння

Ліва частина рівняння є різницею двох невід'ємних на області допустимих значень рівняння виразів. Ця різниця може набувати як додатних так і від'ємних значень. Перепишемо дане рівняння у такому вигляді: $x\sqrt{x} = 2x^3 - 120$. Тут обидві частини рівняння є невід'ємними. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Отримаємо $x^3 = 4x^6 - 480x^3 + 14400.$ Введемо заміну $t = x^3$, $t \ge 0$. Маємо рівняння $t = 4t^2 - 480t + 14400$. Розв'язавши останнє рівняння, знаходимо $t_1 = 64$; $t_2 = 56,25$. Перейшовши до заміни, отримаємо $x_1 = 4$, $x_2 = \sqrt[3]{56,25}$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $x_1 = 4$ є коренем, а $x_2 = \sqrt[3]{56,25}$ не є коренем даного рівняння.

Відповідь. $x = 4$.

Третій спосіб розв'язання

Розв'язання рівняння за допомогою заміни змінних.

Перепишемо рівняння у вигляді $2x^3 - \sqrt{x^3} = 120$. Нехай $\sqrt{x^3} = t$, $t \ge 0$, тоді $t^2 = x^3$.

Отримаємо рівняння $2t^2 - t = 120$; $2t^2 - t - 120 = 0$; $t_1 = 64$; $t_2 = -\frac{15}{2}$ – –сторонній корінь.

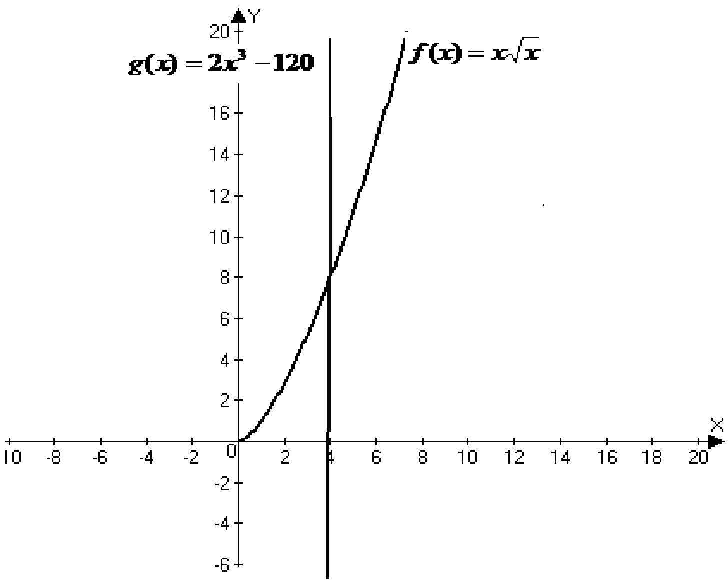
Повертаючись до заміни, матимемо $\sqrt{x^3} = 64 \Leftrightarrow x = 4$.

Відповідь. $x = 4$.

Четвертий спосіб розв'язання

Графічний метод

Розглянемо функції $f(x) = x\sqrt{x}$ і $g(x) = 2x^3 - 120$ та побудуємо їхні графіки в одній системі координат.



Як бачимо з рисунка, ці графіки перетинаються у точці з абсцисою 4. При чому, перевірка показує, що $x = 4$ –корінь заданого рівняння.
Відповідь. $x = 4$.

Порівнявши усі наведені способи розв'язування рівняння, помічаємо, що найраціональнішим способом розв'язання рівняння $x\sqrt{x} = 2x^3 - 120$ є метод введення нової змінної.

Розв'язуючи на уроці задачі різними способами, ми даємо учневі можливість побачити, що, крім запропонованих у підручнику способів, є й інші і що вони посильні для учнів.

На конкретних прикладах можна порівняти різні способи розв'язування задач, побачити переваги або недоліки того чи іншого способу. Зрозуміло, що маючи перед собою різні методи або способи розв'язування конкретної задачі, учень вибере той, яким задача розв'язується простіше. Для цього він повинен прагнути навчитися відразу бачити, що певний спосіб не підходить для розв'язування даної задачі, а інший можна використовувати. Таке вміння формується тільки в процесі розв'язування однієї задачі різними способами. [4]

Література

1. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 кл. загально-освітн. навч. закладів / М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.Д.Дубинчук - К.: Зодіак-Еко, 2006. - 272с.
2. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 кл. загально-освітн. навч. закладів / Г.П.Бевз. - 2-ге вид. – К.: Освіта, 2006. - 255с.
3. Наконечна Л.Й. Рівняння та нерівності: самостійно удосконалюємо знання та вміння: Навчальний посібник для студентів педагогічних університетів, напряму підготовки "Математика"/ Л.Й.Наконечна. - Вінниця, 2008. - 145с.
4. Нак М.М. Використання різних способів розв'язування задач // Математика. - 2003. - Трав. (№17) - С.15-17.

Волощук-Тихоненко Наталія Василівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕКВІВАЛЕНТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Якщо поставлено ціль розв'язати конкретне математичне завдання, то зазвичай вибирається такий метод розв'язання, який найшвидше приводить до цілі. Частіше використовується той метод, яким краще володіє той, хто розв'язує це завдання. В багатьох випадках розробляється ідея, яка першою спала на думку.

При наявності декількох способів розв'язань задачі неважко виділити найкращі з них, оцінити різні методи розв'язування, проілюструвати застосування методів до розв'язування різних типів задач, підвести учнів до міркувань про ефективність методу, виробити та обґрунтувати переконаність стосовно вибору методу розв'язування задачі у кожному конкретному випадку.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\log_2 x^2 = 2$.

Перший спосіб розв'язання

Враховуючи справедливість рівності $\log_2 x^2 = 2\log_2|x|$ при будь-якому $x \neq 0$, маємо $\log_2 x^2 = 2 \Leftrightarrow 2\log_2|x| = 2 \Leftrightarrow \log_2|x| = 1 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2. \end{array}\right.$

Другий спосіб розв'язання

ОДЗ даного рівняння задається умовою $x \neq 0$, тобто $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Використовуючи формулу $\log_2 x^2 = 2\log_2 x (x > 0)$, отримуємо рівняння $2\log_2 x = 2$, звідки отримуємо, що $x = 2$.

Наведене перетворення дозволило розв'язати дане рівняння лише на тій частині ОДЗ, де справедлива формула $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, $(x > 0)$. На множині $x < 0$ рівняння розв'язане не було, тому не можна вважати знайдений корінь єдиним розв'язком даного рівняння.

Розв'яжемо рівняння на множині $x < 0$. Оскільки $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$ й $\log_2 x^2 = \log_2(-x)^2 = 2\log_2(-x)$, то для $x < 0$ отримаємо рівняння $2\log_2(-x) = 2 \Leftrightarrow \log_2(-x) = 1$, звідки знаходимо $x = -2$. Цей корінь задовольняє умову $x < 0$.

На кожній з двох множин ОДЗ виконувалися рівносильні перетворення, тому задане рівняння має два корені $x_1 = 2$ та $x_2 = -2$.

Третій спосіб розв'язання

Рівняння $\log_2 f(x) = \log_2 g(x)$ рівносильне системі

$\left\{\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{array}\right.$ Крім того, $2 = \log_2 4$. Тому

$$\log_2 x^2 = 2 \Leftrightarrow \log_2 x^2 = \log_2 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Таким чином, розв’язками заданого рівняння є $x_1 = 2$ та $x_2 = -2$.

<u>Приклад 2.</u> Розв’язати рівняння $\sqrt{x-2}(x^2-4x+3)=0.$

Перший спосіб розв’язання

Рівняння $\rho^2(x)=0$ є наслідком $\rho(x)=0$; тому $\sqrt{x-2}(x^2-4x+3)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2-4x+3)^2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)^2(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Оскільки дане рівняння розв’язувалося за допомогою переходу до наслідку, то необхідно виконати перевірку. Перевіркою з’ясовуємо, що число 2 і число 3 є розв’язками даного рівняння, а число 1 не є його коренем.

Другий спосіб розв’язання

Враховуючи, що сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ є наслідком рівняння $f(x)g(x)=0,$ маємо $\sqrt{x-2}(x^2-4x+3)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}x=0, \\ x^2-4x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1, \\ x=3. \end{array}\right.$ Виконуючи перевірку, встановлюємо, що $x_1=2$ та $x_2=3$ - корені даного рівняння.

Третій спосіб розв’язання

Знаходимо ОДЗ даного рівняння. ОДЗ задається умовою $x \geq 2.$ Враховуючи, що рівняння $f(x)g(x)=0$ рівносильне системі $\left\{\begin{array}{l} ОДЗ(f(x)g(x)), \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \end{array}\right.$ маємо

$$\sqrt{x-2}(x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq 2, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=0, \\ x^2-4x+3=0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$ Тому розв’язками даного рівняння є числа 2 і 3.

Розгляд різних способів міркувань при розв’язуванні певного завдання потребує постійної уваги вчителя на уроці, адже сприяє узагальненню і поглибленню знань учнів, формуванню вмінь застосовувати способи міркувань, в основі яких лежать різні теоретичні знання, які приводять до одного й того самого результату.

Література

1. Вавилов В. В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства . Справ. пособие / Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Паниченко П. И. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.

Солодюк Олег Васильович, студент 3 курсу
Дончак Ганна Вікторівна, студентка 2 курсу
напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ

Квадратні рівняння згідно програми починають вивчатися у 8 класі. На їх вивчення відводиться 18 годин. За цей час вчитель переважно встигає показати учням розв'язування квадратних рівнянь за допомогою формул знаходження коренів квадратного рівняння, теореми Вієта, розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

Окрім вище зазначених способів існують і інші способи розв'язування квадратних рівнянь, які ми розглянемо нижче.

Перший спосіб розв'язання

Графічне розв'язування квадратного рівняння.

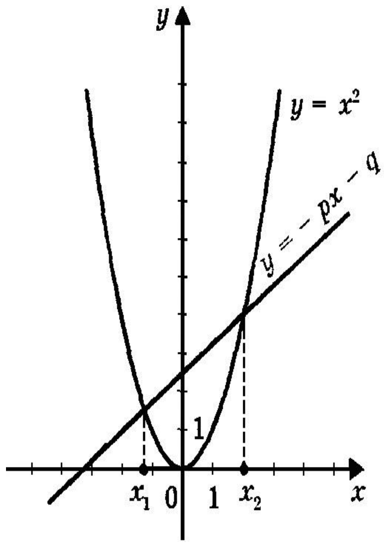


рис. 1

Якщо в рівнянні $x^2+px+q=0$

Перенести другий і третій члени в праву частину, то отримаємо $x^2=-px-q$.

Побудуємо графіки залежності $y=x^2$ і $y=-px-q$

Графік першої залежності – парабола, яка проходить через початок координат. Графік другої залежності – пряма (рис. 1).

Можливі такі випадки:

- пряма і парабола можуть перетинатися в двох точках, абсциси

точок перетину являються коренями квадратного рівняння;

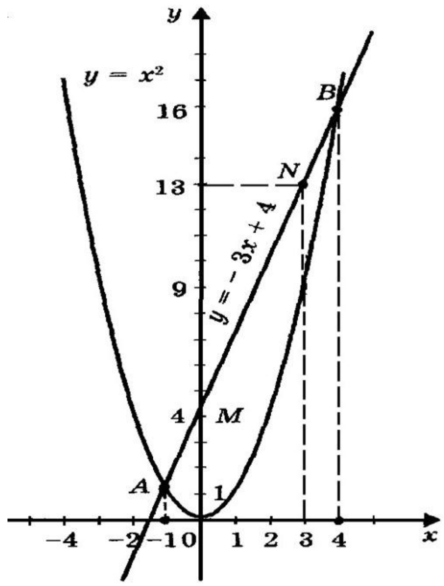


рис.2

- пряма і парабола можуть дотикатися (тільки одна спільна точка), рівняння має один розв'язок;

- пряма і парабола не мають спільних точок, квадратне рівняння не має коренів.

Приклади.

1) Розв'яжемо графічним способом рівняння $x^2-3x-4=0$ (рис.2).

Розв'язання. Запишемо рівняння в вигляді $x^2=3x+4$.

Побудуємо параболу $y=x^2$ і пряму $y=3x+4$. Пряму $y=3x+4$ можна побудувати по двох точках M (0; 4) і N (3; 13). Пряма і парабола перетинаються в двох точках A і B з абсцисами $x_1=-1$ і $x_2=4$. Відповідь: $x_1=-1$; $x_2=4$.

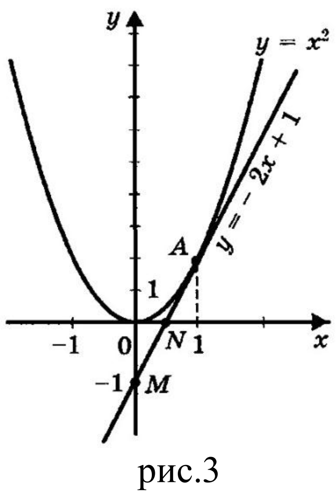


рис.3

2) Розв'яжемо графічним способом рівняння (рис.3) $x^2-2x+1=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння в вигляді $x^2=2x-1$. Побудуємо параболу $y=x^2$ і пряму $y=2x-1$. Пряму $y=2x-1$ побудуємо по двох точках M(0; -1) і N(1/2; 0). Пряма і парабола перетинаються в точці A з абсцисою $x=1$. *Відповідь:* $x=1$.

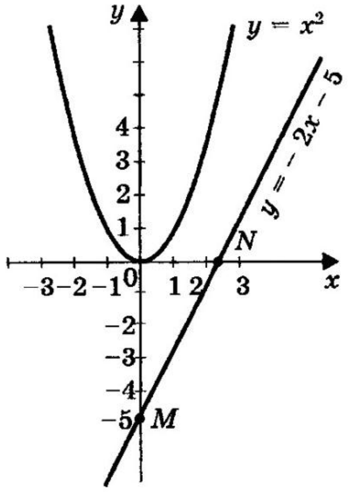


рис.4

3) Розв'яжемо графічним способом рівняння $x^2 - 2x + 5 = 0$ (рис.4).

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $x^2 = 5x - 5$. Побудуємо параболу $y = x^2$ і пряму $y = 2x - 5$. Пряму $y = 2x - 5$ побудуємо по двох точках M(0;-5) і N(2,5;0). Пряма і парабола не мають точок перетину, тобто дане рівняння не має коренів.

Відповідь: Рівняння $x^2 - 2x + 5 = 0$ коренів не має.

Другий спосіб розв'язання

Розв'язування квадратних рівнянь за допомогою циркуля і лінійки.

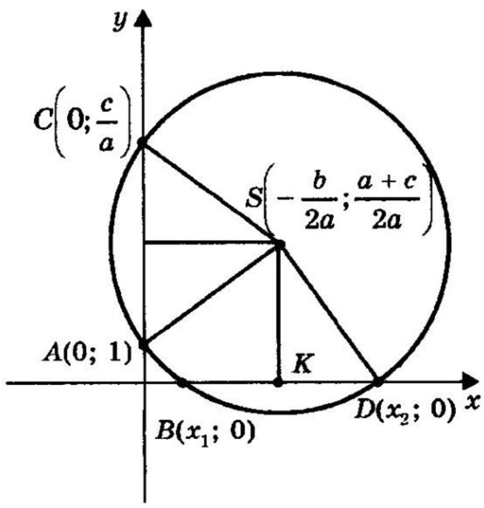


рис. 5

Графічний спосіб розв'язування квадратних рівнянь за допомогою параболи незручний. Якщо будувати параболу по точках, то потрібно багато часу, і при цьому степінь точності отриманих результатів невелика.

Пропоную наступний спосіб знаходження коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ за допомогою циркуля та лінійки (рис. 5).

Припустимо, що шуканий окіл перетинає вісь абсцис в точках B(x_1;0) і D(x_2;0), де x_1 і x_2 - корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ і проходить через точки A(1;0) і C(0; $\frac{c}{a}$) на осі ординат. Тоді за теоремою про січні маємо $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, звідки $OC = OB \cdot \frac{OD}{OA} = \frac{x_1 x_2}{1} = \frac{c}{a}$.

Центр околу значодиться в точці перетину перпендикулярів SF і SK, розміщених в серединах хорд AC і BD, тому

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a}, \quad SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a+c}{2a}. \quad S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$$

Отож:

1) побудуєм точки (центр околу) і A(0;1);
2) проведемо окіл з радіусом SA;
3) абсциси точок перетину даного околу з віссю Ox являються коренями вихідного квадратного рівняння.

При цьому можливі три випадки.

1) Радіус околу більший за ординату центра (AS > SK, чи R > a + $\frac{c}{2a}$), окіл перетинає вісь Ox в двох точках (рис.6,а) $B(x_1;0)$ і $D(x_2;0)$, де x_1 і x_2- корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0.$ $\left(AS < SB, абоR < \frac{a+c}{2a} \right).$

2) Радіус околу рівний ординаті центра $\left(AS = SB, абоR = a + \frac{c}{2a} \right)$, окіл дотикається до осі Ox (рис. 6,б) в точці $B(x_1;0)$, де x_1 - корінь квадратного рівняння.

3) Радіус околу менший ординати центра, то окіл не має спільних точок з віссю абсцис (рис. 6, в), в цьому випадку рівняння не має розв'язків.

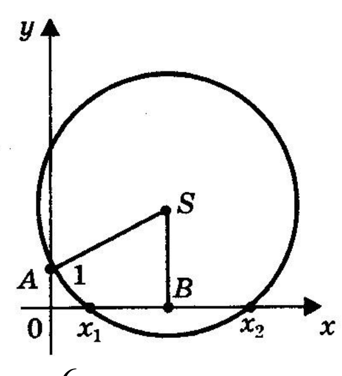


рис.6,а

$AS > SB, R > \frac{a+c}{2a}.$

Два розв'язки x_1 і x_2.

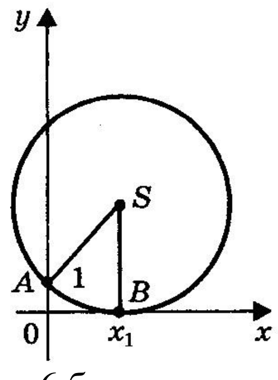


рис.6,б

$AS = SB, R = \frac{a+c}{2a}.$

Один розв'язок x_1.

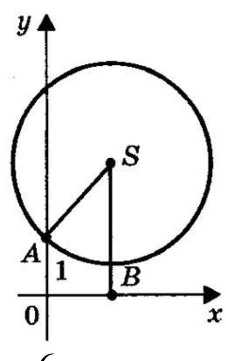


рис.6,в

$AS < SB, R < \frac{a+c}{2a}.$

Немає розв'язків.

Приклад

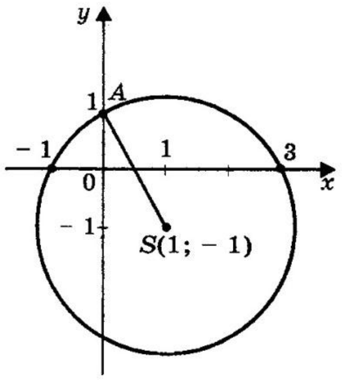


рис. 7

Розв'яжемо рівняння $x^2-2x-3=0$ (рис. 7).

Розв'язання. Визначимо координати точки центра околу за формулами:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot 1}=1,$$

$$y=\frac{a+c}{2a}=\frac{1-3}{2\cdot 1}=-1.$$

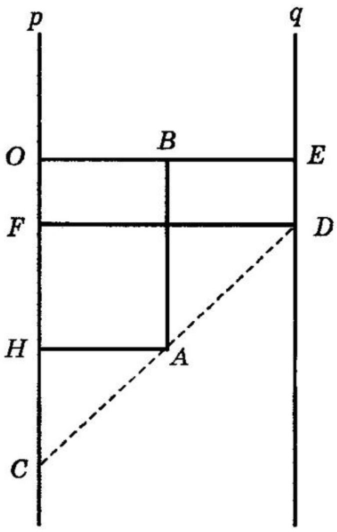
Проведемо окіл радіусом SA, де A(0;1).

Відповідь: $x_1=-1;\ x_2=3.$

Третій спосіб розв'язання

Розв'язання квадратних рівнянь за допомогою номограми.

Це давній і незаслужено забутий спосіб розв'язання квадратних рівнянь [1]. Існує таблиця яка дозволяє, не розв'язуючи квадратного рівняння, за його коефіцієнтами визначати корені рівняння.



Номограма для розв'язування рівнянь виду $z^2+pz+q=0.$

рис.8

Криволінійна шкала номограми побудована за формулами (рис.8):

$$OB=\frac{a}{1+z},\quad AB=\frac{-z^2}{1+z}.$$

Спираючись на те, що OC = p, ED = q, OE = a (все в см.), з подібності трикутників CAH і CDF отримаємо пропорцію $\frac{p-q}{p-AB}=\frac{a}{OB}$, звідки після підстановок і спрощень з'являється рівняння $z^2+pz+q=0,$ причому буква z означає мітку будь-якої точки криволінійної шкали.

Приклади.

1) Для рівняння $z^2-9z+8=0$ номограма дає корені $z_1=8,0$ і $z_2=1,0$ (рис. 9).

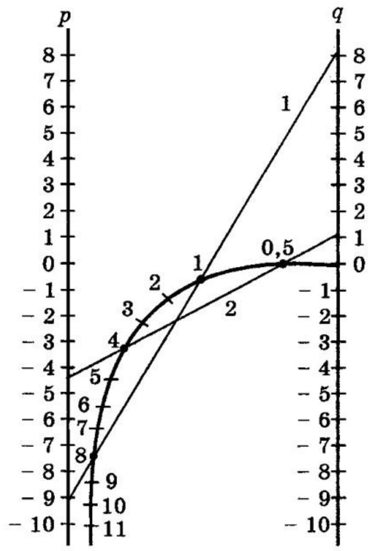


рис. 9

2) Розв'яжемо з допомогою номограми рівняння $2z^2-9z+2=0.$

Поділимо коефіцієнти цього рівняння на 2, отримаємо рівняння $z^2-4,5z+1=0.$ Номограма дає корені $z_1=4$ і $z_2=0,5.$

3) Для рівняння $z^2-25z+66=0$ коефіцієнти p і q виходять за межі шкали, здійснимо підстановку $z=5t,$ отримаємо рівняння $t^2-5t+2,64=0,$ яке розв'язуємо за допомогою номограми і отримаємо $t_1=0,6$ і $t_2=4,4,$ звідки $z_1=5t_1=3,0$ і $z_2=5t_2=22,0.$

Четвертий спосіб розв'язання

Геометричний спосіб розв'язування квадратних рівнянь.

В давнину, коли геометрія була більш розвинутою, ніж алгебра, квадратні рівняння розв'язували не алгебраїчно, а геометрично. Наведемо приклади, які стали знаменитим із «Алгебри» Аль-Хорезмі.

Приклади.

1) Розв'яжемо рівняння $x^2+10x=39.$

В оригіналі ця задача формулюється так: «Квадрат і десять коренів дорівнюють 39» (рис. 10).

Розв'язання. Розглянемо квадрат зі стороною x, на його сторонах будуються прямокутники так, що друга сторона кожного із них дорівнювала 2,5, а отже, площа кожного рівна 2,5x. Отриману фігуру доповнюють потім до нового квадрата ABCD, добудовуючи в кутах чотири рівних квадрата, сторона кожного з яких 2,5, а площа – 6,25.

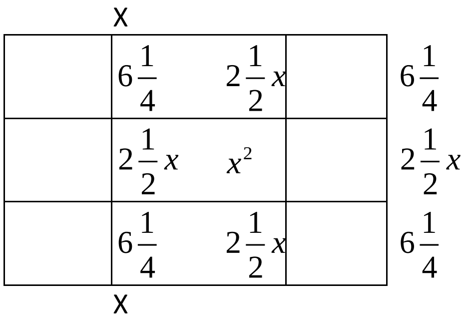


рис. 10

Площа S квадрата ABCD можна представити як суму площ: початкового квадрата x^2, чотирьох прямокутників $(4\cdot 2,5x = 10x)$ і чотирьох прилаштованих квадратів $(6,25\cdot 4 = 25)$, тобто $S = x^2 + 10x + 25.$ Замінивши $x^2 + 10x$ числом 39, отримаємо, що $S = 39 + 25 = 64,$ звідки слідує, що сторона квадрата ABCD, тобто відрізок AB = 8. Для шуканої сторони x початкового квадрата отримаємо

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

2) А от, наприклад, як древні греки розв’язували рівняння $y^2 + 6y - 16 = 0.$

Розв’язання представлено на рис. 16, де $y^2 + 6y = 16,$ або $y^2 + 6x + 9 = 16 + 9.$

Розв’язання. Вираз $y^2 + 6y + 9$ і 16+9 геометрично являють собою один і той самий квадрат, а початкове рівняння $y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ - одне і те ж рівняння. Звідки і отримаємо, що $y + 3 = \pm 5,$ або $y_1 = 2, y_2 = -8$ (рис. 11).

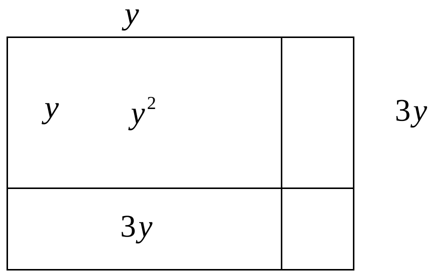


рис. 11

3) Розв’язати геометрично рівняння $y^2 - 6y - 16 = 0.$

Перетворивши рівняння, отримаємо $y^2 - 6y = 16.$

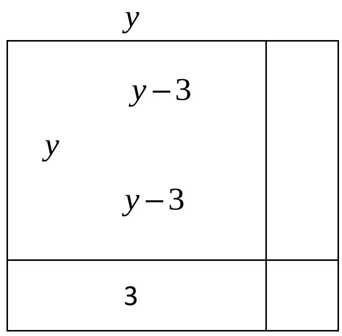


рис.12

На рис.12 знаходимо «зображення» виразу $y^2 - 6y,$ точніше з площі квадрату зі стороною у два рази вичислюється площа квадрата зі стороною, рівною 3. Означає, коли до виразу $y^2 - 6y$ добавити 9, то отримаємо площу квадрата зі стороною $y - 3.$ Замінюючи вираз $y^2 - 6y$ рівним йому числом 16, отримуємо: $(y-3)^2 = 16 + 9,$ точніше $y - 3 = \pm\sqrt{25},$ або $y - 3 = \pm 5,$ де $y_1 = 8$ і $y_2 = -2.$

Як бачимо вище наведені способи не є складними для розуміння навіть для учнів восьмого класу. Тому ми вважаємо що вище наведені способи розв’язування квадратних рівнянь можна пропонувати учням на математичних гуртках або використовувати у позакласній роботі.

Література

1. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы.Изд. 57-е. - М., Просвещение, 1990. С. 83.
2. Окунев А.К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. - М., Просвещение, 1972.
3. Соломник В.С., Милов П.И. Сборник вопросов и задач по математике. Изд. - 4-е, дополн. - М., Высшая школа, 1973.
4. Худобин А.И. Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. Пособие для учителя. Изд. 2-е. - М., Просвещение, 1970.

Наконечний Ярослав Валерійович
студент 2 курсу, напрям підготовки «математика»

ІРРАЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ОДНЕ – СПОСОБІВ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ П’ЯТЬ

Розв’язування задач різними способами сприяє інтенсивному розвитку логічного мислення учнів, дозволяє узагальнювати та систематизувати їхні знання з різних тем, дає можливість здійснювати особистісно орієнтований підхід. Привчати учнів шукати різні способи розв’язування задач потрібно цілеспрямовано та систематично. До кожної теми шкільного курсу математики варто добирати завдання, які можна розв’язати різними способами.

Наведемо приклад розв’язування ірраціонального рівняння п’ятьма різними способами. Основними методами розв’язування ірраціональних рівнянь є такі: рівносильних перетворень, піднесення до степеня обох частин рівняння та заміни змінних. В деяких випадках є більш раціональними графічний метод розв’язування та використання властивостей функцій.

Розв’язати рівняння*:* $\sqrt[3]{x-4}+1=\sqrt{9-x}$.

Перший спосіб розв’язання

Відокремимо кубічний корінь $\sqrt[3]{x-4}=\sqrt{9-x}-1$ та піднесемо обидві частини рівняння до кубу. Отримаємо

$$\tilde{o}-4=(9-x)\sqrt{9-x}-3(9-x)+\sqrt{9-x}+1.$$

Згрупуємо доданки, які мають спільний множник $\sqrt{9-x}$:

$$x-4=\sqrt{9-x}(9-x+3)-27+3x-1,$$

$$x-4+28-3x=\sqrt{9-x}(12-x),$$

$$24-2x=\sqrt{9-x}(12-x).$$

Помічаємо, що в лівій та правій частині рівняння є спільний множник. Винесемо його за дужки та розв’яжемо отримане рівняння.

$$2(12-x)-(12-x)\sqrt{9-x}=0, \quad (12-x)\left(2-\sqrt{9-x}\right)=0.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}12-x=0,\\ \sqrt{9-x}=2;\end{array}\right.\\ 9-x\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=12,\\ 9-x=4;\end{array}\right.\\ x\le 9.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=12,\\ x=5;\end{array}\right.\\ x\le 9.\end{cases}$$

Другий спосіб розв'язання

Відокремимо квадратний корінь $\sqrt{9-x}=\sqrt[3]{x-4}+1$ та піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Отримаємо $9-x=\sqrt[3]{(x-4)^2}+2\sqrt[3]{x-4}+1$.

Нехай $\sqrt[3]{x-4}=t$, тоді $\sqrt[3]{(x-4)^2}=t^2,\ x-4=t^3$. Звідки $x=t^3+4$. $9-\left(t^3+4\right)=t^2+2t+1$.

Розв'язуємо отримане рівняння.

$9-t^3-4-t^2-2t-1=0$, $-t^3-t^2-2t+4=0$,

$t^3+t^2+2t-4=0$, $(t-1)\left(t^2+2t+4\right)=0$, $t=1$.

Повернемося до заміни та отримаємо x. $x=t^3+4=1+4=5$.

Третій спосіб розв'язання

Введемо дві змінних, поклавши $\sqrt{9-x}=v,\ \sqrt[3]{x-4}=u$, звідки $9-x=v^2,\ x-4=u^3,\ u^3+v^2=5$. У результаті одержимо систему рівнянь, яку розв'яжемо методом підстановки:

$$\begin{cases}u+1=v,\\ u^3+v^2=5.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=u+1,\\ u^3+(u+1)^2-5=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=u+1,\\ u^3+u^2+2u-4=0.\end{cases}$$

Оскільки ліва частина одержаного рівняння – многочлен з цілими коефіцієнтами, то його раціональні корені можна спробувати знайти серед дільників вільного члена. Отримаємо $(u-1)\left(u^2+2u+4\right)=0$, тобто рівняння має один дійсний корінь $u=1$. Повернемося до заміни та отримаємо $\sqrt[3]{x-4}=1,\ x=5$.

Четвертий спосіб розв'язання

Розв'яжемо дане рівняння графічно. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $f(x)=\sqrt[3]{x-4}+1$ та $g(x)=\sqrt{9-x}$ (рис 1.).

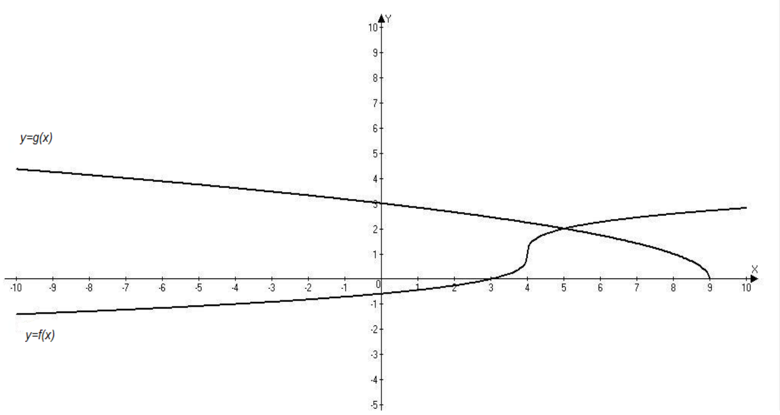


Рис. 1.

Помічаємо, що абсциса точки перетину цих графіків, тобто розв'язок рівняння, $x = 5$.

П'ятий спосіб розв'язання

Використаємо властивості функцій для розв'язування цього рівняння. Звертаємо увагу на те, що вираз, який стоїть у лівій частині рівняння, задає функцію $f(x) = \sqrt[3]{x-4} + 1$, яка зростає на області визначення рівняння, а вираз, який стоїть у правій частині рівняння, – спадну функцію $g(x) = \sqrt{9-x}$. Тобто, дане рівняння не може мати більше одного кореня. Легко помітити, що ним є $x = 5$.

Як бачимо, три перших запропоновані способи розв'язування даного рівняння є порівняно нелегкими. Найбільш красивим та швидким є останній спосіб. Цим способом рівняння розв'язується усно.

Розділ ІІ. Завдання з параметрами

Климчук Світлана Олегівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

Нерівності лежать в основі таких центральних питань курсу математики середньої школи, як вимірювання величин, наближені обчислення, розвиток поняття про число, функціональні залежності, дослідження розв'язків математичних задач тощо.

Як свідчить аналіз різних досліджень, публікацій та педагогічного досвіду вчителів, учні, які добре розв'язують досить складні рівняння, зазнають чималих труднощів при розв'язуванні навіть найпростіших нерівностей.
Природно, виникає необхідність пошуку шляхів підвищення ефективності навчання учнів розв'язувати нерівності.
Проблемі навчання учнів розв'язувати нерівності присвячені роботи багатьох вчителів та методистів. Серед найбільш методично вдалих фахових публікацій виділимо статті: Н. Варущик та К. Малюгіна, О. Воронного та Л. Кукси, І. Давиденко, Н. Крамарьової, Є. Неліна, О. Перехейди, Т. Рекрутняк, В. Шавальової та ін.

Нерівності традиційно широко представлені у завданнях державної підсумкової атестації з математики та у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання з математики.
Згідно програми зовнішнього незалежного оцінювання з математики, його учасники повинні розв'язувати нерівності та їх системи, текстові задачі складанням нерівностей та їх систем. На виявлення рівня засвоєння змістової лінії «Рівняння, нерівності та їх системи» відведено 20–25% завдань.

Наш аналіз свідчить, що серед таких завдань обов'язково є завдання на розв'язування рівнянь, нерівностей з параметрами, або їх систем. Працюючи із нерівностями з параметрами учні часто відчувають проблеми з пошуком розв’язання. З метою усунення труднощів, вчителям варто сформувати уявлення учнів про різні способи розв’язування однієї нерівності. Розглянемо, наприклад, розв’язування нерівності з параметрами різними способами.

Задача. Розв’язати нерівність залежно від параметра а

$$x - \sqrt{a - 2x} < 0$$

Перший спосіб розв’язання (графічний)

$$x < \sqrt{a - 2x}$$

Розглянемо на координатній площині *xOy* графіки функцій $y = x$ та $y = \sqrt{a - 2x}$ (рис. 1).

Графіком функції $y = x$ є бісектриса І та ІІІ координатних кутів. Графік функції $y = \sqrt{a - 2x}$ отримуємо методом геометричних перетворень:

$y_1 = \sqrt{2x}$, $y_2 = \sqrt{-2x}$, $y = \sqrt{-2x + a}$. Останній графік отримуємо з попереднього паралельним перенесенням його вздовж осі *Ox* на $\frac{a}{2}$ одиниць вправо, якщо $a > 0$, і на $\frac{a}{2}$ одиниць вліво, якщо $a < 0$

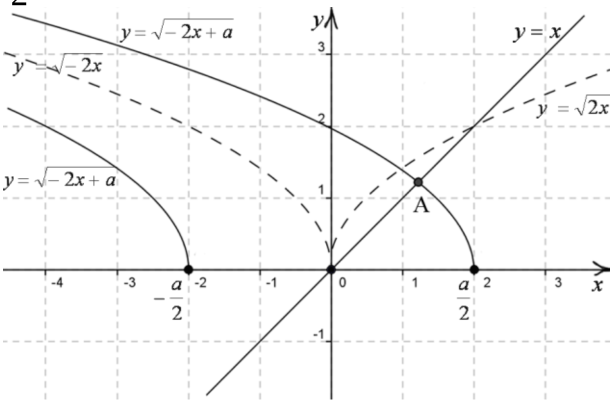


Рис. 1

Розв’язками даної нерівності є значення *x,* при яких для кожного фіксованого значення параметра *a* графік функції $y = \sqrt{-2x + a}$ розташований вище від графіка функції $y = x$. Абсцису точки *A* знайдемо з рівняння

$$\sqrt{a - 2x} = x$$

Дане рівняння рівносильне такій системі:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a - 2x = x^2; \end{cases}$$

Випишемо і розв’яжемо друге рівняння системи.

$a - 2x = x^2$,

$x^2 + 2x - a = 0$

$D = 4 + 4a = 4(1 + a)$, $\sqrt{D} = 2\sqrt{1 + a}$

Квадратне рівняння має розв’язки при $D \geq 0$, тобто $1 + a \geq 0$, тобто при $a \geq -1$.

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{1 + a}}{2} = -1 - \sqrt{1 + a},$$

$$x_2=\frac{-2+2\sqrt{1+a}}{2}=-1+\sqrt{1+a}\,.$$

Враховуючи першу умову системи, тобто $x\ge 0$, маємо, що її розв'язком є число $x=-1+\sqrt{1+a}$.

Очевидно, при $a\le 0$, розв'язками нерівності є $x\in\left(-\infty;\frac{a}{2}\right)$; при $a>0$ $x\in\left(-\infty;-1+\sqrt{1+a}\right)$.

Другий спосіб розв'язання (графічний)

Перепишемо нерівність у вигляді $\sqrt{a-2x}>x$. Вона рівносильна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases}x<0,\\ a-2x\ge 0;\end{cases}\qquad \text{або} \qquad \begin{cases}x>0,\\ a-2x>x^2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<0,\\ a\ge 2x;\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x>0,\\ a>x^2+2x.\end{cases}$$

На координатній площині *xOa* побудуємо множину точок, що задовольняє кожну систему нерівностей (рис. 2)

1. Нерівності $x<0$ відповідають друга та третя чверті координатної площини. Нерівності $a\ge 2x$ відповідають всі ті точки площини, які знаходяться вище прямої $a=2x$. Таким чином, перетин двох вказаних областей відповідає першій системі нерівностей.

2. Побудуємо графік функції $a=x^2+2x$. Легко бачити, що дане рівняння рівносильне рівнянню $a=(x+1)^2-1$. Графік шуканої функції отримуємо методом геометричних перетворень: $y_1=x^2$; $y_2=(x+1)^2$ – паралельне перенесення попереднього графіка вздовж осі *Ox* на одиницю вліво; $y=(x+1)^2-1$ – отримується з попереднього паралельним перенесенням вздовж осі *Oy* на одиницю вниз. Нерівності $a>x^2+2x$ відповідають всі точки площини, які знаходяться «всередині» параболи, а нерівності $x>0$ – перша і четверта координатні чверті. Таким чином, перетин двох вказаних областей відповідає другій системі нерівностей.

Із наведеного нижче рисунка випливає, що при $a<0$, (із рівняння $a=2x$ випливає, що $x=\frac{a}{2}$) $x\in\left(-\infty;\frac{a}{2}\right)$; при $a=0$ $x\in(-\infty;0)$; при $a>0$ $x\in(-\infty;x_1)$, де x_1 знайдемо із системи

$$\begin{cases}x^2+2x=a,\\ x>0\end{cases}$$

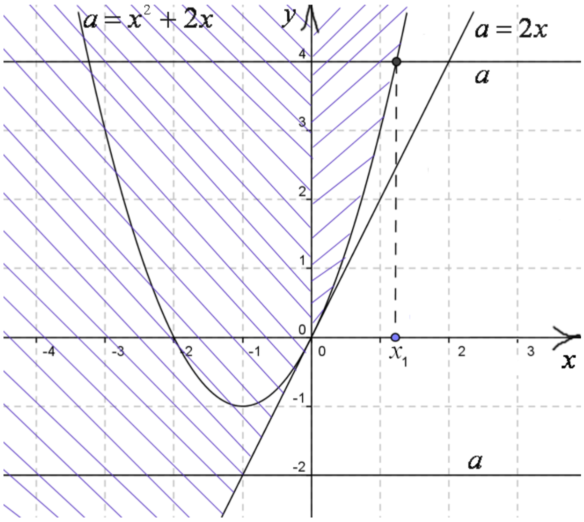


Рис. 2

Як було показано вище, розв'язком даної системи є число $x = -1 + \sqrt{1+a}$.

Таким чином, при $a \le 0$, розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \frac{a}{2}\right)$; при $a > 0$ $x \in \left(-\infty; -1 + \sqrt{1+a}\right)$.

Третій спосіб розв'язання (аналітичний)

$$\sqrt{a - 2x} > x$$

Дана нерівність рівносильна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} x < 0, \\ a - 2x \ge 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x > 0, \\ a - 2x > x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \le \frac{a}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + 2x - a < 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо першу систему нерівностей, залежно від параметра *a:*

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \le \frac{a}{2}; \end{cases}$$

При $a \ge 0$ розв'язком системи є значення, для яких $x < 0$; при $a < 0$ – $x \le \frac{a}{2}$

Розв'яжемо другу систему нерівностей*:*

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + 2x - a < 0. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язки нерівності $x^2 + 2x - a < 0$. Корені відповідного рівняння $x_1 = -1 - \sqrt{1+a}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1+a}$ існують при $a \ge -1$.

Залежно від значень параметра *a* знайдемо розв'язки системи:

1). Нехай $a > 0$, тоді $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Отже, розв'язком системи є інтервал $x \in (0; x_2)$, див. рис. 3.

2). Нехай $-1 \le a < 0$, тоді $x_1 < 0$, $x_2 < 0$. Отже, система розв'язків немає, див. рис. 4.

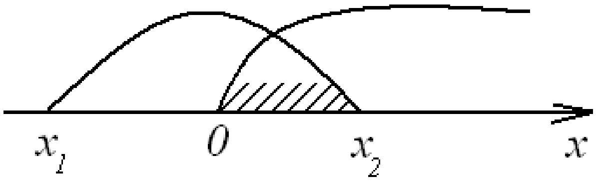


Рис. 3

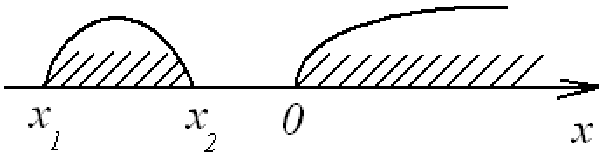


Рис. 4

При $a = 0$ нерівність (1) набуває вигляду $x - \sqrt{-2x} < 0$, звідки $x < 0$.

Об'єднуючи розв'язки двох систем, дістанемо розв'язки вихідної нерівності. Тобто, при $a \le 0$, розв'язками нерівності є $x \in \left(-\infty; \dfrac{a}{2}\right)$; при $a > 0$ $x \in \left(-\infty; -1 + \sqrt{1+a}\right)$.

Відповідь. При $a \le 0$, $x \in \left(-\infty; \dfrac{a}{2}\right)$; при $a > 0$ $x \in \left(-\infty; -1 + \sqrt{1+a}\right)$.

Отже, навчання учнів розв'язувати нерівності з параметрами різними способами сприяє узагальненню і систематизації учнів не лише з окремої теми «Нерівності», а й із значної частини курсу шкільної алгебри. Виконуючи таку роботу учні звертаються до вже засвоєних ними знань, зокрема, розв'язують квадратні рівняння та нерівності, ірраціональні рівняння, системи нерівностей, пригадують властивості функцій та їх графіки. Таким чином, у учнів формуються міцні та системні знання. Вони бачать, що всі навчальні теми тісно пов'язані між собою і недостатність знань однієї з них може стати перешкодою для успішного засвоєння іншої. Розуміння учнями тісних внутрішньо-предметних зв'язків може значно підвищити мотивацію до навчання, і, як наслідок, підвищити ефективність засвоєння відповідного навчального матеріалу.

Література

1. Параметри //Математика в школах України (журнал і книжковий додаток) – 2008. – №16-18.

Мельниченко Галина Сергіївна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»
напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Квадратним коренем з числа a називається число, квадрат якого дорівнює a. *Арифметичним квадратним коренем* із числа a називається невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a. Позначають: $\sqrt{a}$.

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x - змінна, a, b, c - деякі числа, причому $a \neq 0$, називається *квадратним*.

Формула коренів квадратного рівняння має вигляд:

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Вираз b^2-4ac називається дискримінантом квадратного рівняння і позначається буквою *D*.

Вираз ax^2+bx+c, де x - незалежна змінна, a, b, c - дійсні числа, причому $a \neq 0$, називається *тричленом другого степеня*, або *квадратним тричленом.*

Квадратний тричлен називають також квадратичною функцією і записують у звичайному вигляді:

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Область визначення квадратичної функції – всі дійсні числа.

Значення x при яких квадратичний тричлен перетворюється на нуль, називають *коренями тричлена*.

Якщо x_1, x_2 - корені квадратного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$, то для будь-якого значення x має місце формула:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Задача. В залежності від значення параметра а розв'яжіть рівняння $\sqrt{a-x}=2-x$.

Перший спосіб розв'язання

Запишемо систему, рівносильну даному рівнянню:

$$\begin{cases} a-x=(2-x)^2, \\ 2-x \geq 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2-3x-a+4=0, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Дискримінант першого рівняння системи *D=4a-7*, звідки випливає, що при $a<\frac{7}{4}$ розв'язків немає, а при $a=\frac{7}{4}$ дане рівняння має лише один розв'язок $x=\frac{3}{2}$. Якщо $a>\frac{7}{4}$, то перше рівняння системи має два корені $x_1=\frac{3}{2}-\sqrt{a-\frac{7}{4}}$ і $x_2=\frac{3}{2}+\sqrt{a-\frac{7}{4}}$.

Очевидно, $x_1<x_2$, відповідно, для виконання іншої нерівності системи $x \leq 2$ для обох коренів достатньо сумісності системи

$$\begin{cases} a > \frac{7}{4}, \\ \frac{3}{2} + \sqrt{a - \frac{7}{4}} \le 2. \end{cases}$$

Розв'язком останньої системи є інтервал $\frac{7}{4} < a \le 2$, при якому вихідне рівняння має 2 корені x_1 і x_2. Таким чином, вихідне рівняння буде мати один розв'язок, якщо виявиться, що $x_1 \le 2$, а $x_2 > 2$, тобто сумісна система

$$\begin{cases} a > \frac{7}{4}, \\ \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}} \le 2, \\ \frac{3}{2} + \sqrt{a - \frac{7}{4}} > 2. \end{cases}$$

Звідки, $a > 2$.

*Відповідь***.** Якщо $a < \frac{7}{4}$: розв'язків немає;

якщо $a = \frac{7}{4}$: один розв'язок $x = \frac{3}{2}$;

якщо $\frac{7}{4} < a \le 2$: два розв'язки $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{a - \frac{7}{4}}$;

якщо $a > 2$: один розв'язок $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$.

Другий спосіб розв'язання

Розглянемо систему, рівносильну вихідному рівнянню

$$\begin{cases} x^2 - 3x - a + 4 = 0, \\ x \le 2. \end{cases}$$

Виходячи із геометричної інтерпретації квадратного тричлена, отримаємо, що система буде мати 2 розв'язки, якщо обидва корені квадратного тричлена $f(x) = x^2 - 3x - a + 4$ будуть менші або рівні 2. Вітки параболи направлені вверх, вершина знаходиться в точці $x = \frac{3}{2} < 2$, тому достатньо виконання умов:

$$\begin{cases} D = 4a - 7 > 0 \\ f(2) = 2 - a \succ 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (\frac{7}{4}; 2].$$

При *D=0* рівняння має один корінь $x=\frac{3}{2}$. Якщо *f(2)<0* , то вимогам $x \le 2$ буде задовольняти лише один корінь (рис.1). Таким чином, при $a<2$ залишиться тільки менший корінь $x=\frac{3}{2}-\sqrt{a-\frac{7}{4}}$.

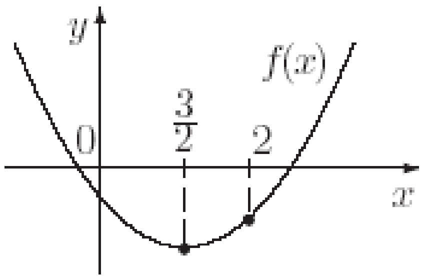


Рис.1

Третій спосіб розв'язання

Розглянемо графіки функцій $y_1=\sqrt{a-1}$ і $y_2=2-x$, які задають відповідні ліву і праву частину рівняння. Графік y_1 представляє собою верхню частину параболи з вітками, направленими вліво, і вершиною в точці $x=a(x\le a)$. Абсциси точок перетину даних графіків будуть розв'язками рівняння. З рис.2 випливає, що при $a<\frac{7}{4}$ ($D<0$) графіки не перетинаються.

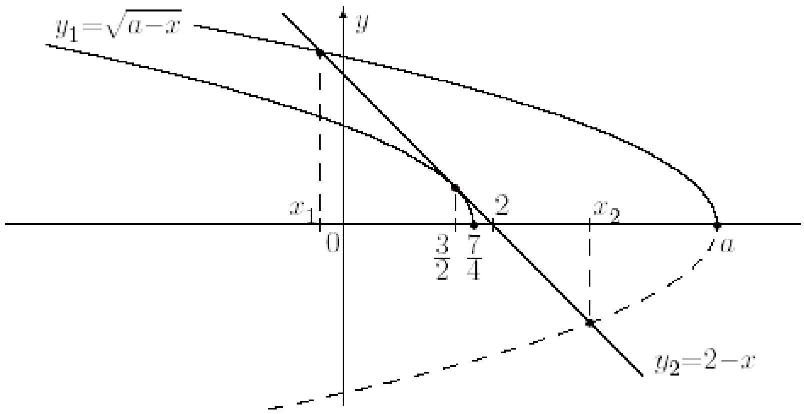


Рис.2

При $a>2$ пряма y_2 перетинає параболу тільки в одній точці, яка відповідає кореню $x=\frac{3}{2}-\sqrt{a-\frac{7}{4}}$.

*Відповідь***.** Якщо $a<\frac{7}{4}$: розв'язків немає;

якщо $a=\frac{7}{4}$: один розв'язок $x=\frac{3}{2}$;

якщо $\frac{7}{4} < a \le 2$: два розв'язки $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{a - \frac{7}{4}}$;

якщо $a > 2$: один розв'язок $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$.

Література

1. Е.А.Ефимов, Л.В. Коломиец. Задачи з параметрами: учебное пособие для факльтета довузовской подготовки СГАУ/ Самарський гос. аэрокосмический университет. – Самара. – 2006. – 64с.
2. Великий довідник школяра: 5-11 класи. – Харків: ВД «Школа», 2004. – 992с.
3. Збірник задач з математики для вступників до вузів: Пер. з рос./ В.К.Єгерев, В.В.Зайцев та ін.; за ред. М.І.Сканаві. – К.: «Онікс», 2005. – 608с.

Швабська Ольга Сергіївна

студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

«Математик, так само, як художник чи поет, створює візерунки. І якщо ці візерунки є більш стійкими, то лише тому, що вони складаються з ідей»

(Г. Х. Харді).

Великий вчений розумів, що кожна людина є особливою, має своє індивідуальне мислення і зрозуміло, що у кожної є свої ідеї щодо розв'язання будь-якого завдання.

У дітей в школі варто розвивати логічне мислення, аби вони не боялись висловлювати свою думку, шукали якомога більше різних підходів до пошуку розв'язання однієї задачі. Завдання, які містять параметри спеціально вивчають у школах поглибленого вивчення математики або на математичних факультативах, курсах за вибором.

Розглянемо на прикладі можливості розгляду кількох способів розв'язання рівняння з параметрами:

В залежності від значення параметра а розв'язати рівняння $\sqrt{a-x}=2-x$.[1]

Перший спосіб розв'язання

Запишемо систему, рівносильну початковому рівнянню. Для цього піднесемо обидві частини данного рівняння до квадрату, не забувши про додаткові умови:

$$\begin{cases} a-x=(2-x)^2, \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2-3x-a+4=0, \\ x \le 2 \end{cases}$$

Дискримінант першого рівняння системи D = 4a – 7, звідси слідує , що при a < $\frac{7}{4}$, $D<0$, а це означає, що рівняння розв’язків не має, а при a = $\frac{7}{4}$ початкове рівняння має єдиний розв’язок x = $\frac{3}{2}$.

Якщо a >$\frac{7}{4}$, то перше рівняння системи має два корені:

$$x_1=\frac{3}{2}-\sqrt{a-\frac{7}{4}} \text{ і } x_2=\frac{3}{2}+\sqrt{a-\frac{7}{4}}.$$

Очевидно, що $x_1<x_2$, а звідси випливає, що для виконання другої нерівності системи $x\le 2$ для обох коренів достатньо сумісності системи

$$\begin{cases} a>\frac{7}{4}, \\ \frac{3}{2}+\sqrt{a-\frac{7}{4}}\le 2. \end{cases}$$

Розв’язком останньої системи є інтервал $\frac{7}{4}<a\le 2$, при якому початкове рівняння має два корені x_1 і x_2. Отже, початкове рівняння буде мати тільки один розв’язок, якщо з’ясується, що $x_1\le 2$, а $x_2>2$, тобто сумісною є система

$$\begin{cases} a>\frac{7}{4}, \\ \frac{3}{2}-\sqrt{a-\frac{7}{4}}\le 2, \\ \frac{3}{2}+\sqrt{a-\frac{7}{4}}>2, \end{cases} \quad \text{звідки } a>2.$$

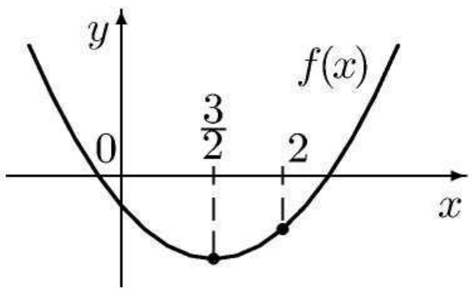
Відповідь. Якщо $a<\frac{7}{4}$: розв’язків не має; якщо $a=\frac{7}{4}$: один розв’язок x = $\frac{3}{2}$; якщо $\frac{7}{4}$<ŕ ≤ 2 : два розв’язки $x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{a-\frac{7}{4}}$; якщо ŕ>2: один розв’язок $x=\frac{3}{2}-\sqrt{a-\frac{7}{4}}$.

Другий спосіб розв’язання

Розглянемо систему, рівносильну початковому рівнянню

$$\begin{cases} x^2-3x-a+4=0, \\ x\le 2. \end{cases}$$

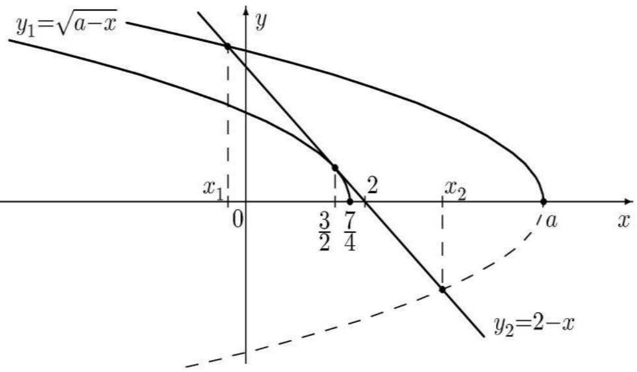
Виходячи із геометричної інтерпретації квадратного тричлена, отримаємо, що система буде мати два розв’язки, якщо обидва корені квадратного тричлена $f(x)=x^2-3x-a+4$ будуть меншими, або рівними. Вітки параболи направлені вгору, вершина знаходиться в точці x = $\frac{3}{2} < 2$, тому достатньо, щоб виконувались такі умови: $\begin{cases} D = 4a - 7 \ge 0, \\ f(2) = 2 - a \ge 0 \end{cases}$ => $a \in \left(\frac{7}{4}; 2\right]$.



При $D = 0$ рівняння має один розв'язок $x = \frac{3}{2}$. Якщо ж $f(2) < 0$, то умову $x \le 2$ буде задовольняти лише один корінь. (див.мал.)

Таким чином, при $a < 2$ залишається лише менший корінь $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$.

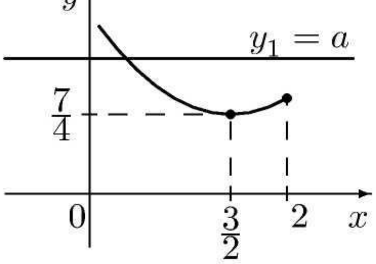
Третій спосіб розв'язання



Розглянемо графіки функцій $y_1 = \sqrt{a - x}$ та $y_2 = 2 - x$, задані відповідно лівою і правою частинами рівняння. Графік y_1 представляє собою верхню частину параболи з вітками, направленими вліво, і вершиною в точці $x = a (x \le a)$. Абсциси точок перетину цих графіків і будуть розв'язками рівняння. З мал. слідує, що при $a < \frac{7}{4}$ $(D < 0)$ графіки не перетинаються.

При $a > 2$ пряма y_2 перетинає полупараболу лише в одній точці, яка відповідає меншому кореню $x = \frac{3}{2} - \sqrt{a - \frac{7}{4}}$.

Четвертий спосіб розв'язання



Перепишемо початкове рівняння у вигляді: $\begin{cases} a = x^2 - 3x + 4, \\ x \le 2. \end{cases}$

Побудуємо на одному малюнку графіки функцій $y_1 = a$ (пряма, паралельна осі Ox) і $y_2 = x^2 - 3x + 4$ (парабола) при умові $x \le 2$.

Перемістивши на малюнку пряму $y_1 = a$, приходимо до висновків, які ми отримали при розв'язуванні іншими способами.

На уроці математики варто віднаходити час, щоб формувати уявлення учнів про розв'язування систем рівнянь з параметрами. Варто розглядати усі можливі способи розв'язання таких систем, оскільки це сприяє розвитку логічного мислення в учнів, розвитку їх пошукових та дослідницьких навичок.

Література

1. Задачи с параметрами: Учебное пособие для факультета довузовской подготовки СГАУ / Самарский гос. аэрокосмический университет.Сост. Е.А.Ефимов, Л.В.Коломиец. Самара, 2006, с. 36-38.

Розділ III. Тригонометрія

Білик Юлія Петрівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ НЕРІВНОСТІ

З тригонометричними функціями та їх властивостями учні знайомляться у курсі алгебри і початків аналізу у 2 семестрі 10-го класу, тоді ж і розв'язують найпростіші тригонометричні рівняння і нерівності. У 1-му семестрі 11-го класу вивчається похідна функції і її застосування до розв'язування різних видів геометричних і алгебраїчних задач, в тому числі і до доведення нерівностей. У класах математичного, фізичного та фізико-математичного профілів учням пропонуються складніші, порівняно з іншими класами, завдання. Проте задачу, розв'язання якої приведено нижче можна запропонувати сильним учням на математичному гуртку або як матеріал для підготовки до олімпіади. Варто показати різні способи доведення нерівності. Під час вивчення вказаних тем вчителі досить рідко демонструють учням способи розв'язування задачі з використанням властивостей функцій і з застосуванням похідних цих функцій. В деяких задачах це значно спрощує усвідомлення учнями змісту задачі і, відповідно, пошуку різних способів її розв'язання, сприяє поглибленню розуміння поняття функції та її властивостей. Завдяки опорі на знання з тригонометрії і набуті уявлення про властивості функцій $y=\cos x$ та $y=\sin x$, в учнів покращується засвоєння матеріалу, розвиток логічного мислення та уяви. Так після вивчення теми «Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування» можна запропонувати учням і другий спосіб доведення наступної нерівності.

<u>*Задача.*</u> Доведіть, що для всіх $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ при $n>m$, де n,m - натуральні, справедлива нерівність

$$2\left|\sin^n x-\cos^n x\right|\le 3\left|\sin^m x-\cos^m x\right|.$$

Пропонується два способи розв'язання.

Перший спосіб розв'язання

Достатньо показати, що нерівність при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ (при $x = \frac{\pi}{4}$ воно очевидне, при $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ отримується заміною $y = \frac{\pi}{2} - x$). При $k \geq 2$ маємо

$$\cos^k x - \sin^k x = \left(\cos^k x - \sin^k x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) =$$
$$= \left(\cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x\right) + \sin^2 x \cos^2 x\left(\cos^{k-2} x - \sin^{k-2} x\right) \geq$$
$$\geq \cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x.$$

Тому нерівність зводиться до випадку $n = m + 1$, за винятком $n = 3$. Крім того,

$$\frac{\cos^n x - \sin^n x}{\cos^{n-1} x - \sin^{n-1} x} \leq \frac{\cos^k x - \sin^k x}{\cos^{k-1} x - \sin^{k-1} x}$$

При $n \geq k > 1$. Дійсно, звівши до спільного знаменника, отримаємо нерівність

$$\sin^{k-1} x \cos^{k-1} x\left(\cos^{n-k} x - \sin^{n-k} x\right)\left(\cos x - \sin x\right) \geq 0,$$

Яка є очевидною. Том нерівність зводиться до випадків $n = 3$, $m = 1$, і $n = 2$, $m = 1$. Доведемо їх:

$$\cos^3 x - \sin^3 x = \left(\cos x - \sin x\right)\left(1 + \sin x \cos x\right) \leq \frac{3}{2}\left(\cos x - \sin x\right),$$

Оскільки $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x \leq \frac{1}{2}$;

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \left(\cos x - \sin x\right)\left(\cos x + \sin x\right) \leq \frac{3}{2}\left(\cos x - \sin x\right),$$

або

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{3}{2}.$$

Другий спосіб розв'язання

Знову ж таки, достатньо довести нерівність для $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Розглянемо $f(y) = \cos^y x - \sin^y x$, де $0 < x < \frac{\pi}{4}$, $y \geq 0$. Маємо: $f(0) = 0$, $f(y) > 0$, при $y > 0$, $f(y) \to 0$ при $y \to \infty$. Далі,

$$f'(y) = \cos^y x \ln\cos x - \sin^y x \ln\sin x = \cos^y x\left(\ln\cos x - tg^y x \ln\sin x\right),$$

тому $f'(y)$ має єдиний корінь при $y > 0$, так як функція $g(y) = tg^y x$ монотонна. З $f(2) = f(2)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = f(4)$ слідує, що $f'(2) > 0$, $f'(4) < 0$. Звідси при $n > m \geq 3$ отримуємо нерівність

$$\left|\sin^n x - \cos^n x\right| \leq \left|\sin^m x - \cos^m x\right|.$$

Якщо ж $m \le 2$, то зі співвідношень $f(1) \le f(2) \le f(3) \ge f(n)$ при $n > 3$ видно, що достатньо довести нерівність $3f(1) \ge 2f(3)$, яка слідує з $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \le \frac{1}{2}$, оскільки $f(3) = f(1)(1 + \sin x \cos x) \le \frac{3}{2} f(1)$.

Після розгляду доведення даної нерівності кількома способами в учнів мають формуватися уявлення про різні способи доведення тригонометричних нерівностей, в тому числі і на основі застосування властивостей тригонометричних функцій та їх похідних.

Література

1. Абрамчук В.С., Тютюн Л.А., Шунда Н.М. Посібник з шкільного курсу математики. – К.: Техніка, 2008. – 736 с.
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. —М.:МЦНМО, 2007. —472 с.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с. : іл.
4. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу:Підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. Закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С.Дубинчук. – К.: Зодіаак-ЕКО, 1998. – 608с.

Бондарчук Оксана Анатоліївна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ 8 РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

За навчальною програмою з математики для академічного рівня тригонометричні рівняння вивчаються в 10 класі і на їх вивчення виділяється 16 годин. Зміст навчального матеріалу теми «Тригонометричні рівняння і нерівності» містить основні способи розв’язування тригонометричних рівнянь, зокрема, спосіб введення нової змінної, спосіб розкладання на множники, спосіб зведення до однієї тригонометричної змінної [3]. Оскільки в старшій школі найчастіше використовується шкільна лекція, то у методичній літературі описано подання основних способів розв’язання тригонометричних рівнянь у формі лекції на прикладі одного рівняння, яке розв’язується багатьма способами (Слєпкань З.І., Дубинчук О.С., Параскевич С. та інші). Так З.І.Слєпкань та О.С.Дубинчук [2] розглядають спосіб зведення до однієї тригонометричної функції, спосіб зведення рівняння до однорідного відносно синуса і косинуса, спосіб введення допоміжного аргументу**,** спосіб заміни $\sin x$ та $\cos x$ на тангенс половинного кута, спосіб розкладання на множники, спосіб перетворення різниці(суми) тригонометричних функцій у добуток, спосіб піднесення обох частин рівняння до квадрату, графічний спосіб на прикладі розв’язування рівняння $\sin x+\cos x=0$. Слід звернути увагу, що автори обґрунтовують доцільність кожного з них. Параскевич С. на прикладі рівняння $\sin x-\cos x=1$ показала 14 способів розв’язування тригонометричних рівнянь, зокрема, спосіб зведення рівняння до однієї тригонометричної функції, спосіб зведення рівняння до однорідного відносно синуса і косинуса, спосіб введення допоміжного аргументу**,** спосіб заміни $\sin x$ та $\cos x$ на тангенс половинного кута, спосіб розкладання на множники, спосіб перетворення різниці(суми) тригонометричних функцій у добуток, спосіб піднесення обох частин рівняння до квадрату, графічний спосіб [1]. Уроки-лекції такого типу не тільки сприяють закріпленню знань учнів з теми, а й надають можливість творчо підходити до розв’язування відповідних завдань, формують навички дослідницької роботи. Учні мають можливість обрати саме той спосіб розв’язування, який їм найбільше імпонує. Ми пропонуємо під час вивчення даної теми різними способами розв’язати рівняння $\sin x+\cos x=1$.

Перший спосіб розв’язання

Спосіб зведення до однієї тригонометричної функції

$$\sin x+\cos x=1$$

Оскільки $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, то

$\sin x=1-\cos x,$

$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}=1-\cos x.$

Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрата і отримаємо:

$1-\cos^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x,$

$-2\cos^2 x+2\cos x=0,$

$\cos x(\cos x-1)=0.$

Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них дорівнює нулю, тому:

$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x-1=0.\end{array}\right.$ а звідси $\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=1.\end{array}\right.$, тому маємо, що $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z,\\ x=2\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$

Оскільки ми використали піднесення обох частин рівняння до квадрата, то могли з’явитися сторонні корені, тому необхідно виконати перевірку:

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z,\\ x=2\pi n, n\in Z,\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z.\end{array}\right.$$

Підставимо кожне значення змінної у дане рівняння:

а) якщо $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi l, l\in Z$, то

$\sin(\dfrac{\pi}{2}+2\pi l)+\cos(\dfrac{\pi}{2}+2\pi l)=\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}=1+0=1,$ $1=1$, отже дане значення змінної задовольняє наше рівняння;

б) якщо $x = 2\pi n, n \in Z$, то $\sin(2\pi n) + \cos(2\pi n) = 0 + 1 = 1$, $1 = 1$, отже дане значення змінної задовольняє наше рівняння;

в) якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$, то

$\sin(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m) + \cos(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m) = \sin(-\frac{\pi}{2}) + \cos(-\frac{\pi}{2}) = -1 + 0 = -1, \quad -1 \neq 1,$ отже дане значення змінної не задовольняє наше рівняння.

Отже, дане рівняння задовольняють розв'язки множини $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$ та $x = 2\pi n, n \in Z$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$; $x = 2\pi n, n \in Z$.

Другий спосіб розв'язання

Спосіб зведення рівняння до однорідного відносно синуса і косинуса

$$\sin x + \cos x = 1$$

У лівій частині рівняння замінимо $\sin x$ та $\cos x$ за формулою подвійного аргументу, а праву частину замінимо тригонометричною одиницею

$\sin x + \cos x = 1,$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2},$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 0,$

$\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) = 0.$

Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них дорівнює нулю, тому:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0, \\ \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 0; \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0, \\ ctg\frac{x}{2} = 1; \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \pi n, n \in Z, \\ \frac{x}{2} = arcctg 1 + \pi l, l \in Z; \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z. \end{array}\right.$$

Усі перетворення були рівносильними, тому необхідності перевіряти чи дані змінні задовольняють рівняння немає.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$; $x = 2\pi n, n \in Z$.

Третій спосіб розв'язання

Спосіб введення допоміжного аргументу

$$\sin x + \cos x = 1$$

Помножимо обидві частини даного рівняння на число $\frac{\sqrt{2}}{2}$, отримаємо:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z,$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

Доцільно учням показати, що одержана множина коренів збігається з одержаними раніше розв’язками, оскільки часто буває, що зовнішня несхожість відповіді з відповіддю, поданою у підручнику або з одержаною іншими учнями, призводить до сумніву у правильності розв’язування і учні втрачають впевненість в собі. Тому покажемо, що дана множина коренів збігається з одержаними раніше:

а) нехай $n=2k$, тоді маємо

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{2k}\frac{\pi}{4}+2\pi k=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k=2\pi k, k\in Z;$$

б) нехай $n=2k+1$, тоді маємо

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{2k+1}\frac{\pi}{4}+2\pi k=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi+2\pi k=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$$

Отже, одержана відповідь визначає множину коренів рівняння, одержану іншими способами.

Відповідь: $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

Четвертий спосіб розв’язання

Спосіб заміни $\sin x$ та $\cos x$ на тангенс половинного кута

$$\sin x+\cos x=1$$

Для цього розглянемо два наступних випадки:

а) нехай $\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$, тоді застосуємо формули $\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$. Одержимо $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=1,$

$$2tg\frac{x}{2}+1-tg^2\frac{x}{2}=1+tg^2\frac{x}{2},$$

$$tg\frac{x}{2}(1-tg\frac{x}{2})=0.$$

Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них дорівнює нулю, тому:

$$\left[\begin{array}{l} tg\dfrac{x}{2}=0, \\ 1-tg\dfrac{x}{2}=0. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}=\pi n, n\in Z, \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\pi l, l\in Z. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n, n\in Z, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z. \end{array}\right.$$

б) нехай $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$, тоді $x=\pi+k\pi, k\in Z$ і нам необхідно перевірити чи буде $x=\pi+k\pi, k\in Z$ є розв'язком даного рівняння

$\sin(\pi+2\pi n)+\cos(\pi+2\pi n)=\sin\pi+\cos\pi=-1+0=-1,\quad -1\neq 1$, отже дане значення змінної не задовольняє наше рівняння.

Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z$; $x=2\pi n, n\in Z$.

П'ятий спосіб розв'язання

Спосіб розкладання на множники

$$\sin x+\cos x=1$$

Перепишемо дане рівняння $\sin x+\cos x=1$ у вигляді:

$$\sin x-(1-\cos x)=0,$$

$$\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}=0,$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=0,$$

$$\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})=0.$$

Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них дорівнює нулю, тому:

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{x}{2}=0, \\ \cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}=0. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}=\pi n, n\in Z, \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\pi l, l\in Z. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n, n\in Z, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z$; $x=2\pi n, n\in Z$.

Шостий спосіб розв'язання

Спосіб перетворення різниці(суми) тригонометричних функцій у добуток

$$\sin x+\cos x=1$$

Запишемо дане рівняння $\sin x+\cos x=1$ у вигляді:

$$\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=1,$$

Застосуємо формулу суми синусів

$$\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=1,$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})=1,$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z,$$

тобто $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

Відповідь: $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

Сьомий спосіб розв'язання

Спосіб піднесення обох частин рівняння до квадрату:

$$\sin x+\cos x=1$$

Піднесемо до квадрату ліву і праву частину рівняння $\sin x+\cos x=1$, в результаті отримаємо:

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1,$$
$$1+2\sin x\cos x=1,$$
$$2\sin x\cos x=0,$$
$$\sin 2x=0,$$
$$x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

А отриманий розв'язок еквівалентний об'єднанню чотирьох розв'язків, а саме:

$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi n, n\in Z, \\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z, \\ x=\pi+2\pi m, m\in Z, \\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Перевірка показує, що корені $x=\pi+2\pi m, m\in Z$ і $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$ є сторонніми.

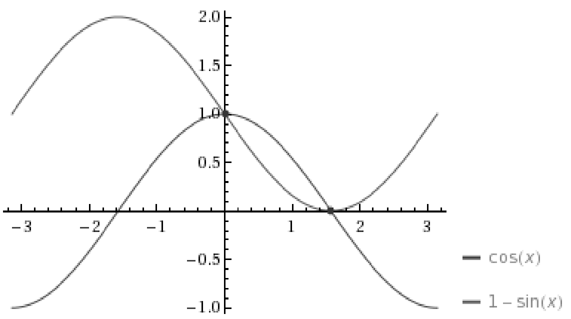
Відповідь: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z$; $x=2\pi n, n\in Z$.

Восьмий спосіб розв'язання

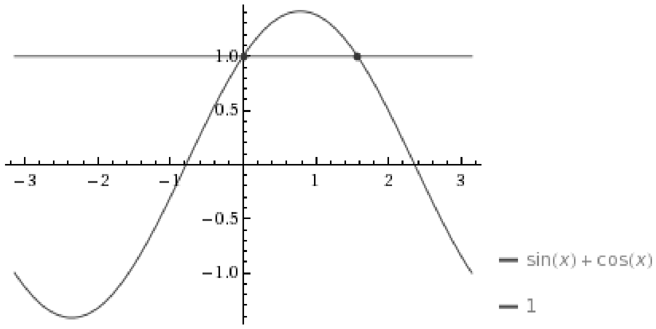
Графічний спосіб

$$\sin x+\cos x=1$$

На одному й тому ж малюнку побудуємо графіки функцій, які відповідають лівій і правій частині рівняння, тобто або $y=\sin x+\cos x$ і $y=1$ (рис.1), або $y=\cos x$ і



$y = 1 - \sin x$(рис.2) Абсциси точок перетину даних графіків і є розв'язками нашого рівняння . Недоліком графічного способу є неточність, але перевага полягає у наочності.



(Рис.1)

(Рис. 2)

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z$; $x = 2\pi n, n \in Z$.

У класах, що вивчають математику на поглибленому або профільному рівнях, можна на практичних заняттях розглянути різні способи розв'язування рівняння $6\cos x + 8\sin x = 5$. Це рівняння доцільно розв'язувати за допомогою способу зведення рівняння до однорідного відносно синуса і косинуса, способу заміни $\sin x$ та $\cos x$ на тангенс половинного кута, способу зведення до однієї тригонометричної функції, графічного способу. Також це рівняння можна розв'язати за допомогою формули Муавра. Наприклад,

$6\cos x + 8\sin x = 5$**,** ОДЗ: $x \in R$

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},\ \alpha = \arccos\frac{3}{5},$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},\ \varepsilon = \arcsin\frac{4}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{5},\ \beta = \arccos\frac{1}{2},\ \beta = \frac{\pi}{3},$$

Так як $x = \alpha \pm \beta + 2\pi n, n \in Z$, то ми отримаємо

$$x = \arccos\frac{3}{5} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь: $x = \arccos\frac{3}{5} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Література

1. Параскевич С. Чотирнадцять варіацій на задану тему, або дидактичні можливості рівняння $\sin x + \cos x = 1$./ С.Параскевич // Математика в школі. - 2007. - №7, с.32-36
2. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів./ М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук – К.: Зодіак – ЕКО, 2002. − 272 с.
3. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень./ А.Г.Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський, М.С.Якір. – Х.:

Гімназія, 2010. – 352 с.

Коломієць Марина Анатоліївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РІВНЯННЯ

Розв'язування тригонометричного рівняння складається, як правило, з двох етапів: зведення заданого рівняння до найпростіших рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$ за допомогою відомих формул тригонометрії і розв'язування найпростіших рівнянь.

У більшості випадків можна вказати не один, а кілька різних способів розв'язування рівняння. Звідси природно випливає вимога — з кількох можливих розв'язань вказати те, яке швидше і простіше веде до мети. Особливо цінні так звані „витончені" розв'язання, тобто розв'язування складніших задач виключно простими засобами.

Необхідно звертати увагу учнів на можливість різних варіантів розв'язання того ж самого тригонометричного рівняння, всіляко заохочувати шукання таких варіантів, займатись порівняльною їх оцінкою, зупинятись на кращих. Загальні методи розв'язування тригонометричних задач повинні стати міцним надбанням учнів, але поряд з цим повинно бути і вміння використати особливості кожної окремої задачі, що дозволяють розв'язати її простіше.

В силу періодичності та немонотонності тригонометричних функцій тригонометричні рівняння, як правило, мають безліч розв'язків [1], тому потрібно навчитися без помилок записувати увесь розв'язок найпростіших рівнянь. З тієї ж причини перевірка розв'язків тригонометричних рівнянь перетворюється у досить складне завдання; для того, щоб уникнути цього, бажано обирати такі прийоми розв'язування, які зводили б дане рівняння до рівносильних рівнянь.

На жаль, деякі формули тригонометрії, наприклад,

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ tg\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x},$$

мають різні області визначення лівої та правої частин; їх застосування може призвести до порушення рівносильності початкового та отриманого рівнянь. При використанні цих формул потрібно перевірити, чи не є розв'язками початкового рівняння значення змінної, які входять в область визначення функцій, розташованих ліворуч, але не входять в область визначення функцій, розташованих праворуч у цих формулах [2;3].

Розглянемо таку задачу.

<u>Задача.</u> Розв'язати рівняння $\sin x - \cos x = 1$.

Перший спосіб розв'язання

Помноживши на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ліву і праву частини рівняння, отримаємо

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\frac{\pi}{4}\left(1+(-1)^k\right)+k\pi, k\in Z$$

Всі отримані в процесі розв'язування рівняння рівносильні початковому рівнянню і перевірка не потрібна. Відмітимо отримані результати на тригонометричному колі (Рис. 1):

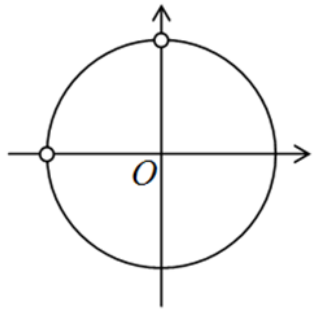


Рис. 1

Другий спосіб розв'язання

Розв'яжемо рівняння, скориставшись формулами подвійного аргумента:

$$\sin x-(1+\cos x)=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0;$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ \sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=0,\\ tg\frac{x}{2}=1.\end{array}\right.$$

Рівняння звелось до рівносильної сукупності рівнянь, тобто розв'язанням даного рівняння є об'єднання розв'язків рівнянь $\cos\frac{x}{2}=0$ і $tg\frac{x}{2}=1$.

Отже, відповідь $x_1=\pi(1+2k), x_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi; k,n\in Z$.

Третій спосіб розв'язання

Можна швидко розв'язати дане рівняння, підносячи до квадрату його ліву і праву частини.

$$\sin x-\cos x=1\Rightarrow \sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1,$$

$$\sin 2x=0, \text{звідси } x=\frac{k\pi}{2}.$$

Позначивши знайдені розв'язки на тригонометричному колі (Рис. 2), впевнюємося в наявності сторонніх коренів в отриманій відповіді (відмічені чорними точками). Підносячи до квадрату обидві частини даного рівняння, ми одночасно почали розв'язувати рівняння $\sin x-\cos x=-1$.

В отриманій множині значень міститься також розв'язок і цього рівняння. Виділити сторонні корені можна тільки за допомогою перевірки, яку нелегко виконати навіть у цьому простому прикладі. Очевидно, що такого методу розв'язування тригонометричних рівнянь необхідно уникати.

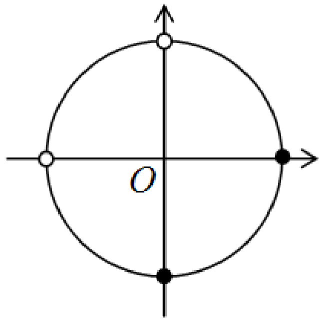


Рис. 2

До таких же складностей призводить використання формул типу $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$.

Так як тут завчасно невідомо, який із знаків перед коренем необхідно взяти, фактично знову доводиться розв'язувати одночасно два рівняння. Так, в даному прикладі

$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sin x - 1 = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 1 - \sin^2 x, \sin x(\sin x - 1) = 0,$$
$$x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, k, n \in Z$$

В знайденому тут розв'язку присутні сторонні корені, що відповідають парним значенням k

Четвертий спосіб розв'язання

Виражаючи $\sin x$ та $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$, отримуємо

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1 \Leftrightarrow tg\frac{x}{2} = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

При цьому способі розв'язання серед знайдених коренів немає розв'язків початкового рівняння $x = \pi + 2k\pi$, які були втрачені при переході до нерівносильного рівняння. Так як функція $tg\frac{x}{2}$ не визначена при $x = \pi + 2k\pi$, потрібно було перевірити, чи не є ці значення розв'язками початкового рівняння.

Розв'язуючи тригонометричні рівняння, не слід забувати і властивість обмеженості функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$.

П'ятий сосіб розв'язання

Нехай $\sin x = a$, а $\cos x = b$, тоді використавши формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 = 1, \end{cases} \begin{cases} a - b = 1, \\ a^2 + b^2 = 1, \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0, \\ b = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Повертаючись до заміни, одержимо:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

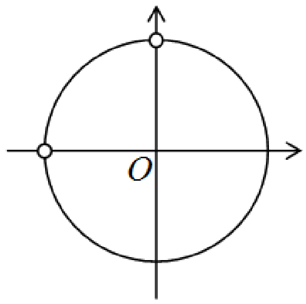


Рис. 3

Відповідь. $x_1 = \pi(1+2k), x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi; k, n \in Z$ (Рис. 3)

Щоб прищепити учням інтерес до розв’язання тригонометричних рівнянь нестандартними способами, бажано пропонувати такі приклади, які допускали б вибір більш раціонального способу розв’язання [4].

Говорячи про особливу цінність „витончених” розв’язань складних задач, треба застерегти вчителя від надмірного захоплення ними, яке призводить до того, що учень починає боятись таких задач, опускати руки перед ними, бо „витонченого” розв’язання він не бачить, а „не витончене” не буде схвалене вчителем. Треба привчати учня розв’язувати задачу будь-якими доступними йому засобами, знаходити будь-яке правильне розв’язання її, нехай дуже далеке до витонченості, і лише потім, коли розв’язання виконане, намагатись спрощувати його.

Література

1. Конкурсные задачи по математике и физике: Пособие для поступающих в МВТУ им. Н.Э. Баумана / Л.П. Паршев, А.Г. Андреев, Н.А. Гладков, Ю.А. Струков. Под ред. Белова С.В. – М.: Изд-во МВТУ, 1989. – 184 с.
2. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
3. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы: Учебное пособие / Егерев В.К., Кордемський Б.А., Зайцев В.В. и др.; Под ред; Сканави М.И. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1988. – 431 с.
4. Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики. – Харків „Торсінг” – 2003.- 367 с.

Палій Леся Олександрівна

студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ

Як зауважують психологи, в юності розвиток інтелекту тісно пов'язаний з розвитком творчих здібностей. Пізнавальний інтерес сприяє розвитку творчої особистості. Організація умов для розвитку пізнавального інтересу в навчальному процесі вчителем повинна ґрунтуватися на чіткому відборі матеріалу, що пропонується учням на уроці.

Розв’язуючи під керівництвом вчителя математики одне завдання різними способами, учень має можливість засвоїти спосіб розв’язання, який йому більш зрозумілий. Здібні до математики учні отримують можливість максимально використати свій творчий потенціал, запропонувати ідеї розв’язання відмінні від запропонованих вчителем або іншими учнями. Таким чином, вчитель, використовуючи вказаний методичний прийом, формує особистість здатну мислити, відстоювати власну думку.

Особливу увагу у вказаному контексті слід приділяти розвитку пізнавальних інтересів та можливостей учнів старшої школи. Ідея розв'язання однієї задачі різними способами у навчанні є добре відомою, але не є поширеною.

Зазвичай вчителі посилаються на нестачу часу на уроці, але методисти – науковці стверджують, що розв'язання одного завдання декількома способами приносить більше користі, ніж розв'язання декількох стереотипних задач поспіль. Розгляд учнем декількох варіантів розв'язання, вміння вибрати з них найбільш раціональні, прості, красиві свідчить про вміння учня мислити, міркувати. Різні варіанти розв'язання одного завдання дають можливість учню використовувати більший арсенал його математичних знань. Розгляд різних варіантів розв'язання завдань виховує в учня гнучкість мислення. Пошук раціонального варіанта розв'язання лише на початку потребує додаткових витрат часу на виконання завдання, згодом цей підхід розкріпачує мислення учнів.

Наведемо приклади можливих завдань та їх розв'язань, які могли б використовуватись вчителем математики на уроках при вивченні змістової лінії «Вирази та їх тотожні перетворення».

*<u>Завдання 1 .</u>*Спростити вираз $2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)-3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right).$

Перший спосіб розв'язання

Позначимо для зручності

$$A=2\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)-3\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right).$$

Розглянемо тотожність $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, з якої слідує, що $\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2=1$, та $\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^3=1$.

Розкриваючи дужки у вказаних рівностях, маємо $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$, тому $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

З іншої рівності випливає:

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^4\alpha\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos^4\alpha-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=$$
$$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Отже, $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Підставимо отриманий результат перетворень у вираз А, отримаємо:

$$A=2(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-3(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)=2-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3+6\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-1$$

Відповідь. -1.

Другий спосіб розв'язання

Скористаємося формулою $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$.

Отримаємо $2\left(\left(1-\cos^2\alpha\right)^3+\cos^6\alpha\right)-3\left(\left(1-\cos^2\alpha\right)^2+\cos^4\alpha\right).$

Заміна $\cos^2\alpha=a$, тоді:

$$2\left((1-a)^3+a^3\right)-3\left((1-a)^2+a^3\right)-3\left((1-a)^2+a^2\right)=$$
$$=2(1-3a+3a^2-a^3+a^3)-3(1-2a+a^2+a^2)=$$
$$=2(3a^2-3a+1)-3(2a^2-2a+1)=$$
$$=6a^2-6a+2-6a^2+6a-3=-1$$

Відповідь. -1.

Третій спосіб розв'язання

Нехай $\begin{cases} \sin^2\alpha = a, \\ \cos^2\alpha = b. \end{cases}$

Отримаємо:

$$2\left(a^3+b^3\right)-3\left(a^2+b^2\right)=2(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)-3\left(a^2+b^2\right)=2a^2-2ab+2b^2-3a^2-3b^2=$$
$$=-a^2-2ab-b^2=-(a+b)^2=-1.$$

Відповідь. -1.

Уміння виконувати перетворення тригонометричних виразів, очевидно, відпрацьовується і при виконанні завдань на доведення тотожностей. Для прикладу:

<u>*Завдання 2*</u>. Довести тотожність

$$(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad [2].$$

Перший спосіб розв'язання

Використаємо такі формули:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Тоді:

$$(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2})=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тотожність доведена.

Другий спосіб розв'язання

Доведемо, що $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0$.

$$(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=-2\sin\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}+2=-2\left(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1\right)=$$
$$=-2\left(\cos(\alpha-\beta)+2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1\right)=-2\left(\cos(\alpha-\beta)+1-\cos(\alpha-\beta)-1\right)=-2+2=0.$$

Що й треба було довести.

Третій спосіб розв'язання

Доведемо, що $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$.

$$4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4\frac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}=2(1-\cos(\alpha-\beta)=1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=$$
$$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=$$
$$=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=$$
$$=(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2.$$

Тотожність доведена.

При відшуканні різноманітних способів розв'язання задач в учнів формується пізнавальний інтерес, розвиваються творчі здібності, виробляються дослідницькі навички. Після знаходження чергового методу розв'язування завдання учні, як правило, отримують велике моральне та пізнавальне задоволення. Вчителю, як нам здається, важливо розвивати майстерність у заохоченні пошуку різних способів розв'язування задач. Загальні методи розв'язування завдань повинні стати міцним фундаментом знань та умінь учнів з математики. Нешаблонність завдання, уважніший аналіз його умови є передумовою успішного його розв'язання.

Література

1. Збірник задач з математики для вступників до втузів/ В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін.; За ред. М. І. Сканаві; Пер. з рос.: Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Кострица, Л. П. Оніщенко. - 3-тє вид., стер. - К.: Вища шк., 1996. - 445 с
2. Слєпкань З. І. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з алгебри. 9 клас: сборник задач / За ред. З.І. Слєпкань. – Х.: Гімназія, 2002. - 144 с.

Чобанова Емілія Аллахвердіївна

студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ЗА ДОПОМОГОЮ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ВЕКТОРІВ

«Математика – наука молодих. Інакше й не може бути. Заняття математикою – це така гімнастика розуму, для якої потрібна вся гнучкість і вся витривалість молодості»

(Н. Вінер).

Американський математик має рацію. Історія знає численні вражаючі приклади, коли таємниці математики підкорялися дослідникам майже юного віку. Тому треба приділяти достатньо уваги розвитку творчого мислення учнів в школі, підбирати завдання, які б стимулювали в них вироблення навичок мислення високого рівня.

Тригонометричні рівняння одна із самих складних тем у шкільному курсі математики. Тригонометричні рівняння виникають під час розв'язування задач з планіметрії, стереометрії, астрономії, фізики й в інших областях. Зокрема, тригонометричні рівняння представлені у завданнях олімпіад з математики, державної підсумкової атестації з математики (ДПА) та зовнішнього незалежного оцінювання з математики (ЗНО), де завдання потрібно виконати за обмежений проміжок часу. Серед завдань на розв'язання тригонометричних рівнянь часто трапляються такі, якими перевіряються не технічні навички учнів чи знання ними певного алгоритму, а уважність, знання властивостей, уміння знайти найкоротший шлях розв'язання, застосовувати нетрадиційний, оригінальний метод тощо. Тому сьогодні дуже важливо оволодіти різноманітними можливостями правильного оформлення алгоритму розв'язування рівнянь, який би не містив громіздких викладень, але за допомогою якого можна продемонструвати яскраві, ефективні, а інколи і несподівані застосування теоретичного матеріалу.

Учням доцільно пропонувати різні способи розв'язання тригонометричних рівнянь, щоб дати їм можливість обрати для себе найзручніший, розвинути в них критичність і гнучкість мислення. Покажемо два нестандартних способи розв'язання тригонометричних рівнянь та покажемо їх застосування на практиці.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x \sin x = 1$.

Перший спосіб розв'язання

Використаємо формулу подвійного кута для $\cos 2x$: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, отримаємо $\sin x - 2\sin^3 x - 1 = 0$. Ввівши заміну $\sin x = t$, $|t| \le 1$, отримаємо рівняння $2t^3 - t + 1 = 0$, $t^3 + 1 + t^3 - t = 0$; $(t+1)(t^2 - t + 1) + t(t-1)(t+1) = 0$; $(t+1)(2t^2 - 2t + 1) = 0$, звідки $t = -1$, $\sin x = -1$ і $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Відповідь. $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Під час розв'язування деяких тригонометричних рівнянь зручно використовувати обмеженість функцій $\sin x$ і $\cos x$. Розглянемо кілька прикладів тригонометричних рівнянь, для яких зручно застосовувати вказаний метод розв'язання.

Другий спосіб розв'язання

Метод екстремальних значень

Оскільки $|\cos 2x| \le 1$ і $|\sin x| \le 1$, то $|\cos 2x| \cdot |\sin x| \le 1$ і початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \sin x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \sin x = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'яжемо першу систему рівнянь: $\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \sin x = 1. \end{cases}$

Для першого рівняння системи застосуємо формулу подвійного аргументу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$1 - 2\sin^2 x = 1$, звідки $\sin x = 0$, що суперечить другому рівнянню системи. Отже, перша система розв'язків не має.

Розв'яжемо другу систему рівнянь: $\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \sin x = -1. \end{cases}$

З першого рівняння другої системи випливає, що $1 - 2\sin^2 x = -1$; $\sin^2 x = 1; \sin x = \pm 1.$ Зрозуміло, що обом рівнянням системи задовольняють лише ті значення x, при яких $\sin x = -1$ і $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$ - розв'язок другої системи.

Так, як перше рівняння сукупності розв'язків немає, то розв'язком нашого вихідного рівняння $\cos 2x \sin x = 1$ буде розв'язок другої системи рівнянь, а саме

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Відповідь. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'яжіть рівняння $2\cos^2(x - \frac{\pi}{6}) = 4 + \sin x + \sqrt{3}\cos x.$

Перший спосіб розв'язання

Виконаємо деякі перетворення з виразом $\sin x + \sqrt{3}\cos x$:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = 2(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{6}) = 2\cos(x - \frac{\pi}{3}).$$

Можна помітити, що дане рівняння легко розв'язується, якщо його звести до вигляду $2\cos^2(x - \frac{\pi}{6}) = 4 + 2\cos(x - \frac{\pi}{6}).$ Отримаємо рівняння $\cos^2(x - \frac{\pi}{6}) - \cos(x - \frac{\pi}{6}) - 2 = 0$, в якому введемо заміну $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = t,\ \ |t| \le 1$,і, розв'язавши квадратне рівняння відносно змінної t, отримаємо $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = -1;$

$x - \frac{\pi}{6} = \pi + 2\pi k, k \in Z;\ \ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Відповідь. $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Другий спосіб розв'язання

Метод екстремальних значень

Виконаємо деякі перетворення з виразом $\sin x + \sqrt{3}\cos x$:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = 2(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}).$$

Підставивши замість виразу $\sin x + \sqrt{3}\cos x$ вираз $2\sin(x + \frac{\pi}{3})$ у наше початкове рівняння, отримаємо рівносильне рівняння $\cos^2(x - \frac{\pi}{6}) = 2 + \sin(x + \frac{\pi}{3}).$

Робимо оцінку для лівої і правої частин рівняння: $0 \le \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) \le 1$, $1 \le 2 + \sin(x - \frac{\pi}{6}) \le 3$. Звідси випливає, що початкове рівняння може мати корені, які задовольняють системі $\begin{cases} \cos^2(x - \frac{\pi}{6}) = 1, \\ 2 + \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 0, \\ \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -1; \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \pi n) = -1, n \in Z. \end{cases}$$

Друга рівність буде справджуватись, якщо $n = 2k + 1, k \in Z$. Зрозуміло, що тоді $x = \frac{\pi}{6} + \pi + 2\pi k = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Відповідь. $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Якщо вихідне рівняння замінити на $2\cos^6(x - \frac{\pi}{6}) = 4 + \sin x + \sqrt{3}\cos x$, то перевага використання методу екстремальних значень для розв'язання рівняння буде очевидною.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння

$$\sin x\sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3}.$$

Перший спосіб розв'язання

Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою скалярного добутку векторів

Відомо, що скалярний добуток 2 векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha$. Так, як $|\cos\alpha| \le 1$, то $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Якщо вектори задані в координатній формі, тобто у вигляді $\vec{a}\{a_1; a_2\}$ і $\vec{b}\{b_1; b_2\}$, то $a_1 a_2 + b_1 b_2 \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Введемо вектори $\vec{a}\{\sin x; \cos x\}$ і $\vec{b}\{\sqrt{1 + \cos^2 x}; \sqrt{1 + \sin^2 x}\}$, тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x} \le \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \cdot \sqrt{2 + \sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{3}$. Отже, $\sin x\sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x\sqrt{1 + \sin^2 x} \le \sqrt{3}$. Очевидно, що початкове рівняння можна записати у вигляді $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, але ця рівність виконується, коли кут між векторами дорівнює 0^0. Виходить, що вектори спів напрямлені, тобто колінеарні, а у колінеарних векторів відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, причому sinx і cosx мають однакові знаки:

$$\sin^2 x + \sin^4 x = \cos^2 x + \cos^4 x;\ \cos 2x = 0;\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z.$$

Із початкового рівняння випливає, що $\sin x > 0$ і $\cos x > 0$ (з врахуванням того, що sinx і cosx одного знаку). Тоді зрозуміло, що $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Відповідь. $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Знайомство учнів з різними методами розв'язування тригонометричних рівнянь дозволить їм зрозуміти важливість теоретичного матеріалу, навчить застосовувати свої знання на практиці. Нестандартні способи розв'язання допоможуть розвинути креативність мислення учнів, що допоможе їм під час розв'язування завдань на олімпіадах, ДПА та ЗНО з математики.

Література

1. Севрюков П.Ф. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие/П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков.-М.:Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2008.-352.

Розділ IV. Комбінаторні задачі

Боднар Наталія Дмитрівна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»
напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

У повсякденному житті часто виникають проблеми, що мають не один, а декілька варіантів розв'язання. Щоб зробити правильний вибір, важливим є не упустити жоден із них. Для цього потрібно вміти здійснювати перебір усіх можливих варіантів чи хоча б підраховувати їхнє число.

В даній публікації розглянемо добірку комбінаторних задач, які розв'язуються декількома способами.

Задача 1. У класі 25 чоловік. Потрібно вибрати старосту і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

Перший спосіб розв'язання

Старостою може бути кожний із 25 учнів. Після вибору старости на роль заступника можуть претендувати 24 учні, що залишилися. Таким чином, усього є $25 \cdot 24 = 600$ різних способів вибору.

Другий спосіб розв'язання

Скористаємося формулою розміщення. Відомо, що розміщенням з m елементів по n називається будь-яка впорядкована підмножина з n елементів даної множини M, яка містить m елементів, де $n \le m$. Отже, розміщення відрізняються один від одного або елементами, або порядком елементів. У даній задачі доцільно скористатися формулою розміщення, оскільки порядок вибору є важливим.

$$A_{25}^{2} = \frac{25!}{23!} = 24 \cdot 25 = 600 \text{ (сп.)}$$

Відповідь. 600 способами.

<u>*Задача 2.*</u> Скількома способами можна розподілити чотири однакові олівці поміж трьох дітей?

Перший спосіб розв’язання

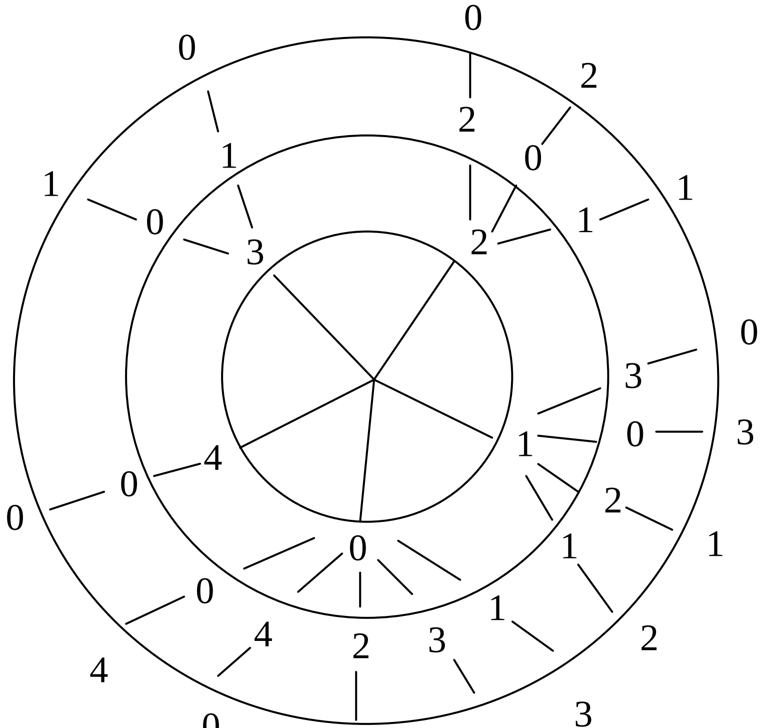
Даний спосіб ґрунтується на створені таблиці, яка містить можливі способи розподілу. Запишемо розв’язання даної задачі у вигляді такої таблиці.

№ варіанту / № дитини	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4	0	0	3	3	1	1	0	0	2	2	0	2	1	1
2	0	4	0	1	0	3	0	3	1	2	0	2	1	2	1
3	0	0	4	0	1	0	3	1	3	0	2	2	1	1	2

Таблицю доцільно заповнювати стовпцями. Перший стовпець означає, що перша дитина отримала всі чотири олівці, а двом іншим олівці не дісталися. Потрібно звернути увагу на те, що олівці однакові. Тому, наприклад, для варіанту (3, 1, 0), який стоїть у четвертому стовпчику, не слід розглядати різні способи вибору трьох олівців із чотирьох. З чотирьох однакових елементів три (і будь-яку іншу кількість) можна вибрати єдиним способом.

Другий спосіб розв’язання

Переберемо всі можливі варіанти такого розподілу.



Порахувавши кількість цифр зовнішнього кола, отримаємо 15 способів

Третій спосіб розв'язання

Дану задачу також можна розв'язати, склавши діофантове рівняння. Відомо, діофантовими рівняннями називаються поліноміальні рівняння з цілими коефіцієнтами, в яких невідомі змінні можуть приймати тільки цілі значення: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = a$, при чому дане рівняння має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $НСД(a_1, a_2, ..., a_n)$ ділиться на a.

Нехай перший учень може отримати олівці x способами, другий — y способами, а третій — z способами. Оскільки всього маємо 4 олівці, то отримаємо наступне рівняння:

$$x + y + z = 4$$

Врахувавши те, що кожен учень може отримати від 0 до 4 олівців, то матимемо таку систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 4; \\ 0 \le x \le 4; \\ 0 \le y \le 4; \\ 0 \le z \le 4. \end{cases}$$

розв'язком якої є 15 різних способів розподілу вказаних вище.

Відповідь. 15 способів.

<u>*Задача 3.*</u> Скількома способами з колоди в 36 карт можна вибрати 4 карти різних мастей і достоїнств?

Перший спосіб розв'язання

Першу карту можна вибрати 36 способами; при будь-якому її виборі для другої залишаються 24 можливості (відпадають 9 карт тієї самої масті, 3 карти того самого достоїнства, що і витягнута карта). Для третьої залишаються 14 варіантів (виключаємо 8 карт тієї самої масті і дві карти того самого достоїнства, що мала друга карта). Для четвертої карти залишаються 6 варіантів (ще потрібно виключити 7 карт тієї самої масті і 1 карту того самого достоїнства, що мала третя карта). За правилом множення маємо: $36 \cdot 24 \cdot 14 \cdot 6$. При цьому результаті вибору не міняються від перестановки елементів у наборі, наприклад (1, 2, 3, 4). Остаточно маємо:

$$\frac{36 \cdot 24 \cdot 14 \cdot 6}{4!} = \frac{36}{4} \cdot \frac{24}{3} \cdot \frac{14}{2} \cdot \frac{6}{1} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024 \text{ (сп.)}$$

Другий спосіб розв'язання

Вибір будемо робити в такий спосіб: колоду розкладемо на 4 частини, кожна з яких містить карти однієї масті. Першу карту витягнемо з першої частини, це можна зробити 9 способами; другу — із другої частини. Це можна зробити 8 способами (не можна брати карту того самого достоїнства, що і перша). Аналогічно для третьої карти залишається 7 варіантів, а для четвертої — 6. Фактично ми зафіксували порядок частин колоди, з яких робили послідовний вибір карт. Від зміни порядку міняється кількість можливостей вибору з кожної частини. Тому результати вибору від зміни порядку проходження елементів змінюються. Шукане число способів дорівнює

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024 \text{ (сп.)}$$

<u>*Відповідь.*</u> 3024 способами.

<u>*Задача 4.*</u> Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5? Цифри в записі числа не повторюються.

Перший спосіб розв'язання

У записі цього числа важливим є порядок цифр. Три елементи з шести у певному порядку можна вибрати A_6^3 способами. Проте вони охоплюють і всі ті записи, які починаються з цифри 0. А це, фактично, двоцифрові числа, записані цифрами 1, 2, 3, 4, 5. Їх можна утворити A_5^2 способами. Отже, шукану кількість чисел можна обрахувати так:

$$A_6^3 - A_5^2 = \frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 4 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 100 \text{ (сп.)}$$

Другий спосіб розв'язання

Зрозуміло, що число не може починатися цифрою 0. Тому для вибору першої цифри є 5 різних способів. На друге і третє місце з тих цифр, що залишилися, три (у певному порядку) можна вибрати A_5^2 способами. Загальна кількість буде

$$5 \cdot A_5^2 = 5 \cdot \frac{5!}{3!} = 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 4 \cdot 5 = 100 \text{ (сп.)}$$

Третій спосіб розв'язання

На першому місці можна записати будь-яку з цифр 1, 2, 3, 4, 5 — всього п'ять способів. На другому— знову будь-яку з п'яти (серед них уже може бути 0). На третьому — будь-яку з чотирьох, що залишилися після запису перших двох цифр числа. Усього

$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ (сп.) - різних записів трицифрових чисел.

Відповідь. 100 способів.

Література

1. Бродський Я. С. Комбінаторика без формул. Знайомство з ймовірністю і статистикою/ Я. С. Бродський. – Х.: «Основа», 2004. – 112 с.
2. Вороная Л. В. Перші кроки в теорію ймовірностей. Задачі та їх розв'язання/ Л. В. Вороная, В. О. Сенчевський. – Х.: «Основа», 2009. – 175 с.
3. Морозович Я. Ю. Комбінаторика/ Я. Ю. Морозович. – Х.: «Основа», 2009. – 144 с.

4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник [для студ. матем. спеціальностей пед. навч. закл.]/ З.І.Слєпкань. – К.: «Вища школа», 2006. – 582 с.

Боцул Тамара Вікторівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНОЇ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ ПРО РОЗМІЩЕННЯ ЧИСЕЛ У ТАБЛИЦІ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

У даній статті наведені способи розв'язання комбінаторної задачі, яка пропонувалася до розгляду учням десятих класів на всеросійській олімпіаді школярів з математики у 1997/1998 навчальному році.

Для розв'язання цієї задачі учні повинні мати знання з комбінаторики, а також навички розв'язування вправ про розміщення чисел, повинні розуміти суть використання методу математичної індукції при розв'язуванні комбінаторних задач.

У розв'язуванні задач на скінченні послідовності цифр, цілих чисел, букв, фішок, розміщення їх на колі або в таблиці проводяться міркування, що пов'язані з подільністю, комбінаторикою, оцінками, які використовують індукцію. [2].

Комбінаторикою називають такий розділ математики, в якому вивчаються питання про те, скільки є різних комбінацій із заданими умовами.

Правило суми. Якщо об'єкт A можна вибрати m різними способами, а об'єкт B – n різними способами, то здійснити вибір «або A, або B» можна $m+n$ різними способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати m різними способами і після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати n різними способами, то здійснити вибір пари (A,B) у вказаному порядку можна $m \cdot n$ різними способами.

Узагальнене правило добутку. Якщо об'єкт A_1 можна вибрати m_1 різними способами, об'єкт A_2 можна вибрати m_2 різними способами, ..., об'єкт A_n можна вибрати m_n різними способами, то здійснити вибір впорядкованого набору $(A_1, A_2, ..., A_n)$ цих об'єктів можна $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$ різними способами.

Розміщення, перестановки, комбінації. Нехай задано множину $\{a_1,...,a_n\}$, яка складається із n різних елементів. *Вибіркою довжини* k називатимемо множину $\{a_{i_1},...,a_{i_k}\}$, яка містить k елементів попередньої. Елементи вибірки можуть бути як різними, так і однаковими (наприклад, можна розглянути вибірку виду $\{a_1,...,a_1\}$).

$*$ Вибірки, у яких елементи можуть бути однаковими і порядок їх розташування є суттєвим (тобто вибірки будуть різними, навіть якщо вони відрізняються тільки порядком розташування в них елементів) називаються *розміщеннями з повтореннями.* Їх вид позначатимемо так $\left(a_{i_1},...,a_{i_k}\right)$. Кількість розміщень з повтореннями із n елементів по k елементів позначають через $\overline{A}_n^k$. Справедливою є така формула:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

(Це легко випливає із узагальненого правила добутку: на першому місці може бути будь-який із n даних елементів, на другому – також будь-який із n даних елементів, ..., на k - му місці також будь-який із n даних елементів).

∗ Вибірки, у яких всі елементи різні, а їх порядок у вибірці так само є суттєвим, називається *розміщеннями без повторень.* Їх вид також по знатимемо так $\left(a_{i_1},...,a_{i_k}\right)$. Кількість розміщень без повторень із n елементів по k елементів позначають через A_n^k. Справедливою є така формула:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Вона, аналогічно попередній, доводиться за допомогою узагальненого правила добутку.

∗ Розміщення без повторень при $k = n$ називають *перестановками без повторень.* (Такі вибірки відрізняються лише порядком елементів у них.) Кількість перестановок без повторень із n елементів позначають через P_n. Справедливою є така формула:

$$P_n = n!.$$

($0!$ прийнято вважати рівним 1.)

∗ Розміщення з повтореннями, які відрізняються лише порядком елементів у них називаються *перестановками з повтореннями.* Тобто, це вибірка виду $(a_1, a_2,...,a_n)$, в якій елемент a_1 присутній m_1 разів, елемент a_2 присутній m_2 разів, ..., елемент a_n присутній m_n разів. Тоді довжина всієї вибірки буде рівною

$$n = m_1 + m_2 + ... + m_n.$$

Набір натуральних чисел $(m_1, m_2,...,m_n)$ називають *складом цієї вибірки.*

Наприклад, (A, A, C, B, A, C) – вибірка складу $(3,1,2)$ із множини, що містить три елементи $\{A, B, C\}$. Кількість таких вибірок одного і того ж складу називають кількістю *перестановок з повтореннями із n елементів із заданими числами повторень m_1, m_2, ..., m_n кожного елементу.* Це число позначають через $P_n(m_1, m_2,...,m_n)$ і обчислюють за формулою

$$P_n(m_1, m_2,...,m_n) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_n!},$$

де $n = m_1 + m_2 + ... + m_n$.

∗ Вибірки, у яких всі елементи різні, а порядок їх розташування у вибірці не є суттєвим, називаються *комбінаціями без повторень*. Їх вид позначатимемо так: $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}\}$. Вони відрізняються одна від одної лише складом елементів, але не їх порядком розташування у вибірці. Кількість комбінацій без повторень із n елементів по k елементів позначають так: C_n^k. А обчислюють за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!},$$

де $0 \le k \le n$. Ця формула випливає з того, що з кожної комбінації без повторень довжиною k можна утворити $k!$ розміщень без повторень, тобто $A_n^k = k!\cdot C_n^k$. Звідси й випливає, що

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}.$$

$*$ Невпорядковані вибірки довжиною k, компоненти яких можуть повторюватися і належать n - елементній множині називають комбінацією з повтореннями із n елементів по k елементів. Кількість таких комбінацій позначають через $\overline{C}_n^k$ і обчислюють по формулі $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

При розв'язуванні багатьох олімпіадних задач іноді використовують *метод математичної індукції*. Суть цього методу полягає у наступному. Нехай $T_1, T_2, T_{3,...}$ послідовність тверджень, причому відомо, що:

1) твердження T_1 істинне;

2) якщо деяке твердження T_k істинне, то наступне твердження T_{k+1} також істинне.

Тоді *принцип математичної індукції* стверджує, що всі твердження цієї послідовності істинні.

Спосіб міркувань, оснований на принципі математичної індукції, називають *методом математичної індукції*. При цьому доведення істинності твердження T_1 називають *базою індукції*, а доведення того, що з істинності твердження T_k випливає істинність твердження T_{k+1}, називають *індукційним кроком*. [2].

А тепер перейдемо до розв'язування, зазначеної вище, олімпіадної задачі.

Задача. В кожну клітинку квадратної таблиці розміру $(2^n-1)\times(2^n-1)$ ставиться одне із чисел $+1$ або -1. Розміщення чисел назвемо вдалим, якщо кожне число дорівнює добутку всіх сусідніх із ним (сусідніми вважаються числа, що стоять в клітинках із спільною стороною). Знайдіть кількість вдалих розміщень. [1].

Перший спосіб розв'язання

Доведемо методом математичної індукції по n наступне твердження: якщо в таблиці із 2^n-1 стовпців і k рядків ($k+1$не ділиться на 3) розміщені числа ± 1 так, що виконується умова задачі, то всі числа таблиці дорівнюють $+1$. При $n=1$ маємо один стовпець висоти k. Нехай в ньому стоять числа $a_1, a_2, ..., a_n$ – по порядку зверху вниз. Тоді $a_1 = a_2$(умова задачі для першої клітинки), $a_2 = a_1 a_3$, звідси $a_3 = 1$, $1 = a_3 = a_2 a_4$, то $a_4 = a_2 = a_1$. І так далі.

Отримали, що всі числа, які стоять в клітинках з номером, кратним трьом, дорівнюють 1, а всі решта дорівнюють a_1. Оскільки $k+1$ не ділиться на 3, то можливі дві ситуації:

1) $a_{k-1} = a_1,\ a_k = 1;$

2) $a_{k-1} = 1,\ a_k = a_1.$

Але елемент a_k дорівнює добутку своїх сусідів, тобто $a_k = a_{k-1}$. Тому отримаємо, що $a_1 = 1$, і стовпець складається з одних одиниць. Для доведення індуктивного переходу введемо наступні позначення. Якщо A, B — дві таблиці однакового розміру, то нехай $A \cdot B$ —таблиця, в кожній клітинці якої записаний добуток чисел із тих же клітинок таблиць A і B. $\overline{A}$ буде позначати таблицю, отриману із A дзеркальною симетрією: перший стовпець міняється з останнім, другий – з передостаннім і так далі. Неважко бачити, що якщо таблиці A і B задовольняють умові, то те ж саме ми можемо сказати про таблиці $A \cdot B$ і $\overline{A}$. Таблицю, в якій стоять тільки одиниці, будемо позначати **1**.

Доведемо, що якщо в таблиці розміру $k \times \left(2^{n+1} - 1\right)$ розміщені числа згідно умови, то розміщення симетричне: $A = \overline{A}$. Це рівносильне тому, що $A \cdot \overline{A} = \mathbf{1}$. В таблиці $A \cdot \overline{A}$ весь центральний стовпець (з номером 2^n) складається з одиниць, так як центральні стовпці в A і $\overline{A}$ однакові. З цього випливає, що якщо ми розглянемо окремо частину таблиці $A \cdot \overline{A}$ зліва від центрального стовпця, то числа в цій меншій таблиці розміщені згідно умови. Розмір її — $k \times \left(2^n - 1\right)$, так що за припущенням індукції, всі числа в ній – одиниці. Те ж стосується і правої частини $A \cdot \overline{A}$. Отже, $A \cdot \overline{A} = \mathbf{1}$. Це означає, що для будь-якого числа із центрального стовпця таблиці A числа зліва і справа від нього однакові, тому саме воно дорівнює добутку своїх верхнього і нижнього сусідів. Як ми довели у базі індукції, з цього слідує, що центральний стовпець заповнений одиницями. Тепер знову розглянемо частину таблиці A зліва від центрального стовпця. Застосовуючи припущення індукції, переконаємося ,що у ній стоять лише одиниці. Права частина симетрична лівій, тому і вона складається з одиниць. Перехід індукції доведений. Для всіх таблиць розміру $k \times \left(2^n - 1\right)$ (де $k+1$ не ділиться на 3) єдиність розміщення доведена. Якщо $k = \left(2^n - 1\right)$, то $k + 1 = 2^n$, тому доведено і твердження задачі.

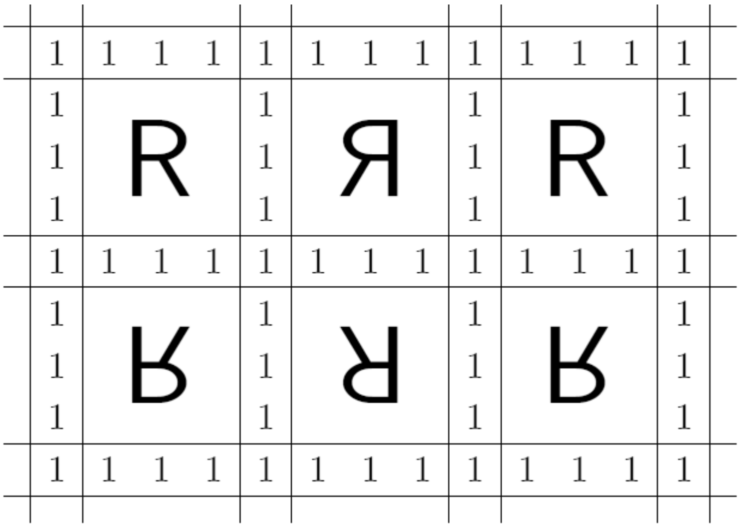


Рис. 1

Другий спосіб розв'язання

Нехай R — вдале розміщення в таблиці $(2^n-1)\times(2^n-1)$. Розмістимо числа на клітчастій площині, як показано на Рис. 1 (симетрія букви R означає, що там стоїть таблиця R, відображена відповідним способом). Тоді розміщення на всій площині задовольняє нашим умовам (тобто будь-яке число є добуток його чотирьох сусідів) і, крім того, воно 2^{n+1} – періодичне, тобто при зсуві на 2^{n+1} вверх чи вправо воно переходить в себе. Доведемо за допомогою індукції по n, що довільна 2^n – періодична перестановка складається з одиниць.

		a_{13}		
	a_{22}	a_{23}	a_{24}	
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
	a_{42}	a_{43}	a_{44}	
		a_{53}		

Рис. 2

База при $n=0$ очевидна: $a=a^4$, де a — число в клітинці. Нехай $n\geq 1$. Розглянемо фрагмент таблиці, показаний на Рис. 2. Маємо:

$$a_{23}=a_{13}a_{22}a_{24}a_{33},\quad a_{32}=a_{22}a_{31}a_{33}a_{42},\quad a_{34}=a_{24}a_{33}a_{35}a_{44},\quad a_{43}=a_{33}a_{42}a_{44}a_{53},$$

звідки

$$a_{33}=a_{23}a_{32}a_{34}a_{43}=a_{13}a_{31}a_{35}a_{53}a_{22}^2a_{24}^2a_{42}^2a_{44}^2a_{33}^4=a_{13}a_{31}a_{35}a_{53},$$

тобто таке саме співвідношення буде правильним і для «розрідженої» таблиці, яка складається з чисел, що знаходяться на перетинах непарних рядків з непарними стовпцями. Ця таблиця 2^{n-1} – періодична, тому за припущенням індукції вона складається з одиниць. Абсолютно аналогічно, інші три «розріджених» підтаблиці складаються з одиниць, що і треба було довести.

Відповідь. Вдале розміщення єдине – всі числа рівні $+1$.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы (под ред. Н. Х. Агаханова). – Москва, 2007.
2. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Вінниця, 2005.
3. Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В. Элементы дискретной математики. – НГТУ, 2002.

Розділ V. Методи вищої математики

Анісімова Вікторія Леонідівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Жителі населеного пункту А вирішили провести вітку газопроводу від населеного пункту В, який знаходиться на відстані 3500 м. Для цього потрібно використати труби довжиною 11 м та 13 м. Труби довжиною 11 м знаходяться на складі №1, а труби довжиною 13 м знаходяться на складі №2. Доставка однієї труби зі складу №1 коштує 100 грн., зі складу №2 – 110 грн..Зварка одного шва труб коштує 40 грн. Скільки потрібно використати труб довжиною 11 м і 13 м, щоб вартість робіт була найдешевшою.

Розв'язання

Позначимо кількість труб довжини 11 м через x та довжини 13 м через y. Тоді задача зводиться до розв'язання рівняння:

$$11x + 13y = 3500.$$

Розв'язування отриманого рівняння зводиться до розв'язання конгруенції:

$$11x \equiv 3500 (mod\ 13),$$

яку можна спростити до такої:

$$11x \equiv 3 (mod\ 13).$$

Цю конгруенцію можна розв'язати шістьма способами. Проілюструємо ці способи.

Перший спосіб розв'язання. Метод спроб

Оскільки (11,13) = 1, то конгруенція матиме єдиний розв'язок.

Цей розв'язок може бути одним з чисел $\{0, 1, 2, 3, \dots, 12\}$. Методом спроб встановлюємо, що $x = 5$ є одним з розв'язків тобто, $x \equiv 5 (mod\ 13)$. Тоді це означає, що $x=5+13t$, $t \in Z$. Підставимо знайдене значення x у вихідне рівняння:

$$11(5+13t) + 13y = 3500$$
$$13y = 3445 – 143t$$
$$y = 265 – 11t, t \in Z.$$

Таким чином, $\begin{cases} x = 5 + 13t, \\ y = 265 - 11t, t \in Z. \end{cases}$

Другий спосіб розв'язання. Метод рівносильних перетворень

Оскільки $3 \equiv 55 (mod\ 13)$, то $11x \equiv 3 (mod\ 13)$, $11x \equiv 55 (mod\ 13)$;

Але (11,13) = 1. Тому можна поділити обидві частини на 11 .Отримаємо:

$x \equiv 5 (mod\ 13)$.

Далі розв'язок рівняння представляється як і в першому способі.

Третій спосіб розв'язання. Метод Ейлера

В цьому методі конгруенція $ax \equiv b\ (mod\ m)$ розв'язується за формулою:

$$x \equiv ba^{\varphi(m)-1} (\text{mod}\ \ m)$$

У нашому випадку: $a=11$; $b=5$; $\varphi(13)=12$. Тому $x \equiv\ 5 \cdot 11^{12}\ (mod\ 13)$, або $x \equiv 15632141883605\ (mod\ 13)$;

Останню конгруенцію можна спростити до такої:

$$x \equiv 5 (mod\ 13).$$

Далі розв'язок рівняння представляється як і в першому способі.

Четвертий спосіб розв'язання. У кільці $\boldsymbol{Z_{13}}$

Кільце $\boldsymbol{Z_{13}}$ складається з таких елементів:

$$\boldsymbol{Z_{13}} = \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}, \overline{\mathbf{2}}, \overline{\mathbf{3}}, \dots, \overline{\mathbf{10}}, \overline{\mathbf{11}},\ \overline{\mathbf{12}}\}$$

Складемо таблицю для операції множення класів лишків (Табл.1)

*	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{\mathbf{11}}$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{11}}$	$\overline{\mathbf{9}}$	$\overline{\mathbf{7}}$	$\overline{\mathbf{5}}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$

$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Табл.1

Отже, $\bar{x} = \bar{5}$ в $\boldsymbol{Z_{13}}$ тобто, $x \equiv 5(mod\ 13)$.
Далі розв'язок рівняння представляється як і в першому способі.

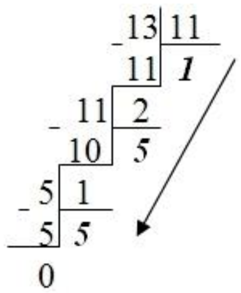
П'ятий спосіб розв'язання. Ланцюгові дроби

В цьому методі конгруенція $ax \equiv b\ (mod\ m)$ розв'язується за формулою:

$$x \equiv (-1)^n \cdot b \cdot P_{n-1} (\mathrm{mod}\ \ m)$$

У нашому випадку a=11, $b = 3$; $m = 13$.

Розкладемо $\frac{m}{a} = \frac{13}{11}$ в ланцюговий дріб:



Отже, $\frac{13}{11} = [1; 5, 5]$.

Занесемо дані в таблицю (Табл. 2) і обчислимо P_k і Q_k:

k	0	1	2
q_k	1	5	5
P_k	1	**6**	13
Q_k	1	5	11

Табл. 2

Підставивши отримане значення у формулу, отримаємо:

$$x \equiv (-1)^2 \cdot 3 \cdot 6(mod\ 13) \equiv 18(mod\ 13) \equiv 5(mod\ 13).$$

Далі розв'язок рівняння представляється як і в першому способі.

Шостий спосіб розв'язання. За допомогою індексів

Проіндексуємо нашу конгруенцію за найменшим первісним коренем g :

$$\boldsymbol{a \equiv b(mod\ p) \overset{dg}{\Leftrightarrow} ind_g a \equiv ind_g b\ (mod\ p-1).}$$

Отримаємо: $ind\ 11 + ind\ x \equiv ind\ 3(mod\ 13)$.

З таблиці індексів одержимо:

$ind\ 11 \equiv\ 7(mod\ 12)$

$ind\ 3 \equiv 4\ (mod\ 12)$

$7 + ind\ x \equiv 4\ (mod\ 12)$

$ind\ x \equiv -3\ (mod\ 12)$

$ind\ x \equiv 9\ (mod\ 12)$.

За таблицею антиіндексів, маємо:

$x \equiv 5(mod\ 13).$

Далі розв’язок рівняння представляється як і в першому способі.

Розв’язки вихідного рівняння помістимо у таблицю (Табл. 3), врахувавши, що загальна вартість робіт обчислюється за формулою:

$$S = 100 \cdot x + 110 \cdot y + 40 \cdot (x + y - 1)$$

t	0	1	2	3	4	5
x	***5***	18	31	44	57	70
y	***265***	254	243	232	221	210
Число швів	***269***	271	273	275	277	279
Загальна вартість	***40410***	40580	40750	40920	41090	41260

Табл. 3

Отже, вартість робіт буде найдешевшою, якщо ми використаємо 5 11-ти метрових і 265 13-ти метрових труб.

Література

1. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І., Алгебра і теорія чисел, ч.II, – К.: «Вища школа», 1976. – 384 с.
2. Куликов Л.Я., Алгебра и теория чисел, – М.: «Высшая школа», 1979. – 560 с.

Лудборж Любов Олегівна

студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

У житті основною необхідністю в наші дні є безперервна освіта, що потребує повноцінної загальноосвітньої підготовки.

Нова програма з математики орієнтує вчителя на необхідність формування в учнів умінь розв’язувати задачу різними способами. Учитель прагне до того, щоб учні усвідомлювали можливість різних способів розв’язання деяких задач і свідомо вибирали найбільш раціональний із відомих їм способів.

Для відшукання різних способів розв’язання задачі необхідно розкрити залежності між величинами і знайти різні шляхи вираження цих залежностей.

Вміння розв’язувати задачі є одним із основних показників рівня математичного розвитку, глибини засвоєння навчального матеріалу. У шкільному курсі математики, навчанню розв’язування задач приділяється багато часу, але основним методом такого навчання є демонстрація способів розв’язування певних видів задач. В учнів не виробляються уміння і навички в діях, що входять у загальну діяльність по розв'язуванню задач, не стимулюється постійний аналіз учнями своєї діяльності у цьому напрямку, по виділенню в ній загальних методів та підходів, що дало б можливість, у подальшому, будувати власну стратегію дослідження та розв'язання задач такого класу.

Розробити та описати технологію розв'язування різними способами деяких задач з теорії подільності є метою даної статті.

<u>*Задача 1.*</u> Натуральні числа m і n такі, що $\text{НСК}(m;n) + \text{НСД}(m;n) = m + n.$ Довести, що одне з чисел m або n ділиться на інше.

Перший спосіб розв'язання

Маємо рівність

$$\text{НСК}(m;n) + \text{НСД}(m;n) = m + n \qquad (1)$$

Нехай $m = kd,\ \ n = ld,$ де k, l – взаємно прості натуральні числа, $d = \text{НСД}(m;n).$ Тоді $\text{НСК}(m;n) = kld,$ і рівність (1) запишеться у вигляді:

$$kld + d = kd + ld \qquad (2)$$

Зробивши певні перетворення рівності (2), матимемо:

$kld + d = kd + ld,$

$kld - kd + d - ld = 0,$

$d((kl - k) + (1 - l)) = 0,$

$d(k(l-1) + (1-l)) = 0,$

$d((l-1)(k-1)) = 0,$

Отже, маємо, що $(l-1)(k-1) = 0,$ оскільки $d \neq 0,$ тоді або $(l-1) = 0$ або $(k-1) = 0.$

Тобто $l = 1$ або $k = 1.$

Це означає, що m або n дорівнює $НСД(m;n).$ Отже, або n ділиться на m, або m ділиться на n. Що й потрібно було довести.

Другий спосіб розв'язання

Розв'яжемо дану задачу використовуючи теорему про зв'язок *НСК* з *НСД*. Теорема. $НСК(a;b) \cdot НСД(a;b) = a \cdot b.$

Доведення.

Нехай $НСК(a;b) = k, НСД(a;b) = d.$ Число $a \cdot b$ є спільним кратним чисел a і b. Відомо, що $НСК(a;b)$ є дільником будь якого спільного кратного чисел a та $b.$ З цього випливає, що $a \cdot b \vdots k.$ Отже існує таке число c, що

$a \cdot b = c \cdot k.$

Оскільки $k \vdots a,$ то існує таке число $m,$ що $k = ma.$ Маємо: $a \cdot b = c \cdot m \cdot a,$ звідки $b = cm.$

Отже, $b \vdots c.$

Аналогічно доведемо, що $a \vdots c.$

Нехай $НСК(a;b)=k, НСД(a;b)=d$. Число $a \cdot b$ є спільним кратним чисел a і b. Відомо, що $НСК(a;b)$ є дільником будь якого спільного кратного чисел a та b. З цього випливає, що $a \cdot b \vdots k$. Отже існує таке число c, що

$a \cdot b = c \cdot k.$

Оскільки $k \vdots b$, то існує таке число μ, що $k = \mu \cdot b$. Маємо: $a \cdot b = c \cdot \mu \cdot b$, звідки $a = c\mu$.

Отже, $a \vdots c$.

Тому, c – спільний дільник чисел a і b. Тоді $d \geq c$. З рівності $a \cdot b = c \cdot k$ маємо:

$$k = \frac{a \cdot b}{c} \geq \frac{a \cdot b}{d} \qquad (1)$$

Відомо також, що якщо $a \vdots c$ і $b \vdots c$, то $\frac{a \cdot b}{c}$- спільне кратне чисел a і b.

Скориставшись цим, ми бачимо, що число $\frac{a \cdot b}{c}$ є спільним кратним чисел a і b.

Отже,

$$\frac{a \cdot b}{d} \geq k \qquad (2)$$

З нерівності (1) і (2) отримуємо, що $\frac{a \cdot b}{d} = k$.

Теорему доведено.

Використаємо дану теорему для розв'язування даної задачі. Зауважимо, $НСК(a,b) \cdot НСД(a,b) = a \cdot b$, для будь яких натуральних a і b. Розв'яжемо квадратне рівняння $x^2 - (m+n)x + mn = 0$.

$x^2 - (m+n)x + mn = 0,$

$D = (m+n)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m \cdot n = m^2 + n^2 + 2 \cdot m \cdot n - 4 \cdot m \cdot n = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n = (m-n)^2.$

$x_1 = \frac{m+n+m-n}{2} = \frac{2 \cdot m}{2} = m;$

$x_2 = \frac{m+n-m+n}{2} = \frac{2 \cdot n}{2} = n.$

Тому пари $(m;n)$ і $(НСД(m;n), НСК(m;n))$, є парами розв'язків квадратного рівняння $x^2 - (m+n)x + mn = 0$, тобто ці корені збігаються.

Маємо, що $m = НСД(m;n)$, $n = НСК(m;n)$.

Твердження задачі слідує з того, що:

$НСД(m;n) \vdots НСК(m;n)$.

Отже, дана задача розв'язана.

Література

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра: підручник для поглибленого вивчення математики. // Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М.С. – Х.: Гімназія, 2009. – 386с.

2. Агаханов Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике. 1993–2006: Окружной и финальный этапы // Под ред. Агаханова Н. Х. – М.:МЦНМО, 2007. – 472 с.
3. Ушаков Р. П. Одна задача - декілька розв'язань // Математика. – 1999. – №2(14), №3(15).
4. Обучение школьников по индивидуальным траекториям образовательного маршрута (по материалам проекта Института непрерывного педагогического образования Новгородского государственного университета) // Сост.С.С. Чагин. – М.: АПКиПРО, 2004. – 28с.
5. Родигіна І. Формування основних груп компетентностей учнів: можливості продуктивного навчання. // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2004. - №2.

Макаревич Оксана Олександрівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

АРИФМЕТИЧНІ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ НАВИЧОК

Арифметика – розділ математики, який вивчає найпростіші види чисел (натуральні, цілі, раціональні,) і найпростіші арифметичні операції над ними (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення чисел до степеня та добування з них кореня).

З глибокої давнини робота з числами поділялася на дві різні області: одна стосувалася безпосередньо властивостей чисел, друга була пов'язана з технікою обрахунків. Під «арифметикою» в багатьох країнах зазвичай мається на увазі саме ця остання область, яка, без сумніву, є найстаршою віткою математики.

Арифметику часто вважають першою сходинкою математики, знаючи яку можна вивчати складніші її розділи – алгебру, математичний аналіз, тощо. Навіть цілі числа – основний об'єкт арифметики – відносять, коли розглядають їх загальні властивості і закономірності, до вищої арифметики, чи теорії чисел.

Розв'язування арифметичних задач розвиває логічне мислення, кмітливість, дає необхідну підготовку до практичної діяльності і подальшого вивчення математики.

Розглянемо одну з таких задач.

<u>*Задача.*</u> Чи може добуток двох послідовних натуральних чисел дорівнювати добутку двох послідовних (додатних) парних чисел?

Перший спосіб розв'язання

Припустимо, що знайдуться два натуральних числа k і n такі, що

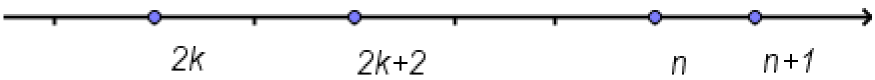
$$n(n+1) = 2k(2k+2). \qquad (1)$$

Позначимо числа $2k$ і $2k+2$ на координатній осі і розглянемо два випадки: $n \le 2k$ і $n > 2k$.

1) Якщо $n \le 2k$, то $n+1 < 2k+2$,

тоді $n(n+1) < 2k(2k+2)$. Отримали суперечність з (1).

2) Якщо $n > 2k$, то $n+1 \geq 2k+2$,



тоді $n(n+1) > 2k(2k+2)$. Отримали суперечність з (1).

Отже наше припущення, про існування натуральних k і n, для яких виконується рівність (1) неправильне.

Другий спосіб розв'язання

Повернемося до рівняння (1) та виконаємо додаткові перетворення, а саме помножимо обидві частини рівняння на 4 та додамо до обох частин (1) 4:

$$n(n+1) = 4k(k+1),$$

$$4(n+1) = 16k(k+1),$$

$$4n^2 + 4n + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1),$$

$$(2n+1)^2 + 3 = (2(2k+1))^2.$$

Позначимо $x = 2n+1$, $y = 2(2k+1)$. Отримаємо рівняння:

$$x^2 + 3 = y^2,$$

$$y^2 - x^2 = 3,$$

$$(y-x)(y+x) = 3.$$

Оскільки 3 – просте число і x, y – натуральні, то остання рівність може бути справедливою лише у випадку, коли

$$\begin{cases} y + x = 3 \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1, \end{cases}$$

що неможливо, оскільки $x = 2n+1 \neq 1$ для всіх натуральних n. Отримали протиріччя.

Суперечність виникла там, де ми припустили, що добуток двох послідовних натуральних чисел може дорівнювати добутку двох послідовних (додатних) парних чисел.

Третій спосіб розв'язання

Додамо до обох частин вихідного рівняння (1) 1 та виконаємо перетворення:

$$n(n+1)=2k(2k+2),$$

$$n^2+n+1=4k^2+4k+1,$$

$$n^2+n+1=(2k+1)^2.$$

Проаналізуємо отриману рівність. Права частина рівняння $(2k+1)^2$ є квадратом натурального числа. В той же час ліва частина

$$n^2<n^2+n+1<(n+1)^2$$

і тому не може дорівнювати квадрату цілого числа. Суперечність. Отже припущення, що існують такі натуральні числа, для яких може виконуватися умова задачі не вірне.

Відповідь. Ні. Добуток двох послідовних натуральних чисел не може дорівнювати добутку двох послідовних (додатних) парних чисел.

Розглядаючи різні способи розв'язування арифметичних задач, зокрема наведеної вище задачі, можна помітити, що кожен з них опирається на різні твердження і різний теоретичний матеріал.

Розв'язуючи арифметичні задачі, школярі знайомляться з математичною теорією їх розв'язання, шукають та пізнають нові методи розв'язання або нові розділи математики. Інакше кажучи, розв'язуючи арифметичні задачі, учні набувають математичних знань, підвищують свою математичну культуру. Розв'язування арифметичних задач привчає виділяти умови і висновки, дані і шукані величини, знаходити спільне; порівнювати і протиставляти факти. Цей процес виховує правильне мислення, і перш за все привчає до повноцінної аргументації. Таким чином формується особливий стиль мислення і збереження формально-логічної схеми міркувань, лаконічність висловлювань, чітка розмежованість ходу мислення, набування навичок правильного використання і розуміння математичної символіки.

Розв'язування арифметичних задач спонукають до порівняння і аналізу, конкретизації і абстрагування, порівняння і перевірки, узагальнення та систематизації набутих знань.

Розвиваючій функції задач останніми роками приділяється особлива увага. Адже задачі не тільки і не стільки мають сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються. Розвиваюча функція задач спрямована на розвиток мислення учнів, на формування в них розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень, уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо.

Література

1. Сендеров В. Математический праздник / В. Сендеров, Б. Френкин //Квант. – 2004. – № 4. – С. 46.
2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-Еко, 2000. – 512 с.

Station

Другий спосіб розв'язання

Нехай $P_2^R \overset{df}{=} \left\{ \alpha + \beta i \middle| \alpha, \beta \in R \wedge i \notin R \wedge i^2 = -1 \right\}$ – множина всіх лінійних двочленів виду $\alpha + \beta i$ від i. Будемо вважати, що:

$\alpha_1 + \beta_1 i \overset{df}{=} (\alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2)$;

$\alpha_1 + \beta_1 i = \alpha_1 + i\beta_1 = \beta_1 i + \alpha_1$;

$\beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta i = \alpha$;

$\alpha = 0 \Rightarrow \alpha + \beta i = \beta i = i\beta$;

$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta i = 0$;

$\alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta i = i = 1 \cdot i$.

Введемо на множині $P_2^R(i)$ цих лінійних двочленів від i дії додавання + та $\cdot$. Нехай $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$. Тоді сума $z_1 + z_2$ і добуток $z_1 \cdot z_2$ визначається таким чином:

$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) \overset{df}{=} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i$;

$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) \overset{df}{=} (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) i$.

Легко бачити, що обидві дії над цими двочленами проводяться, як зі звичайними алгебраїчними виразами з додатковою умовою виконання рівності $i^2 = -1$, яка, в силу рівності

$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) \overset{df}{=} (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) i$, справді, має місце.

Третій спосіб розв'язання

Розглянемо ще одну з інтерпретацій для поля комплексних чисел – у вигляді поля спеціальних матриць другого порядку над полем дійсних чисел.

Нехай $M_2^C(R) \overset{df}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in R \right\}$ – множина матриць другого порядку вказаного вище виду над полем дійсних чисел. Легко бачити, що ця множина замкнута відносно додавання та множення матриць такого виду, тобто якщо $A_1, A_2 \in M_2^C(R)$, то й $A_1 + A_2$, $A_1 \cdot A_2 \in M_2^C(R)$.

У результаті можна розглядати алгебру $\left(M_2^C(R);+,\cdot\right)$ вказаних матриць та досліджувати її операції додавання та множення.

Література

1. Гарвацький В.С. Числові системи / Гарвацький В.С., Калашніков І.В., Алєксєєнко А.П., Лужанська С.В.– Вінниця, 2009. – 395с.
2. Дориченко С. Комплексные числа / С.Дориченко // Квант. – 2008. - №5, с. 11-18.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1965. – 432 с.
4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: В.шк., 1979. – 560 с.

Хвищук Ірина Михайлівна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»
напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОДІЛЬНІСТЬ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Є твердження, які справедливі в кількох окремих випадках. Усі окремі випадки розглянути неможливо. Як же дізнатися, чи справедливі ці твердження взагалі? Дати відповідь на це запитання інколи вдається шляхом застосування особливого методу міркувань, який називається *методом математичної індукції.* Відповідно до програми середньої загальноосвітньої школи метод математичної індукції вивчається не в усіх навчальних закладах. Але це достатньо нескладний, а, головне, ефективний засіб розв'язування широкого кола досить специфічних задач.

Метод математичної індукції ґрунтується на так званому *принципі математичної індукції,* що є різновидом аксіоми індукції (однієї з аксіом формальної теорії натуральних чисел). Його можна сформулювати так:

Якщо твердження $A(n)$, де n — натуральне число, істинне для n = 1, і з того, що воно істинне для $n = k$, де k — будь-яке натуральне число, випливає його істинність для наступного числа $n = k + 1$, то твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального числа n.

Таким чином, доведення істинності того чи іншого математичного твердження $A(n)$ для довільного натурального $n \in N$ здійснюється такими трьома кроками:

1. База індукції – доводимо (перевіряємо) істинність твердження $A(1)$.

2. Крок індукції – припускаємо, що $A(n)$ істинне для $n = k$, і доводимо істинність цього твердження для $n = k + 1$, тобто доводимо справедливість теореми

$A(k) \Rightarrow A(k + 1)$.

3. Висновок – на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження істинне для будь-якого натурального $n \in N$.

Зазначимо, що при реалізації принципу математичної індукції серед відмічених вище трьох кроків найбільш складним, безперечно, є реалізація другого кроку – кроку індукції [1].

За допомогою методу математичної індукції можна доводити різні твердження, що стосуються подільності натуральних чисел. Наведемо приклади задач, які можна розв'язувати двома способами, один із них – це метод математичної індукції.

Задача 1. Доведіть, що для будь-якого натурального n сума $2n^3 - 3n^2 + n$ ділиться на 6.

Перший спосіб розв'язання

Метод математичної індукції.

Позначимо через $A(n)$ твердження “$x_n = 2n^3 - 3n^2 + n$ ділиться на 6”.

1. Оскільки $x_1 = 2 - 3 + 1 = 0$, то для $n = 1$ сума x_n ділиться на 6, а це означає, що твердження $A(1)$ істинне.

2. Доведемо істинність твердження: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$, тобто той факт, що з твердження “x_k ділиться на 6” випливає твердження “x_{k+1} ділиться на 6”.

Справді,

$$x_{k+1} = 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + k + 1 =$$
$$= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 - 3k^2 - 6k - 3 + k + 1 =$$
$$= 2k^3 - 3k^2 + k + 6k^2 = x_k + 6k^2.$$

Як бачимо, сума x_{k+1} складається з двох доданків. Перший з них ділиться на 6 на підставі $A(k)$, другий також ділиться на 6. Отже, кожний із двох доданків у виразі x_{k+1} ділиться на 6. Тому x_{k+1} ділиться на 6.

3. На основі принципу математичної індукції твердження $A(n)$ істинне для будь-якого натурального n.

Другий спосіб розв’язання

$$2n^3 - 3n^2 + n = n(2n^2 - 3n + 1) = n(n-1)(2n-1).$$

НСД (2,3)=1. Переконаємося, що число ділиться на 2.

Розглянемо випадки:

1. $n = 2k;\ n(n-1)(2n-1) = 2k(2k-1)(4k-1) \vdots 2;$
2. $n = 2k+1;\ n(n-1)(2n-1) = (2k+1)2k(4k+1) \vdots 2.$

Аналогічним способом переконаємося, що $n(n-1)(2n-1) \vdots 3$.

Розглянемо випадки:

1. $n = 3k;\ 3k(3k-1)(6k-1) \vdots 3;$
2. $n = 3k+1;\ (3k+1)3k(6k+1) \vdots 3;$
3. $n = 3k+2;\ (3k+2)(3k+1)(6k+3) \vdots 3.$

Отже, $2n^3 - 3n^2 + n$ ділиться на 6 при $\forall n \in N$ [2].

<u>*Задача 2.*</u> Довести, що число $n^3 - 4n$ ділиться на 3 при кожному натуральному n.

Перший спосіб розв’язання

Метод математичної індукції.

Коли $n = 1$, маємо $n^3 - 4n = 1^3 - 4 = -3$. Це число ділиться на 3.

Припустимо, що при $n = k$ число $k^3 - 4k$ також ділиться на 3. Тоді для $n = k + 1$ матимемо:

$$(k+1)^3 - 4(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 4k - 4 =$$
$$= k^3 - 4k + 3(k^2 + k - 1).$$

Оскільки, за припущенням, $k^3 - 4k$ ділиться на 3, то й $(k+1)^3 - 4(k+1)$ ділиться на 3.

Отже, на основі принципу математичної індукції число $n^3 - 4n$ ділиться на 3 при кожному натуральному n.

Другий спосіб розв'язання

Натуральні числа при діленні на 3 можуть давати лише остачі 0, 1, 2. Остачу 0 дають числа $n = 3k$, остачу 1 – числа $3k+1$, остачу 2 – числа $3k+2$, де $k -$ ціле невід'ємне число. Оскільки при кожному k числа

$(3k)^3 - 4 \cdot 3k$,

$(3k+1)^3 - 4 \cdot (3k+1) = 3 \cdot (9k^3 + 9k^2 - k - 1)$,

$(3k+2)^3 - 4 \cdot (3k+2) = 3 \cdot (9k^3 + 18k^2 + 12k)$

діляться на 3, то $n^3 - 4n$ ділиться на 3 при кожному натуральному n [3].

Література

1. Гарвацький В. С., Шарапанівська І. А. Вибрані питання з математики. – Вінниця: ВДПУ, 2000. – с. 7-23.
2. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. – Тернопіль, 2007. – 80с.
3. Козаченко О. І. Метод математичної індукції // Математика. – 2010. – №48. – с. 11-19.

Розділ VI. Планіметрія

Баранова Ольга Олександрівна

студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЕЛЕМЕНТІВ КОЛА

З поняттям кола та властивостями його елементів учні знайомляться ще у 8 класі під час вивчення теми «Вписані та описані чотирикутники». Також у цьому ж навчальному році вони вивчають ознаки подібності трикутників. Тому мають всі необхідні знання для розв'язання запропонованої задачі.

Задача. Хорда CD кола з центром O перпендикулярна до її діаметра AB, а хорда AE ділить навпіл радіус OC. Доведіть, що хорда DE ділить навпіл хорду BC.

Пропонується три способи розв'язання, причому перші два повністю опираються на базові знання учнів середньої загальноосвітньої школи. Третій же спосіб ґрунтується на застосуванні теореми Паскаля. Дана теорема вивчається у школах з поглибленим вивченням математики, її формулювання: нехай A, B, C, D, E, F - шість точок даного кола (які лежать на колі в заданій послідовності), тоді точки перетину прямих AB і DE, BC і EF, CD і AF лежать на одній прямій.

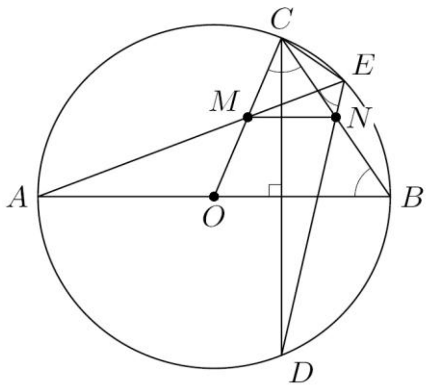


Рис.1

Будемо доводити більш загальне твердження: якщо хорда AE перетинає радіус OC в точці M, а хорда DE — хорду BC в точці N, то $\frac{CM}{CO}=\frac{CN}{CB}$ (в умові задачі ці відношення рівні $\frac{1}{2}$).

Перший спосіб розв'язання(див. рис. 1)

Відмітимо, що дуги AC і AD симетричні відносно прямої AB, тобто їх кутові величини рівні. Тому рівні кути AEC і AED, які вписані в коло і спираються на ці дуги. Кути AEC і ABC рівні як вписані, що спираються на дугу AC, а кути ABC і OCB рівні, так як трикутник OCB рівнобедрений. Звідси випливає, що $\angle AED=\angle OCB$, тобто $\angle MEN=\angle MCN$, а це означає, що точки M, N, E і C лежать на одному колі. Через це $\angle MNC=\angle MEC=\angle OBC$. Отже, трикутники MNC і OBC подібні, а тому $\frac{CM}{CO}=\frac{CN}{CB}$.

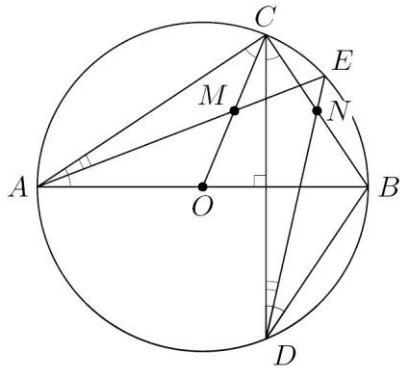


Рис.2

Другий спосіб розв'язання (див. рис. 2)

Розглянемо трикутники AOC і DBC. Вони рівнобедрені, звідси випливає, що $\angle ACO=\angle CAB$ і $\angle DCB=\angle CDB$. Але $\angle CAB=\angle CDB$ як вписані, такі, що спираються на одну дугу. Тому ці трикутники подібні, а оскільки $\angle CAM=\angle CDN$ (як вписані, що спираються на дугу CE), то точка M ділить відрізок OC в такому ж відношенні, що й точка N ділить відрізок BC.

Третій спосіб розв'язання (див. рис. 3)

Відмітимо, що $FD \| AB$. Дійсно, $\angle FDC=90°$. За теоремою Паскаля (якщо шестикутник $ABCFDE$ вписаний в коло, то точки Q, N, M перетину прямих AB і DF, BC і ED, CF і EA лежать на одній прямій. В нашому випадку точка Q є нескінченно віддаленою.), яка застосована до шестикутника $ABCFDE$, отримуємо, що $MN \| AB$, звідки й слідує твердження, що доводиться.

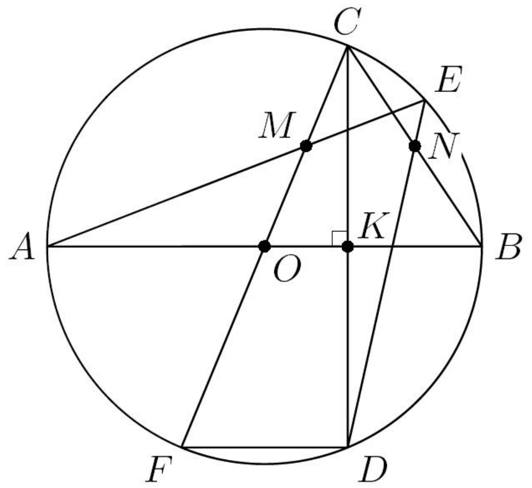


Рис.3

Зауваження. На рисунках рис. 1 – рис. 3 хорда *CD* розташована ближче до точки *B*, ніж до точки *A*. У разі, коли це не так, міркування проведені в розв'язаннях, також залишаються в силі.

Розв'язавши дану задачу учні мають можливість навчитися застосовувати відомі знання у нестандартних ситуаціях. Задача є доцільною під час повторення та систематизації навчального матеріалу з курсу геометрії 8 класу.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы /Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. —М.:МЦНМО, 2007. —472 с.

2. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики. — Х.: Гімназія, 2008. — 240 с.

3. Олімпіадні задачі з геометрії: навч.-метод. посіб. / В. Ясінський. – К.: Шк. світ, 2008. – 128с.

Благодір Наталя Василівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ ВЛАСТИВОСТІ БІСЕКТРИСИ КУТА ТРИКУТНИКА

Відповідно до навчальної програми вивчення математики має сприяти формуванню в учнів загальнонавчальних умінь, культури мовлення, чіткості й точності думки, критичності мислення, здатності відчувати красу ідеї, методу розв’язання задачі або проблеми, таких людських якостей, як наполегливість, сила волі, здатність до переборення труднощів, чесність, працелюбство та ін. Всі ці риси можна формувати в процесі навчання геометрії, зокрема, на уроках «однієї задачі».

Багато вчителів, методистів (Вайман В., Верзілова Н., Готман Е., Каплунович І., Кушнір І., Скопец З. та ін.) присвятили свої розробки урокам однієї задачі. Зокрема, в цих працях описані можливі технології роботи вчителя на уроці та обґрунтовані позитивні сторони такої роботи. При розв’язуванні задачі кількома способами, учні повторяють багато теоретичних фактів, методи і прийоми розв’язування задач, накопичують певний досвід використання одних і тих знань до різних ситуацій, також розв’язування задачі кількома способами активізує навчальну діяльність школярів, прививає інтерес до предмету. Вміння розв’язувати задачу різними способами та методами додає учням упевненості, що дану задачу можна розв’язати принаймні одним із способів.

Однак, через брак часу, не завжди можна проводити такі уроки «однієї задачі» та й учні можуть бути не готовими до такого уроку. Тому на уроці можна розглянути, наприклад, два способи і запропонувати учням вдома спробувати віднайти ще якісь способи. На перших етапах навчання можна підказувати, який метод чи спосіб варто використати. Отже, потрібно систематично навчати й заохочувати учнів розв’язувати задачі різними способами.

Навчання учнів розв’язувати задачі різними способами можна здійснювати при доведенні теорем різними способами. Запропоновані доведення мають бути в межах одного розділу, або при їх доведенні використані раніше вивчені твердження. Наприклад, теорема про бісектрису внутрішнього кута трикутника вивчається у 8 класі при вивчені теми «Подібність трикутників». Тому у доведені першим способом використовується подібність прямокутних трикутників, у доведеннях третім і четвертим способом використана теорема Фалеса і узагальнена теорема Фалеса. Ці теоретичні відомості вивчаються у межах теми, «Подібність трикутників». При доведенні властивості бісектриси другим способом використовуються властивості вписаних кутів, які вивчаються у 8 класі в межах вивчення теми «Чотирикутники», що передує вивченню теми «Подібність трикутників». Доведення шостим способом передбачає використання властивостей площ та формул обчислення площ трикутників. Ці теоретичні відомості вивчаються у 8 класі в межах теми «Многокутники. Площі многокутників», яка відповідно до навчальної програми, вивчається після подібності трикутників. Отже, перші п'ять доведень властивості бісектриси можливі в межах вивчення теми «Подібність трикутників». Доведення шостим способом може з'явитись пізніше, внаслідок вивчення нових теоретичних відомостей.

Теорема. Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону трикутника на частини, що пропорційні двом іншим сторонам цього трикутника.

Перший спосіб розв'язання

З вершин B та C опустимо перпендикуляри BM і CN на пряму AL.

Трикутники AMB та ANC – подібні прямокутні трикутники (за гострим кутом ∠CAN=∠BAM) (рис.1):

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BM} \qquad (1)$$

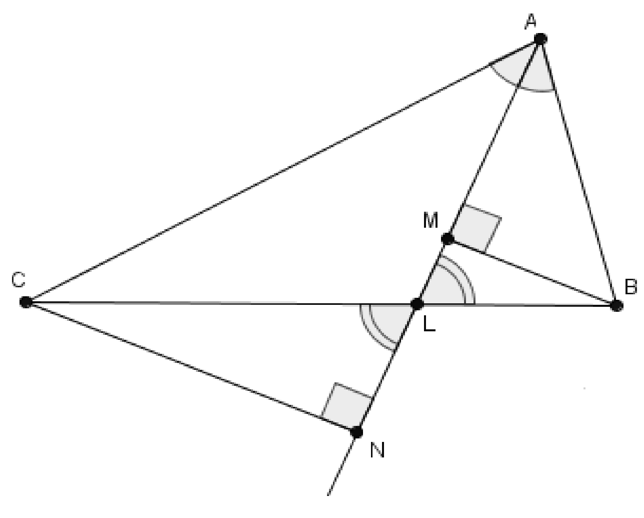


Рис.1

Трикутники LMB та LNC – також подібні прямокутні трикутни (за гострим кутом ∠CLN=∠BLM – як вертикальні кути):

$$\frac{CL}{LB} = \frac{CN}{BM} \qquad (2)$$

Із рівностей (1) та (2), маємо:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{LB},$$

що і треба було довести. [2]

Другий спосіб розв'язання

Навколо трикутника ABC опишемо коло та продовжимо бісектрису AL до перетину з цим колом у точці W (рис.2).

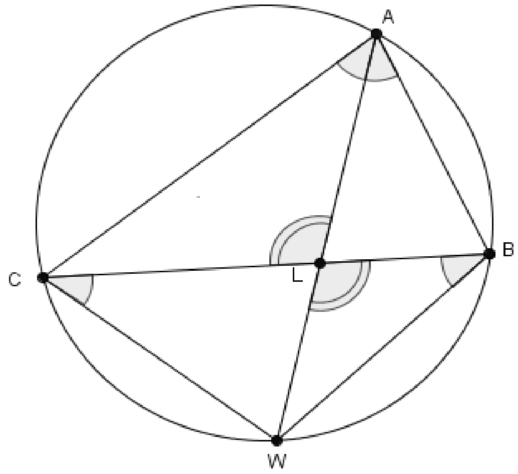


Рис.2

Трикутники ACL та BWL подібні так як вони утворені на вертикальних кутах і ∠CAL=∠LBW як вписані, що спираються на одну дугу. З подібності трикутників ACL та BWL маємо:

$$\frac{AC}{WB} = \frac{CL}{WL}.$$

Аналогічно, з подібності трикутників ALB та CLW маємо:

$$\frac{AB}{CW} = \frac{LB}{LW}.$$

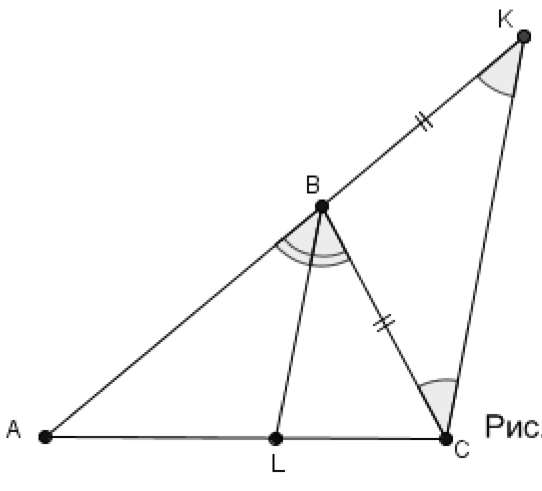


Рис.3.

Враховуючи, що WB=WC (∠BCW=∠CBW), маємо : $\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{LB}$, що і треба було довести.[3]

Третій спосіб розв'язання

Нехай ABC – довільний трикутник, а BL – його бісектриса (рис.3).

Покажемо, що AL:LC=AB:BC.

Проведемо пряму CK, паралельну BL, до перетину з прямою AB в деякій точці K. ∠ABL=∠AKC, як відповідні кути при паралельних прямих BL і KC і січній AK, ∠LBC=∠BCK, як різносторонні внутрішні кути при тих самих паралельних прямих і січній BC. Оскільки ∠ABL=∠LBC, то і ∠AKC=∠BCK, то трикутник BKC – рівнобедрений, BK=BC.

За узагальненою теоремою Фалеса AL:LC=AB:BK. Замінивши в пропорції BK рівним йому відрізком BC , матимемо AL:LC=AB:BC, що і треба було довести.[1]

Четвертий спосіб розв'язання

Нехай ABC – даний трикутник, BD – його бісектриса і $\angle ABD = \angle CBD = \beta$ (рис.4).

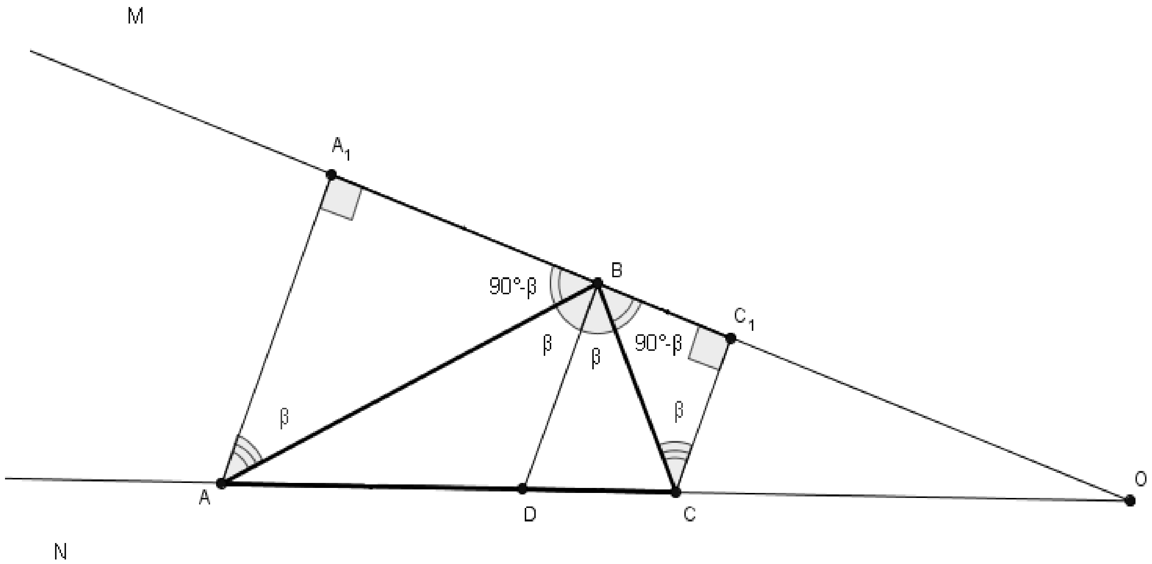


Рис.4.

Проведемо через точку B бісектриси BD пряму OM перпендикулярну до BD, яка перетинається з продовженням сторони AC в точці O. Проведемо $AA_1 \perp OM$ і $CC_1 \perp OM$. За теоремою Фалеса ($AA_1 \parallel CC_1$) маємо:

$$\frac{A_1B}{BC_1} = \frac{AD}{DC}$$

Прямокутні трикутники $\triangle AA_1B$ і $\triangle CC_1B$ є подібними за гострим кутом:

$$\angle A_1AB = \angle C_1CB = \beta,$$

З подібності прямокутних трикутників AA_1B і CC_1B маємо:

$\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{A_1B}{C_1B} = \frac{AB}{BC}$, так як $\frac{A_1B}{C_1B} = \frac{AD}{DC}$, то отримаємо

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC},$$

що й треба було довести.

П'ятий спосіб розв'язання

Нехай ABC – даний трикутник і BD – його бісектриса. Нехай $\angle ABD = \angle CBD = \beta$ і $\angle ADB = \alpha$ (рис.5).

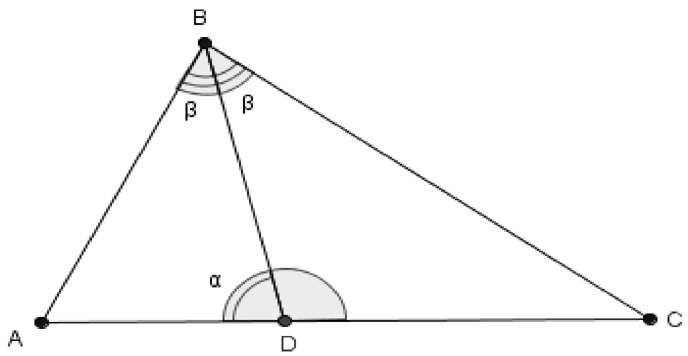


Рис.5

Застосуємо теорему синусів до трикутників ABD і CBD:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha};$$

$$\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin(180^\circ-\alpha)} = \frac{BC}{\sin\alpha}.$$

Якщо першу рівність поділити на другу, дістанемо:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC},$$

що й треба було довести. [4]

Шостий спосіб розв'язання

Нехай AL – бісектриса кута BAC трикутника ABC (рис.6).

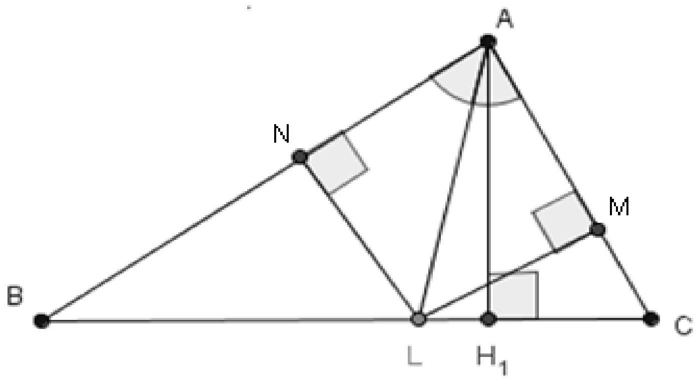


Рис.6

Позначимо площі трикутника ALC та ALB відповідно S_1 та S_2.

$$S_1 = \frac{1}{2} AH_1 \cdot CL;$$

$$S_2 = \frac{1}{2} AH_1 \cdot LB.$$

Оскільки AH_1 - висота обох вищезгаданих трикутників, то

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}AH1 \cdot CL}{\frac{1}{2}AH1 \cdot LB} = \frac{CL}{LB} \qquad (3)$$

Висоти трикутників ALC та ALB, що проведені до сторін AC та AB з точки L, рівні між собою, тому що трикутники ANL і AML рівні за гіпотенузою і гострим кутом (за стороною і двома прилеглими кутами). Отримаємо

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}LM \cdot AC}{\frac{1}{2}LN \cdot AB} = \frac{AC}{AB} \qquad (4)$$

Із рівностей (3) та (4), одержуємо:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{LB},$$

що і треба було довести.[3]

Отже пошук і аналіз різних доведень сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів та зацікавлює їх своїм предметом.

Література

1. Бевз Г. П. Геометрія: підручн. для 8 кл. загальоосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2008. – 256 с.
2. Бурда М. І. Геометрія: підручн. для 8 кл. загальоосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. – К.: «Зодіак - ЕКО», 2008. – 239 с.
3. Кушнір І. Повернення втраченої геометрії. Серія: Математичні обрії України / І. Кушнір. - К.: Факт, 2000.- 280 с.
4. Погорєлов О. В. Геометрія: навч. посібник для 6 – 10 класів середньої школи / О. В. Погорєлов. – К.: «Радянська школа», 1988. – 286 с.

Василина Наталя Олександрівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

П'ЯТЬ СПОСОБІВ ПОБУДОВИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

Згідно діючої навчальної програми з математики, у систематичному курсі планіметрії в 7 класі передбачено вивчення теми «Геометричні побудови». Саме в ІІ семестрі сьомого класу учні вивчають п'ять основних побудов за допомогою циркуля і лінійки: побудова трикутника за трьома сторонами; побудова кута, що дорівнює даному; побудова бісектриси даного кута; поділ даного відрізка навпіл та побудова прямої, яка перпендикулярна до даної прямої.

У результаті вивчення даної теми діти повинні знати, що таке задача на побудову, геометричне місце точок, уміти доводити правильність виконаних побудов для основних задач, розв'язувати основні задачі на побудову та нескладні задачі, розв'язування яких зводиться до основних побудов і найголовніше застосовувати вивченні означення і властивості до розв'язування задач. Учні вперше ознайомлюються з методом геометричних місць розв'язування задач.

При вивченні геометричних побудов у школі, до основних побудов слід віднести і побудову паралельних прямих, оскільки ця побудова часто використовується при розв'язуванні багатьох задач.

Існує декілька різних способів побудови паралельних прямих. Майбутньому вчителеві математики доцільно володіти всіма відомими способами розв'язування цієї задачі.

<u>*Задача.*</u> Через точку А провести пряму, паралельну до заданої прямої а.

Перший спосіб розв'язання

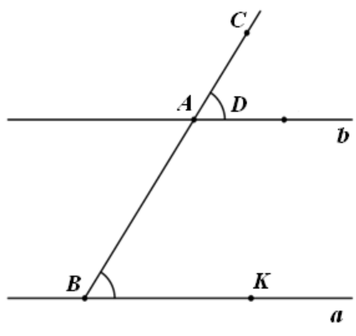
За допомогою рівних кутів [2].

Дано: пряма a, точка A, яка не належить a.

Побудувати: пряму b через точку A, $b||a$.

Побудова:

1) Проводимо півпряму AM, де M – довільна точка прямої a (рис. 1).



2) Відкладаємо від півпрямої AM $\angle MAK = \angle AMP$ так, щоб ці кути були у різних півплощинах відносно прямої AM.

3) Пряма AK шукана паралельна пряма b. Рис. 1

Доведення: $\angle MAK = \angle AMP$, а ці кути є внутрішніми різносторонніми кутами, утвореними при перетині прямих.

Другий спосіб розв'язання

За допомогою рівних кутів [1].

Побудова:

1) На заданій прямій a обираємо довільну точку B (рис. 2).

2) Через задану точку A і точку B проводимо пряму BC. В результаті утворився кут, який ми позначимо $\angle ABK$.

3) Будуємо $\angle CAD = \angle ABK$ так, щоб ці кути стали відповідними при прямих AD, BK і січній BA.

Доведення: побудована таким способом пряма b, задовольняє задачу

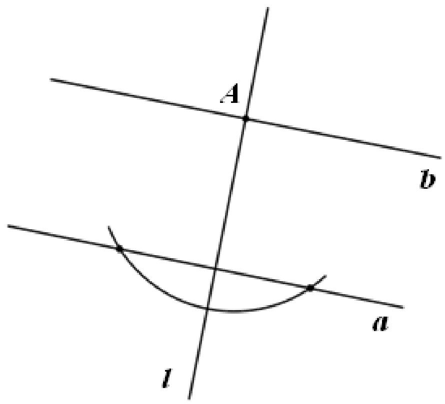


Рис.2

тому, що вона проходить через дану точку A і паралельна заданій прямій a, оскільки $\angle CAD = \angle ABK$, як ввідповідні.

Третій спосіб розв'язання

За допомогою двох послідовних перпендикулярів [3].

Побудова:

1) Будуємо через точку A пряму l, $l \perp a$ (рис. 3).

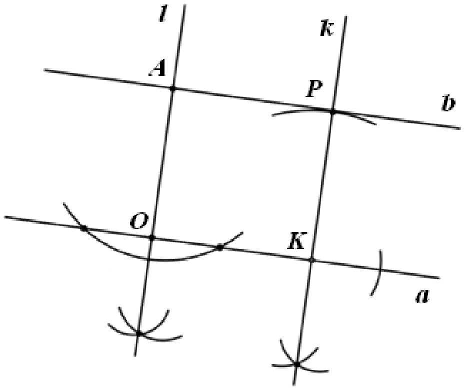
2) Будуємо через точку A пряму b, $b \perp l$.

3) Пряма b – шукана паралельна пряма.

Доведення: оскільки $a \perp l$, а $b \perp l$, то звідси випливає, що $a || b$.

Четвертий спосіб розв'язання

Рис.3



За допомогою побудови двох паралельних перпендикулярів[3].

Побудова:

1) Будуємо через точку A пряму l, $l \perp a$. O – точка перетину прямих a і l (рис. 4).

2) Будуємо пряму k через довільну точку K прямої a, $k \perp a$.

3) На півпрямій прямої k, що лежить у одній півплощині з точкою A, відкладемо відрізок $KP=OA$.

4) Пряма AP – шукана паралельна пряма b.

Доведення: оскільки $l \perp a$ і $k \perp a$, то $l||k$. Так як $OA \in l$, $PK \in k$, то $OA|| PK$. $OA=PK$ за побудовою. За означенням паралелограма, утворений чотирикутник $APKO$ – паралелограм. Отже, $AP||OK$.

П'ятий спосіб розв'язання

Побудова:

1) Описуємо дугу довільним радіусом R з центром в заданій точці A (рис. 5). В результаті перетину кола з прямою a отримали точку B.

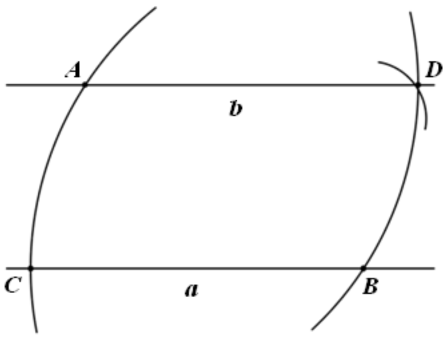
2) З точки B, тим самим радіусом R, описуємо дугу AC.

3) Розхилом циркуля радіуса AC, з точки B, робимо засічку і отримуємо точку D.

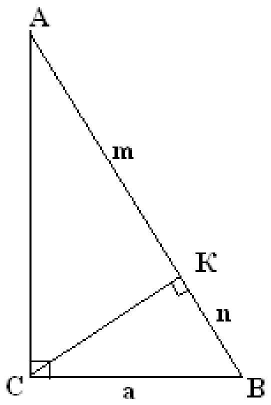
4) Сполучаємо точки A і D.

5) Отримуємо шукану пряму b, яка є паралельною до заданої прямої a.

Доведення: за побудовою $AD=CB$ та $AC= DB$, тобто $ADBC$ – паралелограм, тобто $b||a$.



Задачі на побудову мають значну дидактичну цінність, оскільки їх розв'язування більше, ніж розв'язування інших математичних задач, сприяють розвитку таких рис учнів, як кмітливість, винахідливість, оригінальність, гнучкість мислення, уважність, спостережливість, формує навички евристичної діяльності.



Література

1. М.І. Бурда. Геометрія: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І.Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак – ЕКО, 2007. – 208 с.
2. Забранський В. Задачі на побудову в шкільному курсі планіметрії/ В.Забранський //Математика в школі. – 2007. - №4. – с. 12-17.
3. Нагібін Ф.Ф. Геометричні задачі у восьмирічній школі. Метод. посібн. для вчителів/ Ф.Ф. Нагібін, О.Ф. Семенович. – К.: Радянська школа.– 1967. С. 126-167.

Войтко Людмила Валеріївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ ЗНАХОДЖЕННЯ КУТІВ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

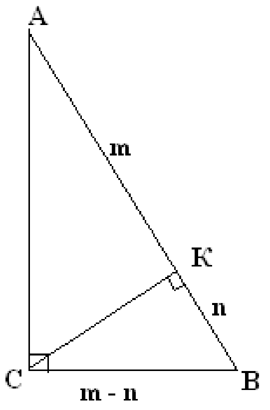
Серед компонентів системи методичних знань та умінь молодого вчителя, що мають особливу значимість на сьогодні: розуміння основних завдань і шляхів розвитку прийомів розумової діяльності учнів у процесі навчання математики. Розглянемо, для прикладу, зміст одного з уроків геометрії спланований вчителем для поліпшення умов формування знань та умінь учнів про властивості геометричних фігур, зокрема властивості кутів у прямокутному трикутнику.

1. Довести, що висота і медіана прямокутного трикутника, проведені до гіпотенузи, утворюють кут, який дорівнює різниці гострих кутів трикутника.
2. Довести, що в прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить навпіл кут між медіаною і висотою, які опущені на гіпотенузу.
3. Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних з ним. Довести, що цей трикутник прямокутний.
4. В прямокутному трикутнику висота, яка опущена на гіпотенузу, ділить її на відрізки, різниця яких дорівнює одному з катетів трикутника. Знайти кути трикутника.
5. Площа рівностороннього трикутника, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, вдвічі більша площі останнього. Найти кути прямокутного трикутника.

Для прикладу розглянемо методику розв’язування задачі 4.

Перший спосіб розв’язання

1) a = m - n (за умовою);
2) ΔABC ~ ΔCBK, бо <C=<K=90°, <B-спільний;



Отже, $\frac{CB}{KB} = \frac{AB}{CB}$; $\frac{a}{n} = \frac{m+n}{a}$;

Враховуючи умову a = m - n, маємо $\frac{m-n}{n} = \frac{m+n}{m-n}$, тому

$(m-n)^2 = n(m+n);$

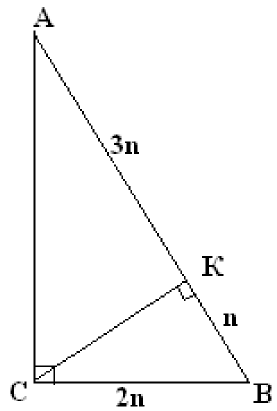
$m^2 - 2mn + n^2 = mn + n^2;$

$m^2 - 3mn = 0;$

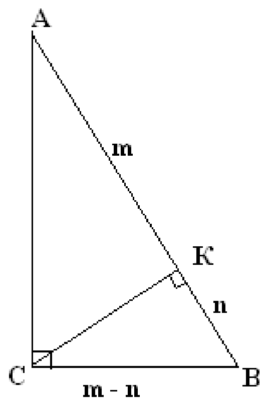
m(m – 3n) = 0;

m = 0 або m – 3n = 0;

m = 3n, тому a = 3n – n = 2n;



3) Таким чином, маємо AB = 4n, CB = 2n. Оскільки катет CB вдвічі менший за гіпотенузу AB, то <A = 30°, тому <B = 90° - 30° = 60°.



Другий спосіб розв'язання

1) a = m – n (за умовою);
2) Розглянемо ΔABC (<C = 90°):

$\cos < B = \frac{CB}{AB} = \frac{m-n}{m+n};$

3) Розглянемо ΔKBC (<K = 90°):

$\cos < B = \frac{KB}{CB} = \frac{n}{m-n};$

4) Отже, $\frac{m-n}{m+n} = \frac{n}{m-n}$;

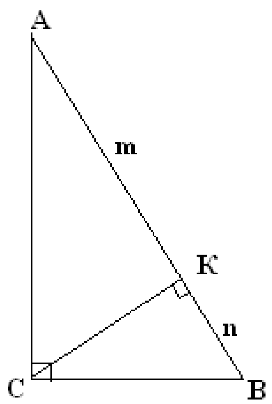
$(m-n)^2 = n(m+n);$

Далі аналогічно способу 1.

Третій спосіб розв'язання

1) a = m – n (за умовою);
2) CK – висота прямокутного трикутника до гіпотенузи, тому

$CK^2 = mn \rightarrow CK = \sqrt{mn};$



3) Розглянемо ΔCKB (<K = 90°):

За теоремою Піфагора

$CB^2 = CK^2 + KB^2;$

$(m-n)^2 = mn + n^2;$

Далі аналогічно способу 1.

Четвертий спосіб розв'язання

1) a = m – n (за умовою);
2) Розглянемо ΔACB (<C = 90°):

$AC^2 = (m+n)^2 - (m-n)^2;$

$AC^2 = (m+n-m+n)(m+n+m-n);$

$AC^2 = 2n \cdot 2m;$

$AC^2 = 4mn;$

$AC = \sqrt{4mn};$

$AC = 2\sqrt{mn};$

3) $CK = \sqrt{mn}$ (властивість висоти прямокутного трикутника проведеної до гіпотенузи);

4) Розглянемо ΔAKC (<K = 90°): $AC = 2\sqrt{mn}$ (з п. 2);

$CK = \sqrt{mn}$ (з п. 3);

Отже, <A = 30°;

5) Розглянемо ΔABC (<C = 90°): <B = 90° - 30° = 60°.

Відповідь. 90°, 60°, 30°.

Очевидно, що розглянуті чотири способи розв'язання вказаної задачі не вичерпують всіх можливих варіантів міркувань, можливих у процесі пошуку величин гострих кутів прямокутного трикутника, при заданій умові даної задачі. Вчитель математики створює хороші умови для систематизації знань учнів розглядаючи ці способи.

Войтовик Олексій Вікторович
студент 2 курсу, напрям підготовки «Математика»

СІМ ДОВЕДЕНЬ ОДНІЄЇ НЕРІВНОСТІ

Задачі на доведення нерівностей є класичними в елементарній математиці, водночас такі задачі вважаються задачами підвищеного рівня складності. Тому, на нашу думку, доцільним є розглядання різних доведень однієї нерівності, що сприятиме кращому розумінню процесу самого доведення. Також це дає змогу опанувати якомога більше методів доведення.

Розглянемо конкретний приклад.

Доведіть, що для будь-якого трикутника ABC має місце нерівність: $(a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}S$, а рівність має місце лише тоді, коли $a=b=c$.

Перший спосіб доведення

Для будь-яких додатних чисел a,b,c має місце нерівність $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$. Використовуючи його, із нерівності $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ виводимо, що $4\sqrt{3}S \leq \frac{4p^2}{3} \leq a^2+b^2+c^2$. Рівність має місце лише при $a=b=c$.

Другий спосіб доведення

Скористаємось рівністю $ctgA = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$, яка випливає з теореми косинусів і формули $2S = bc\sin A$. Маємо: $ctgA + ctgB + ctgC = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

Тепер застосуємо нерівність $ctgA + ctgB + ctgC \geq \sqrt{3}$ і отримаємо, що $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Третій спосіб доведення

Виразимо a, b, c і S через R і синуси кутів трикутника. Застосувавши нерівність $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, отримаємо:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2S}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C} \geq \frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}.$$

А так як $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$, то $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Четвертий спосіб доведення

Нехай ABC – даний трикутник і ABC_1 – рівносторонній трикутник, побудований так, що точки C і C_1 лежать по одну сторону від прямої AB. За теоремою косинусів із трикутника ACC_1 знаходимо:

$$CC_1 = b^2+c^2-2bc\cos(60^0-A) = b^2+c^2-2bc(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)$$

Але $bc\cos A=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$ і $bc\sin A = 2S$.

Звідси, $CC_1^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-2\sqrt{3}S$.

Оскільки $CC_1^2 \geq 0$, то $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Рівність має місце лише тоді, коли $C=C_1$, тобто коли трикутник ABC є рівностороннім.

П'ятий спосіб доведення

Для будь-якого трикутника ABC справедлива рівність

$$a^2=(b-c)^2+4S\ tg\frac{A}{2}.$$

Тому $a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=4S(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2})$.

Застосувавши нерівність $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$, отримаємо:

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=4\sqrt{3}S,$$

де рівність має місце лише тоді, коли трикутник ABC рівносторонній. Бачимо, що отримана нерівність, підтверджує те що потрібно було довести.

Шостий спосіб доведення

Для будь-яких додатних чисел a, b, c має місце нерівність $a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$.

Замінивши $a=yz$, $b=zx$, $c=xy$, одержимо:

$$xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}.$$

Так як $p-a>0$, $p-b>0$, $p-c>0$ і $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$, то на основі наведеної нерівності маємо:

$$4\sqrt{3}S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)[(p-a)+(p-b)+(p-c)]} \leq$$
$$\leq 4((p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)).$$

Після перетворень отримаємо: $ab+bc+ca \geq 4\sqrt{3}S$, або

$$a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=4\sqrt{3}S.$$

Рівність в цьому випадку має місце лише тоді, коли трикутник ABC рівносторонній. Таким чином, ми отримали таку саму нерівність, що і при доведенні 5.

Сьомий спосіб доведення

Доведемо, що для будь-якого трикутника виконується нерівність $ab+bc+ca \ge 4\sqrt{3}S$, із якого в силу нерівності:
$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ також випливає нерівність яку потрібно довести.
Згідно формули $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ маємо:

$$ab+bc+ca=2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$

Застосувавши нерівність $\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \ge 2\sqrt{3}S$,отримаємо: $ab+bc+ca \ge 4\sqrt{3}S$, де рівність досягається лише при $a=b=c$.

Література

1. Готман Э. Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные. – К.: Рад. шк., 1988. – 173 с.

Габузь Сергій Олегович
студент 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

Дуже часто, при вивченні математики в школі, розв'язуючи певні задачі учні навіть не здогадуються про існування інших, іноді навіть простіших, способів розв'язування. І тому одним із важливих завдань вчителя є продемонструвати учням те, що в однієї і тієї ж задачі існує декілька абсолютно різних як за своєю сутністю, так і за складністю способів її розв'язування. Як приклад, розглянемо наступну задачу.

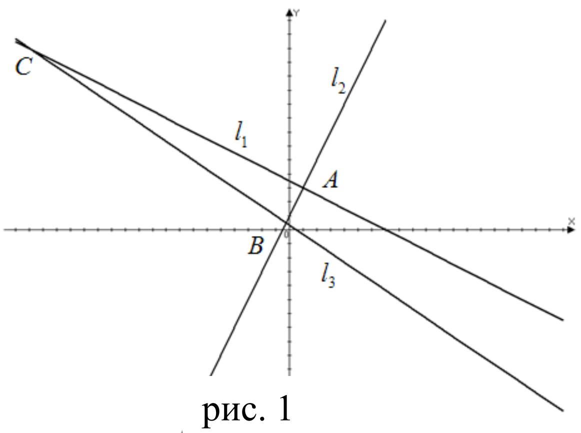


рис. 1

<u>*Задача.*</u> Знайти площу трикутника, вершини якого – точки перетину прямих $x+2y=7$, $y-2x=1$, $3y+2x=1$.

Перший спосіб розв'язання

Запишемо рівняння даних прямих у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a,b – відрізки, які відтинає пряма на осях абсцис і ординат, відповідно. Побудуємо прямі l_1, l_2, l_3 та знайдемо координати вершин ΔABC, як координати точок перетину цих прямих (рис. 1):

$$l_1:\ \frac{x}{7}+\frac{y}{\frac{7}{2}}=1,\ l_2:\ \frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{1}=1,\ l_3:\ \frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}=1,$$

$$l_1\cap l_2:\begin{cases}x+2y=7, & |\cdot 2\\ -2x+y=1;\end{cases}\ \begin{cases}5y=15,\\ x=7-2y;\end{cases}\ \begin{cases}x=1,\\ y=3;\end{cases}\ A(1;3),$$

$$l_2\cap l_3:\begin{cases}-2x+y=1,\\ 2x+3y=1;\end{cases}\ \begin{cases}4y=2,\\ x=\dfrac{1-3y}{2};\end{cases}\ \begin{cases}x=-\dfrac{1}{4},\\ y=\dfrac{1}{2};\end{cases}\ B\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right),$$

$$l_1\cap l_3:\begin{cases}x+2y=7, & |\cdot(-2)\\ 2x+3y=1;\end{cases}\ \begin{cases}-y=-13,\\ x=7-2y;\end{cases}\ \begin{cases}x=-19,\\ y=13;\end{cases}\ C(-19;13).$$

Обчислимо координати векторів, на яких побудовано ΔABC:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\left(-\frac{1}{4}-1;\frac{1}{2}-3\right)}=\overrightarrow{\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{2}\right)}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{(1;2)},$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{(-19-1;13-3)}=\overrightarrow{(-20;10)}=10\overrightarrow{(-2;1)}.$$

Площа трикутника дорівнює половині модуля визначника координат векторів сторін ΔABC:

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{mod}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|,$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot 10\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{50}{8}\cdot(1+4)=\frac{125}{4}=31\frac{1}{4}\ \text{(кв. од.)}.$$

Другий спосіб розв'язання

Обчислення площі за формулою Герона більш громіздке, але дає той же результат.

$$AB=\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{25}{4}}=\frac{5}{4}\sqrt{5},$$

$$AC=\sqrt{(-20)^2+(10)^2}=\sqrt{400+100}=10\sqrt{5},$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\left(-19+\frac{1}{4};13-\frac{1}{2}\right)}=\overrightarrow{\left(-\frac{75}{4};\frac{25}{2}\right)}=\frac{25}{4}\overrightarrow{(-3;2)},$$

$$BC=\sqrt{\left(-\frac{75}{4}\right)^2+\left(\frac{25}{2}\right)^2}=\frac{25}{4}\sqrt{13},$$

Обчислимо півпериметр: $p=\dfrac{AB+AC+BC}{2}$,

$$p=\frac{\frac{5}{4}\sqrt{5}+10\sqrt{5}+\frac{25}{4}\sqrt{13}}{2}=\frac{5}{8}\left(5\sqrt{13}+9\sqrt{5}\right),$$

$$S=\sqrt{\frac{5}{8}\left(5\sqrt{13}+9\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{8}\left(5\sqrt{13}+9\sqrt{5}\right)-\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{8}\left(5\sqrt{13}+9\sqrt{5}\right)-10\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{8}\left(5\sqrt{13}+9\sqrt{5}\right)-\frac{25}{4}\sqrt{13}\right)}=$$

$$=\frac{25}{64}\sqrt{\left(5\sqrt{13}+9\sqrt{5}\right)\cdot\left(5\sqrt{13}+7\sqrt{5}\right)\cdot\left(5\sqrt{13}-7\sqrt{5}\right)\cdot\left(9\sqrt{5}-5\sqrt{13}\right)}=\frac{25}{64}\cdot 80=31\frac{1}{4}(\text{кв.од.}).$$

Третій спосіб розв'язання

Площу можна обчислити без формули Герона, знайшовши за теоремою косинусів косинус одного з кутів трикутника.

Нехай α – кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$. Тоді

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|},$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{2}\right)}\cdot\overrightarrow{\left(-\frac{75}{4};\frac{50}{4}\right)}=\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{75}{4}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{50}{4}=-\frac{125}{16},$$

$$\cos\alpha=\frac{-\frac{125}{16}}{\frac{5\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{25\sqrt{13}}{4}}=-\frac{1}{\sqrt{65}}.$$

Скориставшись основною тригонометричною тотожністю, обчислимо синус кута і далі – площу.

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{65}}\right)^2}=\frac{8}{\sqrt{65}},$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\sin\alpha,$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{25\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{8}{\sqrt{65}}=\frac{125}{4}=31\frac{1}{4}\ (\text{кв. од.}).$$

Четвертий спосіб розв'язання

Знайдемо площу трикутника за формулою $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$.

Відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої AB, яка задана рівнянням AB: $ax+by+c=0$, обчислюється за формулою:

$$\rho(C;AB)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Рівняння прямої AB: $2x - y + 1 = 0$; координати точок $A(1;3)$, $B\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$,

$AB = \frac{5}{4}\sqrt{5}$ (од.) – довжина сторони AB; висотою трикутника слугує відстань від третьої вершини $C(-19;13)$ до прямої AB:

$$\rho(C;AB) = \frac{|2\cdot(-19) - 1\cdot 13 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{50}{\sqrt{5}},$$

Отже, $S = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot \rho(C;AB)$,

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)\cdot\frac{50}{\sqrt{5}} = \frac{250}{8} = \frac{125}{4} = 31\frac{1}{4} \text{(кв. од.).}$$

П'ятий спосіб розв'язання

Запишемо рівняння прямих у вигляді $y = kx + b$, де $k = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої. Маємо AC: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, AB: $y = 2x + 1$, BC: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Оскільки добуток кутових коефіцієнтів прямих AC і AB дорівнює $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 = -1$, то $AB \perp AC$, ΔABC – прямокутний, причому $\angle A = 90^\circ$. А тому його площа дорівнює півдобутку катетів:

$$S = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot AC.$$

Уже маючи необхідні величини, знаходимо площу:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{4}\cdot 10\sqrt{5} = \frac{250}{8} = 31\frac{1}{4} \text{ (кв. од.).}$$

Шостий спосіб розв'язання

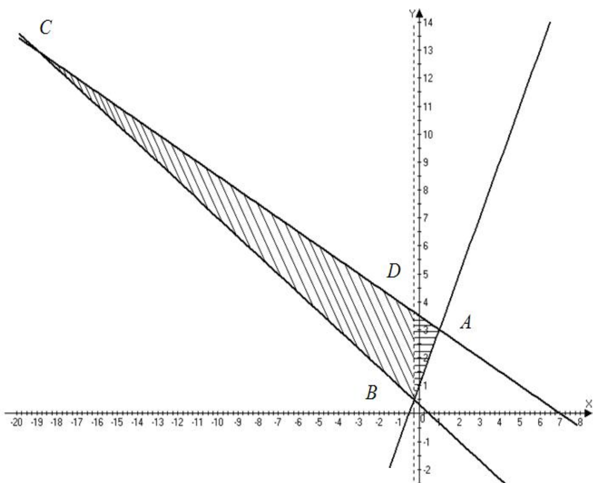


рис. 2

Площу даного трикутника можна обчислити використовуючи формули площі криволінійної трапеції з використанням визначеного інтегралу. Як видно з малюнка (рис. 2): $S_{ABC} = S_{CDB} + S_{DAB}$. Маємо:

$$\int_{-19}^{-\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)dx +$$

$$+\int_{-\frac{1}{4}}^{1}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} - 2x - 1\right)dx = \int_{-19}^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{6}x + \frac{19}{6}\right)dx +$$

$$+\int_{-\frac{1}{4}}^{1}\left(-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}\right)dx = \frac{1}{6}\int_{-19}^{-\frac{1}{4}}(x+19)dx - \frac{5}{2}\int_{-\frac{1}{4}}^{1}(x-1)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}+19x\right)\Bigg|_{-19}^{-\frac{1}{4}} - \frac{5}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{4}}^{1} =$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{32}-\frac{19}{4}-\frac{361}{2}+361\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}-1-\frac{1}{32}-\frac{1}{4}\right) = \frac{125}{4} = 31\frac{1}{4} \text{ (кв. од.).}$$

Для розв’язування даної задачі учні 9-го класу уже володіють достатньою кількістю знань. Але при розв’язуванні цієї задачі першим або четвертим способами, учням знадобляться додаткові знання, яких вони не отримують на уроках математики. А тому, вчителю необхідно буде додатково пояснити вихованцям, що таке визначник, векторний добуток двох векторів, формулу відстані від точки до прямої.

Розв’язування даної задачі за допомогою визначеного інтеграла (6-й спосіб) стане відоме учням лише в старшій школі. Тому найраціональнішими способами розв’язування цієї задачі є третій, його доцільно розглядати при вивченні теми «Вектори на площині».

Література

1. Ізюмченко Л. В. Розв’язування задач з математики третього етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України: Методичний посібник. /Ізюмченко Л. В., Макарчук О. П./ – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – С. 86-88.

Гикавчук Альона Миколаївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ПЕДАГОГІЧНА ЦІННІСТЬ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЕКІЛЬКОМА СПОСОБАМИ

Розв’язування геометричних задач декількома різними способами має вагоме значення у навчанні математики. Це дає можливість усвідомити учням, що існує багато способів розв’язування конкретної задачі і що вони цілком посильні, вчить їх змінювати одне розв’язання іншим – раціональнішим, шукати ефективніші методи навчання, творчо підходити до навчального процесу. Для прикладу, пропоную вашій увазі задачу, яка на мою думку, повністю відповідає поставленим цілям.

Задача. Площа гострокутного трикутника ABC дорівнює S_1, площа трикутника AHB (H – ортоцентр) дорівнює S_2. На відрізку CH відмітили таку точку K, що трикутник ABK прямокутний. Довести, що площа трикутника ABK є середнім геометричним між S_1 і S_2. [1]

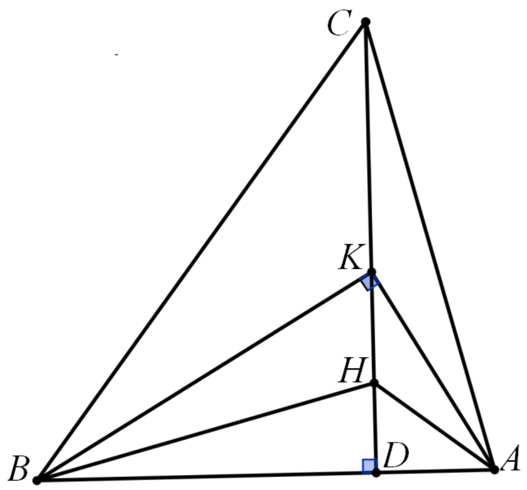


Рис. 1

Перший спосіб розв'язання

Розв'яжемо дану задачу використовуючи подібність трикутників.

Потрібно довести, що $S_3^2 = S_1 \cdot S_2$ (S_3 – площа трикутника АВК).

Цю рівність можна записати так:

$$c^2 \cdot KD^2 = c^2 \cdot CD \cdot HD,$$

або

$$KD^2 = CD \cdot HD. \qquad (*)$$

Оскільки $\angle BKA = 90^\circ$, то

$$KD^2 = AD \cdot BD.$$

Щоб отримати рівність (*), потрібно довести, що

$$CD \cdot HD = AD \cdot BD.$$

Якщо цю рівність записати як

$$\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{HD}, \qquad (1^\circ)$$

то очевидно, що потрібно використати подібність трикутників CBD і AHD. Дійсно, ці прямокутні трикутники мають рівний гострий кут.

До речі можна «обійти» подібність: із рівності (1°)

$$\frac{CD}{AD} = \operatorname{tg} A, \text{ а } \frac{BD}{HD} = \operatorname{tg} \angle BHD, \text{ àëå } \angle BHD = \angle \text{À}.$$

Отже, використовуючи метричні співвідношення у прямокутному трикутнику отримаємо потрібний нам результат, а саме

$$KD^2 = CD \cdot HD.$$

Далі спробуємо тригонометрію.

Другий спосіб розв'язання

Виразимо за допомогою R і кутів трикутника всі компоненти рівності (*):

$$HD = BH \cos A = 2R \cos A \cos B, \text{ CD=CBsinB=2RsinAsinB,}$$

$$KD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{b \cos A \cdot a \cos B} = \sqrt{R^2 \sin 2A \cdot \sin 2B}.$$

Маємо $HD \cdot CD = R^2 \sin 2A \cdot \sin 2B.$

Третій спосіб розв'язання

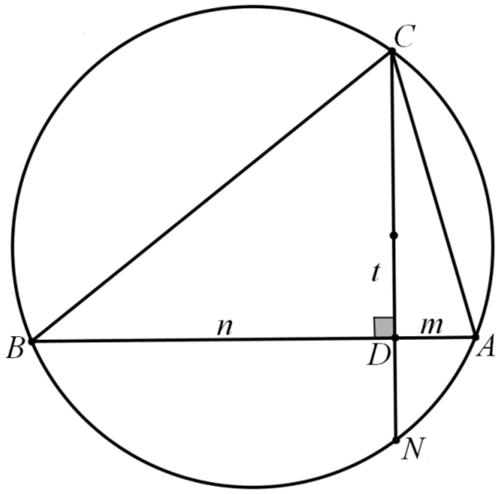


Рис. 2

Позначимо $AD = m;\ BD = n;\ HD = t.$

Маємо:

$$\frac{S_{AKB}}{S_{AHB}} = \frac{KD}{HD} = \frac{\sqrt{mn}}{t}.$$

Далі

$$\frac{S_{AKB}}{S_{ABC}} = \frac{\sqrt{mn}}{h_a}.$$

Помножимо:

$$\frac{S_{AKB}^2}{S_{AHB} \cdot S_{ABC}} = \frac{\sqrt{mn} \cdot \sqrt{mn}}{t \cdot h_a}.$$

Очевидно, що повинно бути $mn = t \cdot h_a$.Дійсно, опишемо коло навколо трикутника ABC (рис. 2). Продовжимо відрізок CD до перетину з колом в точці N.

Тоді $DN = t$ (використали відому властивість $HD = DN$). Тепер застосуємо теорему про добуток відрізків хорд $CD \cdot DN = AD \cdot BD,$

Або $mn = t \cdot h_a$, а значить, $S_{AKB}^2 = S_{AHB} \cdot S_{ABC}$.

Розв'яжемо задачу за допомогою стереометрії.

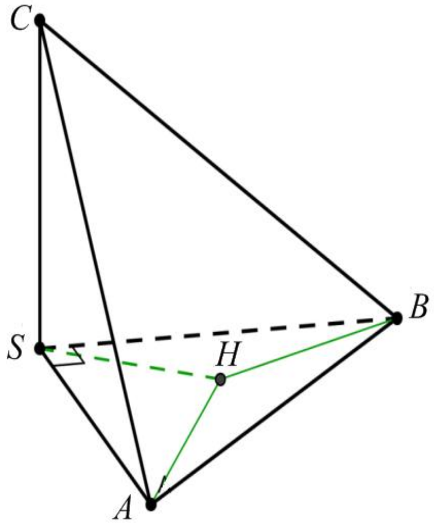


Рис. 3

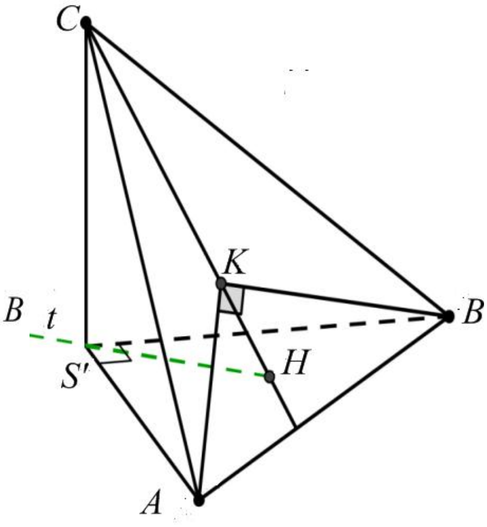


Рис. 4

Четвертий спосіб розв'язання

Розглянемо прямокутний тетраедр $CSAB$ (три кути при вершині S – прямі (рис. 3)).

Можна довести,

$$S_{SAB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}. \qquad \left(2^{\circ}\right)$$

До трикутника ABC (рис.4) у просторі з ортоцентра H поставимо перпендикуляр t.

Нехай K – деяка точка на прямій CH, така, що $\angle AKB = 90°$. Повернемо трикутник AKB так, щоб його вершина K опинилась на перпендикулярі t. Отриману точку позначимо S'. Тоді тетраедр $CS'AB$ – прямокутний, оскільки $\angle BS'A = 90°$, а висота $S'H$ проходить через ортоцентр H грані CAB. Тоді за формулою $\left(2^{\circ}\right)$ $S_{S'AB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}$, але трикутник SAB – це трикутник AKB, а тому $S_{AKB} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{AHB}}$.

Таким чином, можна зробити висновок, що найбільш раціональним є другий спосіб, який використовує тригонометрію.

Література

1. Кушнір І. А. Тріумф шкільної геометрії: Навч. Посібник для 7-11 кл./Пер. З рос. – К.: Наш час, 2007. – С.192.

2. Збірник задач з математики для вступників до вузів: Пер. з рос./В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський та ін.; За ред. М.І. Сканаві.- К.: «Онікс», 2005. – 608 с.

Гранатова Валентина Анатоліївна
студентки 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ З ПЛАНІМЕТРІЇ ПРО ПЛОЩУ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Теорію задач на знаходження найбільших і найменших величин називають *теорією екстремальних задач* або *теорією оптимізації.* У цій теорії використовують спеціальну термінологію. Слова maximum та minimum – латинські. Вони означають «найбільше» та «найменше». Ще два слова латинського походження часто застосовують, коли говорять про задачі на максимум та мінімум.

При розв’язуванні таких задач потрібно знати різні алгебраїчні нерівності, похідну функції та її застосування до розв’язування екстремальних задач, зокрема геометричних.

Для розв’язання нам знадобиться нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ та наслідки із неї. Цю нерівність називають *нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним* двох додатних чисел. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a=b$. Ця нерівність випливає з того, що $a-2\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$.

Із цієї нерівності випливає ще декілька корисних нерівностей, наприклад,

$$x\left(a-x\right) \leq \left(\frac{x+\left(a-x\right)}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4};$$

$$a+\frac{1}{a} \geq 2 \text{ при } a>0.$$

Розділ алгебри та початків аналізу « Похідна та її застосування» займає значне місце у шкільному курсі математики, в першу чергу тому, що має велике прикладне значення.

Основна складність полягає в тому, щоб навчити школярів застосовувати похідну для розв’язання екстремальних задач геометрії.

Застосування похідної дає змогу розв’язувати ряд екстремальних нестандартних задач, які вимагають значних зусиль при розв’язанні їх іншими способами.

Розглянемо таку задачу.

Задача. Знайти найменшу площу прямокутного трикутника, описаного навколо прямокутника з основою a й висотою b так, що катети трикутника і основа та висота прямокутника лежать відповідно на одних і тих самих прямих.

Перший спосіб розв’язання

Нехай прямокутний трикутник *ACB*, описаний навколо заданого прямокутника *CMND* (рис.1). За умовою задачі $CD=MN=a$, $CM=DN=b$. Крім того, точки A і B рухаються по променях CM і CD так, що пряма AB проходила через точку N. Нам треба знайти такі положення для точок A і B, щоб площа трикутника ABC була найменшою із усіх можливих.

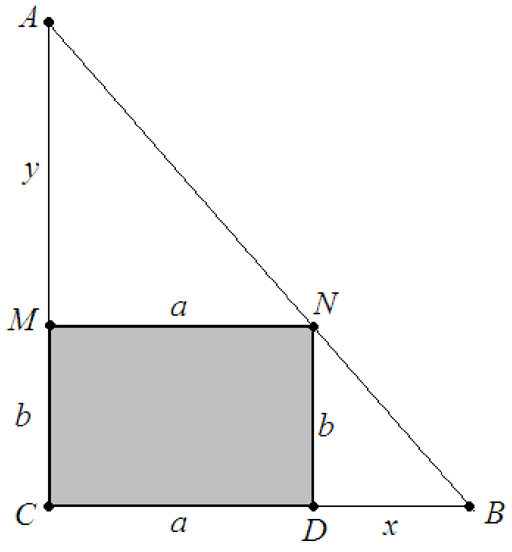


Рис. 1

Нехай $DB = x$ і $MA = y$, де $x > 0$, $y > 0$. Тоді з подібності трикутників AMN і NDB випливає, що

$$\frac{AM}{ND} = \frac{MN}{DB},$$

тобто

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{x}.$$

Звідки

$$xy = ab.$$

Знайдемо площу трикутника ABC (створимо цільову функцію):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB,$$

тобто

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(b+y)(a+x),$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(2ab + bx + ay).$$

Залишилося знайти найменше значення виразу $bx + ay$, при умові, що $xy = ab$. Для цього скористаємося нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним двох додатних чисел:

$$\frac{bx+ay}{2} \geq \sqrt{bx \cdot ay} = \sqrt{abxy} = ab.$$

Звідки

$$bx + ay \geq 2ab.$$

Таким чином,

$$S_{ABC} \geq \frac{1}{2}(2ab + 2ab) = 2ab,$$

тобто найменше значення площі трикутників ABC дорівнює $2ab$. Це значення досягається тоді і тільки тоді, коли $bx = ay$. Враховуючи, що $xy = ab$, знаходимо: $x = a$ і $y = b$.

Відповідь. $S_{\min} = 2ab$.

Другий спосіб розв'язання

Застосуємо похідну. Для цього виразимо цільову функцію $S_{ABC} = \frac{1}{2}(a+x)(b+y)$, як функцію від x (скориставшись тим, що $y = \frac{ab}{x}$):

$$S(x) = \frac{1}{2}(a+x)\left(b + \frac{ab}{x}\right),$$

де $x > 0$. Знайдемо похідну цієї функції, попередньо спростивши її:

$$S(x) = \frac{b}{2}(x+a)\left(\frac{a}{x} + 1\right),$$

$$S'(x)=\frac{b}{2}\left(\frac{a}{x}+1-\frac{a}{x^2}(x+a)\right)=\frac{b}{2}\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right).$$

Знайдемо критичні точки функції з умови, що $S'(x)=0$, при $x>0$. Розв'язавши це рівняння, знаходимо, що $x=a$ – критична точка функції $S(x)=\frac{1}{2}(a+x)\left(b+\frac{ab}{x}\right)$, на проміжку $x\in(0;+\infty)$. На основі одержаних результатів заповнюємо таблицю (рис.2), виконавши додатково необхідні розрахунки. Зокрема, при $x<a$ виконується нерівність $S'(x)<0$, при $x>a$ виконується нерівність $S'(x)>0$. Вони означають, що на проміжку $(0;a)$ функція $S(x)$ монотонно спадає, а на проміжку $(a;+\infty)$ функція $S(x)$ монотонно зростає. Все це означає, що на проміжку $(0;+\infty)$ функція $S(x)$ досягає свого найменшого значення при $x=a$, тобто $S_{\min}=S(a)=2ab$.

x	$(0;a)$	a	$(a;+\infty)$
$S'(x)$	(-)	0	(+)
$S(x)$	$\searrow$	$2ab$	$\nearrow$
		min	

рис. 2

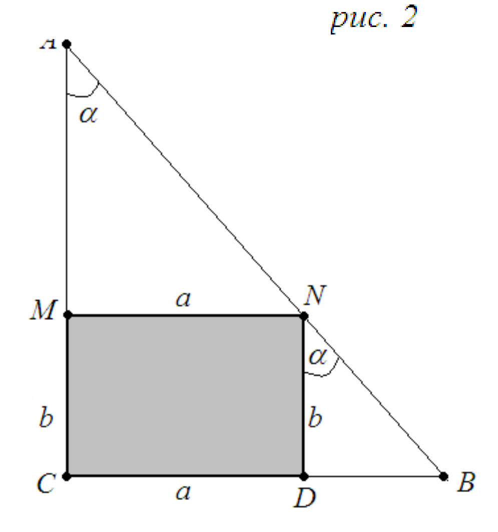


Рис. 2

Відповідь. $S_{\min}=2ab$.

Третій спосіб розв'язання

Нехай $\angle CAB=\alpha$, тоді $\angle DNB=\alpha$, бо $AM\parallel ND$. Тоді з прямокутних трикутників AMN і NDB знаходимо:

$$AM=a\cdot ctg\alpha \text{ і } DB=b\cdot tg\alpha.$$

Тоді цільова функція, як функція від α, буде мати вигляд:

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}(a+b\cdot tg\alpha)(b+a\cdot ctg\alpha),$$

де $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Перепишемо цільову функцію у такому вигляді:

$$S(\alpha)=\frac{(a\cos\alpha+b\sin\alpha)^2}{2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Оскільки $\sin\alpha>0$ і $\cos\alpha>0$, то залишилося довести нерівність:

$$\frac{(a\cos\alpha+b\sin\alpha)^2}{2\sin\alpha\cos\alpha}\geq 2ab.$$

Дійсно,

$$\frac{\left(a\cos\alpha + b\sin\alpha\right)^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} \ge 2ab \iff \left(a\cos\alpha + b\sin\alpha\right)^2 \ge 4ab\sin\alpha\cos\alpha \iff$$

$$\left(a\cos\alpha - b\sin\alpha\right)^2 \ge 0.$$

Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a\cos\alpha - b\sin\alpha = 0$, тобто $tg\alpha = \frac{a}{b}$, звідки $\alpha = arctg\frac{a}{b}$.

Відповідь. $S_{\min} = 2ab$.

На конкретному прикладі ми побачили переваги різних способів розв'язування екстремальних геометричних задач. Такі розв'язання задачі не тільки сприяють глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу, але й підвищують інтерес до вивчення математики.

Література

1. Шунда Н.М. Застосування похідної до розв'язування задач: Посібник / Никифор Миколайович Шунда. – К.: Техніка, 1999. – 240 с.
2. Прасолов В.В. Задачі з планіметрії. Навчальне видання. – М.: МЦНМО, 2001. – 583 с.

Гуртова Ганна Станіславівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДЕВ'ЯТЬ РІЗНИХ СПОСОБІВ ДОВЕДЕННЯ ОДНІЄЇ КЛАСИЧНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕРІВНОСТІ

Задача. Нехай a, b, c − довжини сторін трикутника, S – його площа. Довести, що

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S. \qquad (*)$$

У якому випадку має місце рівність?

Дана геометрична нерівність пропонувалась для доведення на Міжнародній Математичній Олімпіаді у 1961 році. В англомовній літературі її називають нерівністю Вейценбека [1, 2].

Перший спосіб розв'язання

В основі цього способу лежить, з одного боку, додаткова добудова, а з іншого – введення нових змінних. Природа появи цих змінних пов'язана з тим, що у випадку правильного трикутника в (*) досягається рівність.

Не порушуючи загальності припустимо, що в даному ΔABC $\angle C$ найбільший. Опустимо висоту CH. Нехай

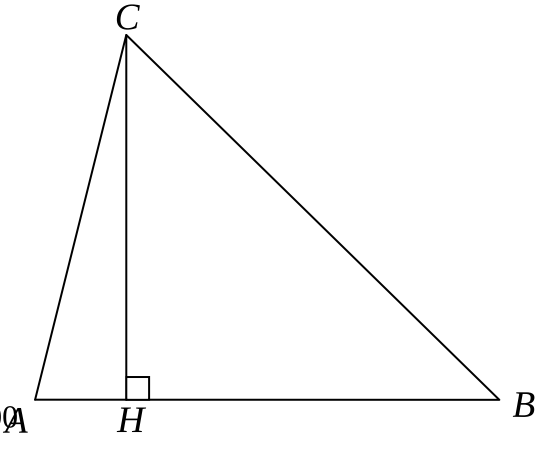


Рис. 1.

довжина CH рівна $\frac{c\sqrt{3}}{2}+y$ ($\frac{c\sqrt{3}}{2}$ – довжина висоти правильного трикутника зі стороною c, y може бути від'ємним). Нехай точка H розбила відрізок AB на частини довжинами $\frac{c}{2}-x$ і $\frac{c}{2}+x$. Тоді, використовуючи теорему Піфагора для ΔAHC і ΔCHB, знайдемо :

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S=$$

$$=\left(\frac{c}{2}+x\right)^2+\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}+y\right)^2+\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}+y\right)^2+c^2-2c\sqrt{3}\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}+y\right)=$$

$$=\frac{c^2}{4}+cx+x^2+2\left(\frac{3c^2}{4}+c\sqrt{3}y+y^2\right)+\frac{c^2}{4}-cx+x^2+c^2-3c^2-2\sqrt{3}cy=$$

$$=2x^2+2y^2\geq 0,$$

причому рівність виконується лише при $x=0$ та $y=0$, тобто у випадку правильного трикутника [2].

Другий спосіб розв'язання (з використанням формули площі трикутника і теореми косинусів).

Доведемо методом від супротивного. Припустимо, що існує трикутник зі сторонами a, b, c і площею S такий, що $4\sqrt{3}S>a^2+b^2+c^2$. Остання нерівність рівносильна нерівності

$$2bc\sin\alpha>\frac{1}{\sqrt{3}}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

яка, в свою чергу, рівносильна нерівності

$$4b^2c^2\sin^2\alpha>\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2,$$

або

$$4b^2c^2-4b^2c^2\cos^2\alpha>\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2,$$

Використаємо теорему косинусів для даного трикутника

$$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2.$$

Підставимо цей вираз у останню нерівність, розкриємо дужки та після зведення подібних доданків, отримаємо

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2>a^4+b^4+c^4,$$

що рівносильно

$$\left(a^2-b^2\right)^2+\left(c^2-b^2\right)^2+\left(a^2-c^2\right)^2<0.$$

Остання нерівність неможлива. Отже, наше припущення невірне і для кожного трикутника виконується (*), причому рівність має місце при $a=b=c$.

Третій спосіб розв'язання (з використанням теореми косинусів).

Розглянемо різницю між лівою і правою частинами (*) і, використовуючи теорему косинусів і формулу площі, виконаємо «ланцюжок» перетворень:

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S=a^2+b^2+\left(a^2+b^2-2ab\cos\angle C\right)-2\sqrt{3}ab\sin\angle C=$$

$$=2\left(a-b\right)^2+4ab-4ab\left(\frac{1}{2}\cos\angle C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\angle C\right)=$$

$$2\left(a-b\right)^2+4ab\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\angle C\right)\right)\geq 0,$$

оскільки кожний з двох доданків невід'ємний.

Рівність виконується, коли $a=b$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\angle C\right)=1$ (при $\angle C=\frac{\pi}{3}$), тобто коли ΔABC – рівносторонній.

Четвертий спосіб розв'язання

Базується на загальновідомій нерівності Єнсена. Нагадаємо її.

Нехай $f\left(x\right)$ – опукла донизу функція на деякому проміжку. Тоді для довільних x_1, $x_2,\ldots,x_n$ з цього проміжку виконується нерівність

$$\frac{f\left(x_1\right)+\ldots+f\left(x_n\right)}{n}\geq f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right).$$

У випадку опуклої догори функції нерівність змінює знак на протилежний.

Як відомо, для довільних чисел a, b, c має місце нерівність трьох квадратів:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac.$$

Справді, остання нерівність рівносильна нерівності

$$\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(a-c\right)^2\geq 0.$$

В свою чергу

$$ab+bc+ac=2S\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Тоді

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac=2S\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Тепер покажемо, що $f\left(x\right)=\frac{1}{\sin x}$ є опуклою донизу на $\left(0,\pi\right)$. З цією метою обчислимо $f''\left(x\right)$і покажемо, що для кожного $x\in\left(0,\pi\right)$ $f''\left(x\right)>0$. Справді,

$$f'\left(x\right)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x},$$

$$f''\left(x\right)=-\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)'=\frac{\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x}{\sin^4 x}=\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}>0.$$

Тоді за нерівністю Єнсена:

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\ge 3f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3},$$

тобто

$$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S.$$

П’ятий спосіб розв’язання (з використанням формули Герона)

Виконаємо еквівалентні перетворення заданої нерівності, використавши формулу Герона.

$$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S,$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3(a+b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c),$$

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(2a^2b^2+2c^2a^2+2c^2b^2-a^4-b^4-c^4\right),$$

$$4a^4+4b^4+4c^4-4a^2b^2-4b^2c^2-4a^2c^2\ge 0,$$

$$\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2\ge 0.$$

Шостий спосіб розв’язання

Використаємо формулу Герона. Отримаємо нерівність

$$16S^2=(a+b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-$$

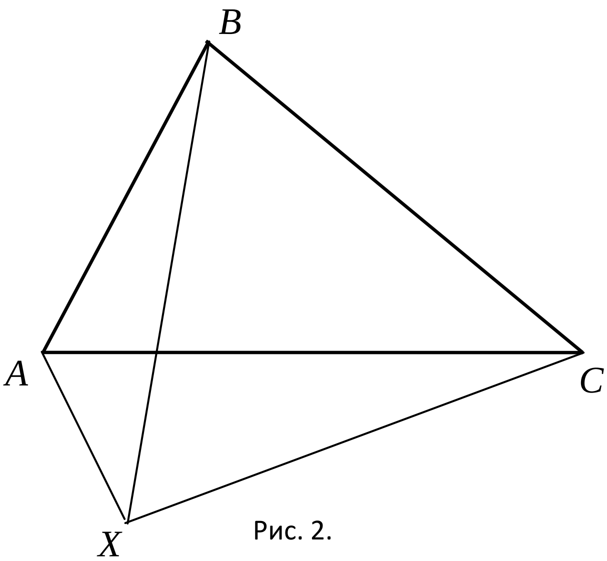


Рис. 2.

(тут ми використали нерівність Коші для додатних чисел $b+c-a$, $a+c-b$, $a+b-c$). Тоді

$$4S\le\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\le\sqrt{3}\frac{a^2+b}{3}$$

(за нерівністю між середнім арифметичним і середнім квадратичним).

Рівність виконується для $a=b=c$.

Сьомий спосіб розв’язання

Розглянемо довільний ΔABC. Очевидно, в кожному трикутнику є кут, градусна міра якого не менше $60°$. Не порушуючи загальності припустимо, що це $\angle B$. Нехай X – така точка, що ΔBCX – рівносторонній, а точки A і X лежать в одній півплощині відносно BC.

З ΔABC знаходимо:

$$AX^2=AB^2+BX^2-2AB\cdot BX\cdot\cos\angle ABX$$

Але $BX=BC$ і $\angle XBC=60°$.

Звідки

$$\angle ABX=\angle ABC-\angle XBC=\angle B-60°.$$

Таким чином:

$$AX^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B - 60^\circ) =$$
$$= c^2 + a^2 - 2ca\cos(\angle B - 60^\circ) =$$
$$= c^2 + a^2 - 2ca(\cos\angle B \cos 60^\circ + \sin\angle B \sin 60^\circ) =$$
$$= c^2 + a^2 - 2ca\left(\cos\angle B \frac{1}{2} + \sin\angle B \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = c^2 + a^2 - 2ca\cos\angle B - \sqrt{3}ca\sin\angle B =$$
$$= c^2 + a^2 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} - \sqrt{3}ca\sin\angle B = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \sqrt{3}ca\sin\angle B =$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \sqrt{3} \cdot 2S.$$

Отже,

$$AX^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2\sqrt{3}S \ge 0,$$

що і потрібно було довести. Рівність виконується, коли $AX = 0$, тобто коли точка A та X співпадають (у випадку правильного ΔABC).

Восьмий спосіб розв'язання

Відомо, що якщо a, b, c – довжини сторін трикутника, то існують такі x, y, z що $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$ (x, y, z – довжини відрізків, на які поділяє сторони коло, вписане в трикутник).

Нерівність (*) рівносильна тоді до нерівності:

$$\left((x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2\right)^2 \ge 48S^2 = 48(x+y+z)xyz.$$

Але

$$\left((x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2\right)^2 \ge 16(yz + zx + xy)^2 \ge$$
$$\ge 16 \cdot 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + xy \cdot yz) = 48(x+y+z)xyz$$

(тут ми використали очевидну нерівність $p^2 + q^2 \ge 2pq$ та нерівність $(p+q+r)^2 \ge 3(pq + qr + rp)$, яка легко зводиться до нерівності трьох квадратів).

Дев'ятий спосіб розв'язання

Доведемо більш загальне твердження – нерівність Хадвігера-Фінслера [2,3]:

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4\sqrt{3}S.$$

Маємо:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos\alpha) =$$
$$= (b-c)^2 + 4S\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = (b-c)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

(тут ми використали те, що $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

Таким чином,

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4S\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

Оскільки $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}<\frac{\pi}{2}$, а функція тангенс опукла донизу на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то за нерівністю Єнсена:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geq 3\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}=3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

Рівність має місце при $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$. Тоді ми отримаємо

$$a^2+b^2+c^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}S.$$

Нерівність виконується для $a=b=c$. Інше доведення нерівності Хадвігера−Фінслера можна знайти в [3].

Нерівність (*) безпосередньо випливає з нерівності Хадвігера-Фінслера.

Література

1. http://mathworld.wolfram.com/WeitzenboecksInequality.html.
2. Engel A. Problem-Solving Strategies. – Springer, 1998. − 404 p.
3. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі з геометрії / В. А. Ясінський. − К.: Шкільний світ. − 128 с.

Жбанкова Анна Леонідівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ПЛАНІМЕТРІЇ

Узагальнення є одним із основних загальнонаукових методів пізнання. Уміння узагальнювати і застосовувати узагальнення методів пізнання є одним з показників математичної культури мислення людини.

В результаті узагальнення та систематизації знань і вмінь учнів здійснюється активне повторення засвоєного навчального матеріалу, поглиблення, розширення знань, формування практичних вмінь і навичок, зокрема, застосування знань в прикладній діяльності учнів, розвиток просторової уяви та логічного мислення.

На уроках узагальнення і систематизації, які проводяться після вивчення важливих розділів програми, в навчальному матеріалі виділяють найбільш загальні і суттєві поняття, властивості, теореми, способи дій, встановлюють причинно-наслідкові та інші зв’язки між поняттями. Основна дидактична мета такого типу уроку – узагальнити та систематизувати знання учнів з окремої теми або розділу. Структура уроку узагальнення і систематизації перш за все повинна відповідати логіці процесу узагальнення і систематизації знань, в якому передбачається така послідовність дій: від сприйняття, осмислення і узагальнення окремих фактів до формування в учнів понять і їх систем, від них - до засвоєння все більш складної системи знань: властивості, теореми, способи дії, і оволодіння провідними ідеями науки.

Засобом узагальнення і систематизації знань учнів може бути окрема задача, при розв'язуванні якої можна повторити широке коло теоретичних питань, яку можна розв'язати кількома способами. Наприклад: Обчислити кути рівнобедреного трикутника, в якому центри вписаного і описаного кіл взаємно симетричні відносно основи трикутника.

У процесі розв'язування цієї задачі у 9 класі маємо можливість повторити властивості: кутів вписаних в коло (9 клас); рівнобедрених і прямокутних трикутників (7-8 клас); кіл вписаних і описаних навколо трикутника (7 клас); ромба (8 клас), а також ознайомитися з поняттям інцентра та формулою Ейлера. Зокрема, інцентром називають центр вписаного в трикутник кола або точку перетину бісектрис трикутника. А формула Ейлера подається у вигляді: $OM^2 = R^2 - 2Rr$; де $OM -$ відстань між інцентром та центром описаного кола, R і $r -$ радіуси відповідно описаного та вписаного кіл.

Перший спосіб розв'язання

1) Оскільки центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів, то за ознакою рівнобедреного трикутника ΔABO і ΔACO рівнобедрені (рис. 1).

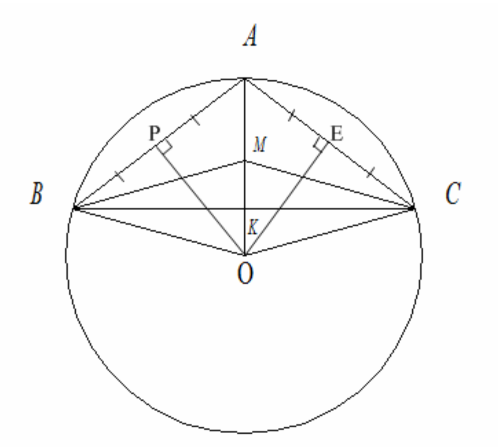


Рис. 1

Нехай $\angle MBC = \alpha$ тоді $\angle ABM = MBK = \alpha$ (оскільки BM - бісектриса $\angle ABC$),

$\angle MBK = \angle OBK$ (оскільки $\Delta MBK = \Delta OBK$), звідси $\angle ABO = \angle BAO = 3\alpha$.

З ΔABK маємо:

$3\alpha + 2\alpha = 90°$

$\alpha = 18°$

Тоді $\angle B = \angle C = 36°, \angle A = 108°$

Відповідь. $36°, 36°, 108°$.

Другий спосіб розв'язання

Використаємо знання про властивості вписаних і центральних кутів.

1) Розглянемо ΔMBO (рівнобедрений) (рис.1):

Нехай $\angle KBO = \angle MBK = \alpha$ (оскільки $\Delta MBK = \Delta OBK$), тоді $\angle ABM = \alpha$, звідси випливає, що $\angle ABO = 3\alpha$.

2) $\angle BOA$ центральний кут, що спирається на дугу *BA*, $\angle BCA$ - вписаний кут у коло, що спирається на дугу *BA* звідси випливає, що

$$\angle BOA = 2\angle BCA = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha ,$$

3) Тоді з ΔAOB маємо:

$2 \cdot 3\alpha + 4\alpha = 180°$

$10\alpha = 180°$

$\alpha = 18°$

Отже, $\angle A = 6\alpha = 108°, \angle B = \angle C = 36°.$

Відповідь. $36°,\ 36°, 108°.$ [1]

Третій спосіб розв'язання

Для цього розв'язання потрібно пригадати властивості ромба.

1) Розглянемо ромб $BMCO$ (рис.1):

$\angle MBO + \angle BMC = 180°$;

$\angle BMC = 2\angle BMO = 2\angle BOM$ (оскільки ΔBMO=рівнобедрений);

$\angle BOM = 4\alpha$ (див. II спосіб);

$\angle BMC = 2\angle BOM = 2 \cdot 4\alpha = 8\alpha$;

$2\alpha + 8\alpha = 180°$

$10\alpha = 180°$

$\alpha = 18°$

Отже, $\angle B = \angle C = 2\alpha = 36°, \angle A = 180° - 72° = 108°.$

Відповідь. $36°, 36°, 108°.$

Четвертий спосіб розв'язання

1) Нехай $\angle BAC = \beta, \angle BAO = \angle OAC = \dfrac{\beta}{2}$, оскільки $\Delta BAO = \Delta CAO$ (див. I спосіб) і вони рівнобедрені то $\angle BOC = 360° - 2\beta$.

2) Розглянемо ΔMBC, тут матимемо:

$\angle MBC = \angle MCB = \alpha, \angle ABM = \angle MCA = \alpha$ (оскільки BM – бісектриса $\angle ABC$);

$\angle BMC = 180° - 2\alpha$, звідси $180° = \angle BMC + 2\alpha$ (1)

3) Розглянемо ΔABC, тут матимемо:

$\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$ і

$\beta = 180° - 4\alpha$, звідси $180° = \beta + 4\alpha$; (2)

4) Розглянемо $\Delta BAK, \angle K = 90°$, звідси матимемо:

$2\alpha = 90° - \dfrac{\beta}{2}$ (3)

4) Оскільки ліві частини рівностей (1) і (2) рівні то отримаємо:

$\angle BMC + 2\alpha = \beta + 4\alpha$, звідси

$\angle BMC = \beta + 2\alpha$; (4)

5) Підставивши (3) в (4) матимемо:

$\angle BMC = \beta + 90° - \dfrac{\beta}{2} = 90° + \dfrac{\beta}{2}$;

6) Оскільки $\angle BOC = \angle BMC$, то

$360° - 2\beta = 90° + \dfrac{\beta}{2}$,

$270° = \dfrac{5}{2}\beta$,

$\beta = 108°$

Отже, $\angle BAC = 108°$.

7) Використовуючи (2) отримаємо:

$108° + 4\alpha = 180°$,

$4\alpha = 72°$

$\alpha = 18°$.

звідси $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha = 36°$.

Відповідь. $\angle A = 108°, \angle B = \angle C = 36°$.

П'ятий спосіб розв'язання

Нехай М-інцентр рівнобедреного $\Delta ABC(AB = BC)$, О-центр описаного кола; $\angle MBK = \angle KBO = \alpha$, (К-середина МО).

$\sin\alpha = \frac{r}{R}$, виразимо r через R:

$r = \frac{S}{p} = \frac{abc}{4Rp}$, де p-півпериметр трикутника.

За теоремою синусів маємо:

$a = 2R\sin\alpha$; $b = 2R\sin\beta$; $c = 2R\sin\gamma$

$$r = \frac{2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot 2R\sin\gamma}{4R\frac{1}{2}(2R\sin\alpha + 2R\sin\beta + 2R\sin\gamma)} = \frac{8R^3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)} = \frac{2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$$

Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin(\pi - (\beta + \gamma)) + \sin\beta + \sin\gamma = \sin(\beta + \gamma) + \sin\beta + \sin\gamma =$$

$$= \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\beta(\cos\gamma + 1) + \sin\gamma(\cos\beta + 1) =$$

$$= \sin\beta\left(\cos 2\frac{\gamma}{2} + 1\right) + \sin\gamma\left(\cos 2\frac{\beta}{2} + 1\right) = \sin\beta \cdot 2\cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin\gamma \cdot 2\cos^2 \cdot \frac{\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \cdot 2\cos^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}) =$$

$$= 4\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 4\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Тоді $r = \dfrac{2R \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

Отже, $\sin\alpha = \frac{r}{R} = \dfrac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (r-радіус вписаного кола, R-радіус описаного кола).

Враховуючи, що $\sin\alpha = \sin\frac{B}{2}$, а $\frac{A}{2} = 90° - B$;

$\frac{1}{4} = \cos B \cdot \sin\frac{C}{2}$;

$\frac{1}{4} = (1 - 2\sin^2\frac{B}{2})\sin\frac{B}{2}$.;

Тобто одержали кубічне рівняння відносно $\sin\frac{B}{2}$, яке звичайними шкільними методами не розв'язується (або розв'язується дуже важко).

Використаємо формулу Ейлера: $OM^2 = R^2 - Rr$;

Тоді маємо: $r = \frac{1}{2}OM$, звідки

$4r^2 = R^2 - 2Rr$, $4r^2 + 2Rr - R^2 = 0$;

$$r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{4}, \quad r = \frac{\sqrt{5}-1}{4} R \ (\text{бо}\, r > 0).$$

Отже, $\sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, звідки $\alpha = 18°$,

тому $\angle B = \angle C = 36°, \angle A = 108°$.

Відповідь. $36°, 36°, 108°$.[1]

Слід пам'ятати, що вдало підібрана задача не зможе забезпечити високого рівня узагальнення і систематизації знань і вмінь учнів. Тільки в процесі самостійної творчої діяльності учнів знання будуть міцними.

Література

1. Кушнір І. Повернення втраченої геометрії. Серія: Математичні обрії України/ І.Кушнір - К.: Факт, 2000. - 39-41с.
2. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник для студентів матем. спец. вищих навч. закладів - 2-ге видання / З.І. Слєпкань – К.: Вища школа, 2006. - 30с.
3. Мерзляк А.Г. Геометрія: підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2009. – 66-69с.

Ільчук Ірина Сергіївна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ОДНЕ ІЗ СПІВВІДНОШЕНЬ МІЖ ХОРДАМИ КОЛА

При вивченні геометрії у 8 класі [1-3] розглядаються теореми про співвідношення між дотичною до кола та січною, між хордами кола, між січними кола.

Запропонована далі задача є однією з тих, які встановлюють співвідношення між деякими хордами кола. Дану задачу можна розв'язати різними способами, які викладаємо нижче.

<u>*Задача.*</u> В коло вписаний рівносторонній $\triangle ABC$. На дузі ВС дана довільна точка М. Довести, що $MA = MB + MC$.

Перший спосіб розв'язання

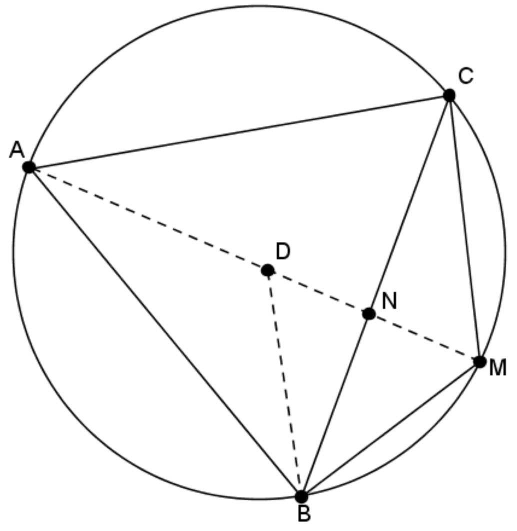


Рис.1

Відрізок МА є стороною $\triangle ABM$, де $\angle AMB = 60°$. Відрізок МВ є стороною $\triangle BMC$, у якому $\angle BMC = 120°$ (рис.1). Застосуємо теорему косинусів для визначення сторін АВ та ВС у цих трикутниках. Позначимо: $AB = a$, $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$. Враховуючи те, що $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ та АВ=ВС, маємо:

$$a^2 = x^2 + y^2 - xy;\ a^2 = y^2 + z^2 + yz.$$

Віднімемо від першої рівності другу почленно. Отримаємо:

$$x^2 - z^2 - y(x+z) = 0 \text{ або } (x+z)(x-y-z) = 0.$$

Оскільки $x + z \neq 0$, то $x - y - z = 0$. Тобто, $x = y + z$. Це і доводить, що $MA = MB + MC$.

Другий спосіб розв'язання

Так як відрізки МА, МВ, МС є хордами кола, описаного навколо $\triangle ABC$, то їх довжини можна виразити через радіус R цього кола за теоремою синусів. Для цього позначимо $\angle BAM = \alpha$. Тоді при попередніх позначеннях відрізків знаходимо:

$$x = 2R\sin(60° + \alpha);\ y = 2R\sin\alpha;\ z = 2R\sin(60° - \alpha).$$

Неважко перевірити, що має місце тригонометрична тотожність $\sin(60° + \alpha) = \sin\alpha + \sin(60° - \alpha)$.

Дійсно,

$$\sin(60° + \alpha) - \sin(60° - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha) = \sin\alpha.$$

Помноживши її на 2R отримаємо $x = y + z$ тобто, $MA = MB + MC$. Що і треба було довести.

Розв'язки задачі кожним із запропонованих вище способів зводяться до використання формул, що містять тригонометричні функції, виконанням нескладних перетворень. Наступні способи розв'язання задачі є геометричними.

Третій спосіб розв'язання

Відкладемо на відрізку МА відрізок MD, рівний відрізку МВ, і доведемо, що відрізок DA рівний відрізку МС(рис.1). Оскільки $\angle AMB = 60°$, то $\triangle BDM$ є рівностороннім. $\triangle ABC$ - теж рівносторонній. Повернемо $\angle BCM$ навколо точки В на $60°$ так, щоб точка С співпала з точкою А. Тоді точка М співпадає з точкою D і відрізок МС співпаде з відрізком DA. Тоді $DA = MC$. Тому при будь-якому виборі точки М на дузі ВС маємо: $MA = MB + MC$. Що і треба було довести.

Якщо скористатися теоремою Птолемея, то можна отримати досить просте розв'язання.

Теорема Птолемея формулюється так: якщо чотирикутник ABCD вписаний, то $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

Доведення:

Візьмемо на діагоналі АС таку точку Е(рис.2), що $\angle ABE = \angle DBC$. Тоді $\triangle ABE \sim \triangle DBC$, оскільки $\angle BAE = \angle BAC = \angle BDC$. Тому $AB : DB = AE : DC$, тобто $AB \cdot DC = AE \cdot DB$. (1)

$\angle CBE = \angle DBA$. Тому, $\triangle CBE \sim \triangle DBA$, оскільки $\angle BCE = \angle BDA$. Тому $CD : DB = EC : DA$, тобто $CB \cdot DA = DB \cdot EC$. (2)

Додавши почленно рівності (1) і (2), маємо: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Що і треба було довести.

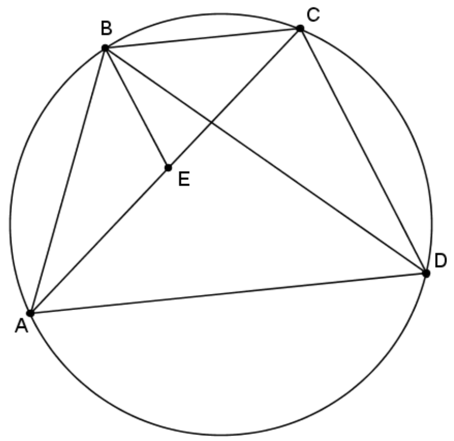


Рис.2

Четвертий спосіб розв'язання

За теоремою Птолемея маємо: $BC \cdot AM = AC \cdot BM + AB \cdot CM$. Так як $BC = AC = AB = a$, то розділивши обидві частини цього рівняння на a, отримаємо: $MA = MB + MC$. Що і треба було довести.

Пропоную способи 1, 2 розглянути на уроці геометрії, а способи 3 і 4 розглянути у математичних класах або на занятті математичного гуртка.

Література

1. Погорєлов А.В. Геометрія: Підруч. для 7 – 11 кл. серед. шк. – К.: Рад. шк., 1991.- 352 с.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Підруч. для 7 – 9 кл.загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Вежа, 2001. – 208с.
3. Бурда М.І., Савченко Л.М. Геометрія: Навч. пос. Для 8 – 9 кл. шк. з погл. вивч. матем. – 2-е вид. – К.: Освіта, 1998. – 240с.

Калінчук Лариса Миколаївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

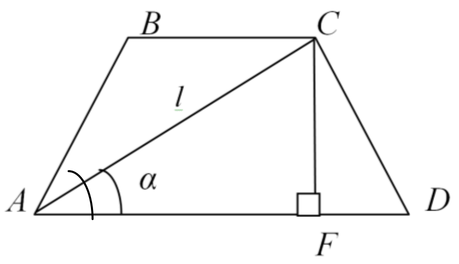
РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРИ ВИВЧЕННІ ТРАПЕЦІЇ В ШКОЛІ

Одним із показників математичної компетентності випускника школи є належний рівень його готовності до використання здобутих знань та вмінь в геометрії. Аналіз результатів зовнішнього незалежного оцінювання знань та вмінь з математики свідчить, що саме при виконанні завдань з геометрії виникають основні утруднення. На жаль, для більшості учнів, що здобули математичну освіту в школі, залишається секретом звідки і як з'являється ідея розв'язування тієї чи іншої геометричної задачі. Одним із шляхів зняття таємничості з появи ідеї щодо розв'язування задачі є цілеспрямована діяльність вчителя на уроках щодо формування уявлень про різні способи міркувань у процесі пошуку розв'язання, а головне – можливість використання різних шляхів у знаходженні шуканого результату розв'язання.

Поширеною є думка, що має існувати певний набір специфічних задач для розгляду їх розв'язань різними способами. Однак, на нашу думку, розв'язуючи будь-яку задачу, варто міркувати над питанням: «А як інакше можна знайти шуканий результат?» Така звичка, сформована в процесі навчання математики, сприяє розвитку розумових прийомів пошуку рішень будь-яких життєвих, побутових, виробничих проблем. Маємо переконання, що кожна задача шкільного курсу планіметрії, певним чином, придатна для такої роботи із задачею. Розглянемо для прикладу стандартну задачу уроку геометрії у 8 класі при вивченні теми «Площа трапеції».

<u>*Задача.*</u> Знайти площу рівнобедреної трапеції, у якої діагональ має довжину l і утворює з основою кут α .

Перший спосіб розв'язання



1) Розглянемо ΔACF: $\angle F = 90^0$;

$AC = l; \angle A = \alpha.$

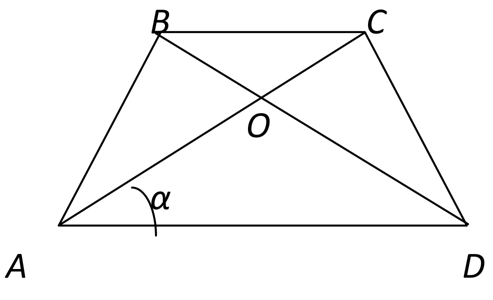
$CF = AC \sin\alpha = l \sin\alpha.$

$AF = AC \cos\alpha = l \cos\alpha.$

2) $S = \dfrac{AD + BC}{2} CF = AF \cdot CF = l \sin\alpha \cdot l \cos\alpha = l^2 \sin\alpha \cos\alpha = \dfrac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha.$

Відповідь. $\dfrac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha.$

Другий спосіб розв'язання



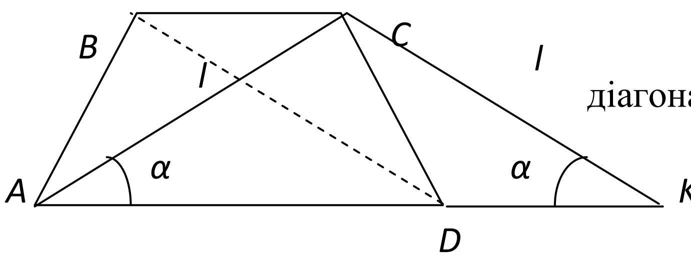
1) $S_\Delta = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$, де φ – кут між діагоналями.

2) Розглянемо ΔAOD: $\angle A = \angle D = \alpha.$ Отже, $\angle O = 180^0 - 2\alpha.$

3) $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} l \cdot l \cdot \sin(180^0 - 2\alpha) = \dfrac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha.$

Відповідь. $\dfrac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha.$

*Третій спосіб розв'язання *



1) Виконаємо паралельне перенесення діагоналі *BD*, при якому точка В переходить в точку *C*. Отримаємо ΔACK – рівнобедрений, бо $AC=CK=l$.

2) Розглянемо ΔABC і ΔCDK: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h_{òðàï.}$

$S_{\Delta CDK} = \frac{1}{2} DK \cdot h_{òðàï.}$

Оскільки, *BCKD* – паралелограм за побудовою, то $BC=DK$.

Отже, $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta CDK}$, трикутники – рівнобедрені.

3) $S_{трап.}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}=S_{\Delta CDK}+S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ACK}$.

Таким чином, трапеція рівновелика з трикутником *ACK*.

4) Розглянемо ΔACK: $\angle A = \alpha, \angle K = \alpha, \angle C = 180^0 - 2\alpha.$

$S_{\Delta ACK} = \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \sin(180^0 - 2\alpha) = \frac{1}{2} l^2 \cdot \sin 2\alpha.$

Відповідь. $\frac{1}{2} l^2 \sin 2\alpha.$

У процесі розв’язування вказаної задачі використовуються і систематизуються знання учнів про формули обчислення площі трапеції та трикутника, властивості площ геометричних фігур, співвідношення між елементами прямокутного трикутника, певні, відомі з вивчення планіметрії, формули перетворення тригонометричних виразів, властивості елементів трикутників, паралелограмів, трапецій.

Як свідчить представлений нами матеріал, кожен із способів є коротким, доступним для учнів, оскільки використані лише елементи обов’язкових знань та вмінь з геометрії. Однак, ці способи містять значні відмінності уже починаючи з малюнків до задачі. Переконані, що такий досвід роботи із однією задачею є корисним для учнів з психологічної точки зору, оскільки, певним чином, знімає острах перед невідомістю ідеї розв’язання нової задачі. Учень має зрозуміти, що використання раніше набутих міцних і глибоких знань з геометрії слугує основою для появи ідеї розв’язання невідомої задачі.

Клоченок Дарина Костянтинівна
студентка 1 курсу, напрям підготовки «Технологічна освіта»

ВЛАСТИВОСТІ ВІДРІЗКІВ РІВНОБІЧНОЇ ТРАПЕЦІЇ

Проблема творчості в наші дні стала настільки актуальною, що її називають навіть проблемою століття. Проте, ще у 1913 році на II з'їзді викладачів математики звучало: "Потрібна школа, яка поставить за мету сприяти розвитку творчих сил у своїх вихованців, спрямує головну увагу на навчання користуватися методами, а не на збільшення кількості матеріалу…" Та ще досі у більшості школярів складається уявлення, що існує величезна кількість методів та способів розв'язання навчальних задач і розібратися в них практично не можливо. А який вчитель не прагне до того, щоб учень, прочитавши умову задачі, навчився відразу бачити, що один спосіб розв'язування непридатний, а інший - може бути використаний?!

Учень не шукає метод розв'язування самостійно. Саме тому вчителеві важливо пам'ятати, що навчання полягає не тільки в накопиченні знань, а і в узагальненні та систематизації їх. Формуванню системності знань та розвитку розумових здібностей учнів сприяє використання різних способів розв'язування тих самих задач та доведення теорем. Тоді, аналізуючи, які знання потрібні для досягнення результату, як вони залежать від нового матеріалу, учні привчаються бачити засвоєні ними знання в динаміці. А ознайомившись з різними способами та методами розв'язування, порівнявши, який з них і за яких початкових умов швидше приводить до бажаного результату, учні зможуть самостійно обирати найраціональніший.

Особливо це стосується геометричної підготовки. Адже в геометрії, в силу об'єктивних обставин, багато фактів вивчаються в різний час, хоча вони і споріднені, поєднані внутрішньою природою. Так, вивчення декартових координат і векторів у школі здійснюється двічі – як на площині, так і в просторі. Розглянемо, для прикладу, різні способи розв’язування задачі пор рівнобічну трапецію:

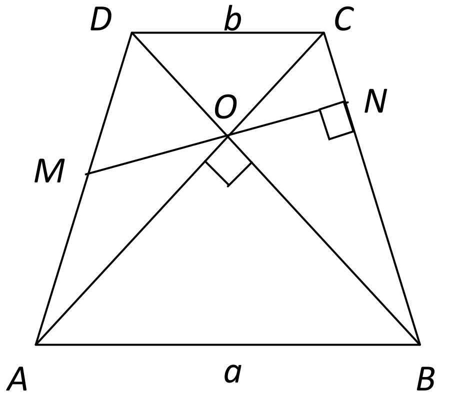
Через точку перетину діагоналей рівнобічної трапеції з перпендикулярними діагоналями проведена пряма перпендикулярно до бічної сторони. Ця пряма перетинає бічні сторони трапеції в точках M і N. Знайдіть довжину MN, якщо довжини основ трапеції дорівнюють a і b.

Перший спосіб розв’язання

Оскільки трапеція рівнобічна і діагоналі взаємно перпендикулярні, то трикутники DOC і AOB – рівнобедрені прямокутні, звідки:

$\angle ODC = \angle OCD = \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$.

З $\Delta AOB(\angle O = 90^\circ)$ AO=OB=AB$\cdot \cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}.$



З $\Delta COD(\angle O = 90^\circ)$ OC=OD=CD$\cdot \cos 45^\circ = \frac{b}{\sqrt{2}}.$

Р $\Delta BOC(\angle O = 90^\circ)$ за теоремою Піфагора

BC = $\sqrt{OB^2 + OC^2}$ або BC = $\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Отже, $AD = BC = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Позначимо $\angle DAO = \angle CBO = \alpha.$

Тоді: у $\Delta AOD(\angle N = 90^\circ)\angle ADO = 90^\circ - \alpha$

у $\Delta BON(\angle N = 90^\circ)\angle BON = 90^\circ - \alpha$

у $\Delta CON(\angle N = 90^\circ)\angle CON = \alpha$

у $\Delta BOC(\angle O = 90^\circ)\angle BCO = 90^\circ - \alpha$.

Вертикальні кути рівні:

$\angle AOM = \angle CON = \alpha, \angle DOM = \angle BON = 90° - \alpha$. Отже, трикутники AMO і DMO – рівнобедрені, звідки MO=MA=MD, тобто M – середина відрізка AD і

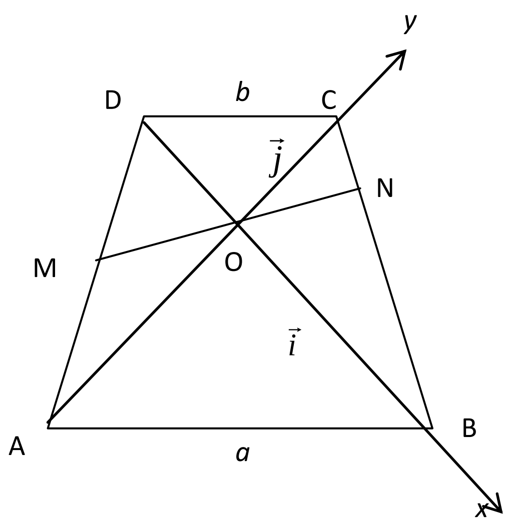
$$MO = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}};$$

Довжину висоти ON прямокутного трикутника, опущеної з вершини прямого кута на гіпотенузу, знайдемо розглянувши подібні трикутники $\Delta OBN \sim \Delta CBO$ (прямокутні за гострим кутом).

Звідси $\frac{ON}{OB} = \frac{CO}{CB}$ або ON = $\frac{OB \cdot CO}{CB} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} = \frac{ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$.

$$MN = MO + ON = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \frac{(a+b)^2}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}} = \frac{(a+b)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Відповідь: MN = $\frac{(a+b)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$.



Другий спосіб розв'язання

Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб вісь x сумістилась з прямою BD, вісь y – з прямою AC.

Оскільки OA = OB = $\frac{a}{\sqrt{2}}$, OC = OD = $\frac{b}{\sqrt{2}}$, то в системі координат A $\left(0; -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, B $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right)$, C $\left(0; \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, D $\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}; 0\right)$.

Використаємо рівняння прямої „у відрізках на осях" і складемо рівняння прямої BC у вигляді $\frac{x}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{b}{\sqrt{2}}} = 1$ або $\sqrt{2}bx + \sqrt{2}ay - ab = 0$.

Точка M – середина відрізка (розв.1). Знайдемо координати точки M за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{0 - \frac{b}{\sqrt{2}}}{2} = -\frac{b}{2\sqrt{2}}; \quad y_M = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{-\frac{a}{\sqrt{2}} + 0}{2} = -\frac{a}{2\sqrt{2}},$$

отже, M $\left(-\frac{b}{2\sqrt{2}}; -\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$. За формулою відстані $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої Ax + By + C = 0.

Знайдемо довжину відрізка MN: MN = $\frac{\left|\sqrt{2}b \cdot \left(-\frac{b}{2\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}a \cdot \left(-\frac{a}{2\sqrt{a}}\right) - ab\right|}{\sqrt{(\sqrt{2b})^2 + (\sqrt{2}a)^2}} =$

$$\frac{\left|-\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}-ab\right|}{\sqrt{2b^2+2a^2}}=\frac{\left|b^2+a^2+2ab\right|}{2\sqrt{2b^2+2a^2}}=\frac{(a+b)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Відповідь: MN = $\frac{(a+b)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$. [1].

Важливе значення для розв'язування текстових задач у навчальному процесі має ретельний добір навчальних завдань, які мають відповідати певним загально-методичним вимогам: забезпечувати засвоєння учнями програмового матеріалу з математики і, зокрема, формувати в них знання про задачу, її склад і процес розв'язування, вчити використовувати набуті знання в різних ситуаціях. При цьому зміст завдань має відповідати темі уроку і меті вивчення матеріалу, а числові дані – програмовим вимогам; послідовність застосування вправ має сприяти свідомому засвоєнню теоретичних знань і вмінню розв'язувати задачі, розвитку прийомів розумової і творчої діяльності школярів; забезпечувати автоматизацію елементарних дій, з яких складається діяльність при розв'язуванні задач; створювати умови для узагальнення способів діяльності; відповідати логіці й структурі процесу формування вмінь.

Література

1. Кобко Л.М. Краса пошуку різних розв'язань однієї геометричної задачі. – Чернігів: ЧДПУ,. 2007. – 235 с. [1].

Луценко Віктор Юрійович
студент 3 курсу, напрям підготовки « Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ «НА ЕКСТРЕМУМ»

Уже стало традицією використовувати похідну в будь-якій задачі «на екстремум». Хоча для багатьох з цих задач існують інші способи розв’язування – алгебраїчні, геометричні, якими користувалися багато віків, поки не було винайдено інтегральне та диференціальне числення. Але навіть після розробки методів аналізу прийоми алгебри і геометрії не були забуті, а в багатьох випадках виявляються ефективнішими за нові методи. Навряд чи варто закривати очі на цей факт і звертатися до похідних навіть в тих випадках, коли легше обійтись без них.

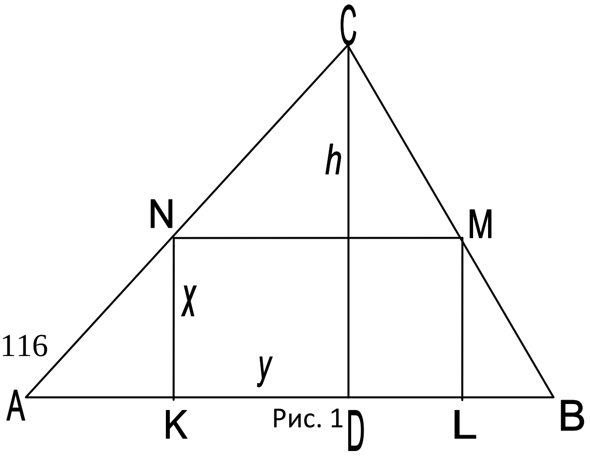


Рис. 1

Доцільно демонструвати студентам і учням різні способи розв’язування задач. Задачі, які можна розв’язати різним способами, як правило, цікаві і повчальні. Кожний з них демонструє можливості якогось одного метода, а порівняння розв’язків дозволяє виробити свою систему підходів до задач, розвиває їхню інтуїцію, дає необхідний досвід розв'язування задач.

Наведемо дві задачі «на максимум», які розв'язуються різними способами.

<u>*Задача 1.*</u> В даний гострокутний трикутник вписати прямокутник найбільшої площі.

Перший спосіб розв'язання (аналітичний).

Нехай в трикутник *ABC* вписаний прямокутник *KLMN* так, що його вершини *K* і *L* лежать на стороні *AB* (рис. 1). Проведемо висоту *CD* трикутника і позначимо довжини відрізків

AB, CD, KN, і *KL* відповідно через *c, h, x* і *y*, а площу прямокутника *KLMN* – через *S*.

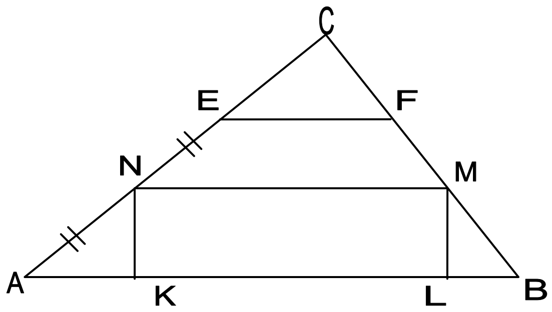


Рис. 2

Трикутники *CMN* і *CBA* подібні. Звідси слідує, що: $y=\frac{c}{h}(h-x).$

А так як $S=xy$, то $S=\frac{c}{h}x(h-x)=-\frac{c}{h}(x-\frac{h}{2})^2+\frac{ch}{4}.$

Отже, $S_{\max}=0,25ch$ при $x=0,5h$.

Таким чином, прямокутник *KLMN* має найбільшу площу, рівну половині площі трикутника *ABC*, якщо його сторона *MN* є середньою лінією трикутника *ABC.*

Другий спосіб розв'язання (геометричний)

Якщо відрізок *MN* середня лінія трикутника *ABC,* (рис. 2) то легко бачити, що $S_{ABC}=2MN\cdot KN$ і $S_{KLMN}=0,5S_{ABC}.$

Якщо *AN<NC,* то на відрізку *NC* побудуємо точку *E* так, що *NE=AN* і проведемо $EF\parallel AB$. Отримаємо трапецію *ABFE,* висота якої рівна подвоєній довжині відрізка *KN,* а так як відрізок *MN* – середня лінія цієї трапеції, то $S_{ABFE}=2MN\cdot KN$. Отже, $S_{KLMN}=0,5S_{ABFE}<0,5S_{ABC.}$

Аналогічно, $S_{KLMN}<0,5S_{ABC}$, коли довжина відрізка $AN>NC$.

Таким чином вписаний прямокутник має найбільшу площу, рівну половині площі трикутника, якщо одна з його сторін є середня лінія трикутника.

Порівнюючи приведені два розв'язки, помічаємо, що перший відрізняється природністю роздумів, в той час як друге розв'язання дещо штучне: потрібно провести допоміжні лінії, розглянути три випадки розміщення точки *N* на відрізку *AC*. Тим не менш другий розв'язок більш наглядний, а використаний в ньому прийом прирівнення площ часто знаходить використання при розв'язуванні задач.

<u>*Задача 2*</u>. В даний кутовий сектор з центральним кутом $\alpha(\alpha\le 90^\circ)$ вписати прямокутник найбільшої площі.

Перший спосіб розв'язання (аналітичний)

Спочатку розглянемо випадок коли сторона *AB* вписаного прямокутника *ABCD* лежить на радіусі *OM* сектора (рис. 3).

Позначимо величину кута *MOC* через x. Тоді з ΔOBC отримаємо $BC = OC\sin x = R\sin x$ (R – радіус сектора).

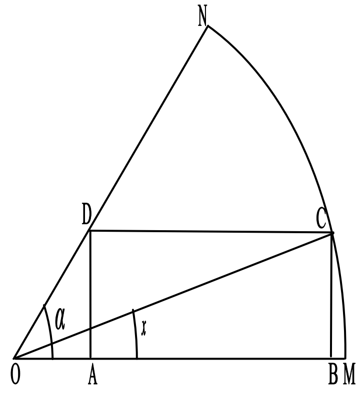


Рис.3

З ΔODC за теоремою синусів знайдемо CD:

$$\frac{CD}{\sin\angle COD} = \frac{OC}{\sin\angle ODC},$$

$$\frac{CD}{\sin(\alpha - x)} = \frac{R}{\sin(180° - x)}, \quad \frac{CD}{\sin(\alpha - x)} = \frac{R}{\sin x},$$

$$CD = \frac{R\sin(\alpha - x)}{\sin\alpha},\ 0^0 < x < \alpha.$$

Площа S прямокутника ABCD є функція від x:

$$S = CD\cdot BC = \frac{R^2\sin x\sin(\alpha - x)}{\sin\alpha} = R^2\frac{\cos(2x-\alpha) - \cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$ Звідси видно, що найбільше значення площа S набуває при $\cos(2x-\alpha) = 1$, тобто коли $x = \frac{\alpha}{2}$. Визначимо це значення площі S_1:

$$S_1 = S_{\max} = R^2\frac{1-\cos\alpha}{2\sin\alpha} = 0{,}5R^2 tg 0{,}5\alpha.$$

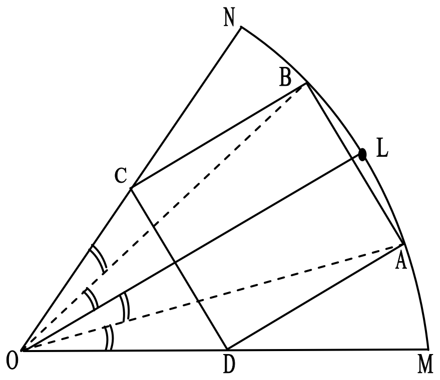


Рис. 4

Тепер розглянемо другий можливий випадок розміщення прямокутника в секторі. Нехай прямокутник *ABCD* вписаний в сектор так, що дві його вершини *A* і *B* лежать на дузі *MN* сектора. (рис. 4).

Бісектриса *OL* кута *MON* є віссю симетрії отриманої фігури, і, відповідно, задача зводиться до попередньої. Площа прямокутника *ABCD* буде найбільшою, коли площа прямокутника, вписаного в сектор *MOL*, найбільша, тобто вершини *A* і *B* є серединами дуг *ML* і *LN*.

У цьому випадку $\angle AOL = 0{,}25\alpha$, тобто найбільша площа прямокутника рівна $S_2 = R^2 tg 0{,}25\alpha$.

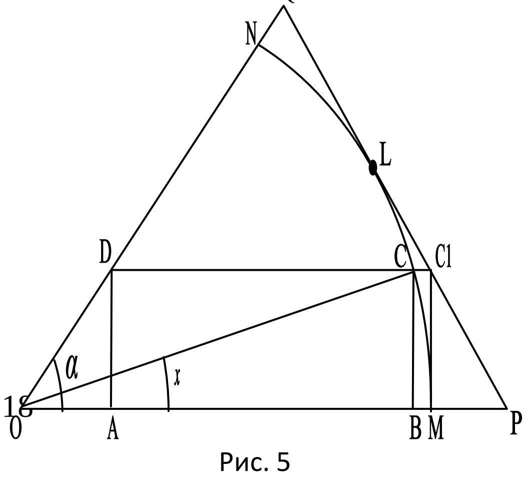


Рис. 5

Залишається порівняти S_1 і S_2. Оскільки $tg 0{,}5\alpha > 2tg 0{,}25\alpha$ при $0^0 < \alpha \le 90^0$, то $S_1 > S_2$. Отже, прямокутник матиме найбільшу площу при першому способі побудови, коли одна зі сторін прямокутника лежить на радіусі, а вершина, що лежить на дузі, ділить її навпіл.

Як бачимо роздуми доволі прості.

Другий спосіб розв'язання (геометричний)

Нехай L – середина дуги MN. Побудуємо дотичну до дуги сектора в точці L. Точки перетину її зі сторонами кута MON позначимо через P і Q (рис 5 і 6).

Якщо вершина C прямокутника $ABCD$, вписаного в сектор першим способом, співпадає з точкою L, то його площа, рівна половині площі трикутника OPQ, буде найбільша. Це одразу слідує з задачі 1.

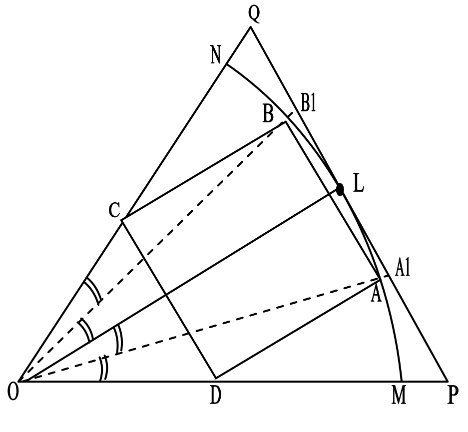


Рис. 6

Якщо прямокутник $ABCD$ вписаний в сектор другим способом, то продовжуючи його сторони DA і CB до перетину з відрізком PQ в точках A_1 і B_1 отримаємо прямокутник A_1B_1CD, вписаний в трикутник OPQ. Тепер легко показати, знову використовуючи задачу 1, що $S_{ABCD} < S_{A_1B_1CD} < 0{,}5S_{OPQ}$ (рис. 6).

Отже, вписаний в сектор прямокутник має найбільшу площу, якщо одна з його сторін лежить на радіусі сектора, а вершина, що лежить на дузі, ділить дугу навпіл.

Матвійчук Василь Васильович

студент 2 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ ЗАДАЧ НА ВПИСАНІ В КОЛО ТРИКУТНИКИ

Дж. Пойа говорив: «Краще розв'язати одну задачу кількома способами, ніж кілька задач одним».

Задача. В коло вписаний рівносторонній трикутник $\mathrm{AB}C$. На дузі $\mathrm{B}C$ дано довільна точка M. Доведіть що $\mathrm{MA} = \mathrm{MB} + \mathrm{M}C$.

Перший спосіб розв'язання

Відрізки які нас цікавлять MA, MB, і $\mathrm{M}C$ є сторонами трикутників AMB, $\mathrm{BM}C$, в яких $\angle\mathrm{AMB} = 60^0$ і $\angle\mathrm{BM}C = 120^0$ (рис. 1). Застосуємо до цих трикутників теорему косинусів. Позначимо $\mathrm{AB} = a$ $\mathrm{MA} = x$, $\mathrm{MB} = y$, $\mathrm{M}C = z$. Враховуючи, що $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ і $\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$, отримаємо: $a^2 = x^2 + y^2 - xy$; $a^2 = y^2 + z^2 + yz$.

Виразимо з першої рівності другу, маємо:

$$x^2 - z^2 - y(x+z) = 0$$

або

$$(x+y)(x-y-z) = 0.$$

Звідси маємо: $x = y + z$.■

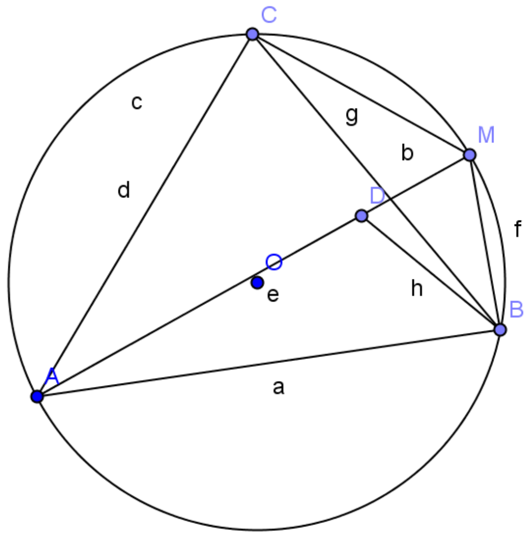


рис. 1

Другий спосіб розв'язання

Так як відрізки AM, MB, і MC є хордами кола, описані біля трикутника ABC то їх довжину можна виразити через радіус R цього кола позначивши $\angle BAM = \alpha$ знаходимо : $x = 2R\sin(60^0 + \alpha)$; $y = 2R\sin\alpha$; $z = 2R\sin(60^0 - \alpha)$. Тоді із тотожності $\sin(60^0 + \alpha) = \sin\alpha + \sin(60^0 - \alpha)$ випливає, що $x = y + z$.■

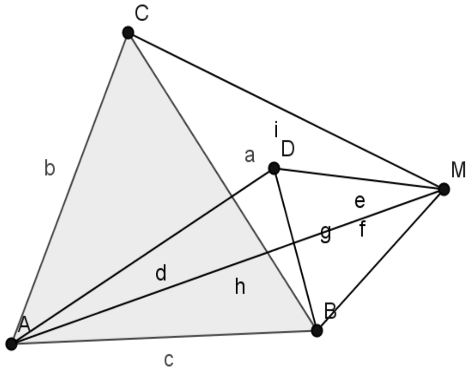


рис. 2

Третій спосіб розв'язання

Площу чотирикутника $ABCM$ виразимо двома способами. Нехай $\angle AMB = \varphi$, де N – точка перетину відрізків AM і BC. Тоді площа чотирикутника $ABMC$ рівна $\frac{1}{2}ax\sin\varphi$.

З іншої сторони площа цього чотирикутника рівна сумі площин трикутників ABM і ACM. Неважко довести, що $\angle ABM = \varphi$, $\angle ACM = 180^0 - \varphi$ через це $\frac{1}{2}ax\sin\varphi = \frac{1}{2}ay\sin\varphi + \frac{1}{2}az\sin(180 - \varphi)$, звідси слідує, що $x = y + z$.■

Розв'язок задачі кожним із розглянутих методів зводився до застосування формул, в склад яких входять тригонометричні функції і виконання нескладних перетворень. Допоміжні побудови були не потрібні.

А зараз розглянемо геометричне доведення задачі.

Четвертий спосіб розв'язання

Відкладемо на відрізку MA відрізок MD, рівний відрізку MB, і доведемо що відрізок DA рівний відрізку MC (рис. 1).

Оскільки $\angle AMB = 60^0$, то трикутник BDM є рівностороннім. Трикутник ABC – також рівносторонній. Повернемо трикутник BCM навколо точки B на 60^0 так щоб точка C співпадала з точкою A, тоді точка M співпадає з точкою D і відрізок MC співпаде з відрізком DA. Тому, $DA = MC$. Через це, при будь якому виборі точки M на дузі BC маємо: $MA = MB + MC$. ■

Геометричне вирішення задачі коротке, красиве і наглядне.

При уважному аналізі можна отримати узагальнення задачі.

Нехай точка M не належить описаному колу (рис. 2) . Тоді, виконавши ту ж саму допоміжну побудову (поворот точки M навколо точки B на 60^0), отримаємо точку D, яка не належить прямій AM дійсно якщо точка M лежить в середині $\angle BAC$, але не середині описаного кола, то $\angle ADM = \angle ADB + 60^0 < 180^0$, так як $\angle ADB = \angle CMB < 120^0$. Для повного доведення потрібно розглянути всі можливі випадки розміщення точки M .

Бачимо, що $MD = MB,\ DA = MC,$ тобто сторони трикутника ADM рівні відрізкам MA, MB і MC . Таким чином, приходимо до такої теореми:

Якщо в площині рівностороннього трикутника ABC Дана довільна точка M , то відрізки MA, MB і MC можуть бути сторонами деякого трикутника, або ж один з них рівний сумі двох інших (якщо точка M належить описаному навколо ABC колу). Ця теорема має назву теореми Помпейю.

Переваги геометричного доведення задачі очевидні. Якщо за допомогою аналітичних методів було неважко перевірити істину потрібного відношення, то геометричний спосіб дозволив отримати раціональне доведення, узагальнити задачу і повністю розкрити ситуацію. Неважко переконатися, що використання метода координат чи векторів до доведення задачі не раціональне. Але якщо використати теорему Птолемея про вписаний чотирикутник, то можна отримати ще одне дуже просте доведення.

П'ятий спосіб розв'язання

З теореми Птолемея випливає:

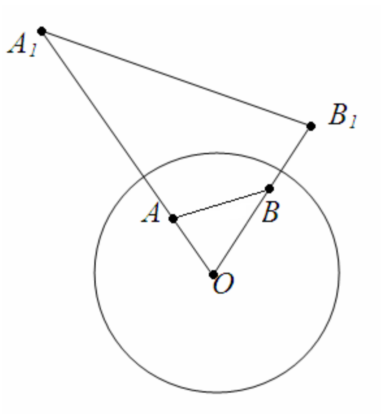
$BC \bullet AM = AC \bullet BM + AB \bullet CM$. Так як $BC = AC = AB = a$, то, розділивши обидві частини цієї рівності на a, отримаємо: $AM = BM + CM$.■

Література

Готман Э. Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные. – К.: Рад. шк., 1988. – 173 с.

Миколайчук Юлія Володимирівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ ПТОЛЕМЕЯ ПРО ВПИСАНИЙ ЧОТИРИКУТНИК РІЗНИМИ СПОСОБАМИ



Клавдій Птолемей (близько 87 — 165) — давньогрецький вчений (математик, астроном, географ, астролог). Створив геоцентричну систему світу, розробив математичну теорію руху планет навколо нерухомої Землі, яка дозволяла обчислювати їхнє положення на небі. Система Птолемея викладена в його головній праці «Альмагест» — енциклопедії астрономічних знань давнини. В «Альмагесті» наведені також відомості з прямолінійної і сферичної тригонометрії, вперше подані розв'язання ряду математичних задач. Ще однією відомою працею Клавдія Птолемея є «Математичний трактат в чотирьох книгах» або «Тетрабіблос» — енциклопедія давньої астрології.

Інверсія відносно даного кола радіуса R з центром O – це перетворення, при якому точка A переходить в точку A_1, яка лежить на промені OA на відстані $OA_1 = \frac{R^2}{OA}$ від центра $O,$ число R^2 називають коефіцієнтом інверсії.

Лема1. Нехай A_1 і B_1 — образи точок A і B відповідно при інверсії з центром O і радіусом $R.$ Тоді трикутники OAB і OB_1A_1 подібні і

$$A_1B_1 = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

Доведення. З означення інверсії слідують наступні рівності: $OA \cdot OA_1 = R^2,$ $OB \cdot OB_1 = R^2.$ Звідси слідує, що: $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1,$ і тому $\frac{OA_1}{OB} = \frac{OB_1}{OA}$ Трикутники OAB і OA_1B_1 мають спільний кут при вершині $O,$ і їх сторони, які виходять з даної вершини пропорційні. За другою ознакою подібності трикутники OAB і OB_1A_1 подібні. Звідки слідує, що: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OB}$ З даної рівності знаходимо: $A_1B_1 = AB \cdot \frac{OA_1}{OB}.$ З означення інверсії слідує, що: $OA_1 = \frac{R^2}{OA}.$ Підставивши це значення у вираз для A_1B_1, одержимо: $A_1B_1 = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}.$ [2]

■

Теорема Птолемея. Довести, що для будь-якого вписаного чотирикутника добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін.

Перший спосіб доведення

Для доведення теореми Птолемея спочатку доведемо теорему Стюарта.

Теорема Стюарта**.** Нехай D – довільна точка на стороні BC трикутника ABC. Довести, що для відрізка $AD = d$ виконується співвідношення:

$$d^2 = \frac{m}{a} b^2 + \frac{n}{a} c^2 - mn, \qquad (1)$$

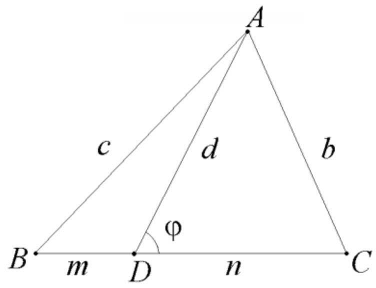
де $m = BD,\ n = CD.$

Доведення**.** За теоремою косинусів для трикутника ACD (див. мал.) маємо:

$$2dn \cdot \cos\varphi = d^2 + n^2 - b^2,$$

а для трикутника ABD:

$$2dm \cdot \cos(180° - \varphi) = d^2 + m^2 - c^2.$$



Звідки, враховуючи, що $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi,$ одержимо:

$$mn^2 + m^2n + d^2(m+n) = mb^2 + nc^2,$$

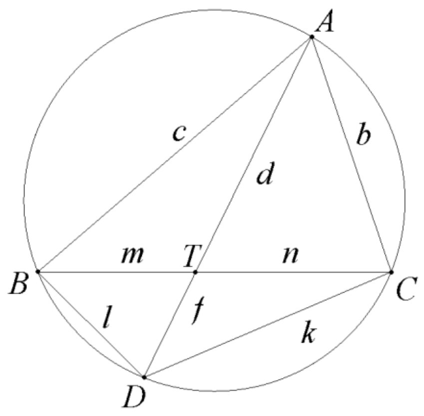
або

$$a(d^2 + mn) = mb^2 + nc^2,$$

що еквівалентно рівності (1).

Теорема Стюарта доведена. [1]

■



Тоді для вписаного чотирикутника $ABCD$ введемо позначення, а саме $AB = c$, $AC = b$, $CD = k$, $BD = l$, $BT = m$, $TC = n$, $AT = d$, $TD = f$. Із подібності трикутників випливають наступні рівності:

1) $\Delta BTD \sim \Delta ATC \Rightarrow ld = bm$;

2) $\Delta CTD \sim \Delta ATB \Rightarrow kd = cn$.

Крім того, $fd = mn$, як відрізки хорд, що перетинаются.

Для трикутника ABC застосуємо теорему Стюарта і одержимо:

$$d^2 = \frac{m}{m+n}b^2 + \frac{n}{m+n}c^2 - mn,$$

$$(m+n)(d^2 + mn) = b \cdot bm + c \cdot cn,$$

$$(m+n)(d^2 + df) = bld + ckd,$$

$$(m+n)(d + f) = bl + ck.$$

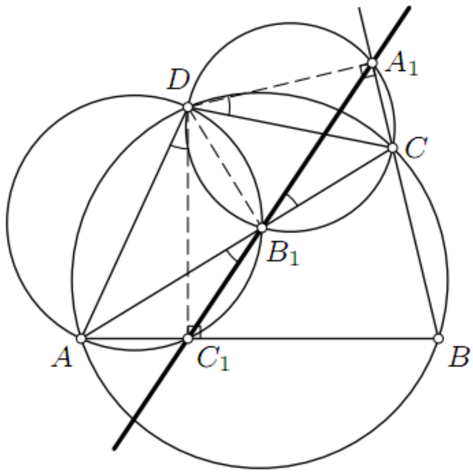
Остання рівність може бути записана наступним чином:

$$AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot BD,$$

що є символьним записом вихідного твердження. Отже, теорему доведено.

■

Другий спосіб доведення



Дана теорема може бути отримана, як наслідок теореми Сімсона. Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло і A_1, B_1, C_1 – це ортогональні проекції вершини D на прямі BC, CA, AB відповідно. За теоремою Сімсона точки A_1, B_1 і C_1 – колінеарні.

З точок A_1 і B_1 сторону CD видно під прямими кутами, тому чотирикутник A_1CB_1D вписаний в коло з діаметром CD, за теоремою синусів маємо:

$$A_1B_1 = CD\sin\angle A_1CB_1 = CD\sin\angle BCA.$$

За теоремою синусів з трикутника ABC маємо: $AB = 2R\sin\angle BCA$ (R – радіус кола ABC).

Тому

$$A_1B_1 = \frac{AB \cdot CD}{2R}.$$

Аналогічно знаходимо:

$$B_1C_1 = \frac{BC \cdot AD}{2R} \text{ і } C_1A_1 = \frac{CA \cdot BD}{2R}.$$

Так як

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1,$$

то

$$\frac{AB \cdot CD}{2R} + \frac{BC \cdot AD}{2R} = \frac{CA \cdot BD}{2R}$$

або

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = CA \cdot BD.$$

Тут суттєво використовується той факт, що точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1. Це твердження завжди має місце при розташуванні точок A, B, C, D на колі у такій послідовності. І навпаки, якщо відношення

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = CA \cdot BD$$

виконується, то точка D лежить на колі, що описане навколо трикутника ABC. Дійсно, для будь-якої точки D площини і її ортогональних проекції на прямі BC, CA, AB виконується рівності:

$$A_1B_1 = \frac{AB \cdot CD}{2R},\ B_1C_1 = \frac{BC \cdot AD}{2R} \text{ і } C_1A_1 = \frac{CA \cdot BD}{2R},$$

в силу яких рівність

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = CA \cdot BD$$

приймає вигляд:

$$A_1B_1 \cdot 2R + B_1C_1 \cdot 2R = A_1C_1 \cdot 2R,$$

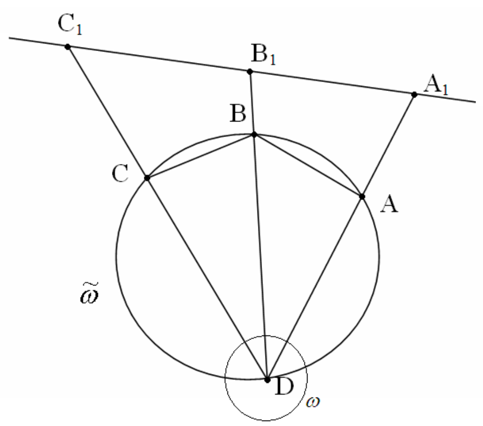
Звідки

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1.$$

Це означає, що точки A_1, B_1, C_1 колінеарні. За достатністю теореми Сімсона точка D лежить на колі ABC. [1]

■

Третій спосіб доведення



Нехай чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло $\tilde{\omega}$. Розглянемо інверсію i_ω з центром в точці D. Образ кола $\tilde{\omega}$ при даній інверсії (з деяким радіусом R) буде пряма l, яка не містить точку D.

Нехай $A_1 = i_\omega(A)$, $B_1 = i_\omega(B)$, і $C_1 = i_\omega(C)$. Тоді $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. За лемою 1 маємо:

$$A_1C_1 = AC \cdot \frac{R^2}{AD \cdot DC},$$

$$A_1B_1 = AB \cdot \frac{R^2}{AD \cdot DB},$$

і

$$B_1C_1 = BC\frac{R^2}{DB \cdot DC}.$$

Підставимо ці вирази у рівність і

отримаємо: $AC \cdot \dfrac{R^2}{AD \cdot DC} = AB \cdot \dfrac{R^2}{AD \cdot DB} + BC \cdot \dfrac{R^2}{DB \cdot DC}.$

Скоротивши на R^2 і помноживши на $AD \cdot BD \cdot DC,$ отримаємо:

$$AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot AD.$$

■

Література

1. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т.1: Планиметрия, преобразование плоскости. – М.:МЦНМО, 2004. С. – 61 – 62.
2. И. Я. Бакельман. Инверсия. – М.: Наука, 1966. С. 15.

Покорнюк Оксана Юріївна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ДЕКІЛЬКА ДОВЕДЕНЬ ТЕОРЕМИ ПРО ВИСОТИ ТРИКУТНИКА

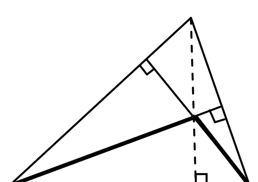
Існує ряд теорем про те, що в трикутника різні відрізки, які мають спеціальні властивості, перетинаються в одній точці. Наприклад, в одній точці перетинаються медіани трикутника, серединні перпендикуляри до сторін, бісектриси і висоти. Якщо в перших трьох випадках доведення відносно прості, то для висот воно трохи складніше, та існують різні способи доведень.

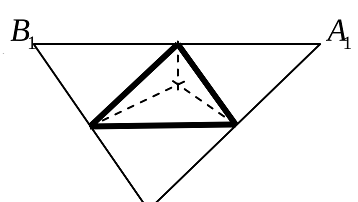
Як правило, у доведеннях цієї властивості розглядається тільки гострокутний трикутник. Розглянемо випадок, коли в трикутнику ABC кут C тупий. Позначимо через C' точку перетину перпендикулярів, проведених з точок A і B на прямі BC і AC (рис. 1). Всі кути трикутника ABC' гострі, тому що проведені висоти розбивають трикутник на пари прямокутних, тобто кути A, B *і* C' гострі. Висоти трикутника ABC будуть перетинатися в одній точці тільки тоді, коли в одній точці перетинаються висоти трикутника ABC', так як обидва твердження еквівалентні тому, що $CC' \perp AB$.

Перейдемо до доведень.

Перший спосіб доведення

Розглянемо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис.2), для якого вершини даного трикутника ABC будуть серединами сторін (для побудови трикутника $A_1B_1C_1$ потрібно провести через вершини трикутника ABC прямі, паралельні його сторонам).





Висоти трикутника ABC являються серединними перпендикулярами до сторін трикутника $A_1B_1C_1$, тому вони перетинаються в одній точці.

Другий спосіб доведення

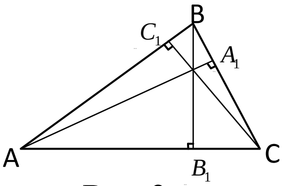


Рис.3

Проведемо в трикутнику ABC висоти AA_1, BB_1 і CC_1. Тоді $\frac{CA_1}{CB_1}=\frac{CA\cos C}{CB\cos C}=\frac{CA}{CB}$, тобто ΔABC подібний $\Delta A_1B_1C_1$ і, отже, $\angle AA_1B_1 = 90^0 - \angle CA_1B_1 = 90^0 - \angle A$. Аналогічно доводиться, що $\angle AA_1C_1 = 90^0 - \angle A$ Тому пряма AA_1 являється бісектрисою кута $B_1A_1C_1$. Аналогічно прямі BB_1 і CC_1- бісектриси двох інших кутів трикутника $A_1B_1C_1$. В результаті отримаємо, що висоти трикутника ABC являються бісектрисами трикутника $A_1B_1C_1$, які, як відомо, перетинаються в одній точці. Звідси слідує, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

Третій спосіб доведення

Нехай продовження висот трикутника ABC перетинають описане коло в точках A_1, B_1, C_1.

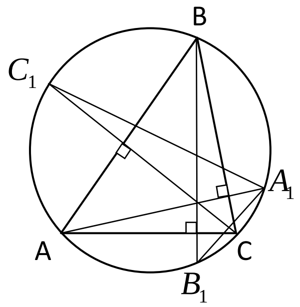


Рис.4

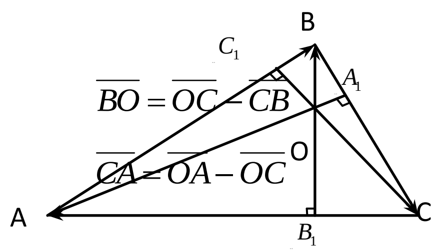
Тоді $\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = 90^0 - \angle A$ і $\angle C_1A_1A = \angle C_1CA = 90^0 - \angle A$, тобто пряма AA_1 ділить кут $B_1A_1C_1$ навпіл. Аналогічно можна довести, що прямі BB_1 і CC_1 ділять два інших кути трикутника $A_1B_1C_1$ навпіл.

Отже, висоти трикутника ABC являються бісектрисами трикутника $A_1B_1C_1$, а отже вони перетинаються в одній точці.

Четвертий спосіб доведення

Доведемо векторним способом, що висоти трикутника, або їх продовження перетинаються в одній точці.

Нехай BB_1 і AA_1 - висоти трикутника ABC, що перетинаються у т. O Доведемо, що CC_1 - висота проведена до сторони AB і проходить через т. O. Розглянемо вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Звідси



$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

Якщо $CC_1 \perp AB$ і CC_1 проходить через т. O, то буде правильною рівність $\overline{OC} \cdot \overline{AB} = 0$

Рис.5

$$\overline{OC} \cdot \overline{AB} = \overline{OC}(\overline{OB} - \overline{OA}) = \overline{OC} \cdot \overline{OB} - \overline{OC} \cdot \overline{OA} \quad (1)$$

З умови, що AA_1 висота проведена до BC, можемо записати $\overline{OA} \cdot \overline{BC} = 0$,
$\overline{OA}(\overline{OC} - \overline{OB}) = \overline{OA} \cdot \overline{OC} - \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$ (2)
З умови, що BB_1 висота проведена до AC, можемо записати $\overline{OB} \cdot \overline{CA} = 0$,
$\overline{OB}(\overline{OA} - \overline{OC}) = \overline{OB} \cdot \overline{OA} - \overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OA} = \overline{OB} \cdot \overline{OC}$ (3)
Врахувавши (2) і (3) запишемо (1)
$\overline{OC} \cdot \overline{AB} = \overline{OB} \cdot \overline{OA} - \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$.
Що й потрібно було довести.

П'ятий спосіб доведення

Розглянемо три кола S_a, S_b і S_c, симетричні колу, яке описане навколо трикутника ABC, відносно його сторін BC, CA і AB відповідно. Доведемо спочатку, що ці кола перетинаються в одній точці.

Нехай H - точка перетину кіл S_a і S_b. Вершини кутів BAC і BHC лежать на симетричних відносно BC колах, причому знаходяться вони по одну сторону від BC (Рис.6). Тому $\angle BHC = 180^0 - \angle BAC$. Аналогічно $\angle AHC = 180^0 - \angle ABC$.

Отже, $\angle AHB = 360^0 - \angle BHC - \angle AHC = \angle BAC + \angle ABC = 180^0 - \angle ACB$, тобто точка H належить також і колу S_c.

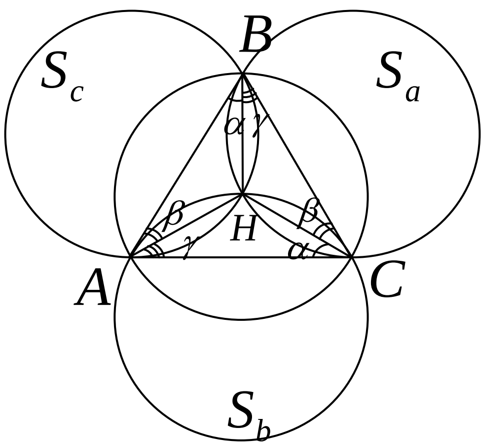


Рис.6

Так як радіуси кіл S_a, S_b і S_c рівні, то $\angle ABH = \angle ACH$, $\angle BAH = \angle BCH$ і $\angle CAH = \angle CBH$. Сума всіх цих кутів рівна сумі кутів трикутника ABC, тому $\angle BAH + \angle ABH + \angle CBH = 90^0$, тобто $AH \perp BC$. Аналогічно доводиться, що $BH \perp AC$ і $CH \perp AB$.

Шостий спосіб доведення

Доведемо теорему методом координат. Оскільки, пряма, перпендикулярна до прямої AB визначається геометричним місцем точок, різниця квадратів яких від двох даних точок A і B є величина стала, то спочатку доведемо, що пряма C_1C_2 перпендикулярна відрізку AB тоді і тільки тоді, коли $AC_1^2 - BC_1^2 = AC_2^2 - BC_2^2$.

Введемо систему координат, направивши вісь абсцис по прямій AB. Тоді точки A, B, C_1 і C_2 мають координати $(a,0)$, $(b,0)$, (x_1, y_1) і (x_2, y_2) відповідно.

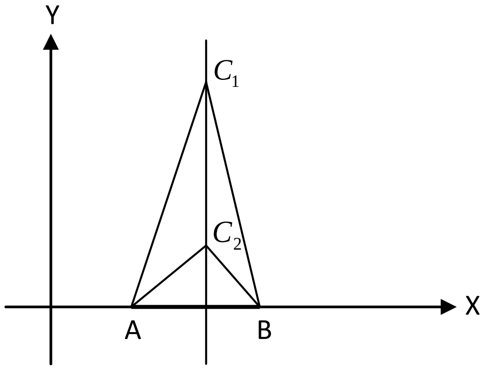


Рис.7

$$AC_1^2 - BC_1^2 = (a - x_1)^2 + y_1^2 - (b - x_1)^2 - y_1^2 = a^2 - b^2 - 2x_1(a-b).$$
$$AC_2^2 - BC_2^2 = (a - x_2)^2 + y_2^2 - (b - x_2)^2 - y_2^2 = a^2 - b^2 - 2x_2(a-b).$$

Рівність $AC_2^2 - BC_2^2 = AC_2^2 - BC_2^2$ еквівалентна тому, що $x_1 = x_2$, тобто $C_1C_2 \perp AB$.

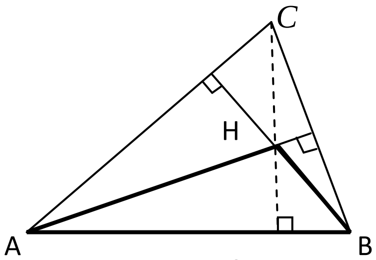


Рис.8

Нехай висоти трикутника ABC, проведені з точок A і B, перетинаються в точці H. З умови, $BA^2 - CA^2 = BH^2 - CH^2$ і $CB^2 - AB^2 = CH^2 - AH^2$, слідує що $BC^2 - AC^2 = BH^2 - AH^2$, тобто $CH \perp AB$.

Сьомий спосіб доведення

Існує досить загальний метод доведення того, що деякі відрізки в трикутнику перетинаються в одній точці: « Якщо на сторонах BC, CA і AB трикутника ABC взяти точки A_1, B_1 і C_1, то відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$» (Теорема Чеви). Причому точки беруться на сторонах трикутника, а не на їх продовженнях, - інакше теорема Чеви в наведеному формулюванні неправильна. Але, як було сказано в початку статті, достатньо розглянути випадок гострокутного трикутника, а для нього основи висот лежать саме на сторонах , а не на їх продовженнях.

Теорему Чеви можна сформулювати і так, щоб вона залишалась правильної і тоді, коли взяті точки лежать і на продовженнях сторін трикутника. Для цього потрібно певним чином дописати знаки розглядуваним відношенням довжин відрізків.

Попередньо доведемо теорему Чеви. Припустимо, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в точці O. Нехай P і Q - основи перпендикулярів, проведених з точок A і B на пряму OC (Рис.9), тоді $AC_1 : BC_1 = AP : BQ = S_{AOC} : S_{BOC}$. Аналогічно $BA_1 : CA_1 = AP : BQ = S_{BOA} : S_{COA}$ і $CB_1 : AB_1 = AP : BQ = S_{COB} : S_{AOB}$.

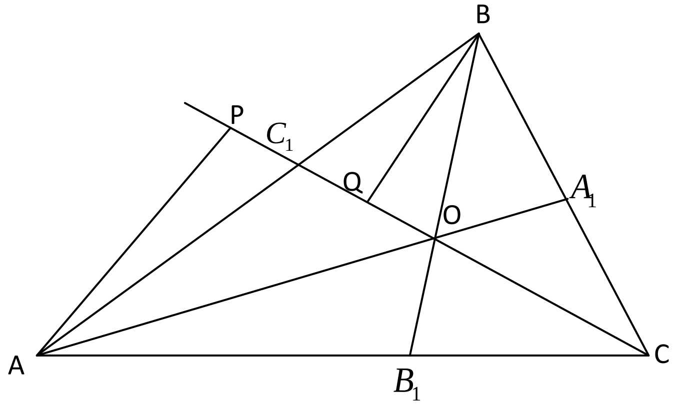


Рис.9

Перемноживши три останніх рівності, отримаємо, що добуток відношень, які знаходяться в лівій частині, дорівнює 1.

Доведемо протилежне. Нехай $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$, O- точка перетину відрізків AA_1 і BB_1, а C'- точка перетину прямих CO і AB, тоді отримаємо, що $AC_1 : BC_1 = AC_1' : BC_1'$. Із останньої рівності легко вивести, що точки C_1 і C_1' співпадають, тобто пряма CC_1 проходить через точку перетину прямих AA_1 і BB_1.

Після того як теорема Чеви доведена, теорема про висоти доводиться легко.

Нехай AA_1, BB_1 і CC_1- висоти трикутника ABC. Тоді

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{AC\cos\angle CAB}{BC\cos\angle ABC} \cdot \frac{AB\cos\angle ABC}{AC\cos\angle BCA} \cdot \frac{BC\cos\angle BCA}{AB\cos\angle CAB} = 1$$

і, відповідно, висоти трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення цієї теореми є досить простим як у способі I, так і достатньо складним і громіздким як у випадку способу V. Пошук і аналіз різних доведень стимулює учнів до відшукання найраціональнішого доведення, активізує навчально-пізнавальну діяльність учнів.

Використання векторів й координат у доведеннях ілюструють можливість застосування цих методів міркувань. Використання теореми Чеви, як і координатного і векторного методів, доцільне в роботі із здібними учнями, схильними до математики.

Література

1. Кушнір І. Ф. Методи розв’язання задач з геометрії. – К.:Абрис, 1994. – 464 с.

2. Ушаков Р. П. Одна задача - декілька розв'язань / Математика. – 1999. - №2(14), №3(15).
3. Прасолов В. В. Несколько доказательств теоремы о высотах треугольника // Математика в школе. – 1988. – №1. – С. 72-73.

Полянська Катерина Ігорівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ ЗНАХОДЖЕННЯ РАДІУСІВ ВПИСАНИХ І ОПИСАНИХ КІЛ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

«…Людині, яка вивчає математику, часто корисніше розв'язувати одну й ту саму задачу трьома різними способами, а ніж розв'язати три – чотири різні задачі»

(У. Сьєр).

Задачі є основним засобом навчання математики. Дуже важливо збагатити учнів загальними методами розв'язування задач, адже навчальний ефект визначається не кількістю розв'язаних задач, а засвоєнням методів їх розв'язування. Значні можливості для вдосконалення вивчення математики дає розв'язування задач різними способами.

При розв'язуванні задач тільки одним способом в учнів одна мета – знайти правильну відповідь. Якщо ж необхідно застосувати при цьому декілька способів, учні намагаються відшукати найбільш оригінальне, раціональне розв'язання.

Розглянемо розв'язання декількома способами задачі з шкільного підручника геометрії:

Знайдіть радіус r вписаного і радіус R описаного кіл для рівнобедреного трикутника з основою 10 см і бічною стороною 13 см

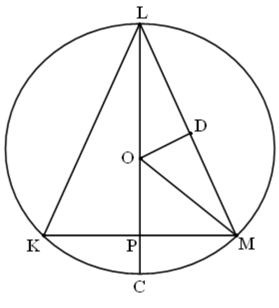


Рис.1

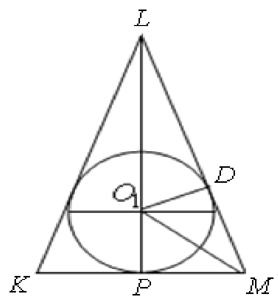


Рис.2

Перший спосіб розв'язання

1**)** Розглянемо ΔLPM (рис. 1). За теоремою Піфагора $LP=\sqrt{13^2-5^2}$, $LP=\sqrt{169-25}=25$ (см), т. О – центр описаного кола, $OD\perp LM$ і $LD=DM$.

З ΔOPM за теоремою Піфагора $OP=\sqrt{OM^2-MP^2}=\sqrt{R^2-5^2}$, де $R=OM=OL$, а $OP+OL=LP$, тоді $\sqrt{R^2-5^2+R}=12$, $\sqrt{R^2-5^2}=12-R$

$R^2-25=144-24R+R^2$, $24R=169$ звідки $R=\dfrac{169}{24}$.

2) O_1 – центр вписаного кола, (рис. 2) $O_1P=O_1D=r$.

Оскільки $\Delta PO_1M=\Delta DO_1M$, то $PM=DM$ і $LD=13-5=8$(см), а $LO_1=12-r$.

З ΔLO_1P за теоремою Піфагора $O_1D^2=LO_1^{\,2}-LD^2$, $24r=80$, $r=\dfrac{80}{24}$, $r=\dfrac{10}{3}$.

Відповідь. $42\frac{1}{4}$ см; $3\frac{1}{3}$ см.

Другий спосіб розв'язання

З ΔKLP (рис. 1) знайдемо LP за теоремою Піфагора $LP=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=12$(см).

Знайдемо площу ΔKLM $S=\dfrac{LP\cdot KM}{2}=\dfrac{10\cdot 12}{2}=60(\tilde{n}\grave{i}^{\,2})$.

Знайдемо R і r за формулами $R=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{2S}$, $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$, де a,b,c – сторони трикутника, S – площа трикутника.

$R=\dfrac{13\cdot 13\cdot 10}{4\cdot 60}=\dfrac{169}{24}$(см), $r=\dfrac{2\cdot 60}{13+13+10}=\dfrac{10}{3}$(см).

Відповідь. $42\frac{1}{4}$ см; $3\frac{1}{3}$ см.

Третій спосіб розв'язання

З подібності ΔOLD і ΔMOL (рис 1) маємо $\dfrac{OL}{ML}=\dfrac{LD}{LO}$, $\dfrac{R}{13}=\dfrac{13}{2\cdot 13}$ звідки $R=\dfrac{13\cdot 13}{2\cdot 12}=\dfrac{169}{24}$

Оскільки $\Delta O_1LD\sim\Delta MLP$ (рис 2), то $\dfrac{LO_1}{LM}=\dfrac{LD}{LP}$, $\dfrac{12-r}{13}=\dfrac{8}{12}$, $144-12r=13\cdot 8$, звідки $r=\dfrac{10}{3}$(см).

Відповідь. $42\frac{1}{4}$ см; $3\frac{1}{3}$ см.

Четвертий спосіб розв'язання

Використаємо властивості перетинаючи хорд KM і LC, $KP \cdot PM = LP \cdot PC$, тобто $5 \cdot 5 = 12(2R-2)$, $25 = 24R - 144$, звідки $R = \frac{169}{24}$ (см).

MO_1 – бісектриса ΔLPM. За властивостями бісектриси маємо $\frac{MP}{ML} = \frac{PO_1}{LO_1}$, $\frac{5}{13} = \frac{r}{12-r}$, $5(12-r) = 13 \cdot r$, $60 - 3r = 13r$, звідки $r = \frac{10}{3}$ (см).

Відповідь. $42\frac{1}{4}$ см; $3\frac{1}{3}$ см.

П'ятий спосіб розв'язання

Якщо $\angle PLM = \alpha$ (рис 1), тоді $\angle POM = 2\alpha$, як зовнішній кут рівнобедреного ΔMOL. Розглянемо ΔPOM, $OM = R$, $\frac{PM}{OM} = \sin 2\alpha$, звідки $OM = \frac{PM}{\sin^2 \alpha} = \frac{5}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, (з ΔPLM), а $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

Отже, $OM = \frac{5}{2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13}} = \frac{169}{24}$ (см).

Розглянемо ΔLO_1D (рис 2), $\frac{O_1D}{LD} = tg\alpha$, $O_1D = LD \cdot tg\alpha$, де $O_1D = r$.

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, то $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$.

Тоді $r = O_1D = \frac{5}{12} \cdot 8 = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$ (см).

Відповідь. $42\frac{1}{4}$ см; $3\frac{1}{3}$ см.

Шостий спосіб розв'язання

Розглянемо ΔPLM (рис 1), $\angle PLM = \alpha$, тоді $\cos\alpha = \frac{LP}{LM}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$.

З ΔOLD, $\frac{LD}{LO} = \cos\alpha$, $LO = R = \frac{LD}{\cos\alpha} = \frac{169}{24}$.

Розглянемо ΔPLM (рис 2) $\frac{LP}{LM} = \sin\alpha = \frac{5}{13}$, тоді з ΔLO_1D маємо, що $\frac{O_1D}{LO_1} = \sin\alpha$, $O_1D = LO_1 \cdot \sin\alpha$, $r = (12-r) \cdot \frac{5}{13}$,

$13r = (12-r)5$, $13r = 60 - 5r$, $18r = 60$, $r = \frac{60}{18}$, $r = \frac{10}{3}$ (см).

Відповідь. $42\frac{1}{4}$ см; $3\frac{1}{3}$ см.

Шляхом розв'язування однієї задачі різними способами в учнів розвиваються творчі здібності, інтуїція, раціональні способи вирішення проблеми. При розв'язуванні цієї задачі яскраво продемонстровано використання властивостей подібності трикутників, двох перетинаючихся хорд, властивість бісектриси, формули знаходження радіуса вписаного і описаного кіл, теорема Піфагора.

Романенко Анна Олександрівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВИВЧЕННЯ ТЕОРЕМИ ПРО МЕДІАНИ ТРИКУТНИКА

У процесі вивчення геометрії в класі значне місце відводиться трикутнику, поняттям бісектриси, медіани, висоти та їх перетину. Зокрема, класично є теорема про медіани трикутника [1].

Перед розглядом цієї теореми в класі пропоную дати учням домашнє завдання: виготовити з картону довільний трикутник, знайти його центр ваги, та провести через цю точку і вершини 3 відрізки до перетину з протилежною стороною.

Після виконання такого завдання розгляд теореми буде більш цікавим і зрозумілим для всіх.

Саму теорему можна і потрібно доводити різними способами, які пропонуються в різних публікаціях (2-5).

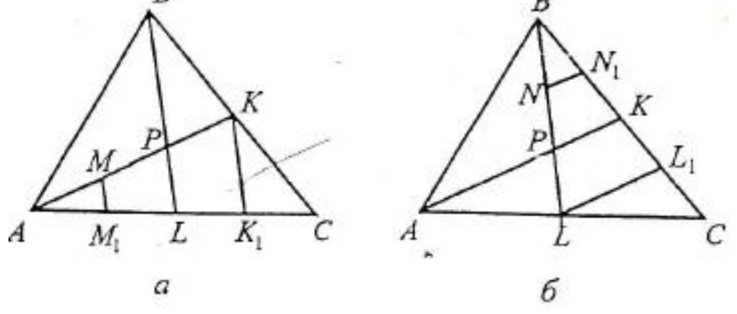
Теорема про медіану трикутника. Медіани трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

Пропоную в класі розглянути такі доведення цієї теореми:

Перший спосіб доведення

Доведемо спочатку, що точка перетину двох медіан трикутника ділить їх у згаданому відношенні.

Нехай *AK, BL* — медіани трикутника *ABC, P* — точка їх перетину (мал. 1а). Позначимо літерою *M* середину відрізка *AP.*



Мал. 1

Провівши промені $MM_1 \parallel PL$ і $KK_1 \parallel PL$, легко показати, що за теоремою Фалеса $AM_1 = M_1L$, $LK_1 = K_1C$, а отже, $AP : PK = AL : LK_1 = 2:1$.

Аналогічно доводиться, що $BP:PL = 2:1$ (мал. 1,б).

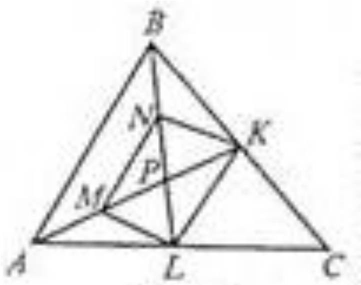
Наші міркування не залежали від того, які саме дві медіани розглядалися. Отже,всі три медіани трикутника перетинаються в одній точні, і точкою перетину діляться у відношенні $2:1$, починаючи від вершини.

Зауважимо, що в попередніх міркуваннях можна було б не розглядати ТОЧКУ M (як і точку N), відразу довівши, що $AP:PK=AL:LK_1 = 2:1$.

Другий спосіб доведення

Як і в попередньому випадку, доведемо спочатку, що точка перетину двох медіан трикутника ділить їх у відношенні 2:1.

Нехай AK і BL - медіани трикутника ABC, Р— точка їх перетину (мал. 2). Позначимо буквою M середину відрізка AP, а N —середину відрізка ВР.



Сполучивши, відповідно. точки K, L та M, N відрізками, матимемо середні лінії — KI в трикутнику ABC, MN — в трикутнику APB. Властивості середньої лінії дають змогу стверджувати, що чотирикутник $KLMN$ — паралелограм ($KL \parallel MN$, $KL = MN$). Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то $AM = MP$ (за побудовою), $MP = PK$ (відрізки діагоналей паралелограма). Звідси $AP : PK = 2:1$. Так само $BP:PL = 2:1$.

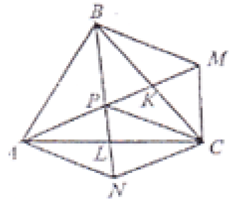
Наші міркування не залежали від того, які саме дві медіани розглядалися. Отже, *всі три медіани* трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

Крім цього пропоную на заняттях математичного гуртка у 8 класі розглянути такі способи доведення.

Третій спосіб доведення

Нехай AK і BL — медіани трикутника ABC, P — точка їх перетину (мал. 3). Продовжимо промінь AK так, щоб $PK = KM$, а

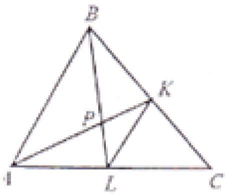
промінь BL— так, щоб $PL = LN$. Побудувавши чотирикутники $APCN$ і $BPCM$, переконуємося, що це паралелограми. Крім того, чотирикутник $CMPN$ теж паралелограм. Отже, $AP = CN = PM$, звідки $AP:PK = 2:1$. Аналогічно. BP = МС = PN, звідки$BP:PL = 2:1$.



Мал.3

Четвертий спосіб доведення

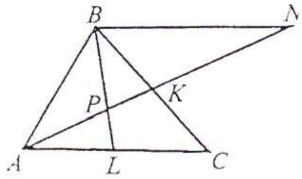
Очевидне доведення властивості медіан трикутника, що трикутники PKL та PAB подібні, а коефіцієнт подібності $k = \frac{1}{2}$ (мал. 4).



Мал.4

П'ятий спосіб доведення

Продовжимо промінь *AK* так, щоб *AK = KN* (мал. 5). Легко доводиться, шо трикутники *AKC* та *NKB* рівні, а трикутники *APL*та *NPB*— подібні, причому коефіцієнт подібності $k=\frac{1}{2}$.



Мал.5

Шостий спосіб доведення

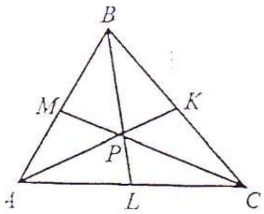
Легко довести, що медіани трикутника ділять його на шість рівновеликих трикутників. Тому, наприклад, *BP:PL=S ∆ABP : S∆APL=2:1.*

Сьомий спосіб доведення

Скористаємося *теоремою Чеви:* якщо точки A_1, B_1, C_1 належать, відповідно, сторонам *BC,AC, AB* трикутника ABC, то прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

Для медіан трикутника (мал. 6) ця рівність справджується. Подальші міркування такі, як і в попередньому доведенні.



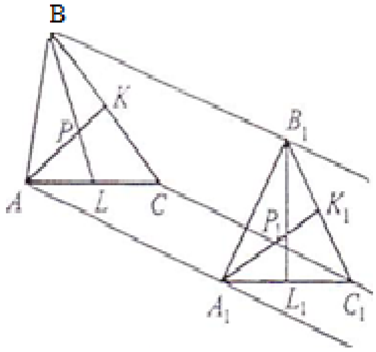
Мал.6

Восьмий спосіб доведення

Скористаємося тим, що при паралельній проекції образом будь-якого трикутника може бути будь-який трикутник і що поділ відрізка в даному відношенні є інваріантом паралельної проекції.

Нехай правильний трикутник $A_1\ B_1\ C_1$ є образом довільного трикутника ABC (мал. 7). Тоді $AP:PK = A_1P_1 : P_1K_1 = 2:1$.

Інші медіани точкою P теж діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини, а тому P — їх спільна точка, або точка перетину.



Мал.7

Дев'ятий спосіб доведення

Нехай точка X ділить відрізок AB у відношенні m : n(мал. 8). Тоді для будь-якої точки O маємо

$$\overline{OX} = \frac{n}{m+n}\overline{OA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$$

Скористаємося цим співвідношенням.

Взявши точку *P* таку, що ділить медіану *AK* трикутника *ABC* у відношенні 2:1 (мал. 9), дістанемо:

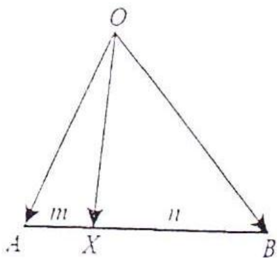
$$\overline{OP} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OK} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right).$$

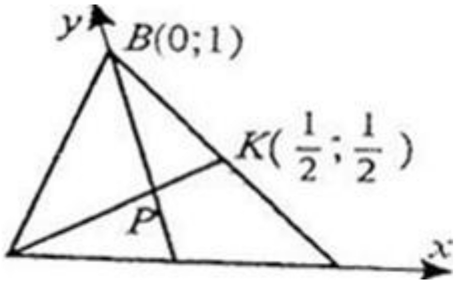
Рівність $\overline{OP} = \frac{1}{3}\cdot\left(\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC}\right)$не залежить від того, яку саме медіану трикутника поділено точкою P у відношенні 2:1, тобто вона є їх спільною точкою.

Десятий спосіб доведення

Розмістимо трикутник ABC в афінній системі координат (мал. 10). Тоді опорні точки матимуть координати: (0;0), C(1;0).

B(0:1), A(—1:0),$K(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$.





Мал. 10

Запишемо рівняння прямої АК в загальному вигляді:

$$\frac{x - x_k}{x_A - x_k} = \frac{y - y_k}{y_A - y_k}.$$

Підставивши відповідні координати і виконавши спрощення, дістанемо рівняння прямої *АК*

$x - 3y + 1 = 0.$

Оскільки абсцисса точки *P* (точки перетину медіани з віссю ординат) дорівнює нулю, то $y_p = \frac{1}{3}$. Отже, $BP:\ PL = 2:1$.

Застосовуючи систему координат до інших двох медіан трикутника, можна довести, що й для кожної з них точка перетину медіани з віссю ординат ділить відповідну медіану у відношенні 2:1, починаючи від вершини.

Література

1. Істер О.С. Геометрія: Підруч.для 7 кл. загальноосвіт.навч.закл.-К.: Освіта, 2007.-159с.
2. Готман. Э. Г., Скопец 3. А. Задача одна — решения разные. — К. : Рад. Школа, 1988. — 173 с.
3. 3.ЗайцеваГ. Д. О решении задач различными методами // Математика в школе. — 1982. — № 5. — С. 50 — 52.
4. Зубелевич Г. И. Решение одной и той же задачи в разных классах // Математика в школе. — 1980. — № 5.-С. 60-62
5. 5.КушнірІ. А. Методи розв’язання задач з геометрії. — К. : Абрис, 1994. — 464 с.

Савченко Маргарита Валеріївна

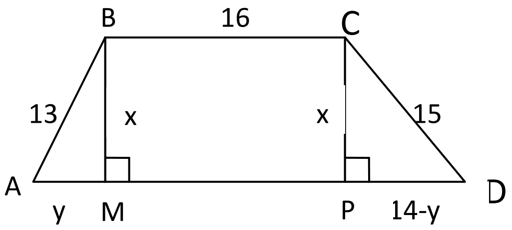
студентка 3 курсу, напрям підготовки “Математика”

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ УЧНІВ З ПЛАНІМЕТРІЇ ПРИ РОЗВ’ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ НА ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ТРАПЕЦІЇ

У відповідності до сучасних програм з математики, трапеція, як геометрична фігура, її властивості вивчаються у першому півріччі 8 класу. У другому півріччі 8 класу при вивченні многокутників і їх площ розглядається питання про різні способи обчислення площі трапеції. На цьому етапі учні вже мають володіти знаннями про подібні трикутники, знаннями про обчислення площ паралелограма, трикутника тощо, мають знати теорему Піфагора, а також повинні уміти розв’язувати системи рівнянь з двома невідомими, зокрема, способом підстановки. Тому у процесі пошуку розв’язання задач на знаходження площі трапеції здібні учні можуть пропонувати різні шляхи знаходження невідомих величин. Майбутній вчитель математики повинен мати уявлення про різні можливості розгортання розв'язування навіть типових для школи задач на знаходження площі трапеції. Наприклад :

<u>*Задача.*</u> Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 16 і 30 см, а бічні сторони – 13 см і 15 см.

Перший спосіб розв'язання



1) Проведем висоти BM та CP до основи AD. $BMPC$ -прямокутник. Нехай $BM = x$.

2) Розглянемо трикутник $AMB\,(\angle M = 90)$: $AB = 13$, $BM = x$, нехай $AM = y$.

Отже, за теоремою Піфагора маємо: $x^2 + y^2 = 13^2$

3) Розглянемо трикутник DPC ($\angle P = 90^\circ$), $CP = x$ (властивість прямокутника $BCPM$), $CD = 15$ (за умовою), $PD = (30-16) - y = 14 - y$, так як $AD = 30$ (за умовою).

Аналогічно, за теоремою Піфагора : $x^2 + (14-y)^2 = 15^2$;

4) Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13^2\ ; \\ x^2 + (14-y)^2 = 15^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 13^2 - y^2, \\ 13^2 - y^2 + (14-y)^2 = 15^2. \end{cases}$$

$$13^2 - y^2 + (14-y)^2 = 15^2,$$

$$169 - y^2 + 196 - 28y + y^2 - 225 = 0,$$

$$-28y + 140 = 0$$

$$y = 5$$

Отже, $x^2 = 13^2 - y^2$,

$x^2 = 13^2 - 5^2$,

$x^2 = 169 - 25$,

$x^2 = 144$,

$x = 12$.

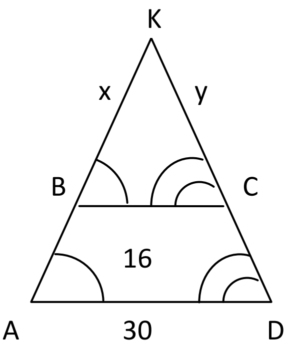
5) $BM = CP = 12$, $AM = 5$, $PD = 14 - y = 14 - 5 = 9$.

6) S = $\dfrac{a+b}{2}\cdot h$ - формула для обчислення площі трапеції ;

S= $\dfrac{16+30}{2}\cdot 12 = 23\cdot 12 = 276$ (см^2)

Відповідь . 276 см^2.

Другий спосіб розв'язанн:



1) Розглянемо трапецію $ABCD$. Продовжимо бічні сторони трапеції, до перетину в точці K.

2) Розглянем трикутник BKC, нехай $BK = x$, $KC = y$.

3) Розглянемо ΔAKD і ΔBKC: $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$ (як відповідні кути, при паралельних прямих BC і AD),

Δ AKD ~ Δ BKC (за двома кутами) ,

$\dfrac{AK}{BK} = \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{KD}{KC}$ (властивість подібних трикутників),

$\dfrac{13+x}{x} = \dfrac{30}{16} = \dfrac{15+y}{y}$;

4) $\dfrac{13+x}{x} = \dfrac{30}{16}$;

$30x = (13+x)\cdot 16$;

$30x = 208 + 16x$;

$30x - 16x = 208$;

$x = \dfrac{208}{14} = \dfrac{104}{7}$.

5) $\dfrac{15+y}{y} = \dfrac{30}{16}$;

$30y = 16(15+y)$;

$30y = 240 + 16y$;

$30y - 16y = 240$;

$14y = 240$;

$y = \dfrac{240}{14} = \dfrac{120}{7}$.

6) $\Delta AKD \sim \Delta BKC$ з $k = \dfrac{30}{16} = \dfrac{15}{8}$,

$\dfrac{S_{AKD}}{S_{BKC}} = k^2 = \left(\dfrac{15}{8}\right)^2 = \dfrac{225}{64}$ (за властивістю площ подібних трикутників),

$S_{AKD} = \dfrac{225}{64} \times S_{BKC}$.

7) $S_{трапеції} = S_{AKD} - S_{BKC} = \dfrac{225}{64} S_{BKC} - S_{BKC} = \dfrac{225-64}{64} S_{BKC} = \dfrac{161}{64} S_{BKC}$

8) Знайдемо S_{BKC}, за формулою Герона:

$p = \dfrac{a+b+c}{2} = \left(\dfrac{104}{7} + \dfrac{120}{7} + 16\right) : 2 = \dfrac{336}{7}$.

$S_{BKC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

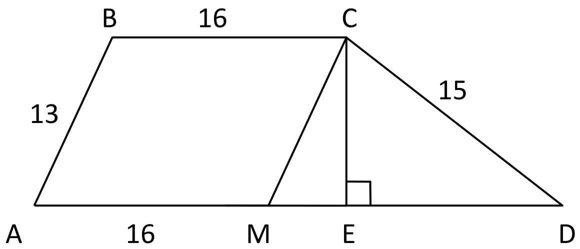
$$S_{BKC}=\sqrt{\frac{336}{14}\left(\frac{336}{14}-\frac{224}{14}\right)\left(\frac{336}{14}-\frac{240}{14}\right)\left(\frac{336}{14}-\frac{208}{14}\right)}=\sqrt{\frac{336}{14}\cdot\frac{112}{14}\cdot\frac{96}{14}\cdot\frac{128}{14}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3\cdot112\cdot112\cdot4\cdot24\cdot2\cdot64}{14^2\cdot14^2}}=\frac{112\cdot8\cdot8\cdot3}{14^2}=\frac{768}{7}$$

9) $S_{трапеції}=\frac{161}{64}\cdot S_{BKC}$, тобто $S_{трапеції}=\frac{161}{64}\cdot\frac{768}{7}=23\cdot12=276\left(см^2\right)$

Відповідь. $276см^2$.

Третій спосіб розв'язання



1) Добудова: проведемо $CM \parallel BA$.
2) Розглянемо $BCMA$-паралелограм, $AM=BC=16$, $CM=AB=13$;
3) Розглянемо трикутник CMD:
$MD=AD-BC=14, CD=15$,
$CM=13$, CE - висота ;

$S_{MCD}=\frac{1}{2}\cdot MD\cdot CE$, тоді $CE=\frac{2S_{MCD}}{MD}$,

4) Знайдемо площу ΔMCD за формулою Герона:

p= $\frac{CM+CD+MD}{2}=\frac{13+15+14}{2}=21$;

$$S_{MCD}=\sqrt{p(p-MD)(p-CM)(p-CD)}=\sqrt{21(21-14)(21-13)(21-15)}=\sqrt{21\cdot7\cdot8\cdot6}=$$

$$=\sqrt{49\cdot144}=7\cdot12=84$$

5) Отже, $CE=\frac{2\cdot84}{14}=12$;

6) $S_{трапеції}=\frac{BC+AD}{2}\cdot CE=\frac{16+30}{2}\cdot12=276\ \left(см^2\right)$

Відповідь. $276\ см^2$.

Очевидно, третій спосіб розв'язання є найбільш раціональним. Однак відчути спосіб необхідної добудови для учнів 8 класу ще досить складно. Якщо вказана задача розглядається у 8 класі в кінці навчального року, то тоді її розв'язання, в першу чергу переслідує мету повторення, систематизації та узагальнення знань учнів. В таких умовах ми переконані, що розгляд навіть вказаних трьох способів розв'язання даної задачі є більш корисним для міцності і системності знань учнів, ніж за той же час розв'язання трьох різних задач.

Серветник Віталій Віталійович
студент магістратури, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ДЕКІЛЬКОМА СПОСОБАМИ

Важливим є вміння розв'язати задачу декількома способами, яке допомагає розглянути задачу з декількох сторін. Знаходження декількох розв'язків задачі сприяє розвитку мислення.

Розглянемо одну із таких задач.

<u>*Задача.*</u> Побудувати трикутник за двома вершинами B і C і прямою, яка містить бісектрису l_a кута A.

Перший спосіб розв'язання

Так як трикутник рівний ANC трикутнику ANK (за катетом і гострими кутами), то CN=NK. відповідно, симетрично відобразивши точку C відносно прямої l_a, отримаємо точку K, яка лежить на прямій AB. Сполучимо точки B і K і продовживши до перетину з l_a, отримаємо вершину A.(рис. 1)

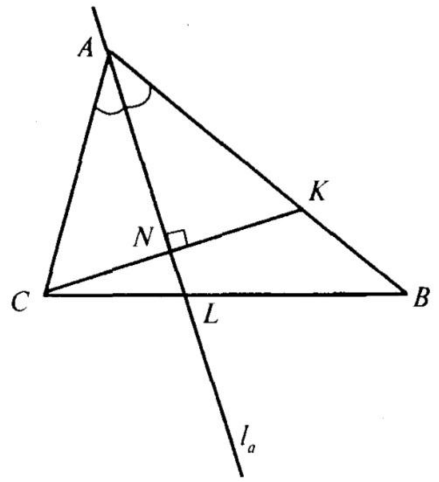


рис. 1

Другий спосіб розв'язання

Нехай W– точка перетину продовження бісектриси l_a кута A з колом ω, описаним навколо трикутника ABC. Серединний перпендикуляр до сторони BC також проходить через точку W. Таким чином, ми можемо знайти точку W. Так як є хордою в колі, то серединний перпендикуляр до WC і серединний перпендикуляр до CB перетинаються в точці O – центрі кола. Описавши коло з радіусом і центром в точці O, отримаємо в перетині з прямою l_a вершину A.(рис. 2)

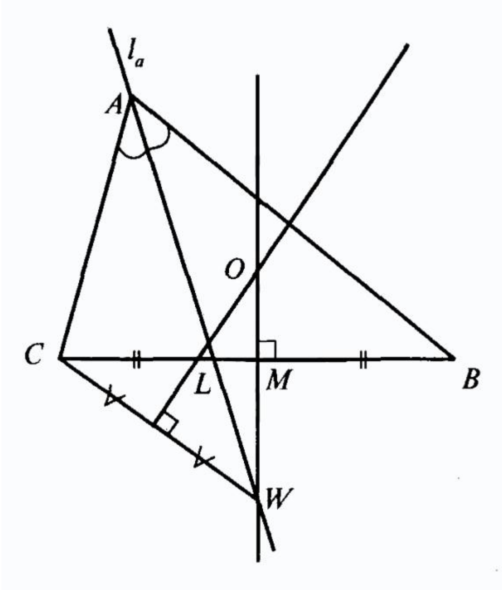


рис. 2

Третій спосіб розв'язання

Кут WCB рівний половині кута A (BAW ABC) Оскільки $\angle OCB = 90^\circ - A$(з трикутника BOC), то ми можемо його відкласти від вершини C, знайшовши кут $\frac{A}{2}$. Отриманий промінь перетне серединний перпендикуляр до BC в точці O. Коло з центром в точці O і радіусом OC в перетині з прямою l_a дає вершину A.(рис. 3)

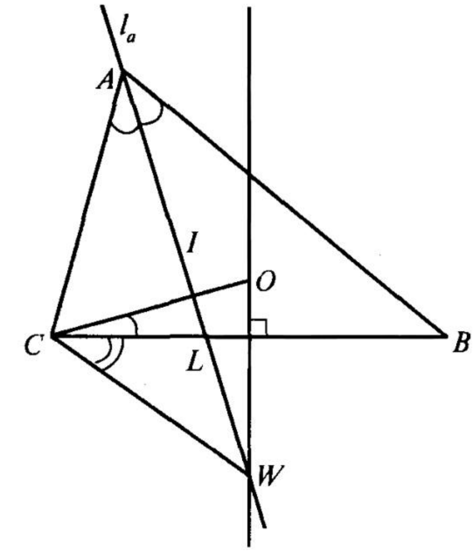


рис. 3

Четвертий спосіб розв'язання

Нехай I_a – центр кола, що дотикається до BC і до продовжень двох інших сторін. Знайдемо точку I_a. Опустимо перпендикулярна BC . Отриманий відрізок I_aT – радіус вписаного кола. Точка A – перетин l_a і дотичної до кола, проведеної через точку B.(рис. 4)

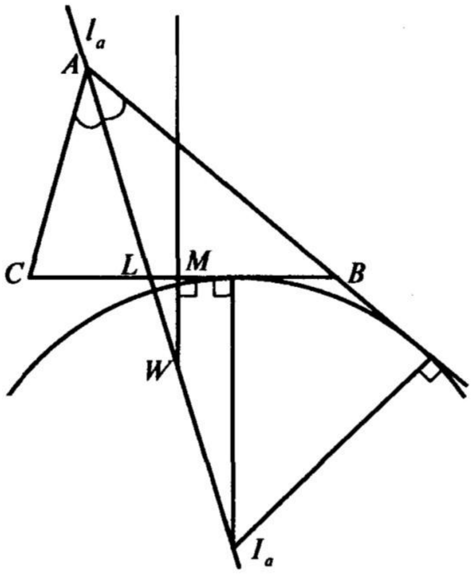


рис. 4

П'ятий спосіб розв'язання

Знайдемо точку W (яка лежить на описаному колі навколо трикутника ABC) за допомогою серединного перпендикуляра до BC(спосіб II). Застосуємо теорему про «трилисник» : WC=WB=WI . В такому випадку, коло радіусом WC з центром в W перетинає пряму l_a в точці I (точка перетину бісектрис). З'єднаємо C і I, відкладемо на отриманому відрізку кут рівний куту ICL. Отриманий промінь перетинає l_a у вершині A. (рис. 5)

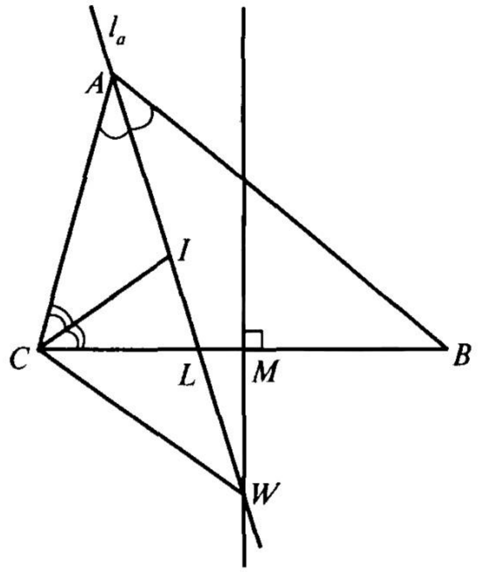


рис. 5

Шостий спосіб розв'язання

Від точки L перетину бісектриси l_a з BC відкладемо кут, рівний куту ALC. Кут, утворений відрізком BL і променем LN, буде рівний $\left(C+\frac{A}{2}\right)+\left(B+\frac{A}{2}\right)=C-B$. Проведемо промінь CK, паралельний LN. Він перетне l_a в точці T. Таким чином, трикутник ACK подібний трикутнику ABC. Запишемо відношення відповідних елементів: $\frac{CT}{LB}=\frac{TK}{CL}$. Звідси знайдемо відрізок ТК і відкладемо його на продовжені відрізка СТ. Перетин прямих l_a і ВК утворює вершину А.(рис. 6)

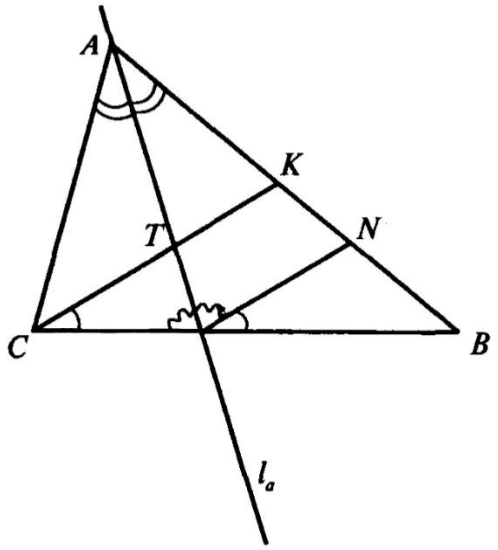


рис. 6

Література

1. Билецкий Ю.А., Филипповский Г.Б. Чертежи на песке. В мире геометрии Архимеда. – К.: Факт, 2000.
2. Кушнир И.А. Альтернативные способы решения задач (Геометрия). – К.: Факт, 2006.
3. Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії: Кн. для вчителя. – К.: Абрис, 1994.

Скрипник Софія Вікторівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАДАЧА ПРО ЧУДОВІ ТОЧКИ ТРИКУТНИКА

Значна кількість задач з геометрії може бути розв’язана декількома різними способами. На цьому учням варто наголошувати і продемонструвати на прикладах, як добирати задачі, які розв’язуються різними способами. Це досить корисно, адже у процесі відшукання варіативних способів є можливість повторити велику кількість математичної інформації, вивченої раніше. Крім того, учні зрозуміють, що їх шанси розв’язати ту чи іншу задачу є досить високими, оскільки у випадку, коли учень не зможе дійти до одного із способів, у нього є можливість здогадатись про інший варіант розв’язку.

Постановка завдання знайти новий, оригінальний розв’язок є неабияким стимулом для учнів. Це можливість проявити себе, адже якщо деякі учні з класу зуміли відшукати свій спосіб розв’язання, то, значить, на це спроможний і кожен з решти однокласників.

Однією із задач, що може мати декілька розв'язків, є наступна задача на доведення.

Задача. Довести, що центр описаного кола O, ортоцентр H (точка перетину висот) і точка перетину медіан M будь-якого трикутника лежать на одній прямій (прямій Ейлера).

Перший спосіб розв'язання

Нехай ΔABC – даний трикутник. Введемо систему координат таким чином, що $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(x_0;y_0)$, $y_0 \neq 0$. Тоді, використавши векторну формулу точки перетину медіан ΔABC, матимемо: $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right)$, K – довільна точка простору, візьмемо в якості точки K точку A. Матимемо: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + x_0; y_0\right)$ Звідси $M\left(\frac{1+x_0}{3}; \frac{y_0}{3}\right)$ – точка перетину медіан.

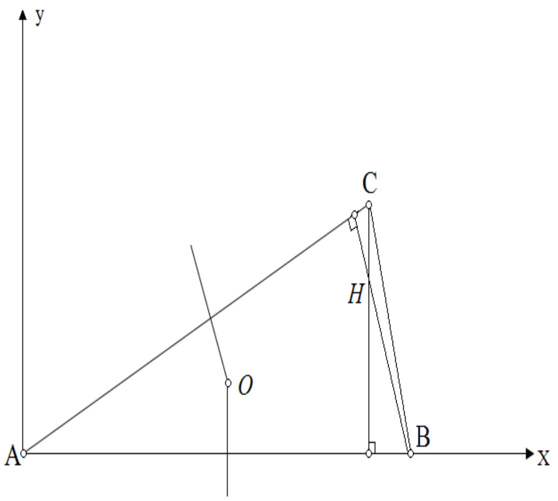


Рис.1

Рівняння серединного перпендикуляра до прямої AB має вигляд: $x = \frac{1}{2}$, а оскільки точка O – центр кола, описаного навколо ΔABC, належить йому, то $O\left(\frac{1}{2}; y'\right)$.

$OA=OC$ як радіуси, тому $AO^2=CO^2$:

$$AO^2 = \frac{1}{4} + y'^2,$$

$$CO^2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_0 - y'\right)^2,$$

$$\left(x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4}\right) + \left(y_0^2 - 2y_0 y' + y'^2\right) = \frac{1}{4} + y'^2.$$

З останнього рівняння отримаємо: $y' = \frac{x_0^2 + y_0^2 - x_0}{2y_0}$. Тоді $O\left(\frac{1}{2}; \frac{x_0^2 + y_0^2 - x_0}{2y_0}\right)$.

Оскільки H лежить на перпендикулярі до $\overrightarrow{AB} = (1;0)$, що проходить через $C(x_0;y_0)$, то $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH}$ і їхній скалярний добуток дорівнює нулю: $1 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (y - y_0) = 0 \Rightarrow x = x_0$. Оскільки H лежить на перпендикулярі до $\overrightarrow{AC} = (x_0; y_0)$, що проходить через точку $B(1;0)$, то аналогічно матимемо, що

$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH}$ і $x_0 \cdot (x-1) + y_0 \cdot (y-0) = 0; x_0^2 - x_0 + y_0 \cdot y = 0; y = \dfrac{x_0 - x_0^2}{y_0}$. Тоді $H\left(x_0; \dfrac{x_0 - x_0^2}{y_0}\right)$.

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MH}$, $\overrightarrow{OH}$:

$$\overrightarrow{OM}\left(\frac{1+x_0}{3} - \frac{1}{2}; \frac{y_0}{3} - \frac{x_0^2 + y_0^2 - x_0}{2y_0}\right) = \left(\frac{2x_0 - 1}{6}; \frac{-y_0^2 - 3x_0^2 + 3x_0}{6y_0}\right);$$

$$\overrightarrow{MH}\left(x_0 - \frac{1+x_0}{3}; \frac{x_0 - x_0^2}{y_0} - \frac{y_0}{3}\right) = \left(\frac{2x_0 - 1}{3}; \frac{-y_0^2 - 3x_0^2 + 3x_0}{3y_0}\right);$$

$$\overrightarrow{OH}\left(x_0 - \frac{1}{2}; \frac{x_0 - x_0^2}{y_0} - \frac{x_0^2 + y_0^2 - x_0}{2y_0}\right) = \left(\frac{2x_0 - 1}{2}; \frac{-y_0^2 - 3x_0^2 + 3x_0}{2y_0}\right);$$

Координати векторів пропорційні, а отже, точки лежать на одній прямій.

Другий спосіб розв’язання

Спочатку розглянемо наступні вправи, які допоможуть нам при доведенні.

Вправа 1. Доведемо, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

Нехай дано:

$\Delta ABC, AH_1 \perp BC, BH_2 \perp AC, CH_3 \perp AB.$

Довести: $AH_1 \cap BH_2 \cap CH_3 = H.$

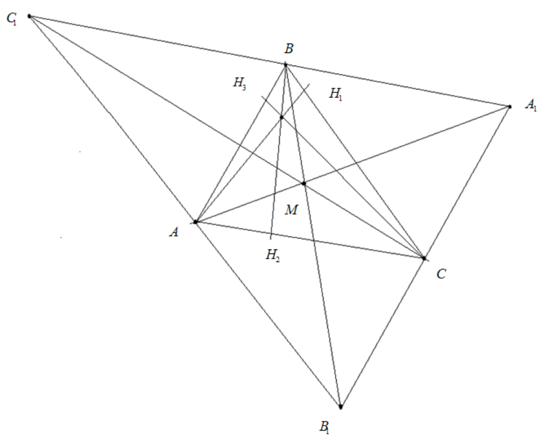


Рис.2

Через вершини трикутника *ABC* проведемо прямі, паралельні його сторонам, які попарно перетинаються в точках A_1, B_1, C_1.

Розглянемо чотирикутники $CBAB_1$ і CBC_1A. Це паралелограми (за побудовою $BC||B_1C_1$, $AC||A_1C_1$, $AB||A_1B_1$. Оскільки $BC=AC_1$ і $BC=AB_1$, то $AC_1=AB_1$ (за транзитивністю), а звідси випливає, що точка *A* ділить відрізок B_1C_1 навпіл. Аналогічно точки *B* і *C* ділять навпіл відповідно відрізки A_1C_1 і A_1B_1. Прямі, яким належать висоти трикутника *ABC,* перпендикулярні до сторін трикутника $A_1B_1C_1$ в їх серединах. Отже, вони мають спільну точку – центр кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$. Ця точка, спільна для висот трикутника *ABC,* є ортоцентром Н.

Вправа 2. Довести, що коли через вершини трикутника *ABC* провести прямі, паралельні його сторонам, то утворений трикутник $A_1B_1C_1$ буде гомотетичний трикутнику *ABC* з центром гомотетії в точці *M* перетину медіан трикутника *ABC* з коефіцієнтом $k = -2$.

Доведення. Оскільки $B_1A=AC_1$; $C_1B=BA_1$; $A_1C=CB_1$ (див. попередню вправу), то B_1B, AA_1, CC_1 – медіани трикутника $A_1B_1C_1$. Тому $\overrightarrow{MA_1} = -2\overrightarrow{MA}$

$\overrightarrow{MB_1} = -2\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{MC_1} = -2\overrightarrow{MC},$ і трикутник $A_1B_1C_1$ буде гомотетичний трикутнику ABC з центром гомотетії в точці M перетину медіан трикутника ABC.

Вправа 3. Довести, що у будь-якому трикутнику ABC центр описаного кола O, ортоцентр H і точка перетину медіан M будь-якого трикутника лежать на одній прямій (пряма Ейлера), причому $2OH=MH$.

Оскільки точка H є центром кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$, то точки O і H відповідно гомотетичні при гомотетії з центром в точці М і коефіцієнтом $k = -2$, тому лежать на одній прямій.

Третій спосіб розв'язання

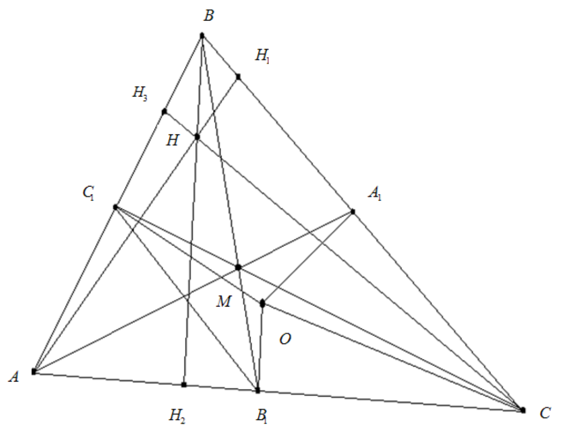


Рис.3

Нехай B_1 і C_1 – середини сторін AC і AB, відповідно, O – центр описаного кола, M – точка перетину медіан, H – ортоцентр. Оскільки $OC_1 \perp AB$, $CH \perp AB$, тому $OC_1 || CH$. Аналогічно, $OB_1 || BH$, крім того, $B_1C_1 || BC$, бо B_1C_1 – середня лінія ΔABC. Звідси випливає, що ΔB_1C_1O гомотетичний ΔBCH. Прямі BB_1, CC_1, OH перетинаються в одній точці, а саме в точці M (BB_1, CC_1 – медіани). Звідси $\frac{OM}{MH} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{1}{2}$. А значить, точки O, M і H лежать на одній прямій, що і треба було довести.

Четвертий спосіб розв'язання

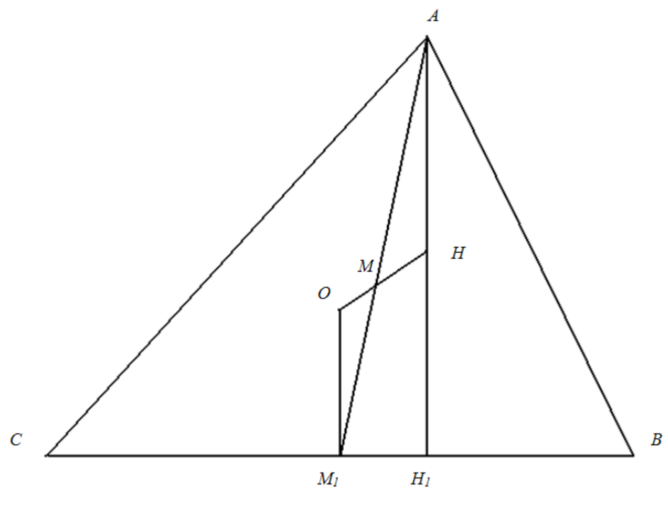


Рис.4

Нехай M_1 – середина сторони BC. Оскільки $OM_1 = \frac{1}{2}AH$ та $\Delta OMM_1 \sim \Delta HMA$, то відрізок AM_1 перетне відрізок OH в точці M, яка і є точкою перетину медіан, оскільки медіана AM_1 ділиться цією точкою у відношенні 1:2, починаючи з вершини A: $M_1M : AM = 1:2$. А це означає, що центр описаного кола O, ортоцентр H і точка перетину медіан M трикутника ABC лежать на одній прямій.

Запропонована задача є задачею про точки трикутника (ортоцентр, центр кола, описаного навколо трикутника, точка перетину медіан). В умові задачі вводиться поняття прямої Ейлера, яка не є обов'язковою для вивчення в звичайних школах, але це не означає, що розв'язувати цю задачу можуть лише учні з класів з поглибленим вивченням математики. Вона, як і решта задач про чудові точки трикутника, призначена усім, хто бажає не тільки поглиблювати знання з геометрії, але й відточувати свій естетико-математичний смак.

Для розв’язання даної задачі стануть у пригоді знання з теми «Подібність трикутників», «Геометричні перетворення», «Координати і вектори на площині». Тому цю задачу доцільно, на мою думку, пропонувати учням 9 класу на факультативних заняттях з математики, оскільки вона є задачею підвищеної складності.

Література

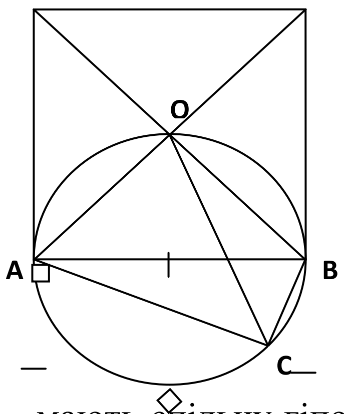
1. Ізюмченко Л. В Розв’язування задач з математики третього етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України: Методичний посібник. /Ізюмченко Л. В., Макарчук О. П./ – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – С. 97-99.
2. Кушнір І. 101 задача про чудові точки трикутника. /Кушнір І./ – К.: Факт, 2007. – С. 72.

Фірманюк Юлія Віталіївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ

Геометричні перетворення фігур на площині вивчаються в курсі планіметрії у другому семестрі 9 класу. Часто, при вивченні цієї теми, в учнів виникає нерозуміння властивостей геометричних перетворень і їх можливого застосування при розв’язуванні задач. Часто геометричні задачі цієї теми здаються школярам якимись виокремленими з курсу планіметрії і складається враження, що можуть розв’язуватися лише за умови використання геометричних перетворень. Такі хибні уявлення створюють ще більше несприймання навчального матеріалу учнями.

Для подолання вказаної ситуації варто продемонструвати розв’язання задачі з теми «Геометричні перетворення» різними способами.



Для прикладу розглянемо задачу на доведення: на гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC побудовано квадрат з центром O. Довести, що CO бісектриса кута ABC.

Перший спосіб розв’язання

Центр кола описаного навколо прямокутного трикутника знаходиться на середині гіпотенузи. Прямокутні трикутники ABC ($\angle C = 90°$) та AOB ($\angle O=90°$) мають спільну гіпотенузу, тому сума протилежних кутів чотирикутника $AOBC$ дорівнюють 180^0, тому цей чотирикутник є вписаним в деяке коло.

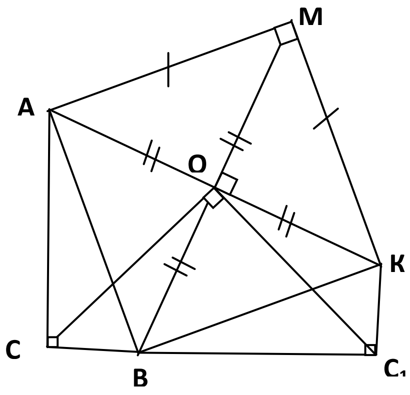
Трикутник AOB прямокутний і рівнобедрений, тому $\angle OAB = \angle OBA = 45°$.

$\angle ACO = \angle ABO = 45°$ (як вписані кути, які спираються на спільну хорду);

$\angle OCB = \angle OAB = 45°$ (як вписані кути, які спираються на спільну хорду);

Отже, $\angle ACO = \angle OCB$, тому CO – бісектриса кута ACB.

Що потрібно було довести.



Другий спосіб розв'язання

Виконаємо поворот ΔABC з центром в точці O на кут 90^0 проти годинникової стрілки.

Тоді

$$\text{A} \to \text{B},\ \text{B} \to \text{K},\ \text{C} \to \text{C}_1.$$

Причому $OC = OC_1$. Тобто трикутник ABC переходить в трикутник BKC_1. А оскільки при повороті точка переходе у точку, відрізок переходить у рівний відрізок, а кут переходить у рівний кут, то можна сказати, що $\Delta ABC = \Delta BKC_1$.

($AB = BK$, $AC = BC_1$, $CB = C_1K$, $\angle CAB = \angle C_1BK$, $\angle CBA = \angle C_1KB$, $\angle ACB = \angle BC_1K = 90°$).

Нехай $\angle CAB = \angle C_1BK = \alpha$ і $\angle CBA = \angle C_1KB = \beta$. Розглянемо $\angle CBC_1$:

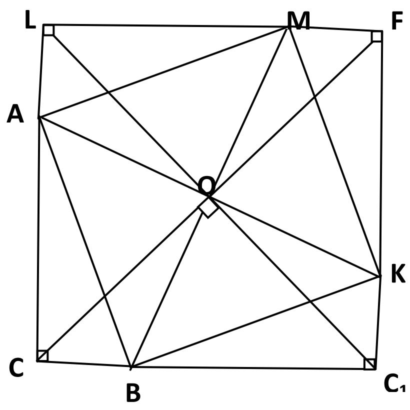
$$\angle CBC_1 = \angle CBA + \angle ABK + \angle KBC_1 = \beta + 90° + \alpha = (\alpha + \beta) + 90° =$$

$= 90° + 90° = 180°$. Отже, $\angle CBC_1$ - розгорнутий.

Розглянемо ΔCOC_1, він прямокутній та рівнобедрений, з основою CC_1 (оскільки поворот був виконаний на 90^0). Тоді $\angle OCC_1 = \angle OC_1C = 45°$. А оскільки $\angle OCC_1 = 45°$, то $\angle ACO = 90° - 45° = 45°$.

Отже, CO – бісектриса кута ACB.

Що й потрібно було довести.



Третій спосіб розв'язання

Виконаємо добудову: на кожній стороні квадрата $BAMK$ відкладемо прямокутні трикутники, рівні заданому так, щоб утворився ще один квадрат $CLFC_1$.

Спочатку доведемо, що точка O є центром обох квадратів. Для цього припустимо, що точка O є лише центром квадрата $CLFC_1$.

Розглянемо трикутники OBC, OAL, OMF, OKC_1. Вони рівні за першою ознакою рівності трикутників

($BC = AL = MF = KC_1$, $OC = OL = OF = OC_1$, $\angle OCB = \angle OLA = \angle OFM = \angle OC_1K$). З рівності трикутників випливає і рівність: $OB = OA = OM = OK$.

Тобто точка O лежить на однаковій відстані від вершин квадрата $BAMK$, тобто точка O є центом описаного навколо квадрата $BAMK$ кола. Це означає, що точка O є центром квадрата $BAMK$.

Отже, точка O є центром квадратів $BAMK$ і $CLFC_1$.

Розглянемо трикутник FC_1C, він прямокутний і рівнобедрений (CC_1 = =FC_1 – як сторони квадрата). Тоді $\angle FCC_1 = 90° : 2 = 45°$.

З трикутника АВС: $\angle ACO = \angle ACB - \angle OCB = 90° - 45° = 45°$.

Отже, CO – бісектриса кута ACB.

Що й потрібно було довести.

Розглянувши на уроці розв'язання вказаної задачі кількома способами у школярів має виникнути розуміння того, що геометричні перетворення фігур на площині - це просто ще один дієвий засіб для пришвидшення і полегшення розв'язування достатньо широкого класу геометричних задач.

Література

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики — Х.: Гімназія, 2009. — 272 с: іл.

2. Коваль С. От развлечения к знаниям. Математическая смесь. – Варшава.: Науково-технічне видання, 1972. – 539 с.

Фоміна Катерина Вікторівна

студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ ЧЕВИ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Дуже часто при поясненні нового матеріалу вчитель опускає моменти доведення теорем, даючи все в готовому вигляді, тим самим позбавляє учнів можливості самостійно розмірковувати, приходити до конкретних висновків. І ще гірший випадок, коли при розв'язуванні конкретних задач вчителем наполегливо пропонується один, а в кращому випадку – два методи розв'язання, і при цьому ігноруються усі інші.

Недоречно обмежуватися на уроці лише розв'язанням стандартних задач, адже доведення теореми є також своєрідною задачею, яка допомагає учням розвивати логічне мислення, вміння аналізувати, синтезувати та застосовувати вже набуті раніше знання. І взагалі доведення теорем – це прекрасний спосіб актуалізації величезного блоку знань, умінь та навичок. Тому у даній статті запропоновано доведення цікавої теореми Чеви кількома методами.

Теорема Чеви для трикутника. Нехай A_1, B_1, C_1 - три точки, які лежать відповідно на сторонах BC, AC, AB трикутника $AB\tilde{N}$. Щоб прямі AA_1, BB_1, CC_1, перетиналися в одній точці або були паралельними, необхідно і достатньо виконання співвідношення:

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1 \qquad (1)$$

Зауваження. Добуток відношень у теоремі Чеви іноді записують так:

$$\frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}}=-1 \qquad (2)$$

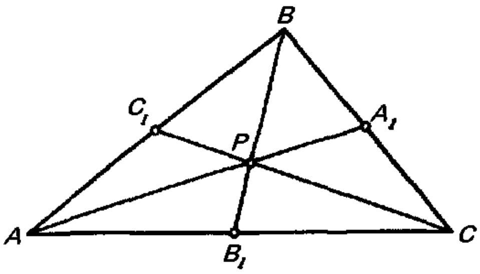


Рис.1

Перший спосіб доведення

Необхідність. Нехай через деяку точку P проходять три прямі як показано на рисунку. Застосуємо теорему Менелая до трикутника ABB_1, який перетинає пряма CC_1 (Нехай задано трикутник ABC і три точки A_1, B_1, C_1 на прямих BC, AC і AB відповідно. Точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1$)

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{PB}{PB_1}\cdot\frac{CB_1}{CA}=-1.$$

Аналогічно з трикутника BB_1C згідно з теоремою Менелая маємо:

$$\frac{AB_1}{AC}\cdot\frac{PB}{PB_1}\cdot\frac{A_1C}{A_1B}=-1.$$

Розділимо перше співвідношення на друге:

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{AC}{CA}=1$$

Залишилося помітити, що

$$\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{B_1C}{B_1A} \text{ і } \frac{AC}{CA}=-1$$

Необхідність доведена для випадку прямих, що перетинаються.

Якщо ж прямі AA_1, BB_1 і CC_1 паралельні, то згідно з теоремою Фалеса маємо:

$$\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{CA_1}{CB},\ \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{BC}{BA_1}.$$

Перемножуючи пропорції, одержимо:

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{BC}{CB}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=-\frac{A_1C}{A_1B},$$

тобто

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}=-1.$$

Необхідність доведена в повному обсязі.

Достатність. Нехай для точок A_1, B_1 і C_1 на прямих BC, AC і AB виконується співвідношення (2), а прямі CC_1 і BB_1 перетинаються в точці P. Пряма AP перетинає прямую BC в деякій точці $\tilde{A}$. По вже доведеному :

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{\tilde{A}B}{\tilde{A}C} = -1.$$

Звідси із співвідношення (2) випливає:

$$\frac{\tilde{A}B}{\tilde{A}C} = \frac{A_1B}{A_1C},$$

що означає співпадання точок $\tilde{A}$ і A_1.

Якщо ж прямі CC_1 і BB_1 паралельні, то з (2) випливає, що і пряма AA_1 буде їм паралельна.

Теорема доведена.

Другий спосіб доведення

Необхідність. Нехай відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці *P*. Проведемо через вершину В трикутника пряму $a \parallel AC$ *(рис. 2)*

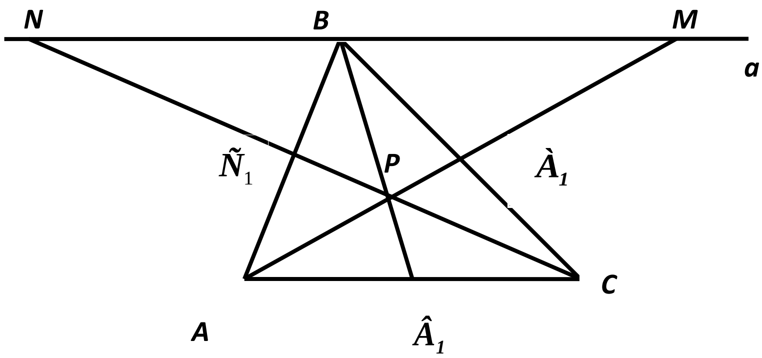


Рис.2

Нехай прямі AA_1 і BB_1 перетинають пряму a в точках M і N відповідно. Тоді з подібності трикутників AA_1C і MA_1B за двома кутами ($\angle A_1CA = \angle A_1BM$ як внутрішні різносторонні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною) маємо: $\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{AC}{MB}$. Аналогічно з подібності трикутників *OAC* і *OMN* за двома кутами ($\angle OCA = \angle ONP$ і $\angle OAC = \angle OMN$) отримуємо $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{MB}{BN}$. Перемноживши відповідно праві і ліві частини виписаних рівностей, отримаємо шукану рівність.

Достатність. Нехай рівність (2) виконується. Покажемо, що відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 проходять через одну точку. Нехай точка *P* – точка перетину відрізків AA_1 і CC_1, а $\tilde{N}'$ - точка перетину відрізка *AB* з променем *CO*. Тоді, із вище доведеного слідує, що

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$$

Порівнюючи з умовою теореми, отримаємо $\frac{BC'}{C'A}=\frac{BC_1}{C_1A}$. Очевидно, що точки C' і C співпадають.

Тому рівність доведена.

Третій спосіб доведення (метод мас)

Навантажимо на вершини трикутника A, B і C маси m_1, m_2 і m_3 відповідно так, щоб точка P перетину прямих стала центром мас даного трикутника. Тоді справедливі рівності:

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{m_2}{m_1};\ \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{m_3}{m_2};\ \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{m_1}{m_3}.$$

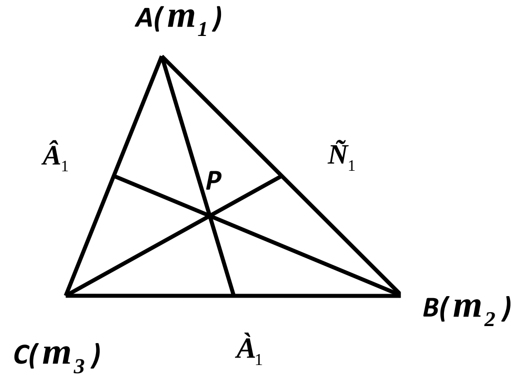


Рис.3

Перемноживши усі три рівності, отримаємо:

$$\frac{AC_1\cdot BA_1\cdot CB_1}{C_1B\cdot A_1C\cdot B_1A}=\frac{m_2\cdot m_3\cdot m_1}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}=1.$$

Що й потрібно було довести.

Література

1. Ясінський В.А. Олімпіадні задачі з геометрії: навч.-метод. Посіб./ В.А. Ясінський. – К.: Шк. світ, 2008, с.5-6
2. Савченко Н. Решение геометрических задач методом масс // Математика в школах України №27, 2010, с.4-7
3. Егоров А. Теоремы Чевы и Менелая // КВАНТ, №3, 2004, с.35-38.
4. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные.–К.: Рад. шк.–1988.–173с.

Цимбал Марина Анатоліївна
студентка 3курсу, напрям підготовки «Математика»

СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ РАДІУСА ВПИСАНОГО КОЛА

Важливим компонентом у навчанні учнів розв’язуванню геометричних задач є розв’язання їх різними методами та способами. Для відшукання різних способів розв’язання необхідно розкрити залежності між величинами і знайти різні шляхи вираження цих залежностей. З. І. Слєпкань вважає, що озброєння тих, хто вчиться, методами і способами розв’язування задач, навчання їх самостійності в пошуку розв’язань задач – одна з великих проблем шкільної математичної освіти. Методи чи способи розв’язування задач вирізняються, як характером самих задач, так і тими засобами, якими володіють учні на даному етапі навчання. [1]

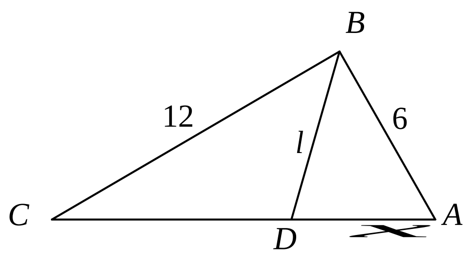
У методиці навчання математики розрізняють методи, прийоми і способи розв’язування задач. Г. П. Бевз зазначає, що про різні методи розв’язування задач говорять тоді, коли для цих розв’язань характерні системи понять і міркувань з різних великих розділів математичної науки, наприклад, метод геометричних місць, координатний, векторний, алгебраїчний тощо. Прийом – частина розв’язання, яка може повторюватись і в розв’язаннях інших задач, але вона не така універсальна, щоб її можна було вважати методом. Наприклад, при розв’язуванні трапеції використовують прийом «розведення діагоналей», т. д. Коли йдеться про розв’язання однієї і тієї самої задачі за допомогою різних методів або прийомів, говорять про різні способи розв’язання. [2]

Психологи вважають, що краще розв’язати одну задачу різними методами, ніж багато однотипних задач одним і тим же методом. Вони мають рацію тому, що:

- розв’язуючи задачі різними способами, можна краще зрозуміти специфіку того чи іншого методу, його переваги і недоліки залежно від змісту задачі;
- розв’язування задач різними методами сприяє систематизації знань, умінь та навичок учнів;
- використання різних способів розв’язування задач дає змагу в окремих випадках замінити одне розв’язування іншим – раціональнішим, шукати ефективніші методи розв’язання конкретної задачі;
- навчання пошуку різних способів розв’язування задач сприяє розвитку дослідницьких здібностей учнів;
- розв’язування задач різними методами сприяє підвищенню математичної культури учнів, є одним із шляхів мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Також розв’язування задачі різними способами на уроці допомагає вивчити, запам’ятати теоретичні відомості.

Наприклад, при вивченні теми «Многокутники. Площі многокутників» у 8 класі шкільного курсу геометрії вивчають різні формули обчилень площі трикутників. Розв'язування задачі «У трикутнику АВС: BD – бісектриса, АВ=6 см, ВС= 12 см, $\angle$ABC=120º. Знайти радіус кола вписаного в ΔABD» використовуючи різні формули обчислення площі трикутника сприятиме запам'ятовуванню цих формул.



Розв'язання

Проведемо деякі обчислення:

1) $\Delta ABC: \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (за властивістю бісектриси бісектриси);

Довжину бісектриси можна обчислити за двома формулами:

$l^2 = AB \cdot BC - AD \cdot CD$;

$l = \frac{2AB \cdot BC}{AB + BC} \cos 60°$;

Нехай AD=x, тоді CD=2x

$l^2 = ac - x \cdot 2x$ (оскільки BD – бісектриса)

$l^2 = 6 \cdot 12 - x \cdot 2x = 72 - 2x^2$

$l = \frac{2ac}{a + c} \cos 60°$ (оскільки BD – бісектриса)

$l = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6 + 12} \cos 60° = 4$ (см)

$72 - 2x^2 = 16$

$2x^2 = 56$

$x^2 = 28$

$x > 0; \quad x = 2\sqrt{7}$ (см)

2) $r = \frac{S_{ABD}}{p}$ - радіус вписаного кола в трикутник ABD, де $p = \frac{1}{2}(AB + BD + AD)$;

$p = \frac{1}{2}(6 + 4 + 2\sqrt{7}) = 5 + \sqrt{7}$ (см)

3) Щоб розв'язати задачу потрібно обчислити площу ΔABD

Перший спосіб розв'язання

1) $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (за формулою Герона)

$p - BD = 5 + \sqrt{7} - 4 = 1 + \sqrt{7}$

2) $p - AB = 5 + \sqrt{7} - 6 = \sqrt{7} - 1$

$p - AD = 5 + \sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 5 - \sqrt{7}$

$S = \sqrt{(5+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})(\sqrt{7}-1)(5-\sqrt{7})} = 6\sqrt{3}$ $(см^2)$

3) $r = \frac{6\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{7}(5-\sqrt{7})}{25-7} = \frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7})$ (см)

Відповідь. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7})$ см [3]

Другий спосіб розв'язання

1) $S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot l \cdot \sin 60°$;

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \ \ (см^2)$$

$$r = \frac{6\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{7}(5-\sqrt{7})}{25-7} = \frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7}) \ \ (\text{см})$$

Відповідь. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7})$ [3]

Третій спосіб розв'язання

1) Оскільки ΔABD і ΔABC мають спільну висоту і AC=3AD, то $S_{ABD} = \frac{1}{3} S_{ABC}$

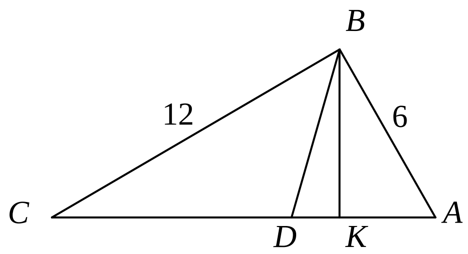
2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin 120° = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$;

$$S_{ABD} = 6\sqrt{3};$$

$$r = \frac{6\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{7}(5-\sqrt{7})}{25-7} = \frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7})$$

Відповідь. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7})$ см [3]

Четвертий спосіб розв'язання



Використаємо формулу для обчислення площі трикутника:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

У Δ ABC за теоремою косинусів:

$$CA^2 = CB^2 + BA^2 - 2CB \cdot BA \cos B = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cos 120° = 144 + 36 + 72 = 252 \ (см^2)$$

CA=$6\sqrt{7}$ (см)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BK \cdot CA$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \ \ (см^2)$$

$$\frac{1}{2} \cdot BK \cdot 6\sqrt{7} = 18\sqrt{3}; \quad BK = \frac{36\sqrt{3}}{6\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7} \ (\text{см})$$

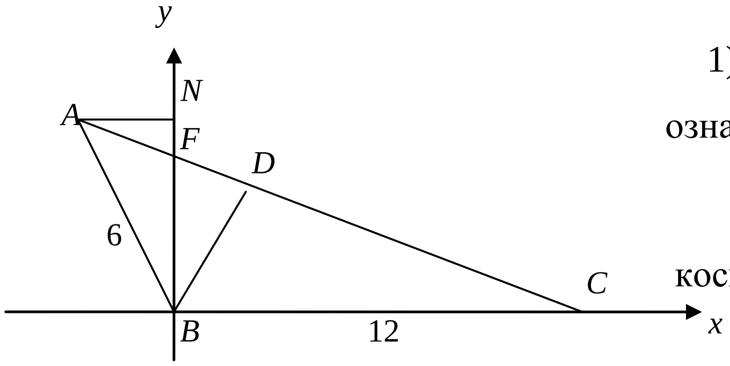
$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} BK \cdot DA = \frac{1}{2} \cdot \frac{6\sqrt{21}}{7} \cdot 2\sqrt{7} = 12\sqrt{3} \ (см^2)$$

$$r=\frac{6\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{7}(5-\sqrt{7})}{25-7}=\frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7})$$

Відповідь. $r=\frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7})$ см

Як відомо задачі у навчанні математики є і об'єктом вивчення, і засобом навчання. Зрозуміло, що розв'язування певної задачі на уроці має сприяти, впершу чергу, реалізації дидактичної мети уроку, зокрема вивчення і запам'ятовування формул обчислення площі трикутників. Якщо мета повторити різноманітні теоретичні відомості, то цю задачу також можна розв'язати векторним методом.

П'ятий спосіб розв'язання



1) ΔABN : A(-x;y); $\sin 30^\circ=\frac{x}{6}$ (за означенням синуса) $\Rightarrow$ x=3

$\cos 30^\circ=\frac{y}{6}$ (за означенням косинуса)$\Rightarrow$ $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=3\sqrt{3}$

Отже, A(-3; $3\sqrt{3}$)

2) $\Delta ABC:\frac{CB}{BA}=\frac{CD}{AD}=\frac{12}{6}=\frac{2}{1}$ (За властивістю бісектриси)

Оскільки $\frac{BC}{BA}=\frac{2}{1}$ то D(x;y)

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{12+2\cdot(-3)}{1+2}=2$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{0+2\cdot 3\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

Отже, D(2; $3\sqrt{3}$)

3) Знайдемо довжину $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(0-2)^2+(0-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(2+3)^2+(2\sqrt{3}-3\sqrt{3})^2}=\sqrt{25+3}=2\sqrt{7}$$

4) ΔABD: $r=\frac{2S}{a+b+c}$; $S=\sqrt{p(p-AB)(p-BD)(p-AD)}$ (за теоремою Герона)

$$p=\frac{BA+DA+BD}{2}=\frac{6+4+2\sqrt{7}}{2}=5+\sqrt{7}\text{ (см)}$$

$$S=\sqrt{(5+\sqrt{7})(5+\sqrt{7}-6)(5+\sqrt{7}-4)(3+\sqrt{7}-2\sqrt{7})}=6\sqrt{3}\ (см^2)$$

$$r=\frac{2\cdot 6\sqrt{3}}{6+2\sqrt{7}+4}=\frac{6\sqrt{3}}{5+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(5-\sqrt{7})\text{ (см)}$$

Відповідь: $r = \frac{\sqrt{3}}{3}(5 - \sqrt{7})$ см

Література

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики/З.І.Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 200. – 512 с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Навч. Пос./Г.П.Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
3. Мірецька Л.А. Математичний практикум з розв'язування планіметричних задач/Л.А.Мірецька// Математика в школі. - 2007. - № 6. - С.49

Чухно Михайло Васильович
студент магістратури, напрям підготовки «Математика»

СПОСОБИ РОЗВЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ДОВЕДЕННЯ В КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ

Сучасний етап розвитку математичної освіти в Україні характеризується впровадженням компетентнісного підходу, що цілком відповідає світовим тенденціям компетентнісної переорієнтації освіти. Надзвичайно важливу роль у підготовці креативного, компетентного спеціаліста відіграє комплексне застосування передових технологій та методик навчання – як традиційних, так і новітніх, що базуються на використанні комп'ютерної техніки та інформаційних технологій у середніх загальноосвітніх закладах.

Аналіз науково-педагогічної та методичної літератури засвідчує, що загальні теоретичні питання впровадження компетентнісного підходу з використанням інформаційно-комунікаційних технологій в математичній освіті розроблені досить ґрунтовно (М.І.Жалдак, Н.В.Морзе, О.В.Овчарук, О.І.Пометун, С.А.Раков, О.В.Співаковський, О.Я.Савченко та ін.). Але разом з тим виявляється наявність кола питань, що потребують подальших досліджень. Ці питання насамперед стосуються вдосконалення змісту, форм та методів навчання математики, конкретизації розроблених загальних положень компетентнісного підходу на рівні навчальних розділів і тем.

Метою даної роботи є обґрунтування доцільності використання педагогічних програмних засобів та професійних систем комп'ютерної алгебри для формування математичної компетентності учнів в процесі вивчення курсу геометрії.

Компетентнісний підхід до підготовки фахівців у СЗШ полягає в набутті та розвитку в учнів набору ключових, загально-галузевих та предметно-галузевих компетентностей, які визначають його успішну адаптацію в суспільстві. Компетентність включає крім професійних знань та вмінь, що характеризують кваліфікацію, такі якості, як ініціатива, співробітництво, здатність до роботи в групі, комунікативні здібності, уміння учитися, оцінювати, логічно мислити, відбирати і використовувати інформацію.

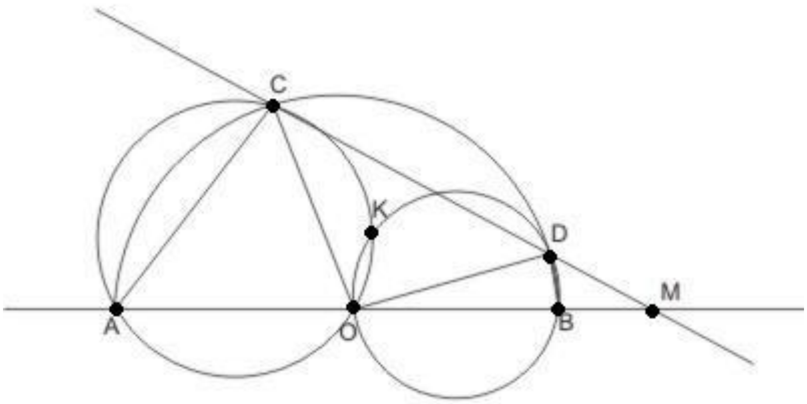
Математична компетентність, за С.А.Раковим, – це „вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень [1, с.15]. Професійно-математична компетентність студента є однією з важливих умов успішної адаптації фахівця в професії, а також фактором високої результативності його праці. С.А.Раков відносить математичну компетентність до предметно-галузевих, виділяючи в ній: процедурну компетентність – уміння розв'язувати типові математичні задачі; логічну компетентність – володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень; технологічну компетентність – володіння сучасними математичними пакетами; дослідницьку компетентність – володіння методами дослідження соціально та індивідуально значущих задач математичними методами; методологічну компетентність – уміння оцінювати доцільність використання математичних методів для розв'язування індивідуально і суспільно значущих задач.

В рамках цього підходу комплекс математичних знань, умінь та навичок визначає предметну (змістовну) компетенцію – складову частину математичної компетентності взагалі, та процедурної компетентності зокрема. Конкретизація загальних положень компетентнісного підходу до вивчення математики на рівні навчальних розділів і тем дозволяє визначити оптимальну структуру навчального матеріалу та вимоги до змісту розділів і тем, розробити ефективні методики і технології навчання, окреслити напрями вдосконалення навчального процесу.

Використання інформаційних технологій суттєво змінює роль і місце педагога та учня в системі «учитель - інформаційна система - учень». Інформаційні навчальні технології — це не просто проміжна ланка між учителем і учнем, вони сприяють реалізації індивідуального підходу в навчанні. У такій моделі вчитель перестає бути просто «ретранслятором» знань, а є співтворцем сучасних технологій навчання.

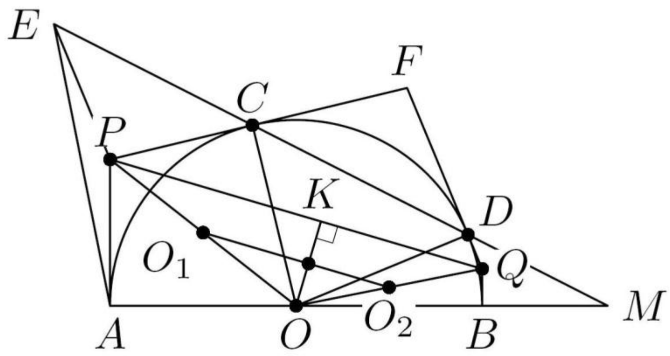
Застосуємо до розв'язку однієї із геометричних задач компетентністний підхід і розглянемо кілька варіантів розв'язку.

Задача. Дано півколо з діаметром AB і центром О і пряма, яка перетинає пів коло в точках С і D,а пряму AB – в точці М ($MC < MA, MD < MC$). Нехай К – друга точка перетинаючи коло, описаного навколо трикутника AOC і DOB. Доведіть, що кут MKO прямий. [3, с. 63]



Перший спосіб розв'язання

Нехай O_1 і O_2 – центри, OP і OQ - діаметри кіл ω_1і ω_2 відповідно, описаних кіл трикутників AOC і DOB.

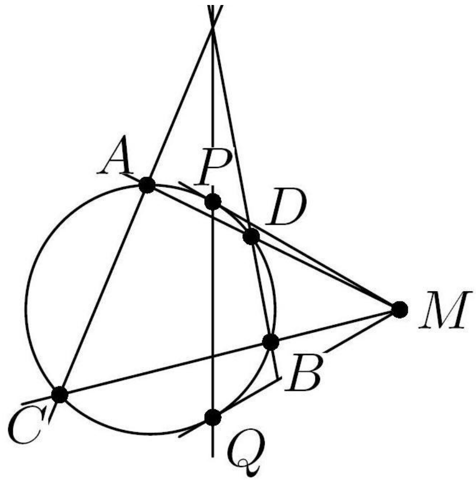


Відрізок O_1O_2 перпендикулярний спільній хорді OK цих кіл і ділить її навпіл, і в той же час, являється середньою лінією трикутника POQ, через те пряма PQ проходить через точку K і перпендикулярна OK. Таким чином, кут MKO буде прямим, якщо точка M лежить на прямій PQ. Доведемо це.

Відрізок PO - діаметр кола ω_1, проходить через точку A, тому кут PAO - прямий, звідси слідує, що відрізок PA дотикається кола. Аналогічно, PC, QB, QD – також дотикаються до кола.

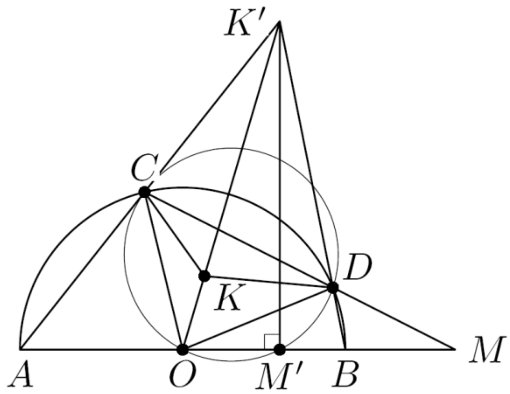
Нехай F – точка перетину прямих PC і QD, а E - точка перетину прямої CD і прямої, яка проходить через точку P і паралельної QD. Тоді з рівності дотичних $FC\ i\ FD$ випливає , що $\angle QDM = \angle FDC = \angle FCD = \angle PCE$. Але $\angle QDM = \angle PEM, так\ як\ PE \parallel QD$. Отже, $PE = PC, але\ PC = PA\ i\ QB = QD$, отже, $APE\ i\ BQD$ - подібні рівнобедрені трикутники з відповідно паралельними сторонами $AP\ i\ BQ, PE\ i\ QD$. Гомотетія з центром в точці M і коефіцієнтом $k = MA{:}\,MB$ переводить точку B в точку $A,$ точку D в точку E, відповідно, вона переводить точку Q в точку P, так як трикутники $BQD\ i\ APF$ подібні. Отже пряма PQ проходить через центр гомотетії - точку M. [3, с. 300]

Другий спосіб розв'язання



Зробимо інверсію відносно кола з центром O і діаметром $AB. Точки\, A, C, B, D$ залишаться нерухомими, а точка K перейде в точку $K^{/}$ перетин прямих $AC\ i\ BD$ Точка M перейде в точку $M^{/}$ перетину кола , описаний навколо трикутника $COD,$і прямої $AB,$ відмінної від О. Описане коло трикутника ΔCOD -коло 9 точок $\Delta AK'B$(так як О- середина АВ, С і D основи висот), тому вона повторно пересікає АВ в точці M' основи висоти, відповідно $K'M' \perp AB.$ Так як $OK \cdot OK' = OM \cdot Om',$то ΔOKM подібний $\Delta OK'M'$і відповідно, $\angle OKM = 90^0.$ [3, с. 300]

Третій спосіб розв'язання



Нехай O_1і O_2- центри, OP і OQ - діаметри кіл описаних навколо трикутників AOC і DOB відповідно . Очевидно що O і K симетричні відносно $O_1\, O_2.$

Виконаємо гомотетію з центром O і коефіцієнтом 2. При цьому точки O_1 і O_2 перейдуть відповідно в точки P і $Q,$ а середина відрізка OK - в точку K. Відповідно , точка K. Відповідно, точка K належить прямій PQ.

При описаній геометрії середині перпендикуляри до відрізків $OA, OB, OC, i\ OD$ перейдуть в дотичні до кіл в точках A, B, C, D відповідно.

Розглянемо шестикутник $ABBCDDA$ (вироджений і самоперетинаючийся), вписаний в коло. По теоремі Паскаля точки перетину пар прямих $ABiCD$ (перетинаються в точці $M.$) дотичних $BB\ i\ DD$ (пересікаються в точці Q) і $BC\ i\ DA$ (позначимо точку їх перетину через L)

лежить на одній прямій . Таким чином, точка Q лежить на прямій LM. Аналогічно, точка P лежить на прямій LM.Значить точки P, Q , M лежать на одній прямій, звідки випливає щ о $\angle OKM = 90^0$. [3, с. 301]

В залежності від психологічних властивостей класу, вчитель може здійснити вибір між запропонованими варіантами розв'язку та вибрати найбільш оптимальний.

При покроковому розв'язанні задачі вчитель здійснює унаочнення розв'язку і наглядно демонструє кожен крок за допомогою однієї із систем комп'ютерної підтримки математики. Застосування ІКТ на уроках геометрії надає можливість кращому засвоєнню матеріалу і розвитку математичної компетентності.

Література

1. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія / С. А. Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
2. Раков С.А. Програмно-методичний комплекс „ІКТ в аналітичній геометрії“. // Нові технології навчання: Науково-методичний зб. (Спеціальний випуск: Матеріали міжнародної науково-методичної конференції „Нові технології навчання у вищій технічній освіті: досвід, проблеми, перспективи“, Київ, 18 – 20 жовтня 2004 р.). – Київ: НУХТ, 2004. – С. 137 – 143.
3. Агаханов Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике
4. 1993–2006: Окружной и финальный этапы /Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. —М.:МЦНМО, 2007. —472 с.

Шумлянська Ірина Анатоліївна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ДЕЯКІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ

Коли йдеться про зміст шкільного курсу математики, то, звичайно, мають на увазі засвоєння учнями певної системи математичних знань, умінь і навичок. Але не можна зводити все математичне навчання в школі до передачі учням визначеної кількості знань і навичок. Це обмежувало б роль математики в загальній освіті. Тому перед школою стоїть важливе завдання математичного розвитку учнів.

Можливо саме тому однією з форм роботи на уроках математики у школі є урок однієї задачі. Як правило, така робота приємно вражає учнів, сприяє ефективному засвоєнню основних теоретичних положень, розвиває варіативність мислення.

Для прикладу розглянемо задачу з геометрії.

Задача. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см, а бічна сторона – 30 см. Знайти радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

Перший спосіб розв'язання (класичний)

Нехай у трикутнику ABC $AB = BC = 30см$, $AC = 48см$ (рис. 1).

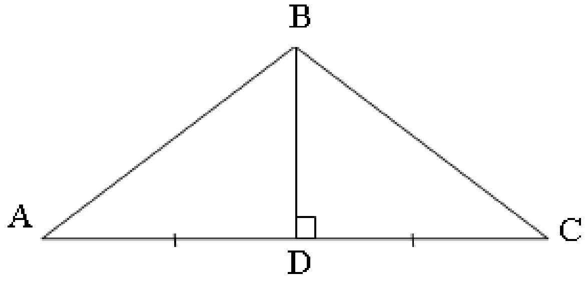


Рис. 1

1) $R = \dfrac{abc}{4S}$

2) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD$, де BD – висота, проведена до основи.

3) Розглянемо трикутник ABD – прямокутний ($\angle ADB = 90^\circ$).

$$AD = \frac{1}{2} AC = 24(см).$$

За теоремою Піфагора $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{54 \cdot 6} = 18(см)$.

4) $S = \dfrac{1}{2} 48 \cdot 18 = 432(см^2)$.

5) $R = \dfrac{30 \cdot 30 \cdot 48}{4 \cdot 432} = 25(см)$.

Відповідь: 25 см.

Другий спосіб розв'язання (використання наслідку з теореми синусів)

1) $2R = \dfrac{BC}{\sin \angle BAD} \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2 \sin \angle BAD}$.

2) Розглянемо трикутник ABD – прямокутний ($\angle ADB = 90^\circ$).

$$AD = \frac{1}{2} AC = 24(см).$$

За теоремою Піфагора $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{54 \cdot 6} = 18(см)$.

$\sin \angle BAD = \dfrac{BD}{AB}$, тобто $\sin \angle BAD = \dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5}$.

3) $R = \dfrac{30}{2 \cdot \frac{3}{5}} = \dfrac{30 \cdot 5}{6} = 25(см)$.

Відповідь: 25 см.

Третій спосіб розв'язання (метод координат)

Введемо систему координат, як показано на рис. 2.

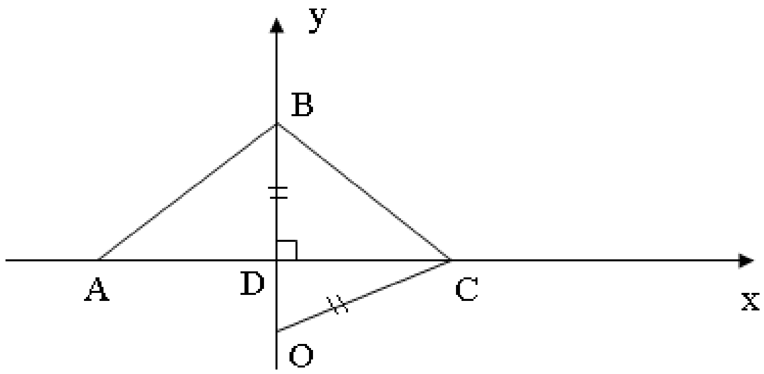


Рис. 2

Точка $O(0;y)$ –центр описаного кола – рівновіддалена від точок $B(0;18)$ та $C(24;0)$, тобто $OB = OC \Rightarrow OB^2 = OC^2$.

Складемо рівняння:

$$(y-18)^2 = 24^2 + y^2$$
$$y^2 - 36y + 324 = 576 + y^2$$
$$-36y = 252$$
$$y = -7$$

Отже $OB = R = 25(см)$.

Відповідь: 25 см.

Четвертий спосіб розв'язання (використання метричних співвідношень у прямокутному трикутнику)

Оскільки $\angle BCN$ спирається на діаметр, то $\angle BCN = 90^\circ$, отже трикутник BCN –прямокутний і CD– висота, що проведена до гіпотенузи (рис. 3).

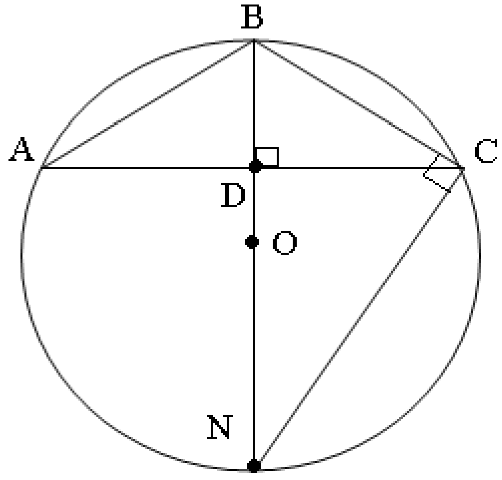


Рис. 3

1) $CD^2 = BD \cdot DN$.
2) Розглянемо трикутник ABD – прямокутний ($\angle ADB = 90^\circ$).

$$AD = \frac{1}{2} AC = 24(см).$$

За теоремою Піфагора $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{54 \cdot 6} = 18(см)$.

3) $CD = \frac{1}{2} AC = 24(см)$.

4) $24^2 = 18 \cdot DN \Rightarrow DN = 32(см)$.

5) $R = \frac{1}{2} BN = \frac{1}{2}(BD + DN) = 25(см)$.

Відповідь: 25 см.

Розгляд різних способів міркувань при розв'язуванні даної задачі потребує постійної уваги вчителя на уроці, адже сприяє узагальненню і поглибленню знань учнів, формуванню вмінь застосовувати різні способи міркувань, в основі яких лежать різні теоретичні знання, які приводять до одного й того самого результату.

Література

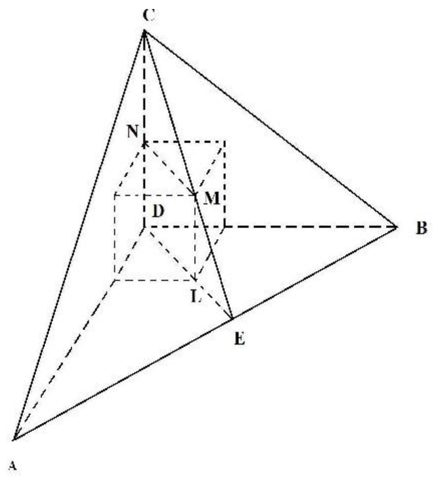
1. Рамський Ю. Про роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві. // Математика в школі. – 2007. – №7. – с.36–40.
2. Сіра К. Ф. Одна задача – способів розв'язання багато. // Математика в школах України. – 2010. –№ 33. – с. 7–9.

Розділ VII. Стереометрія

Заскока Оксана Василівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАДАЧА НА ЗНАХОДЖЕННЯ РЕБРА КУБА ВПИСАНОГО У ТЕТРАЕДР

Розв'язання однієї і тієї ж задачі завжди є цікавим захопленням. Як правило, така робота сприяє ефективному повторенню основних теоретичних положень, розвиває варіативність мислення.



До уваги читачів пропонується задача на знаходження сторони куба вписаного у тетраедр [1]. Цю задачу можна пропонувати учням 11 класу під час вивчення просторових фігур, підготовки до державної підсумкової атестації і зовнішнього незалежного оцінювання.

<u>*Задача.*</u> Всі плоскі кути при вершині D тетраедра $ABCD$ прямі. У тетраедр вписаний куб так, що одна із його вершин співпадає з вершиною D тетраедра, а протилежна їй вершина належить грані ABC. Знайти довжину ребра куба, якщо $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$.

Перший спосіб розв'язання

Із умови задачі випливає, що три ребра куба, які виходять із вершини D, лежать на ребрах прямого тригранного кута. Позначимо через L і M вершини куба, які належать граням $ABCD$ і ABC. Оскільки DL – діагональ квадрата, то точка L належить бісектрисі DE прямокутного трикутника ABD. А так як $LM \parallel CD$, тому точка M належить відрізку CE. Нехай N – вершина куба, яка належить ребру CD. Тоді $MN \parallel DE$, а трикутники CDE і CNM подібні. Зайдемо довжину бісектриси DE. Для цього доведемо допоміжну лему.

Лема У різносторонньому трикутнику зі сторонами a, b, c довжина бісектриси кута C визначається за формулою:

$$l_c = \frac{2ac}{a+b}\cos\frac{C}{2}.$$

Доведення.

Розглянемо трикутник ABC (рис. 2).

$\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$- одиничні вектори, таки, що $\vec{CA} = b\vec{e}, \quad \vec{CB} = a\vec{e}$. За формулою ділення відрізка в даному відношенні λ маємо:

$$\vec{CL} = \frac{b\vec{e}_1 + \lambda a\vec{e}_2}{1+\lambda}, \text{ де } \lambda = \frac{AL}{LB}.$$

З іншої сторони, так як вектори колінеарні $\vec{CL}$ і $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ колінеарні, то

$$\vec{CL} = \mu(\vec{e}_1 + \vec{e}_2).$$

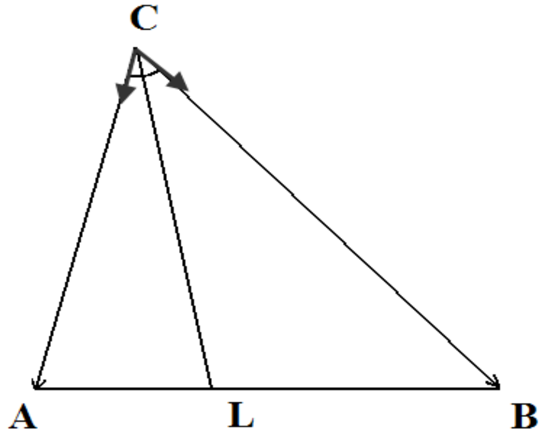


Рис.2

Тоді $\begin{cases} \vec{CL} = \dfrac{b}{1+\lambda}\vec{e}_1 + \dfrac{a\lambda}{1+\lambda}\vec{e}_2, \\ \vec{CL} = \mu(\vec{e}_1 + \vec{e}_2). \end{cases}$

Тепер за єдиністю розкладу вектора за двома не колінеарними векторами, маємо: $\mu = \dfrac{b}{1+\lambda}$ і $\mu = \dfrac{\lambda a}{1+\lambda}$. Тому

отримаємо, що $\mu = \dfrac{ab}{a+b}, \ \lambda = \dfrac{b}{a}$. Отже

$\vec{CL} = \left|\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right| = 2\mu\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{2ab}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$. Маємо, що

$$CL = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}.$$

За отриманою формулою, $l_c = \dfrac{2ac}{a+b}\cos\dfrac{C}{2}$, знаходимо $DE = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Позначимо довжину ребра куба через x. Тоді $CN = c - x, \ MN = x\sqrt{2}$. З подібності трикутників CDE і CNM складемо відношення: $\dfrac{CN}{CD} = \dfrac{CE}{CM} = \dfrac{DE}{NM}$, звідси $\dfrac{c-x}{c} = \dfrac{(a+b)x}{ab}$, тому ребро куба рівне $x = \dfrac{abc}{ab+bc+ac}$

Другий спосіб розв'язання

Виразимо двома способами об'єм тетраедра $ABCD$ через дані і шукані величини і отримані вирази прирівняємо. Об'єм тетраедра $ABCD$ рівний сумі об'ємів трьох тетраедрів: $MABD$, $MBCD$ і $MCAD$. Так як трикутник ABD – прямокутний і CD – висота тетраедра $ABCD$, то його об'єм рівний

$$V = \frac{1}{3} S_{ADB} \cdot DC = \frac{1}{6} abc \quad (*).$$

Аналогічно знайдемо об'єми трьох інших тетраедрів. Спочатку знайдемо об'єм $MABD$

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{ADB} \cdot \frac{1}{2} ML = \frac{1}{3} ab \frac{1}{2} x = \frac{1}{6} abx$$

Потім об'єм тетраедра $MBCD$

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot \frac{1}{2} x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} cbx = \frac{1}{6} cbx$$

І також об'єм $MCDA$

$$V_3 = \frac{1}{3} S_{CDA} \cdot \frac{1}{2} x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} acx = \frac{1}{6} acx.$$

Отже об'єм тетраедра $ABCD$ рівний:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{6} abx + \frac{1}{6} cbx + \frac{1}{6} acx = \frac{1}{6} x(ab + cb + ac). \qquad (**)$$

Прирівняємо знайдені об'єми ($*$) і ($**$) тетраедра $ABCD$. Отримаємо:

$$x(ab + bc + ca) = abc$$

Звідки $x = \dfrac{acb}{ab + bc + ca}$.

Третій спосіб розв'язання

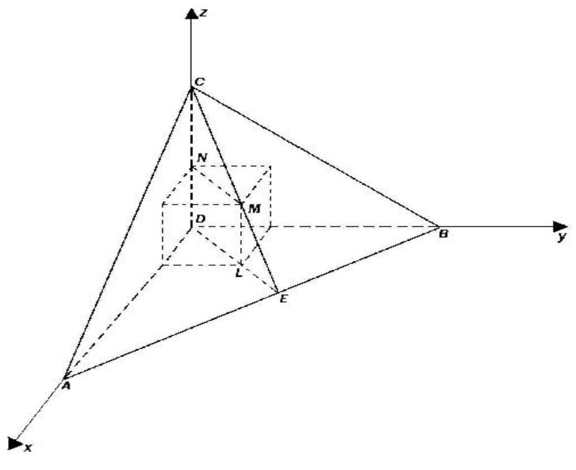


Рис. 3

Введемо в просторі прямокутну систему координат вибравши осі наступним чином: OX – вздовж DA, OY – вздовж DB і OZ- вздовж DC. Тоді точки мають такі координати: $D(0,0,0), A(a,0,0), B(0,b,0)$

Запишемо рівняння площини ABC:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Точка M, яка належить площині ABC, однаково віддалені від граней ABD, BCD, CAD, тому координати точки M рівні: $x = y = z$. Враховуючи це, отримаємо:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1,$$

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1, \qquad x\frac{ab + bc + ca}{abc} = 1$$

З останньої рівності знаходимо ребро куба x: $x = \dfrac{abc}{ab + bc + ca}$.

Переваги розв'язання задачі координатним методом у порівнянні з попередніми способами пояснюється тим, що три ребра даного тетраедра, які виходять із однієї вершини, попарно перпендикулярні, тому прямокутну систему координат легко зв'язати з даним тетраедром. Окрім того серед координат точок багато рівних нулеві, що теж спрощує роботу. Варто звернути увагу на те, що для розв'язання задачі не потрібно шукати додаткові величини.

Література

1. Готман Э. Г., Задача одна – решения разные. /Готман Э. Г., Скопец З. А./- К. : Рад.шк., 1988. - 173 с.
2. Погорєлов О. В., Геометрія: Стереометрія: Підруч. Для 10-11 кл. серед. шк. - 6-те вид. /Погорєлов О. В. / – К.: Освіта, 2001. – 128 с.

Кавецький Руслан Валерійович

студент 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАДАЧА НА ЗНАХОДЖЕННЯ КУТА МІЖ ДВОМА ПЛОЩИНАМИ

Вміння розв'язувати задачі є одним з основних показників рівня математичного розвитку, глибини засвоєння навчального матеріалу. У шкільному курсі математики навчанню розв'язування задач приділяється багато часу, але основним методом такого навчання є демонстрація способів розв'язування певних видів (класів) задач, і зовсім не даються так необхідні знання аналізу суті задачі та її розв'язку. В учнів не виробляються уміння і навики в діях, що входять у загальну діяльність по розв'язуванню задач, не стимулюється постійний аналіз учнями своєї діяльності у цьому напрямку, по виділенню в ній загальних методів та підходів, що дало б можливість у подальшому будувати власну стратегію дослідження та розв'язання задач такого класу. Як приклад такої задачі з кількома різними способами розв'язання пропонується наступна задача.

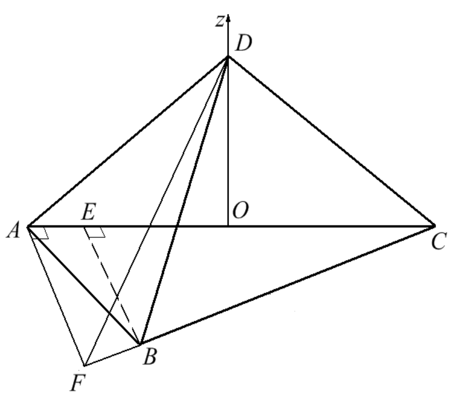


Рис. 1

Задача. Прямокутник $ABCD$ має сторони $AB=a$, $BC=b$. Цей прямокутник зігнуто по діагоналі AC так, що площини ABC і ADC стали взаємно перпендикулярними. Розглянемо піраміду $DABC$. Знайдіть двогранний кут DC.

Перший спосіб розв'язання

На рисунку 1 зображено піраміду $DABC$, що утворилась з прямокутника $ABCD$, який зігнуто по діагоналі AC. За умовою двогранний кут прямий. BE – висота ΔABC. Проведемо перпендикуляр до прямої AC в точку А, $AF \perp AC$ $(F \in CB)$. AD – проекція відрізка FD

на площину *ACD*. Оскільки $AD \perp DC$, то за теоремою про три перпендикуляри $FD \perp DC$. *ADF* – лінійний кут двогранного кута *DC*. Покладемо: $\angle ADF = x$. З ΔADF маємо:

$$\operatorname{tg} x = \frac{AF}{AD}. \quad (1)$$

З ΔACF маємо: $AF = AC \cdot \operatorname{tg} \angle ACB = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{a}{b}$. Тепер з рівності (1) дістаємо:

$$tgx = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{b} : b = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2}.$$

Другий спосіб розв'язання

Базовою при розв'язуванні задачі даним методом буде теорема про синус кута між сусідніми гранями трикутної піраміди.

Теорема. [1 с. 6-7] Нехай S_1 і S_2 — площі двох граней трикутної піраміди з об'ємом V, l — довжина спільного ребра цих граней, φ — кут між цими гранями. Тоді

$$\sin\varphi = \frac{3lV}{2S_1 \cdot S_2}.$$

Згідно з формулою $\sin\varphi = \frac{3lV}{2S_1 \cdot S_2}$,

$$\sin x = \frac{3aV}{2S_1 \cdot S_2}, \ (2)$$

де *V* – об'єм піраміди *DABC*, S_1 та S_2 відповідно площі граней *DAC* та *DBC*. Висота *DO* трикутника *ADC* є водночас і висотою піраміди *DABC*. $DO = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Далі маємо:

$$V = \frac{1}{3} DO \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{2} ab = \frac{a^2 b^2}{6\sqrt{a^2 + b^2}}; S_1 = \frac{1}{2} ab.$$

Згідно з формулою трьох косинусів

$$\cos\angle BCD = \cos\angle BCA \cdot \cos\angle DCA = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

$$S_2 = \frac{1}{2} ab \sin\angle BCD = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 - \left(\frac{ab}{a^2 + b^2}\right)^2} = \frac{1}{2} ab \frac{\sqrt{a^4 + a^2 b^2 + b^4}}{a^2 + b^2}.$$

Тепер з формули (2) маємо:

$$\sin x = 3a \cdot \frac{a^2 b^2}{6\sqrt{a^2 + b^2}} : \left(2 \cdot \frac{1}{2} ab \cdot \frac{1}{2} ab \frac{\sqrt{a^4 + a^2 b^2 + b^4}}{a^2 + b^2}\right) = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^4 + a^2 b^2 + b^4}}.$$

Третій спосіб розв'язання

Для розв'язування задачі використаємо векторно-координатний метод. Візьмемо за початок координат точку *O* (рис 2). *OD* – вісь *Oz*, *OC* - вісь *Oy*, *OG*

- вісь Ox $(GO \perp AC)$. Маємо: $O(0;0;0)$, $D\left(0;0;\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, $C\left(0;\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}};0\right)$, $G\left(\dfrac{a^3}{b\sqrt{a^2+b^2}};0;0\right)$.

Площина DAC має рівняння $x=0$ і нормальний вектор $\vec{n}(1;0;0)$. Площина DBC має рівняння

$$\frac{x}{\dfrac{a^3}{b\sqrt{a^2+b^2}}}+\frac{y}{\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}+\frac{z}{\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}=1$$

і нормальний вектор $\vec{m}\left(\dfrac{b}{a^3};\dfrac{1}{a^2};\dfrac{1}{ab}\right)$.

Тепер маємо:

$$\cos x=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\dfrac{b}{a^3}}{\sqrt{\dfrac{b^2}{a^6}+\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{a^2b^2}}}=\frac{b^2}{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}.$$

Четвертий спосіб розв'язання

В цьому способі ми використовуємо теорему косинусів тригранного кута і формулу трьох косинусів.

Теорема косинусів для тригранного кута. [2 с. 34-35] На ребрах тригранного кута P відкладемо одиничні вектори $\overrightarrow{PA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{PB}=\vec{e}_2$ та $\overrightarrow{PC}=\vec{e}_3$. Відрізки BD та CE перпендикулярні до прямої PA.

Двогранний кут з ребром PA має величину A, тобто величину кута між векторами $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{EC}$. Нехай $\angle BPC=\alpha$, $\angle EPC=\beta$, $\angle DPB=\gamma$.

Тоді

$$\left|\overrightarrow{EC}\right|=\sin\beta,\left|\overrightarrow{DB}\right|=\sin\gamma,\left|\overrightarrow{PE}\right|=\cos\beta,$$

$$\left|\overrightarrow{PD}\right|=\cos\gamma\cdot\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB},\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EC}.$$

Далі маємо:

$$\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{EC}=$$

$$=\cos\beta\cdot\cos\gamma+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos A$$

або

$$\cos\alpha=\cos\beta\cdot\cos\gamma+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos A$$

Здобута рівність називається *теоремою косинусів для тригранного кута*.

З цієї рівності випливає рівність

$$\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

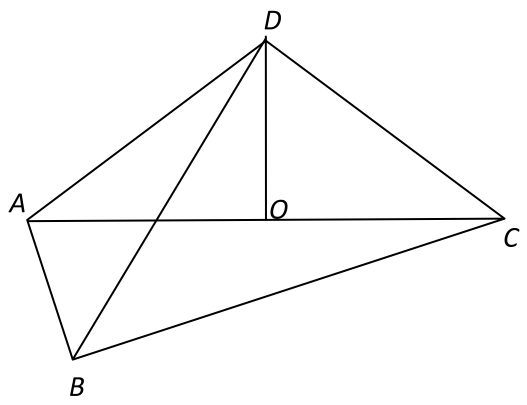


Рис. 2

а) Розглянемо тригранний кут з вершиною C (рис. 2). Згідно з формулою

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

$$\cos x = \frac{\cos\angle BCA - \cos\angle ACD\cdot\cos\angle BCD}{\sin\angle ACD\cdot\sin\angle BCD} =$$

$$= \frac{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{ab}{a^2+b^2}}{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{b^2}{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}.$$

Відповідь. $\arccos\dfrac{b^2}{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}}$.

Запропонована задача є задачею на обчислення кута між двома площинами. При навчанні розв’язування задачі потрібно навчити учнів виділяти головні елементи в умові задачі, не пропускати жодних, на перший погляд неважливих, деталей. Якщо прочитати умову будь-якої задачі, то можна виділити деяке питання, іншими словами вимогу, на яку необхідно отримати відповідь, спираючись на умову. Якщо ж уважно вивчити умову задачі, то можна побачити в ній певні твердження (що дано), вони ще називаються умовами, і певні завдання (те, що потрібно знайти).

Дана задача була розв’язана чотирма способами. Для розв’язування учні повинні знати «формулу трьох косинусів», «теорему косинусів для тригранного кута», «терему про три перпендикуляри». Тому цю задачу доцільно, на мою думку, пропонувати учням старших класів на факультативних заняттях з математики, оскільки вона є задачею підвищеної складності.

Література

1. Ушаков Р.П. Кути стереометрії / Р.П. Ушаков. – Х. : Вид. група «Основа», 2007. – 144 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 1 (49)).
2. Понарин Я.П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства / Я.П. Понарин. – М. : МЦНМО, 2006. – 256 с.: ил.

Матяш Ольга Іванівна
кандидат педагогічних наук, доцент
Ясінський В'ячеслав Андрійович
Заслужений вчитель України, доцент

ФОРМУВАННЯ ЗНАНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ ПРО РІЗНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Вивчення математики в старшій школі обумовлене сьогодні введенням нових програм та відповідних їм нових підручників на етапі 10 класу.

В пояснювальній записці програм з математики, у частині старшої школи, одним із головних завдань курсу математики є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності. Практична компетентність передбачає, як зазначається в програмах, що учень, зокрема, вміє знаходити геометричні величини у просторі, які характеризують розміщення геометричних фігур: відстані і кути. Значної уваги вимагає формування таких фундаментальних понять, як загальне поняття відстані, поняття кута як міри розміщення прямих і площин в просторі. З уведенням відношення перпендикулярності прямих і площин (математичної моделі поняття вертикальності) моделюючі можливості курсу стереометрії значно збільшуються.

Одним із поширених недоліків практики навчання математики в старшій школі є недостатність умов для застосування попередньо здобутих знань та умінь при вивченні наступних тем. Наприклад, поняття відстані і кута між мимобіжними прямими вводиться в курсі геометрії 10-го класу, знання учнів про координати і вектори формуються згодом і, як свідчить практика, часто зовсім не використовуються при вивченні наступних тем. Вважаємо, що методично вдалим прийомом вчителя при вивченні теми « Многогранники » є розв'язування задач на знаходження відстані між мимобіжними прямими на моделях куба та трикутної призми різними методами, серед яких координатний, векторний, координатно-векторний.

Особливого значення ми надаємо в технології формування математичних компетенцій учнів місцю і ролі кожної використовуваної вчителем задачі. Процес розв'язування відібраної задачі має розкривати комплекс її функцій, серед яких навчальні, розвивальні, діагностичні, прогнозуючі, тощо. Вдало відібрана задача, по-перше, створює оптимальні умови для засвоєння нового матеріалу, по-друге, дозволяє використати, а тим самим активізувати, закріпити, розвинути знання попереднього матеріалу. По-третє, розв'язування задачі, має слугувати розвитку прийомів розумової діяльності учнів, по-четверте, має виступати мотиваційним чинником навчання і т.д.

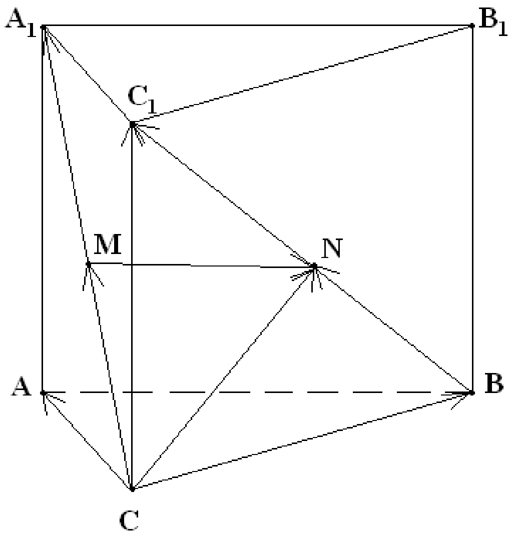
Розглянемо, для прикладу задачу, розв'язування якої при вивченні теми «Призми», створює:

- умови для закріплення знань учнів про відстань між мимобіжними прямими,

- умови для повторення теми «Координати і вектори в просторі», умови для формування знань про різні методи розв'язування задач стереометрії, серед яких координатний, векторний і координатно – векторний,
- умови для використання між предметних зв'язків алгебри і геометрії, зокрема, в процесі розв'язування задачі закріплюються знання і уміння розв'язувати системи рівнянь.

<u>*Задача.*</u> Знайти відстань між мимобіжними діагоналями бічних граней прямої трикутної призми усі ребра якої рівні і дорівнюють а.

Перший спосіб розв'язання (Векторний метод)



Виберемо вектори $\overrightarrow{\tilde{N}\hat{A}} = \vec{\grave{a}}$, $\overrightarrow{\tilde{N}\hat{A}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\tilde{N}\tilde{N}_1} = \vec{\tilde{n}}$. Нехай MN – спільний перпендикуляр мимобіжних прямих CA_1 і BC_1. Розглянемо вектор $\overrightarrow{\grave{I}N}$. Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими, достатньо знайти довжину вектора $\overrightarrow{\grave{I}N}$.

Виразимо $\overrightarrow{\grave{I}N}$ через $\vec{\grave{a}}, \vec{b}, \vec{\tilde{n}}$.

$$\overrightarrow{\tilde{N}\grave{A}_1} = \vec{\grave{a}} + \vec{\tilde{n}},\ \overrightarrow{\hat{A}\tilde{N}_1} = \vec{\tilde{n}} - \vec{b},$$

$$\overrightarrow{\tilde{N}\grave{I}} = m \cdot \overrightarrow{\tilde{N}\grave{A}_1} = m\vec{a} + m\vec{c},$$

$$\overrightarrow{BN} = n \cdot \overrightarrow{BC_1} = n\vec{c} - n\vec{b},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CM} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}) = \vec{b} + n\vec{c} - n\vec{b} - m\vec{a} - m\vec{c} = -m\vec{a} + (1-n)\vec{b} + (n-m)\vec{c}.$$

Отже, $\overrightarrow{MN} = -m\vec{a} + (1-n)\vec{b} + (n-m)\vec{c}$.

Оскільки MN спільний перпендикуляр прямих CA_1 і BC_1, то

$$\begin{cases} \overrightarrow{\grave{I}N} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0, \\ \overrightarrow{\grave{I}N} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0; \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (-m\vec{a} + (1-n)\vec{b} + (n-m)\vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 0, \\ (-m\vec{a} + (1-n)\vec{b} + (n-m)\vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0. \end{cases}$$

Перетворюючи рівняння системи врахуємо, що $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$, де а – довжина ребра призми, $\vec{a}^2 = a^2, \vec{b}^2 = a^2, \vec{c}^2 = a^2$.

Отже,

$$\begin{cases} -ma^2 + (1-n) \cdot \frac{1}{2}a^2 + (n-m) \cdot a^2 = 0, \Big|: a^2 \neq 0 \\ m \cdot \frac{1}{2}a^2 - (1-n) \cdot a^2 + (n-m)a^2 = 0; \Big|: a^2 \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n + n - m = 0 \\ m \cdot \frac{1}{2} - 1 + n + n - m = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}n - 2m + \frac{1}{2} = 0, \\ 2n - \frac{1}{2}m - 1 = 0; \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2n + 8m - 2 = 0, \\ 2n - \frac{1}{2}m - 1 = 0. \end{cases}$$

$$2n-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-1=0$$

$$2n-\frac{1}{5}-1=0$$

$$2n=\frac{6}{5}\longrightarrow n=\frac{3}{5}.$$

$$\frac{15}{2}m-3=0$$

$$\frac{15}{2}m=3$$

$$m=\frac{2}{5}$$

Отже, $\overrightarrow{\text{Ì}N}=-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$,

$$\left|\overrightarrow{\text{Ì}N}\right|=\sqrt{\overrightarrow{\text{Ì}N}^2}=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{25}a^2+\frac{4}{25}a^2+\frac{1}{25}a^2-\frac{8}{25}\cdot\frac{1}{2}a^2-\frac{4}{25}\cdot 0+\frac{4}{25}\cdot 0}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{25}a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь. $MN=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}.$

Другий спосіб розв'язання (Координатно-векторний метод)

Нехай MN – спільний перпендикуляр мимобіжних прямих M (x_1, y_1, z_1), N (x_2, y_2, z_2).

Відстань між мимобіжними прямими:

$$MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Отже, слід знайти координати точок M та N.

Вектори колінеарні: $\overrightarrow{CM}$ і $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{BN}$ і $\overrightarrow{BC_1}$. $\overrightarrow{CM}=k\cdot\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{BN}=k\cdot\overrightarrow{BC_1}$

$$\overrightarrow{CM}=\left(x_1-\frac{a}{2};y_1;z_1-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\overrightarrow{CA_1}=\left(-\frac{a}{2};a;-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$\overrightarrow{BN}=\left(x_2-a;y_2;z_2\right);$$

$$\overrightarrow{BC_1}=\left(-\frac{a}{2};a;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\begin{cases} x_1-\frac{a}{2}=-\frac{a}{2}k, \\ y_1=ka, \\ z_1-\frac{a\sqrt{3}}{2}=-k\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \qquad \text{також} \qquad \begin{cases} x_2-a=-m\frac{a}{2}, \\ y_2=ma, \\ z_2=m\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}k, \\ y_1=ka, \\ z_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{2}k; \end{cases} \qquad \text{також} \qquad \begin{cases} x_2-a=-m\frac{a}{2}, \\ y_2=ma, \\ z_2=m\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MN}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}k-\frac{a}{2}m;am-ak;\frac{a\sqrt{3}}{2}m-\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}k)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0;\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}-\frac{a^2}{4}(1+k-m)+a^2(m-k)-\frac{3a^2}{4}(m+k-1)=0,\\ -\frac{a^2}{4}(1+k-m)+a^2(m-k)+\frac{3a^2}{4}(m+k-1)=0;\end{cases}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}(1+k-m)-(m-k)+\frac{1}{4}(m+k-1)=0,\\ \frac{1}{4}(1+k-m)-(m-k)-\frac{1}{4}(m+k-1)=0;\end{cases}\longrightarrow\frac{1}{2}(m+k-1)=0, m=1-k;$$

$$\frac{1}{4}(1+k-1-k)-(1-k-k)+\frac{1}{4}(1-k+k-1)=0$$

$$\frac{1}{4}\cdot 2k-1+2k=0$$

$$\frac{5}{2}k=1\longrightarrow k=\frac{2}{5};m=\frac{3}{5.}$$

Отже $\grave{I}\left(\frac{3}{10}\grave{a};\frac{2}{5}\grave{a};\frac{3\sqrt{3}\grave{a}}{10}\right)$, $N\left(\frac{7}{10}\grave{a};\frac{3}{5}\grave{a};\frac{3\sqrt{3}\grave{a}}{10}\right)$

$$MN=\sqrt{\left(\frac{7}{10}\grave{a}-\frac{3}{10}\grave{a}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\grave{a}-\frac{2}{5}\grave{a}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}\grave{a}}{10}-\frac{3\sqrt{3}\grave{a}}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{25}a^2+\frac{1}{25}a^2+0}=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь. MN=$\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Третій спосіб розв'язання (Координатний метод)

$\grave{A}(0;0;0)$, $\hat{A}(\grave{a};0;0)$, $\tilde{N}\left(\frac{\grave{a}}{2};0;\frac{\grave{a}\sqrt{3}}{2}\right)$

$\grave{A}_1(0;\grave{a};0)$, $\hat{A}_1(\grave{a};\grave{a};0)$, $\tilde{N}_1\left(\frac{\grave{a}}{2};0;\frac{\grave{a}\sqrt{3}}{2}\right)$, $\hat{E}(\grave{a};0;\grave{a}\sqrt{3})$.

Знайдемо рівняння площини (BC_1K):

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$\begin{cases}A(x-a)+By+Cz=0,\\ A\left(x-\frac{a}{2}\right)+B(y-a)+C\left(z-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=0,\\ A(x-a)+By+C(z-a\sqrt{3})=0;\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}Ax+By+Cz-Aa=0,\\ Ax+By+Cz-A\frac{a}{2}-Ba-C\frac{a\sqrt{3}}{2}=0,\\ Ax+By+Cz-Aa-C\cdot a\sqrt{3}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{a}{2}A-Ba-C\frac{a\sqrt{3}}{2}=0\\ C\cdot a\sqrt{3}=0,\\ \frac{a}{2}A+C\cdot a\sqrt{3}-Ba-C\frac{a\sqrt{3}}{2}=0;\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}C=0,\\ A=2B;\end{cases}$$

$2B(x-x_0)+B(y-y_0)+0\cdot(z-z_0)=0$

$2B(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

$2(x-x_0)+(y-y_0)=0$

$2x+y+(-2x_0-y_0)=0$

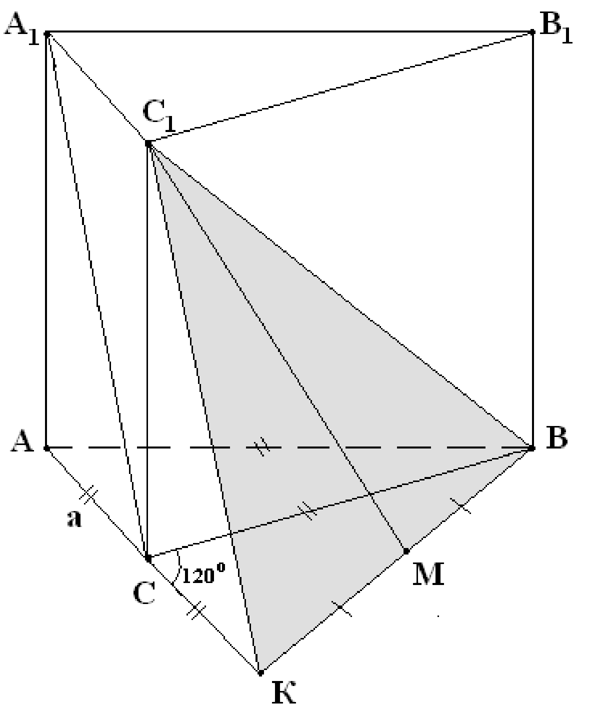
$B(a;0;0)\in(BC_1K), \text{îòæå}$

-2 · a – 0 = -2a;

2x + y – 2a = 0 – рівняння площини (BC_1K).

Знайдемо відстань від точки $\grave{A}_1(0;\grave{a};0)$ до цієї площини:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 0+a+0\cdot 0-2a|}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}a.$$

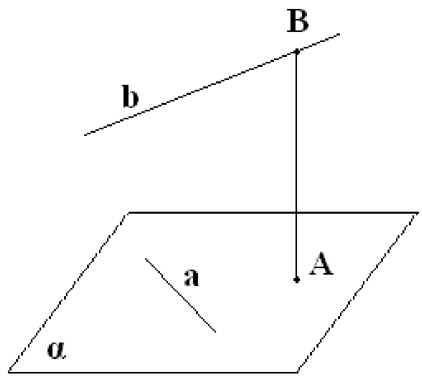


Отже, відстань між мимобіжними прямими CA_1 і BC_1 дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Відповідь. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Четвертий спосіб розв'язання
(Геометричний метод)

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими, знайдемо відстань від точки однієї з мимобіжних прямих, до паралельної їй площини, яка містить іншу мимобіжну пряму.



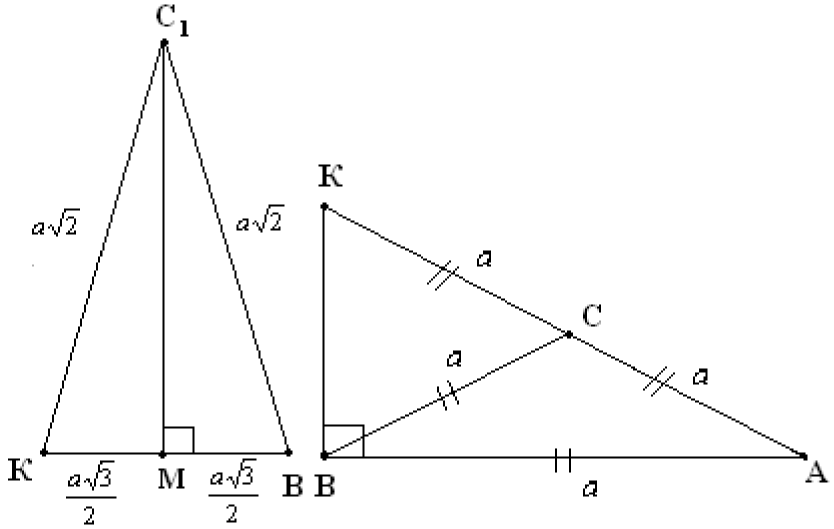
Здійснивши добудову: $\hat{E}\in\grave{A}\tilde{N}$, AC=CK, отримаємо A_1C_1KC – паралелограм, тому $\grave{A}_1\tilde{N}\|\tilde{N}_1\hat{E}$, тому $\grave{A}_1\tilde{N}\|(\tilde{N}_1\hat{E}\hat{A})$, яка містить пряму C_1B. Отже, для знаходження відстані між мимобіжними прямими CA_1 і BC_1, достатньо знайти відстань від, наприклад, точки C до площини (BC_1K). Розглянемо піраміду C_1CBK, якщо $\Delta\tilde{N}\hat{A}\hat{E}$ її основа, то C_1C – висота до основи CBK (бо призма $ABCA_1B_1C_1$ за умовою пряма). Якщо $\Delta\tilde{N}_1\hat{A}\hat{E}$ її основа, висота з вершини C на вказану основу і є шуканою відстанню від точки C до площини (BC_1K). Отже, знайдемо висоту піраміди C_1CBK до основи C_1BK:

$$V_{ï³ð.} = \frac{1}{3} S_{îñí.} \cdot Í$$

$$V_{ï³ð.} = \frac{1}{3} S_{\Delta Ñ_1ÂÊ} \cdot Í \longrightarrow Í = \frac{3V_{ÑÑ_1ÂÊ}}{S_{\Delta Ñ_1ÂÊ}};$$

$$V_{ÑÑ_1ÂÊ} = \frac{1}{3} S_{\Delta ÑÂÊ} \cdot ÑÑ_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} à \cdot à \cdot \sin 120^\circ \cdot a = \frac{1}{6} a^3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3.$$

$$S_{\Delta Ñ_1ÂÊ} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot C_1M = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4};$$



Отже,

$$Í = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} à^3}{\frac{à^2\sqrt{15}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}à} = \frac{à}{\sqrt{5}} = \frac{à\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь. $\frac{à\sqrt{5}}{5}$.

Одним із сучасних принципів навчання є його диференціація. Це означає, що процес навчання, зокрема математики, має бути організований вчителем так, щоб забезпечити оптимальні умови для набуття учнями знань та умінь відповідно до їх здібностей, рівня навченості і т.д. Очевидно, в цьому процесі мають бути враховані і пізнавальні інтереси здібних до математики учнів. До таких інтересів ми відносимо знання про різні методи і способи розв'язування задач геометрії. Оптимальним тут вважаємо підхід, коли відповідні знання формуються в умовах: задача одна, методи її розв'язування різні. В таких підходах вбачаємо забезпечення умов для досягнення учнями практичної компетентності.

Синюк Наталя Леонідівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

На сучасному етапі розвитку суспільства важливою є потреба належного рівня математичної підготовки школярів. Найважливіше завдання вчителя математики – навчити учнів повноцінно сприймати навколишній світ, розвивати в них просторову уяву, логічне мислення та ін. Одним із способів розвитку просторової уяви є розв'язування задач на побудову, зокрема задач на побудову перерізів просторових тіл.

В даній статті ми робимо спробу розвивати просторову уяву учнів шляхом розв'язування задачі на побудову перерізу многогранника різними способами.

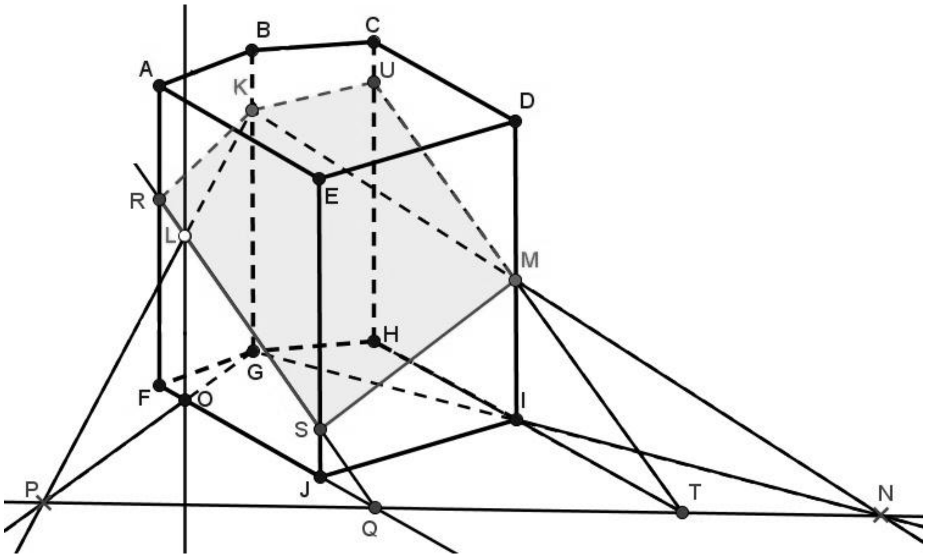
Задача. Побудувати переріз п'ятикутної призми площиною, що проходить через три точки K, L, M (точки M і K лежать на бічних ребрах призми, точка L – на бічній грані AFJE призми).

Домовимось про наступні позначення:

– точки, які лежать на ребрах многогранника, будемо позначати ●;
– точки, які лежать на гранях многогранників, будемо позначати ○;
– ключові точки позначатимемо ×.

Перший спосіб розв'язання

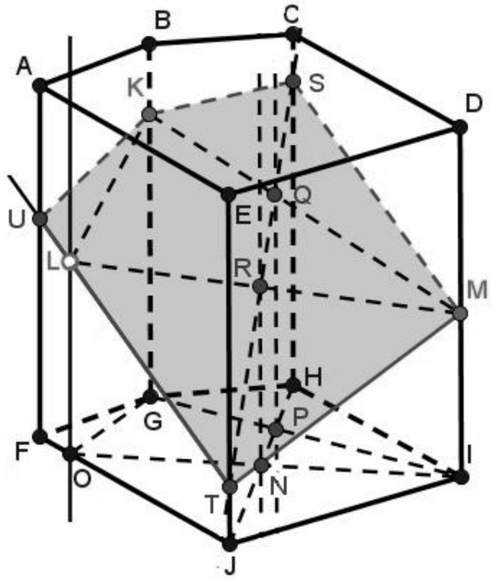
Метод слідів



1. Будуємо точку N перетину прямих KM і GI. Точка N належить площині основи призми і площині перерізу.
2. Проведемо через точку L пряму, паралельну бічним ребрам призми. Вона перетне ребро FJ у точці O.
3. Будуємо точку P перетину прямих KL і GO. Точка P належить площині основи призми і площині перерізу.
4. Проведемо пряму PN. Вона є лінією перетину площини перерізу і площини, в якій лежить основа призми. Іншими словами кажуть, що пряма PN є слідом січної площини на площині основи многогранника.
5. Будуємо точку Q перетину прямих OJ і PN. Точка Q належить площині перерізу і площині грані AFJE.
6. Проведемо пряму QL. Вона перетне ребро AF призми у точці R і ребро JE у точці S. Точки R і S – вершини шуканого перерізу.
7. Будуємо точку T перетину прямих HI і PN. Точка T належить площині перерізу і площині грані CDIH.
8. Проведемо пряму TM. Вона перетне ребро CH у точці U, яка є однією з вершин шуканого перерізу.
9. З'єднуємо задані і отримані точки, RSMUK – шуканий переріз.

Другий спосіб розв'язання

Метод слідів, описаний вище, хоч і є універсальним методом побудови перерізів многогранників, проте в певних випадках є незручним. Ця незручність стосується випадків, коли точки, які задають переріз, лежать у площині, яка майже паралельна площині основи. У цих випадках використовується метод паралельного проектування.



Суть цього методу полягає у виборі напряму проектування й побудові сліду шуканого перерізу на площину проектування. Побудову перерізу методом паралельного проектування можна виконати так:

1) визначити площину проектування і напрям проектування;
2) знайти проекції даних точок шуканого перерізу на площину проектування;
3) знайти точки перетину січної площини з ребрами многогранника;
4) побудувати шуканий переріз.

Метод паралельного проектування.

1. Трикутник OGI – паралельна проекція трикутника LKM на площину основи призми, вектор проектування AF.
2. Проведемо пряму HJ. Вона перетне прямі OI і GI у точках N і P відповідно.
3. Через точки N і P проведемо прямі, паралельні ребру AF призми. Вони перетнуть прямі KM і LM відповідно у точках Q та R.
4. Проведемо пряму QR. Вона перетне бічні ребра CH і EJ призми у точках S і T відповідно.
5. Точки T та L належать грані AFJE призми. Побудуємо точку U перетину прямої TL з ребром AF призми.
6. З’єднаємо задані і отримані точки, KSMTU – шуканий переріз.

Скалянчук Сергій Сергійович
студент 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ДВОГРАННОГО КУТА У ПІРАМІДІ

Велика кількість задач з математики, у тому числі й геометрії, може бути розв’язана багатьма способами. Саме завдяки варіативності способів розв’язання учні зможуть поглибити знання чи повторити раніше вивчений матеріал. Добираючи задачі із декількома різними способами розв’язання, можна показати раціональність та доцільність того чи іншого способу.

Наприклад, при вивченні однієї теми розв'язати задачу. Потім, при вивченні іншої теми, розв'язати цю ж задачу, але іншим способом, таким, що підходить для даної теми. Порівняти способи , а учні вже самі зроблять висновок, яким із способів їм легше користуватись. Також доцільно спонукати учнів до знаходження свого способу розв'язування задачі або запропонувати такі способи, про які учні навіть не здогадувались, але які потребують використання додаткового матеріалу. Додатково здобута інформація і вміння розв'язувати певним (невідомим раніше) способом допоможуть учням і в подальшому розв'язуванні задач різних рівнів складності. Ось одна задача, яка має різні способи розв'язання.

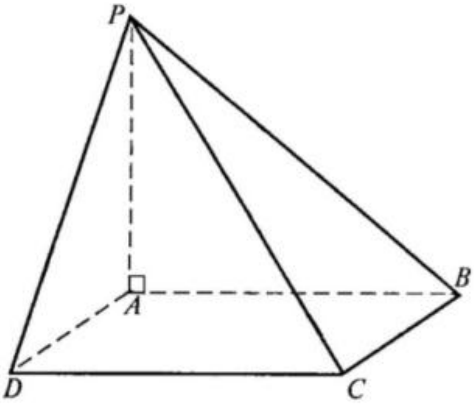


Рис.1

<u>*Задача.*</u> Основою піраміди є прямокутник *ABCD*. Бічне ребро *PA* є висотою піраміди (рис. 1). Відомо, що $\angle PBA=\alpha$, $\angle PDA=\beta$. Знайдіть двогранний кут при бічному ребрі *PC*.

Перший спосіб розв'язання

Проведемо висоти *DL* та *BR* трикутників PDC і *PBC* відповідно

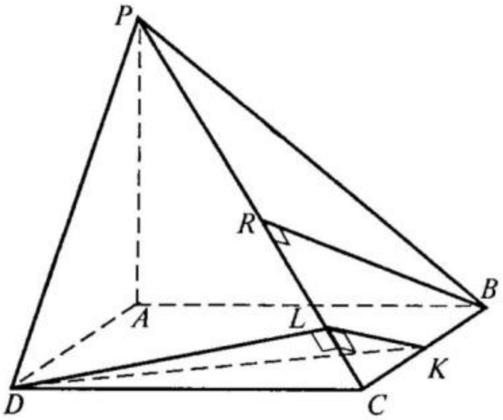
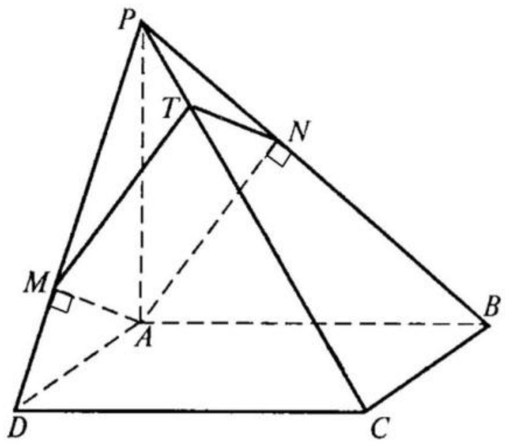


Рис.2



(рис. 2) $LK \perp PC$ $(K \in BC)$. Кут *DLK* — шуканий. Нехай $\angle DLK = x$. З теореми косинусів для ΔDLK знаходимо:

$$\cos x = \frac{DL^2 + KL^2 - DK^2}{2DL \cdot KL}.$$

DK^2 розпишемо за теоремою Піфагора з трикутника *DCK*, отримаємо:

$$\cos x = \frac{DL^2 + KL^2 - DC^2 - KC^2}{2DL \cdot KL} =$$

$$= -\frac{CL}{DL} \cdot \frac{CL}{KL} = -ctg\angle PCD \cdot ctg\angle PCB = = -\frac{DC}{PD} \cdot \frac{BC}{PB} = -\frac{AB}{PB} \cdot \frac{AD}{PD} = -\cos\alpha\cos\beta.$$

Другий спосіб розв'язання

У другому способі ми розв'яжемо задачу із використанням формули трьох косинусів.

Проведемо висоти AM і AN трикутників PAD і PAB відповідно (рис. 3). PD — проекція прямої PC на площину PAD. Оскільки $AM \perp PD$, то за теоремою про три перпендикуляри $AM \perp PC$.
Аналогічно доведемо, що $AN \perp PC$.
Отже, площина MAN перпендикулярна до прямої PC. T — точка перетину прямої PC з площиною MAN. MTN — лінійний кут двогранного кута PC. Якщо $\angle MTN = x$, то $\angle MAN = 180^\circ - x$, бо $\angle AMT = \angle ANT = 90^\circ$. Розглянемо тригранний кут A з ребрами AM, AP та AN. Легко бачити, що $\angle MAP = \beta$, $\angle NAP = \alpha$ і площини кутів MAP та NAP перпендикулярні. Згідно з формулою трьох косинусів

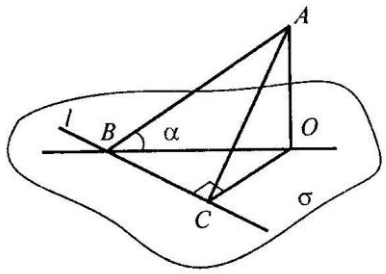


Рис.3

Формула трьох косинусів. Якщо β − кут між прямими OB і l (див. рис) ($0 < \beta \le 90°$), $\angle ABC = \gamma$, то

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta.$$

маємо: $\cos\angle MAN = \cos\angle MAP \cdot \cos\angle NAP$ або $\cos(180^\circ - x) = \cos\beta\cos\alpha$, звідки $\cos x = -\cos\alpha\cos\beta$.

Третій спосіб розв'язання

В цьому способі ми використаємо теорему косинусів для тригранного кута.

Розглянемо тригранний кут з вершиною С. Нехай $\angle PCD = \alpha_1$, $\angle PCB = \beta_1$. Згідно з *теоремою косинусів для тригранного кута* [2]

$$\cos\angle BCD = \cos\beta_1\cos\alpha_1 + \sin\beta_1\sin\alpha_1\cos x.$$

Оскільки $\angle BCD = 90^\circ$, то $0 = \cos\beta_1\cos\alpha_1 + \sin\beta_1\sin\alpha_1\cos x$, звідки

$$\cos x = \frac{-\cos\alpha_1 \cdot \cos\beta_1}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1} = -ctg\alpha_1 \cdot ctg\beta_1 = \frac{-CD}{PD}\cdot\frac{CB}{PB} = -\frac{AB}{PB}\cdot\frac{AD}{PD} = -\cos\alpha\cos\beta.$$

Четвертий спосіб розв'язання

Цей спосіб розв'язання задачі полягає використанні координатного методу, тонких моментів аналітичної геометрії в просторі, зокрема формули для знаходження кута між двома площинами, що задані своїми рівняннями.

Виберемо точку A за початок координат, пряму AD за вісь Ox, пряму AB за вісь Oy, пряму AP за вісь Oz (рис. 4).

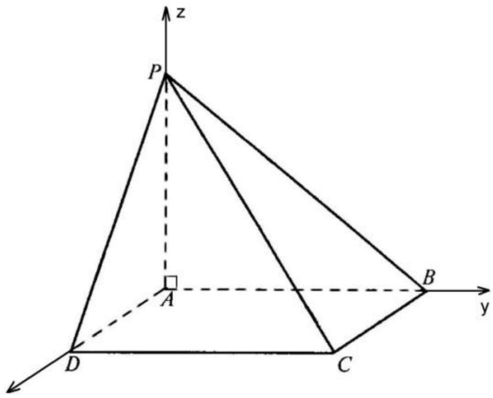


рис. 4

Нехай $AP = a$, тоді $A(0;0;0)$, $B(0; a\cdot ctg\alpha; 0)$, $D(a\cdot ctg\beta; 0; 0)$. Площина PBC має рівняння

$$0\cdot x + \frac{y}{a\cdot ctg\alpha} + \frac{z}{a} = 1 \text{ або } 0\cdot x + tg\alpha\cdot y + z = a.$$

Площина *PCD* має рівняння $0 \cdot x + tg\alpha \cdot y + z = a$. Позначимо через φ кут між площинами *PCB* та *PCD*. Згідно з формулою (*)

Якщо дві площини мають рівняння

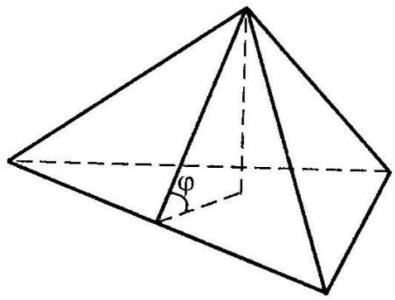
$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ *та* $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$ φ *− кут між ними, то*

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \qquad (*)$$

маємо: $\cos\varphi = \dfrac{|0 \cdot tg\beta + tg\alpha \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{tg^2\alpha + 1} \cdot \sqrt{tg^2\beta + 1}} = \cos\alpha\cos\beta.$

Шуканий кут x тупий і дорівнює $180^\circ - \varphi,$ отже, $\cos x = -\cos\alpha\cos\beta.$

П'ятий спосіб розв'язання



У цьому способі ми використаємо формулу (**), яка пов'язує кут між гранями трикутної піраміди з її об'ємом та площами цих граней [1].

Нехай S_1 і S_2 - площі двох граней трикутної піраміди з об'ємом V, l довжина спільного ребра цих граней, φ — кут між цими гранями. Тоді

$$\sin\varphi = \frac{3lV}{2S_1 \cdot S_2}. \qquad (**)$$

Згідно з формулою (**)

маємо: $\sin x = \dfrac{3PC \cdot V}{2S_1 \cdot S_2}$, де x — шуканий кут, V — об'єм піраміди *PABCD,* S_1 та S_2 відповідно площі граней *PBC* та *PDC.*

Маємо:

$$\sin x = \frac{3PC \cdot \frac{1}{3} PA \cdot AB \cdot AD}{2 \cdot \frac{1}{2} PD \cdot DC \cdot \frac{1}{2} PB \cdot BC} = \frac{PC \cdot PA}{PD \cdot PB}.$$

Враховуючи, що x — тупий кут, отримуємо:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{PC^2 \cdot PA^2}{PD^2 \cdot PB^2}} = -\frac{\sqrt{PD^2 \cdot PB^2 - PC^2 \cdot PA^2}}{PD \cdot PB}. \qquad (1)$$

Зазначимо, що

$$PD^2 \cdot PB^2 - PC^2 \cdot PA^2 = PC^2 \cdot PB^2 - \left(PD^2 + DC^2\right)PA^2 =$$

$$= PD^2\left(PB^2 - PA^2\right) - DC^2 \cdot PA^2 = PD^2 \cdot AB^2 - PA^2 \cdot AB^2 =$$

$$= AB^2\left(PD^2 - PA^2\right) = AB^2 \cdot AD^2.$$

З рівності (1) дістанемо: $\cos x = -\dfrac{AD \cdot AB}{PD \cdot PB} = -\cos\beta\cos\alpha.$

Відповідь. $\arccos(-\cos\alpha \cdot \cos\beta).$

Дана задача є задачею підвищеної складності. У школі вона може розв'язуватись учнями старших класів, і то тільки першим способом. Інші способи потребують знань додаткових відомостей із стереометрії, зокрема знання формули трьох косинусів, теореми косинусів для тригранного кута, рівняння площини та формули кута між площинами.

Дану задачу було б доцільно подати на факультативі, в школах з поглибленим вивченням математики при підготовці до олімпіади. Доклавши багато зусиль діти відкриють для себе багато нового, що в подальшому полегшить розв'язування подібних задач чи задач із використанням уже освоєних ними формул та теорем. Кожний із запропонованих способів може слугувати ілюстрацією використання базових теорем стереометрії, які використовувались при розв'язанні.

Література

1. Ушаков Р.П. Кути стереометрії. – Х.: Вид. група «Основа», 2007. – С. 65- 67. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 1 (49)).
2. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006.— С. 34-35.: ил.

Розділ VIII. Олімпіадні задачі

Войцехівська Валентина Віталіївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

КІЛЬКА РОЗВ'ЯЗАНЬ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОБЕДРЕНИЙ ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Дуже часто на практиці ми можемо одну геометричну задачу розв'язати кількома способами, причому підходи до розв'язання задачі можуть бути абсолютно різними і непов'язаними між собою, мається на увазі, що геометричну задачу можна розв'язувати, використовуючи при цьому основні властивості чи теореми даних фігур (наприклад, до розв'язання заданої нижче задачі використовується: теорема синусів; теорема косинусів; подібність трикутників; властивості паралелограма; теорема Піфагора), векторний чи координатний методи розв'язання задач. Тож розглянемо основні з них.

Теорема 1. (властивість медіани рівнобедреного трикутника). У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою.

Медіани довільного трикутника перетинаються в одній точці і діляться точкою у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника.

Теорема 2. (теорема Піфагора). У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Теорема 3. (обернена до теореми Піфагора). Коли у трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи, то цей трикутник прямокутний.

Корисно пам'ятати довжину сторін деяких прямокутних трикутників.

Єгипетський трикутник: сторони дорівнюють 3, 4, 5 одиниць.

Тобто можливі варіанти: 3, 4, 5 або 6, 8, 10 або $3n$, $4n$, $5n$, де $n \in N$. Також прямокутними є трикутники зі сторонами, які дорівнюють $5n$, $12n$, $13n$; $8n$, $15n$, $17n$; $7n$, $24n$, $25n$, де $n \in N$.

Теорема 4. (теорема косинусів). Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєнного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Теорема 5. (теорема синусів). Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.

Теорема 6. (ознака подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними). Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то трикутники подібні.

Властивості паралелограма.

Теорема 7. У паралелограма протилежні сторони рівні і протилежні кути рівні.

Теорема 8. У паралелограмі кути, прилеглі до однієї сторони, в сумі дорівнюють 180°.

Теорема 9. Діагоналі паралелограма перетинаються і в точці перетину діляться навпіл.

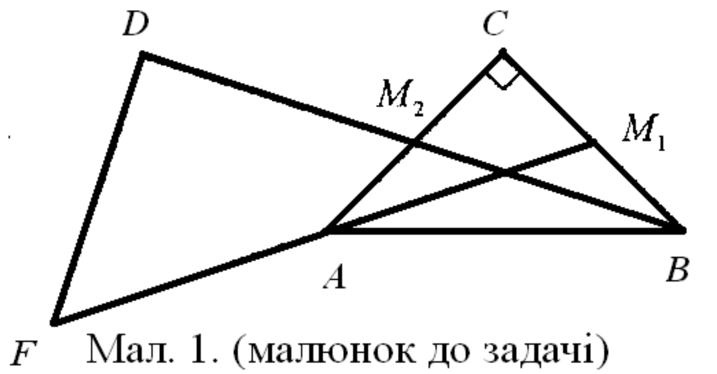
Сутність методу координат полягає в тому, що задаючи фігури рівняннями і виражаючи в координатах різні геометричні співвідношення ми можемо розв'язати геометричну задачу засобами алгебри. Цей метод можна використовувати і в оберненому порядку.

Розв'язання задачі методом координат складається з таких етапів: «переклад» умови задачі на координатну мову; перетворення аналітичного виразу; обернений переклад.

Розв'язання задачі векторним методом складається з таких етапів: «переклад» умови на векторну мову; перетворення аналітичного виразу; обернений переклад.

Тож взявши за основу поданий основний геометричний матеріал спробуємо застосувати його до розв'язання задачі про рівнобедрений прямокутний трикутник.

Задача. У рівнобедреному прямокутному трикутнику ABC точки M_1 та M_2- середини катетів BC та BC відповідно. Точка D лежить на промені BM_2 причому $BD = BM_2$; точка F лежить на промені M_1A причому $M_1F = 2M_1A$. Довести, що $\angle BDF = 90°$.



Мал. 1. (малюнок до задачі)

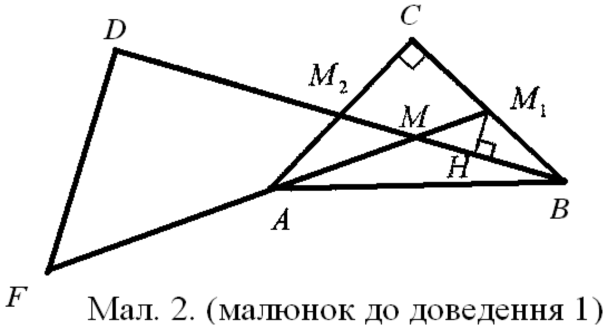
Перший спосіб доведення

Нехай у трикутнику $ABC\ (\angle C = 90^\circ)$ катети $AC = BC = 2k$, тоді медіани $AM_1 = BM_2 = \sqrt{5}k$, відрізки $MM_2 = \dfrac{\sqrt{5}k}{3}$, $MA = \dfrac{2\sqrt{5}k}{3}$, де M – точка перетину медіан. За умовою задачі маємо: $MD = MM_2 + M_2D = MM_2 + BM_2 = \dfrac{\sqrt{5}k}{3} + \sqrt{5}k = \dfrac{4\sqrt{5}k}{3}$,

$MF = MA + AF = MA + AM_1 = \dfrac{2\sqrt{5}k}{3} + \sqrt{5}k = \dfrac{5\sqrt{5}k}{3}$. Знайдемо відношення $MD : MF$:

$MD : MF = \dfrac{4\sqrt{5}k}{3} : \dfrac{5\sqrt{5}k}{3} = 4:5$. (1)

У трикутнику MM_1B побудуємо висоту M_1H.



Мал. 2. (малюнок до доведення 1)

Матимемо: $MM_1 = \dfrac{\sqrt{5}k}{3}$, $M_1B = k$, $MB = \dfrac{2}{3}BM_2 = \dfrac{2\sqrt{5}k}{3}$.

Нехай $MH = x$, тоді $HB = \dfrac{2\sqrt{5}k}{3} - x$. За теоремою Піфагора з трикутників M_1MH та M_1BH одержимо: $M_1H^2 = MM_1^2 - MH^2 = M_1B^2 - HB^2$, $(\dfrac{\sqrt{5}k}{3})^2 - x^2 = k^2 - (\dfrac{2\sqrt{5}k}{3} - x)^2$,

$\dfrac{5k^2}{9} - x^2 = k^2 - \dfrac{20k^2}{9} + \dfrac{4\sqrt{5}k}{3}x - x^2$, $\quad \dfrac{16k^2}{9} = \dfrac{4\sqrt{5}k}{3}x$, $\quad \dfrac{4k}{3} = \sqrt{5}x$,

$x = \dfrac{4k}{3\sqrt{5}}$, тобто $MH = \dfrac{4k}{3\sqrt{5}}$.

Обчислимо відношення $MH : MM_1$: $\quad MH : MM_1 = \dfrac{4k}{3\sqrt{5}} : \dfrac{\sqrt{5}k}{3} = 4:5$. (2)

Порівнюючи рівності (1) і (2), одержимо: $MD : MF = MH : MM_1$.

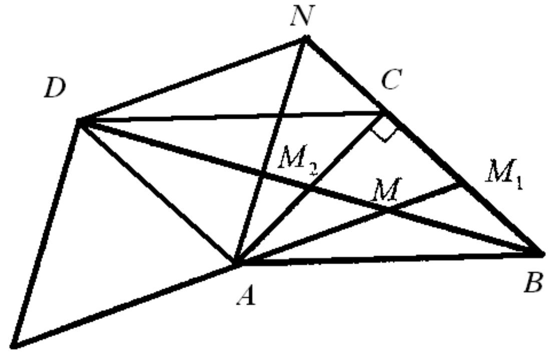
Отже, $\triangle MDF \sim MDF_1$ (за відношенням сторін і кутом між ними). Звідси випливає, що $\angle MDF = \angle MHM_1 = 90^\circ$.

Другий спосіб доведення

Нехай у трикутнику $ABC\,(\angle C = 90°,\, AC = BC)$ медіани AM_1 та BM_2 перетинаються в точці M і $AM_1 = BM_2 = x$.

Чотирикутник $ABCD$ – паралелограм (діагоналі AC та BD точкою перетину діляться навпіл). Звідси $DC \parallel AB$, $DC = AB$.

Побудуємо точку N, симетричну M_1 відносно прямої $AC: N = S_{AC}(M_1)$.



Мал. 3. (малюнок до доведення2)

Тоді $AN = AM_1 = x$, $NC = CM_1 = M_1B$. Крім цього, $\angle DCN = \angle ABM_1$ (як відповідні при паралельних прямих DC і AB та січній BC).

Отже, $\triangle DCN \sim \triangle ABM_1$. Звідси $DN = AM_1 = x$, $\angle DNC = \angle AM_1B$.

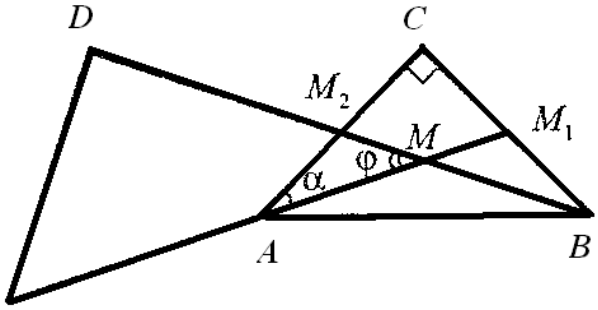
Оскільки для прямих DN та AM_1 і січної NM_1 відповідні кути рівні, то $DN \parallel AM_1$.

У чотирикутнику $ANDF:\ DN = FA = AM_1 = x,\ DN \parallel FA$.

Отже, $ANDF$ – паралелограм, звідси $DF = AN = x$. Оскільки у трикутнику FMD: $FM = \frac{5}{3}x$, $DM = \frac{4}{3}x$, $DF = x$,то для його сторін виконується рівність: $FM^2 = FD^2 + DM^2$. За теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник FMD - прямокутний і $\angle FDM = 90°$.

Третій спосіб доведення

Нехай у трикутнику $ABC(\angle C = 90°)AC = BC = 2k$, $\angle CAM_1 = \alpha$, $\angle AMM_2 = \varphi$.



Мал. 4. (малюнок до доведення 3)

З трикутника $ACM_1(\angle C = 90°)$: $AM_1 = \sqrt{AC^2 + CM_1^2} = \sqrt{(2k)^2 + k^2} = \sqrt{5}k$,

$\sin\alpha = \frac{CM_1}{AM_1} = \frac{k}{\sqrt{5}k} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

За теоремою синусів з трикутника AMM_2 одержимо: $\frac{AM_2}{\sin\varphi}=\frac{MM_2}{\sin\alpha}$,

$\frac{k}{\sin\varphi}=\frac{\frac{\sqrt{5}k}{3}}{\sin\alpha}$, $\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, $\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{3}{5}$. Тоді $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

З трикутника за теоремою косинусів: $DF^2=MD^2+MF^2-2MD\cdot MF\cos\varphi$,

$DF^2=\left(\frac{4\sqrt{5}k}{3}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{5}k}{3}\right)^2-2\cdot\frac{4\sqrt{5}k}{3}\cdot\frac{5\sqrt{5}k}{3}\cdot\frac{4}{5}$, $DF^2=5k^2$, $DF=\sqrt{5}k$.

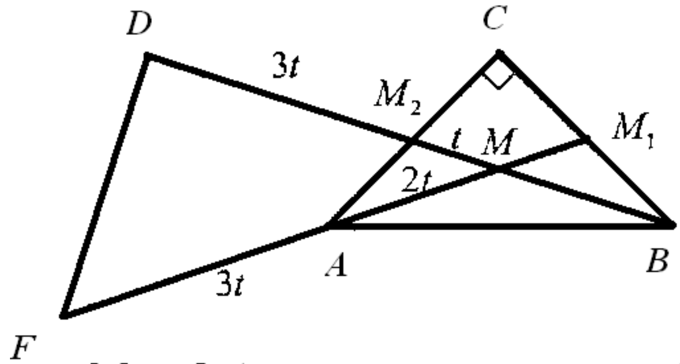
З цього самого трикутника MDF за теоремою синусів: $\frac{DF}{\sin\varphi}=\frac{MF}{\sin\angle MDF}$,

$\frac{\sqrt{5}k}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{3}k}{\sin\angle MDF}$, $\sin MDF=1$.

Оскільки кут MDF - це кут трикутника, то $\angle MDF=90°$.

Четвертий спосіб доведення

Нехай у трикутнику $ABC(\angle C=90°)$ медіани AM_1 та BM_2 перетинаються в точці M.



Мал. 5. (малюнок до доведення 4)

Позначимо $AM_1=BM_2=3t$. Тоді за властивістю точки перетину медіан $MA=2t$, $MM_2=t$. За побудовою: $M_2D=BM_2=3t$, $AF=AM_1=3t$.

Тоді $MD=MM_2+M_2D=t+3t=4t$, $MF=MA+AF=2t+3t=5t$.

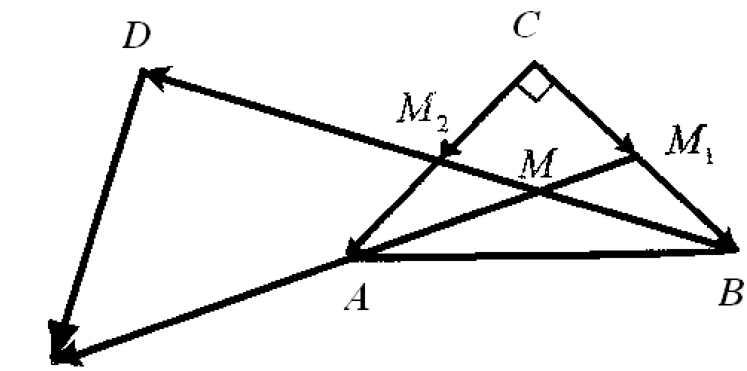
З доведення 4 маємо: $FD=FA=3t$.

Трикутник FDM - єгипетський (довжини сторін $3t, 4t, 5t$).

Отже, трикутник FDM - прямокутний і $\angle FDM=90°$.

П'ятий спосіб доведення

Для доведення використаємо вектори. Нехай $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$.



Мал. 6. (малюнок до доведення 5)

Тоді $\overrightarrow{CM_1}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{CM_2}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{M_1A}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{MF}=\frac{5}{3}\overrightarrow{M_1A}=\frac{5}{3}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{a}$, $\overrightarrow{BM_2}=\overrightarrow{CM_2}-\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{MD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BM_2}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{a}$, з трикутника MDF:

$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{MD}=\frac{5}{3}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{a}-\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{a}\right)=\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}.$$

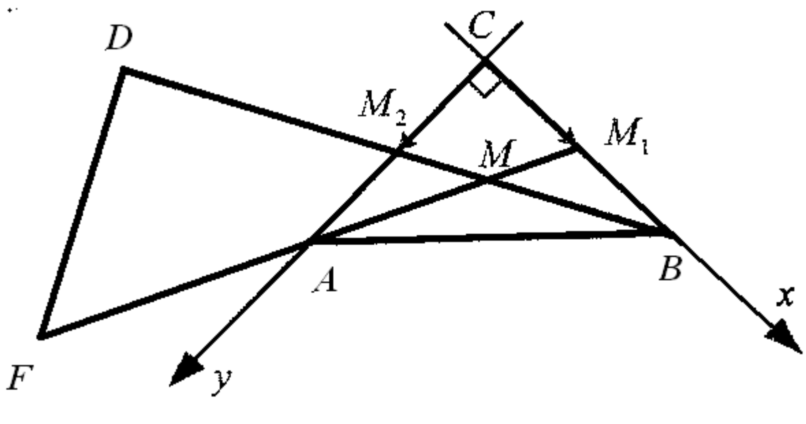
Оскільки $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$, $\vec{b}^2=\left|\vec{b}\right|^2$, $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 90^\circ=0$, то матимемо такий скалярний добуток:

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{a}\right)\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}\right)=\frac{2}{3}\vec{b}^2+\frac{1}{3}\vec{b}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{a}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}^2=\frac{2}{3}\left|\vec{b}\right|^2+0-0-\frac{2}{3}\left|\vec{a}\right|^2.$$

За умовою $CB=CA$, тобто $\left|\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$. Отже, $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DF}=0$, звідси $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{DF}$ або $\angle BDF=90^\circ$.

Шостий спосіб доведення

Нехай у трикутнику $ABC(\angle C=90^\circ)AC=BC=2k$. Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб вісь x збігалася з прямою CB, вісь y – з прямою AC, а початок координат – з вершиною C. Нехай одиничні вектори $\vec{i}=\overrightarrow{CM_1}$, $\vec{j}=\overrightarrow{CM_2}$.



Мал. 7. (малюнок до доведення 6)

У цій системі координат $B(2k;0)$, $M_2(0;k)$, $A(0;2k)$, $M_1(k;0)$.

Знайдемо координати точок F і D:

$$x_a=\frac{x_F+x_{M_1}}{2},\ 0=\frac{x_F+k}{2},\ x_F=-k;$$

$y_a = \frac{y_F + y_{M_1}}{2}$, $2k = \frac{y_F + 0}{2}$, $y_F = 4k$.

Отже, $F(-k;4k)$. Тоді $\overrightarrow{BD} = (-4k;2k)$, $\overrightarrow{FD} = (-k;-2k)$ або $\overrightarrow{BD} = (-4;2)$, $\overrightarrow{FD} = (-1;-2)$.

Обчислимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{FD}$:

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{FD} = (-4)\cdot(-1) + 2\cdot(-2) = 0$.

Звідси $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{FD}$, тобто $\angle BDF = 90^\circ$.

Зауваження. Для доведення того, що $\angle BDF = 90^\circ$, можна також порівняти кутові коефіцієнти k прямих BD та DF, що визначаються двома точками:

$$k_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{2k - 0}{-2k - 2k} = -\frac{1}{2},$$

$$k_{DF} = \frac{y_F - y_D}{x_F - x_D} = \frac{4k - 2k}{-1k + 2k} = 2.$$

Оскільки $k_{BD} \cdot k_{DF} = -1$, то прямі перпендикулярні і $\angle BDF = 90^\circ$.

Література

1. Абрамчук В.С., Тютюн Л.В., Шунда Н.М. Посібник з шкільного курсу математики. – К.: Техніка, 2008. – с.99, 210, 220-223.
2. Забєлишинська М.Я. Зовнішнє оцінювання (підготовка). Математика. 5 – 11 класи: Довідник. – Х.: Веста: Видавництво «Ранок», 2007. – с.105, 110, 121-122.
3. Кобко Л. Вісім розв'язань однієї олімпіадної задачі //Математика(газета). – 2008. - №4. – с. 14-17.
4. Погорєлов О.В. Геометрія: Підруч. для 7-11 кл. серед.шк. – К. : Освіта, 1993. - с. 38, 98, 160.

Грозян Юлія Василівна

студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ КІЛЬКОМА СПОСОБАМИ НА ПЕРЕЛИВАННЯ

На сьогодні у практиці навчання виникла потреба в учбових матеріалах з математики, де була б представлена багатоваріантність розв'язків задач. Пов'язане це, по-перше, з підсиленими вимогами до формування мислення, по-друге, з необхідністю навчити порівнювати та аналізувати методи, способи та прийоми розв'язування різнопланових задач. Для того, щоб розвивати творчі здібності у процесі навчання математики, необхідні відповідні навчально-методичні матеріали. Розглянемо задачу на переливання, яку можна розв'язувати різними способами.

Задачі на переливання називають задачами Пуассона. Саме такого типу задачі спонукали юного С.Пуассона до вибору професії. Одного разу він допомагав приятелю розв'язати декілька задач, з якими не міг впоратися сам, серед яких була і задача про посудини. Пуассон менш ніж за годину розв'язав усі. Остання, начебто, так спонукала С.Пуассона, що і стала вирішальною у подальшому виборі майбутнього математика, механіка і фізика.

Задачі на переливання рідини можна розв'язувати з кінця. Другий спосіб полягає в переборі різних варіантів переливань. Але це більш довгий шлях.

Розглянемо ці методи на прикладі.

<u>*Задача.*</u> Маючи 16-літровий бідон молока та два порожніх бідони ємкістю 10 та 6 літрів, розділити молоко порівно.

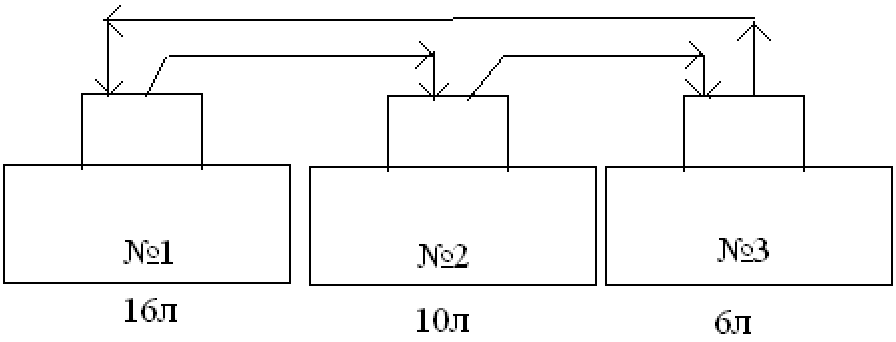
Перший спосіб розв'язання

Як доводить практика, учні часто розв'язують задачу методом спроб. Отже, нехай розв'язки запишемо у вигляді таблиці.

Алгоритм можна сформувати так: вмістом більшої посудини наповнюється середня; вміст середньої посудини вичерпується найменшою; якщо найменша посудина наповнена і мети не досягнуто, то її вміст переливають до найбільшої посудини, вміст середньої переливають до меншої і дії повторюються.

№	16 л	10л	6л
0	16	0	0
1	6	10	0
2	6	4	6
3	12	4	0
4	12	0	4
5	2	10	4
6	2	8	6
7	8	8	0

Для запису алгоритму за допомогою псевдокодів 16-ти, 10-ти та 6-літрову посудини позначимо відповідно номерами 1, 2 та 3.
Схему переливань можна зобразити так:



Другий спосіб розв'язання

Інший варіант розв'язання такий: наповнюється найменша посудина вмістом найбільшої; вміст найменшої посудини вичерпують середньою, у випадку наповнення останньої, її вміст переливають до найбільшої посудини, а вміст найменшої виливають до середньої; процедура повторюється до одержання необхідного наповнення.

№	16л	10л	6л
0	16	0	0
1	10	0	6
2	10	6	0
3	4	6	6
4	4	10	2
5	14	0	2
6	14	2	0
7	8	2	6
8	8	8	0

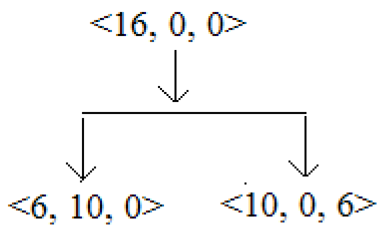
Третій спосіб розв'язання

Цей спосіб розв'язування алгебраїчний. Нехай V_1, V_2, V_3– об'єми посудин; $V_1 = V_2 + V_3$. Якщо ми k разів наповнювали посудину № 2 та m разів виливали вміст посудини № 3 в посудину № 1, то в цій посудині стало $V_1 = kV_2 + mV_3$літрів рідини.

Якщо необхідно відлити P літрів, то одержимо рівняння $P = V_1 - kV_2 + mV_3$. Оскільки $V_1 = V_2 + V_3$, то $P = (m+1)V_3 - (k-1)V_2$, де P, V_2, V_3, m, k − цілі числа. Отже, для розв'язання задачі необхідно знайти цілі додатні розв'язки лінійного рівняння.

У даному випадку ($P = 8$, $V_2 = 10$, $V_3 = 6$) маємо рівняння $10k - 6m = 8$.

Розв'язання за допомогою логічного дерева відрізняється конкретністю. Нехай бідони № 1, № 2, № 3 − номери бідонів у порядку спадання ємкості. Початковий стан є кортеж (кортеж − кінцева послідовність яких-небудь об'єктів, що допускає повторення) (16, 0, 0). З посудини № 1 можна перелити у посудину № 2 або № 3. Графічно це виглядатиме так:



Мал.1

Кожен стан зображується трійкою чисел. Із вихідного стану проведемо стрілку у новий допустимий. (Подібні схеми називають графами).

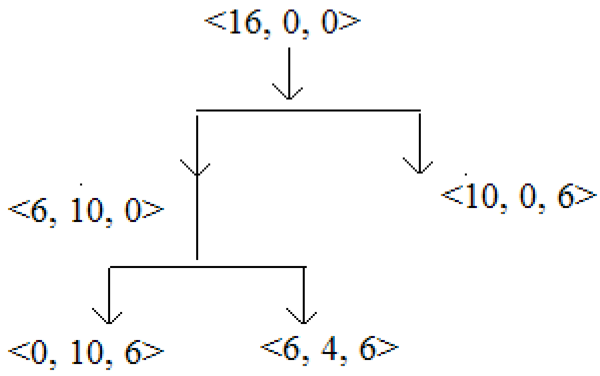
На першому етапі переливання інших можливостей (крім зображених на мал. 1) немає. Перейдемо до другого стану переливання. Кожен з двох випадків розглянемо окремо. Із положення (6, 10, 0) можливі такі варіанти переливання:

а) з № 1 у № 3, тобто перехід до стану (0, 10, 6);

б) з № 2 у № 3, тобто у стан (6, 4, 6);

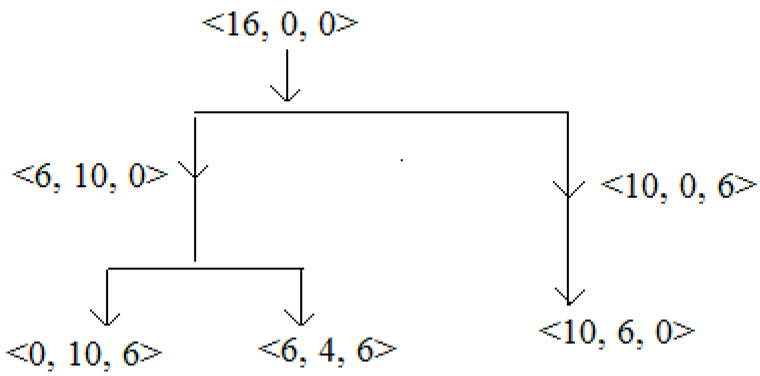
в) з № 2 у № 1, тобто (16, 0, 0),

проте кінцевий стан − це вихідне положення, проте таке переливання є беззмістовним. Отже, одержуємо схему (мал. 2).



Мал. 2

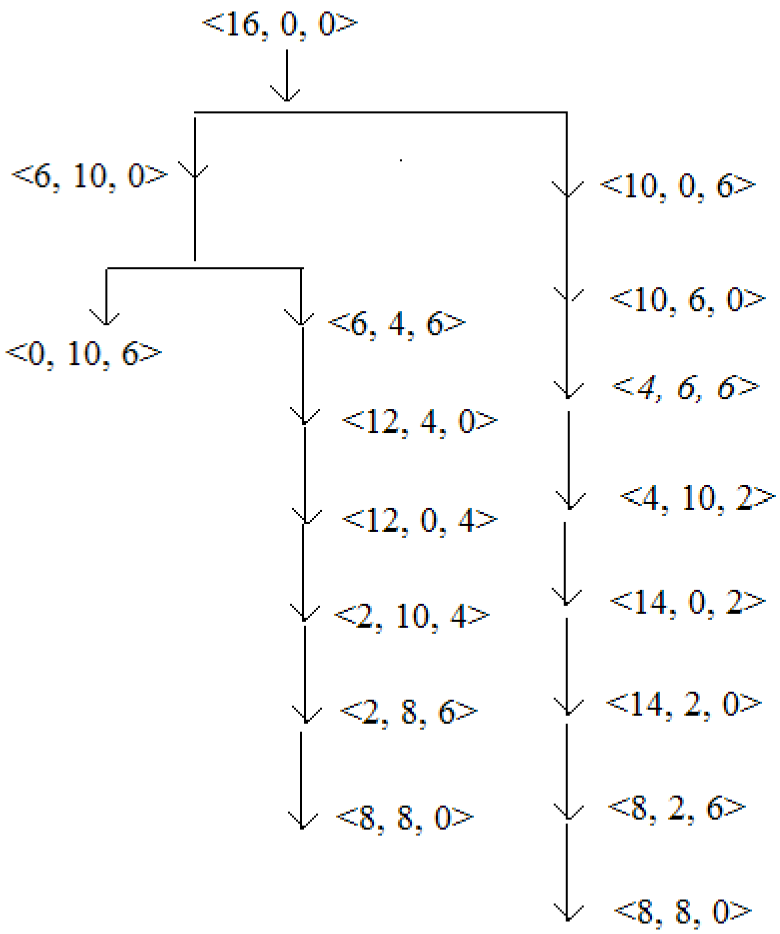
Розглянемо положення (10, 0, 6). Із даного стану можна перелити у другу посудину; при переливанні а) з № 1 у № 2 (посудина № 3повна), одержимо кортеж (0, 10, 6), що вже зустрічався (мал. 2), тому дану можливість відкидаємо, і переливаємо із посудини № 3 у № 2. Одержали положення (10, 6, 0) (мал. 3). Подібна процедура називається «вирощуванням дерев». Вона має широке застосування у сучасній математиці.



Мал. 3

Для нашої задачі ця процедура допомагає перебрати всі можливі варіанти.

Продовжуємо процес розв’язування. «Вирощуючи» дерево-граф спеціального виду, одержимо всі можливі розв’язки задачі. Випадок (0, 10, 6) є глухим кутом, оскільки будь-яке можливо переливання призводить до одного з випадків верхнього рівня, розглянутого раніше. Залишається два варіанти. Продовжуючи процес, одержимо граф, зображений на мал. 4.



Мал. 4

На завершення обговорення задачі, згадаємо одну пораду Дж. Пойа: «Відшукуйте у вашій задачі все, що може знадобитись при розв'язанні інших задач, − у даній конкретній ситуації намагайтесь виявити загальний метод».

1. У процесі розв'язування задач розвиваюча функція навчання залишається нереалізованою, якщо розв'язання орієнтоване лише на досягнення кінцевого результату(відповіді).
2. Корисно демонструвати учням різноманітні підходи до розв'язання задач.
3. Алгоритм розвиваючого навчання є простим. Слід відмітити два етапи: дії; осмислення дій, з метою підвищення продуктивності їх.

Отже, логічні задачі покращують мислення і уяву школярів. Як правило, такі задачі не такі важкі, як здається на перший погляд, але для їх рішення потрібна винахідливість. Якщо умова задачі здається незрозумілою, то потрібно в не вдуматися; якщо здається, що задача не має розв'язку, то потрібно включити уяву та інтуїцію, щоб знайти шлях до розв'язку. Нарешті, якщо здається, що до розв'язку можна дійти лише ціною важких обрахунків, то необхідно намагатися знайти спосіб уникнути важких дій.

Література

1. Глюза О.О. Задачі на переливання і зважування // О.О.Глюза Математика в школах України. − 2010.− травень(№15).− С.13-23

2. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. − Вінниця, 2005.

Єригіна Олена Миколаївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ КІЛЬКОМА СПОСОБАМИ НА ЗДІЙСНЕННЯ ЗАДАНОЇ ОПЕРАЦІЇ НАД НАБОРАМИ ЧИСЕЛ

У даній статті наведені способи розв'язання задачі, яка пропонувалася до розгляду учням дев'ятих класів на всеросійській олімпіаді школярів з математики у 1998/1999 навчальному році.
При розв'язуванні олімпіадних задач виникає необхідність у пофарбуванні деяких чисел. У деяких завданнях заданий набір перетворень вихідного об'єкта і постає питання: чи можна використовуючи ці перетворення, отримати з одного стану об'єкта інше? Перебором варіантів часто легко переконатися в правильності відповіді "не можна", однак, обгрунтувати це нелегко. Методом, що дозволяє в багатьох випадках вирішувати доказову частина таких завдань, є метод інваріантів..

Для побудови інваріантів іноді бувають корисні допоміжні розмальовки, тобто розбиття аналізованих об'єктів на кілька груп (кожна група складається з об'єктів одного кольору).

Отже у задачах, де потрібно з'ясувати, чи можна за допомогою заданих операцій перейти від одного об'єкта до другого, часто корисно знайти «інваріанту» - числову характеристику об'єктів (або функцію із якимись іншими значеннями на множині об'єктів), яка не змінюється при вказаних операціях. Якщо при цьому значення інваріанта на двох об'єктах різні, то перетворити один в інший неможна. У цілочисельних та інших «дискретних» задачах інваріантом може бути остача від ділення на 2 (парність) або на інший натуральний дільник.

Якщо всі задані операції оборотні, то вся множина об'єктів, над якими вони виконуються, розбивається на класи еквівалентності (два об'єкта еквівалентні, якщо один з них може бути одержаний з другого за допомогою даної операції (операцій)).

У задачах, де потрібно, оцінити кількість операцій чи довести, що їх не можна виконувати безліч разів, іноді буває корисно придумати функцію, яка після кожної дії (операції) монотонно зростає (чи спадає). [2].

<u>*Задача.*</u> Числа від 1 до 1000000 зафарбовані в два кольори – чорний і білий. За хід дозволяється вибрати будь яке число від 1 до 1000000, перефарбувати його і усі числа, які не взаємно прості з ним, в протилежний колір. Спочатку всі числа були чорні. Чи можна за декілька ходів домогтися того, що всі числа стануть білими? [1].

Розв’язання. Для розв’язання задачі сформулюємо і доведемо таку лему.

Лема. Нехай дано набір простих чисел $p_1, \ldots, p_n$. Тоді можна за декілька перефарбовувань домогтися того, що змінять колір ті і тільки ті числа, які діляться на всі числа набору.

Доведення. (формула включення – виключення).

Для кожного не порожнього піднабору наших простих чисел перефарбуємо числа, не взаємно прості з добутком всіх чисел цього піднабору. Число, яке ділиться на всі числа набору, перефарбовувалося при кожному такому перефарбовуванні, всього перефарбовувань було $2^n - 1$,отже, числа, які діляться на всі числа набору, перефарбовані. Нехай деяке число k не ділиться хоча б на одне число набору, наприклад, на p_1. Тоді воно не перефарбовувалося, коли ми перефарбовували числа не взаємно прості з p_1, інші не порожні піднабори чисел можна розбити на пари наступним чином: піднабору, який не містить p_1, в пару ставиться піднабір, отриманий з нього додаванням p_1. При цьому число k перефарбовується чи при обох перефарбовуванням пари чи ні при одному. Тому число k не буде перефарбовано.

Перший спосіб доведення

Для кожного набору простих чисел, добуток яких не більший 1000000, перефарбуємо числа, які діляться на всі ці прості числа. Ця операція можлива за лемою. Доведемо, що будь-яке число k при цьому буде перефарбовано. Нехай k має m різних простих дільників, тоді воно перефарбовувалося при $2^m - 1$ операції , тобто непарне число раз.

Другий спосіб доведення

Назвемо два числа еквівалентними, якщо у них співпадають набори простих дільників. Відмітимо, що при наших операціях класи еквівалентності перефарбовуються повністю. Будемо говорити, що один клас більше другого, якщо всі прості дільники другого класу є дільниками першого. З леми слідує, що ми можемо перефарбувати будь-який клас, перефарбувавши разом з ним тільки великі класи.

Спочатку перефарбуємо мінімальні класи (клас називається мінімальним, якщо він не більший ніякого іншого класу). Виключимо їх з розгляду. Серед тих, класів, що залишилися будуть після такого виключення мінімальними. При необхідності перефарбуємо їх і теж виключимо. І так далі.

Оскільки класів скінченне число, процес закінчиться.

Отже, при розв’язуванні олімпіадних задач на здійснення заданої операції над набором чисел розвиває в учнів логічне мислення та уяву.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы (под ред. Н. Х. Агаханова). – Москва, 2007.
2. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Вінниця, 2005.

Зарудня Тетяна Олександрівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ТРИ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ ПРО РАДИКАЛЬНІ ОСІ ТРЬОХ КІЛ ТА ЇХ ЗВ'ЯЗОК З КЛАСИЧНИМИ ТЕОРЕМАМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

Серед планіметричних задач, що пропонуються учасникам математичних олімпіад, є такі, які можна розв'язати, застосувавши ту чи іншу класичну теорему планіметрії.

Поняття радикальної осі – одне з класичних понять геометрії кіл. За допомогою цього поняття можна довести ряд класичних тверджень про кола.

Означення. Степенем точки P відносно даного кола ω називають добуток відрізків $PA \cdot PB$ будь-якої січної, що проходить через точку P і перетинає коло ω в двох точках A та B. Цей добуток береться зі знаком «+», якщо точка P лежить зовні кола ω, і зі знаком «-», якщо точка P лежить всередині кола ω.

Теорема 1 (про степінь точки відносно кола). Степінь точки P відносно кола ω дорівнює числу $d^2 - R^2$, де R - радіус кола ω, d - відстань від точки P до центра ω.

Теорема 2 (про радикальну вісь двох кіл). ГМТ, які мають один і той самий степінь відносно двох даних кіл, є пряма лінія, яка перпендикулярна до лінії їх центрів. Цю пряму називають радикальною віссю даних кіл.

Наслідок 1. Якщо два кола перетинаються, то радикальною віссю цих кіл буде пряма, що проходить через точки їх перетину.

Доведення. Нехай A і B - точки перетину двох даних кіл, тоді степені цих двох точок відносно даних кіл однакові (вони дорівнюють нулю). Але тоді за теоремою 2 одержуємо, що радикальна вісь – це пряма AB.

Зауваження. У випадку дотику двох кіл радикальною віссю буде їх спільна дотична.

Наслідок 2. На площині задано три кола, які попарно перетинаються і їх центри не лежать на одній прямій. Тоді три прямі, що проходять через точки їх попарного перетину, перетинаються в одній точці. Ця точка називається радикальним центом цих трьох кіл.

Доведення. Нехай A і B - точки перетину кіл ω_1 і ω_2, C і D - точки перетину кіл ω_2 і ω_3, E і F - точки перетину кіл ω_1 і ω_3. Позначимо через W точку перетину прямих AB і CD.

Оскільки AB - радикальна вісь ω_1 і ω_2, а CD - радикальна вісь кіл ω_2 і ω_3, то їх точка перетину W має однаковий степінь відносно цих трьох кіл. Отже, третя радикальна вісь EF кіл ω_1 і ω_3 проходить через точку W [2].

Добірки задач, при розв'язуванні яких використовуються властивості радикальної осі, містяться у посібниках [1], [3].

Наступні теореми також відносять до класичних теорем планіметрії.

Теорема 3. Середини сторін трикутника, основи його висот і середини відрізків, які з'єднують вершини трикутника з його ортоцентром, лежать на одному колі, радіус якого дорівнює половині радіуса описаного кола.

Це коло називають колом дев'яти точок.

Теорема Паскаля. Нехай A, B, C, D, E, F - шість точок даного кола(які лежать на колі в заданій послідовності); тоді точки перетину прямих AB і DE, BC і EF, CD і AF лежать на одній прямій.

Наслідки з цієї теореми є її граничними випадками.

У статті ми розглядаємо задачу про радикальні осі трьох кіл, яка була запропонована на заключному етапі всеросійської олімпіади з математики для учнів 10 класу 1994-1995 навчального року [1].

Задача. Дано півколо з діаметром AB і центром O. Пряма, яка перетинає півколо в точках C і D, перетинає пряму AB - в точці M $(MB < MA, MD < MC)$. Нехай K - друга точка перетину кіл, описаних навколо трикутників AOC і DOB. Доведіть, що кут MKO прямий.

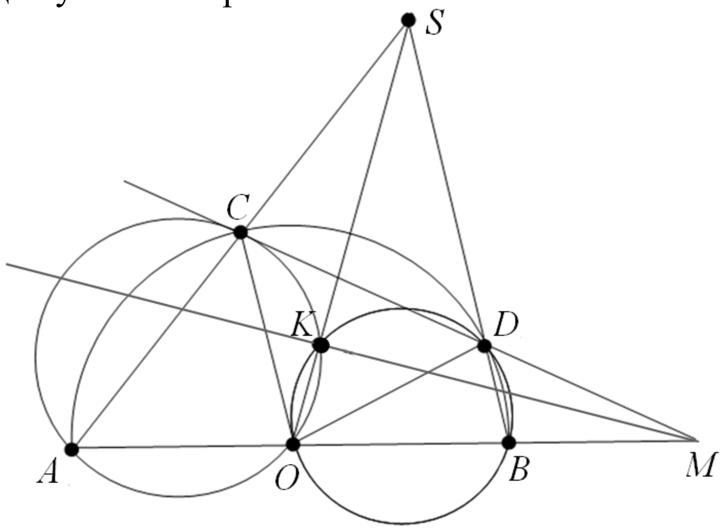


Рис. 1

Ми пропонуємо три способи розв'язання цієї задачі.

Перший спосіб доведення

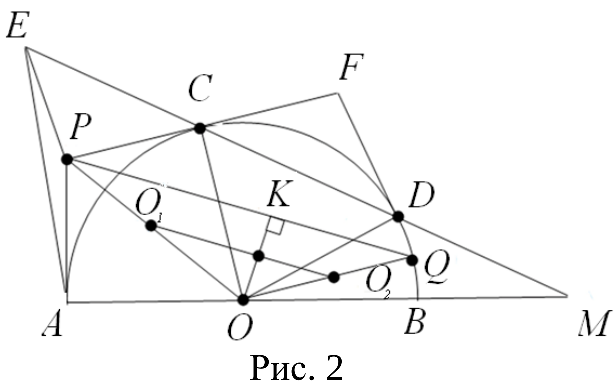


Рис. 2

Нехай O_1 і O_2 - центри, OP і OQ - діаметри кіл ω_1 і ω_2 відповідно, описаних навколо трикутників AOC і DOB (рис. 2).

Відрізок O_1O_2 перпендикулярний до спільної хорди OK цих кіл і ділить її навпіл, і також є середньою лінією трикутника POQ, тому пряма PQ проходить через точку K і перпендикулярна до OK. Таким чином, кут MKO буде прямим, якщо точка M лежить на прямій PQ. Доведемо це.

Відрізок PO - діаметр кола ω_1, який проходить через точку A, тому кут PAO - прямий, звідси слідує, що відрізок PA дотикається до півкола. Аналогічно, PC, QB і QD - також дотичні до півкола.

Нехай F - точка перетину прямих PC і QD, а E - точка перетину прямої CD і прямої, яка проходить через точку P паралельно до QD. Тоді з рівності дотичних FC і FD випливає, що $\angle QDM = \angle FDC = \angle FCD = \angle PCE$. Але $\angle QDM = \angle PEM$, так як $PE \parallel QD$ Отже, $PE = PC$, але $PC = PA$ і $QB = QD$, це означає, що APE і BQD - подібні рівнобедрені трикутники з відповідно паралельними сторонами AP і BQ, PE і QD.

Гомотетія з центром в точці M і коефіцієнтом $k = MA : MB$ переводить точку B в точку A, точку D в точку E, звідси випливає, що вона переводить точку Q в точку P, так як трикутники BQD і APE подібні. Це означає, що пряма PQ проходить через центр гомотетії – точку M.

Другий спосіб доведення

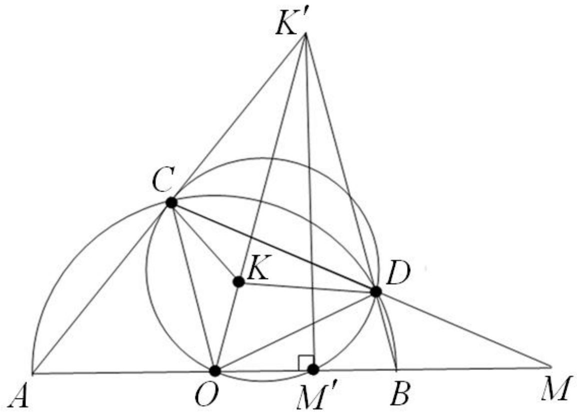


Рис. 3

Здійснимо інверсію відносно кола з центром O і діаметром AB. Точки A, C, B, D залишаться нерухомими, а точка K перейде в точку K' перетину прямих AC і BD (рис. 3). Точка M перейде в точку M' перетину кола, описаного навколо $\triangle COD$, і прямої AB, відмінну від O. Описане коло навколо $\triangle COD$ - коло 9 точок $\triangle AK'B$ (так як O - середина AB, C і D - основи висот), тому вона вдруге перетинає AB у точці M' - основі висоти, звідси слідує, що $K'M' \perp AB$. Так як $OK \cdot OK' = OM \cdot OM'$, то $\triangle OKM$ та $\triangle OK'M'$ подібні і, звідси слідує, що $\angle OKM = 90^{\circ}$.

Третій спосіб доведення

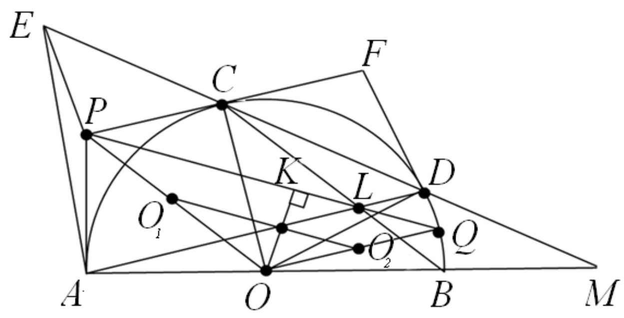


Рис. 4

Нехай O_1 і O_2 - центри, OP і OQ - діаметри кіл, описаних навколо трикутників AOC і DOB (рис. 4). Відрізок O_1O_2 перпендикулярний до спільної хорди OK цих кіл і ділить її навпіл, і також є середньою лінією трикутника POQ, тому пряма PQ проходить через точку K і перпендикулярна до OK. Таким чином, кут MKO буде прямим, якщо точка M лежить на прямій PQ. Доведемо це.

Здійснимо гомотетію з центром в точці O і коефіцієнтом 2. При цьому точки O_1 і O_2 перейдуть відповідно у точки P і Q, а середина відрізка OK - в точку K. звідси слідує, що точка K належить прямій PQ.

При описаній гомотетії серединні перпендикуляри до відрізків OA, OB, OC і OD перейдуть в дотичні до кола в точках A, B, C і D відповідно.

Розглянемо шестикутник $ABBCDDA$ (вироджений, з самоперетином), вписаний в коло. За теоремою Паскаля точки перетину пар прямих AB і CD (перетинаються в точці M), дотичних BB і DD (перетинаються в точці Q) і BC і DA (позначимо точку їх перетину L) лежать на одній прямій. Таким чином, точка Q лежить на прямій LM. Аналогічно, точка P лежить на прямій LM. Це означає, що точки P, Q і M лежать на одній прямій, звідки випливає, що $\angle OKM = 90^{\circ}$.

Висновки. Таким чином, розв'язування олімпіадних задач з планіметрії різними способами дає можливість формувати в учнів вміння та навички застосовувати не тільки теоретичний матеріал, що вивчається у шкільному курсі, а й матеріал, що виходить за його межі; розвивати логічне мислення та уяву учнів.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы /Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. —М.:МЦНМО, 2007. —472 с.
2. Олімпіадні задачі з геометрії: навч. - метод. посіб. / В. Ясінський. – К.: Шк. світ, 2008. – 128 с.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие.—5-е изд., испр. и доп.—М.: МЦНМО: ОАО. Московские учебники., 2006.—640 с.

Іванова Наталія Олегівна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»
напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ СТЕРЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ НА ВПИСАНУ СФЕРУ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Тетраедр – піраміда, в основі якої лежить трикутник. Тетраедр вважається правильним, якщо всі його ребра рівні [1].

Сферою називається множина точок простору, віддалених від даної точки на задану додатну відстань. При цьому дана точка називається центром сфери, а задана відстань – її радіусом.

Сфера вписана в многогранник, якщо вона дотикається всіх його граней. В такому випадку говорять, що *многогранник описаний навколо сфери* [1].

Відрізки дотичних до сфери, проведених з однієї точки рівні.

Якщо з точки, що лежить поза колом, проведені дотична і січна, то квадрат довжини дотичної дорівнює добутку січної на її зовнішню частину.

Якщо з точки, що лежить поза колом, проведені дві січні, то добуток однієї січної на її зовнішню частину дорівнює добутку другої січної на її зовнішню частину.

Розгортка многогранника — множина многокутників, для яких вказано, як слід їх з'єднати один з одним по сторонах і вершинах так, щоб отримати заданий многогранник. При цьому повинні виконуватися наступні вимоги: кожна сторона многокутника з'єднується не більше ніж з однією стороною іншого многокутника; від кожного многокутника можна перейти до будь-якого іншого, йдучи по многокутниках, сполучених один з одним; сторони, що сполучаються, повинні мати рівні довжини.

Задача. Сфера, що вписана в тетраедр, дотикається однієї з його граней в точці перетину бісектрис, другої – в точці перетину висот, третьої – в точці перетину медіан. Доведіть, що тетраедр правильний.

Перший спосіб розв'язання

Нехай O – центр сфери, O_1 – точка перетину бісектрис ΔABC, H – ортоцентр ΔACD, M – точка перетину медіан ΔABD і O_1, H, M – точки дотику (див. рис.1).

Точка O_1– центр кола, вписаного в ΔABC. Нехай це коло дотикається сторін BC, CA і AB в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Тоді $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1$, отже, прямокутні трикутники OO_1A_1, OO_1B_1, OO_1C_1 рівні, звідки

$$\angle OA_1O_1 = \angle OB_1O_1 = \angle OC_1O_1 = \varphi.$$

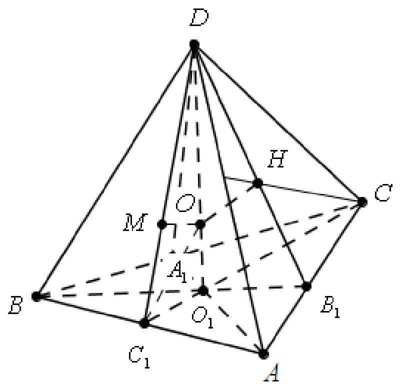


Рис. 1

Крім того, $O_1A_1 \perp BC$, тому за теоремою про три перпендикуляри, $OA_1 \perp BC$, тобто φ – лінійний кут двогранного кута з гранями BOC і BO_1C. З іншого боку, BOC бісектор двогранного кута з гранями BDC і BAC (O – центр вписаної сфери), тому кут між гранями BDC і ABC дорівнює 2φ. Аналогічно, грані ADC і ADB нахилені до основи ABC під кутом 2φ. Звідси випливає, що проекція O' точки D на площину ABC рівновіддалена від AB, BC і CA і, враховуючи те, що точки O' і C лежать по одну сторону від AB, O' і B – від AC, O' і A від BC, одержуємо, що $O' = O_1$, тобто DO_1 висота тетраедра.

Оскільки $AB \perp O_1C_1$ і $AB \perp DO_1$, то $AB \perp DO_1C_1$. Опустимо з точки O перпендикуляри OH_1 і OM_1 на DB_1 і DC_1. Тоді $OH_1 \perp ADC$, оскільки $OH_1 \perp DB_1$ і $OH_1 \perp AC$ ($AC \perp DO_1B_1$). Тоді, $H_1 = H$, тобто $H \in DB_1$. Аналогічно, $OM_1 \perp ADB$, тобто $M_1 = M$, і, тому, $M \in DC_1$. Отже, пряма DM – одночасно медіана і висота трикутника ADB, тобто $AD = DB$. Тоді $AO_1 = BO_1$, з звідки випливає, що $AC = BC$ і точки C, O_1, C_1 лежать на одній прямій.

За теоремою про три перпендикуляри $CO \perp AD$ ($OH \perp ADC$ і $CH \perp AD$), крім того, $CO \perp AB$ ($AB \perp CDC_1$), тому $CO \perp ADB$. Але $OM \perp ADB$, значить, точка O лежить на CM. Звідси слідує, що M – центр кола, вписаного в ΔADB (основа конуса з вершиною C описаного навколо сфери, – вписане в ΔADB коло, оскільки $CO \perp ADB$). Розглянемо ΔCDC_1. В ньому DO_1 і CM – висоти, C_1O – бісектриса, тому $C_1D = C_1C$, звідки $C_1O_1 : O_1C = C_1M : MD = 1:2$. Центри вписаних кіл ΔABC і ΔADB є точками перетину медіан, тому ΔABC і ΔADB – рівносторонні.

Звідси, враховуючи те, що висота піраміди потрапляє в центр основи ABC, маємо, що тетраедр – правильний.

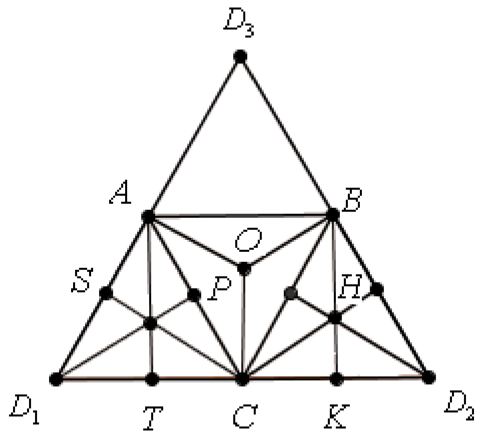


Рис. 2

Другий спосіб розв'язання

Зробимо розгортку тетраедра $ABCD$ (див.рис.2). Нехай сфера дотикається грані ABC в точці O –центрі вписаного кола, грані ACD (ACD_1 на рис. 2) – в точці M перетину медіан, грані BCD (BCD_2) –в точці H перетину висот. За властивістю дотичних, проведених до сфери з однієї точки, $AM = AO$, $CM = CO$, тому трикутники AMC і AOC із спільною стороною AC рівні. Звідси $\angle MAC = \angle OAC$ і $\angle MCA = \angle OCA$. З аналогічних рівностей для інших пар кутів одержуємо, що якщо $\angle OAC = \angle OAB = \alpha$, $\angle OAB = \angle OBC = \beta$ і $\angle OCB = \angle OCA = \gamma$, то

$$\angle CAM = \alpha, \quad \angle CBH = \beta, \quad \angle ACM = \angle BCH = \gamma.$$

Далі, з ΔABC: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^0$, тобто $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$, а з ΔBKC: $\beta + \gamma + \angle HCK = 90^0$, значить $\angle HCK = \alpha$.

Звідси $\angle KBD_2 = \alpha, \angle HD_2C = \beta, \angle HD_2B = \gamma$. (кути з перпендикулярними сторонами), і тоді $\angle MCD_1 = \angle HCD_2 = \alpha, \angle MD_1C = \angle HD_2C = \beta$.

Тепер із $\Delta D_1PC : \angle D_1PC = 180^0 (\alpha + \beta + \gamma) = 90^0$. Значить, медіана D_1P є і висотою ΔAD_1C. Звідси $AD_1 = D_1C$ і $\alpha = \gamma$ ($\angle MAC = \angle MCA$).

Отже, $\triangle AD_1T = \triangle AD_1S$ і значить $\angle D_1AT = \angle D_1CS = \alpha$; крім того, D_1P – бісектриса кута AD_1C. Ми отримали, що медіана *AT* є і бісектрисою ΔD_1AC тобто $\angle AD_1C = \angle ACD_1$, $2\beta = \gamma + \alpha = 2\alpha$. Отже $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$.

Звідси слідує, що грані *ABC*, *ACD* і *BCD* тетраедра – правильні трикутники, тобто *AB* = *BC* = *CA* = *AD* = *DC* = *BD*, значить, тетраедр – правильний.

Література

1. Александров А. Д. и др. Геометрия для 10 – 11 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. Математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В.И. Рыжик. – 3-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1992. – 464 с.
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы /Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. —М.:МЦНМО, 2007. —472 с.

Коваль Тетяна Анатоліївна

студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ, ЯК ЗАСІБ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО ОЛІМПІАДНИХ ЗМАГАНЬ

Числовою послідовністю називається функція, визначена на множині натуральних чисел (*f*: $N \to R$, *f* –функція натурального аргументу). Позначається числова послідовність звичайно через (x_n), де $n \in N$, $x_n=f(n)$ – *n*-ий член послідовності. Формула $x_n=f(n)$ називається формулою спільного члена послідовності (x_n), $n \in N$.

Послідовною називають функцію,яка задана на множині всіх або перших n натуральних чисел. Числа, які утворюють послідовність називають членами послідовності. Якщо послідовність має скінченне число членів, то її називають скінченною послідовністю. Якщо послідовність має нескінченне число членів, то її називають нескінченною послідовністю, а у записі це показують трьома крапками після останнього записаного члена послідовності.

У загальному випадку члени послідовності, як правило, позначають малими буквами з індексами внизу.Кожний індекс вказує порядковий номер члена послідовності.

Щоб задати послідовність, потрібно вказати спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-який його член.

1. Послідовність можна задати описом знаходження її членів.
2. Скінчену послідовність можна задати переліком її членів.

3. Послідовність можна задати таблицею, у якій навпроти кожного члена послідовності вказують його порядковий номер.

4. Послідовність можна задати формулою, за якою можна знайти будь-який член послідовності, знаючи його номер.

5. Спочатку вказати перший або кілька перших членів послідовності, а потім –умову, за якою можна визначити будь-який член послідовності за попереднім.Такий спосіб задання послідовності називають рекурентним. [2]

<u>*Задача.*</u> Дано послідовність невід'ємних чисел a_1, a_2, …, a_n. Для будь-якого k від 1 до n позначимо через m_k величину

$$\max_{l=1,2,\ldots,k} \frac{a_{k-l+1}+a_{k-l+2}+\ldots+a_k}{l}.$$

Доведіть, що при будь-якому $\alpha > 0$ число тих k, для яких $m_k > \alpha$, менше, ніж $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{\alpha}$.[1]

Перший спосіб розв'язання

Для $1 \le i \le j \le n$ позначимо через $[i, j]$ відрізок натурального ряду від i до j. Нехай

$$S(i,j)=\frac{a_i+a_{i+1}+\ldots+a_j}{j-i+1}.$$

Зазначимо, що із $S(i, j)>\alpha$ і $S(j+1, l)>\alpha$ слідує $S(i, l)>\alpha$.

Виділимо в відрізку [1, n] декілька відрізків $[p_i, p_j]$ за наступним принципом: i-й відрізок починається з мінімального числа p такого, що a_p перевищує α і не лежить в побудованих відрізках (якщо такого немає, то побудову закінчено); закінчується він таким максимальним q, що при будь-якому j із $[p_i, q]$ середнє чисел від $a_{p_з}$ до a_j перевищує α. По побудові $p_{i+1} > q_i+1$.

Назвемо натуральне число k хорошим, якщо $m_k > \alpha$. Доведемо, що всі хороші числа лежать в побудованих відрізках. Припустимо супротивне і розглянемо мінімальне хороше k, для якого це не так. Оскільки $m_k > \alpha$, то знайдеться $l \le k$, для якого $S(l, k) > \alpha$. Так як будь-яке число в не побудованих відрізках не перевищує α, то відрізок $[l, k]$ перетинається з якимось відрізком $[p_i, q_i]$. Нехай $[p_i, q_i]$ - найправіший відрізок, що лежить лівіше k. Якщо $k > q_i+1$, то $S(q_i+2, k) \le \alpha$, звідки $S(l, q_i+1) > \alpha$, що суперечить вибору k. Тому $k=q_i+1$. Із принципу вибору відрізків слідує, що $l \ne p_i$ (інакше отримуємо протиріччя з вибором q_i). Якщо $l > p_i$, то $S(p_i, l-1)$, звідки $S(p_i, q_i+1) > \alpha$, чого не може бути. Якщо ж $l < p_i$, то із $S(p_i, q_i+1) \le \alpha$ слідує $S(l, p_i-1) > \alpha$, тобто $p_i - 1$ –хороше число, що не належить ні одному із відрізків $[p_i, q_i]$ і менше k, що суперечить зробленому припущенню. Таким чином, всі хороші k лежать в побудованих відрізках.

Виходить, що кількість хороших чисел не перевищує $\sum(q_i - p_i + 1)$. Враховуючи, що по побудові відрізків $[p_i, q_i]$

$$\sum a_k \geq \sum_{k\in[p_i,q_i]} a_k > \alpha\cdot \sum (p_i - q_i + 1),$$

ми отримуємо підтвердження задачі.

Другий спосіб розв’язання

Нехай $b_i = a_1 + \ldots + a_i$. Зрозуміло, що $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Тоді

$$\frac{a_{l+1} + a_{k-m+2} + \ldots + a_k}{m} = \frac{b_k - b_l}{k-l}.$$

Розглянемо на координатній площині точки $B_0(0, 0)$, $B_1(1, b_1)$, $B_2(2, b_2)$,…, $B_n(n, b_n)$. Тоді відношення $\frac{b_k - b_l}{k-l}$ буде рівне тангенсу кута нахилу прямої B_lB_k. Отже, умова $m_k > \alpha$ буде рівносильна тому, що пряма, що проходить через B_k з кутом нахилу arctg α (цю пряму назвемо l_k) буде проходити вище хоча б однієї з точок B_l при $l < k$ (таку точку B_k будемо називати хорошою). Вираз $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\alpha}$ буде рівний b_n/α, і це буде відстань між точкою $(n, 0)$ і точкою перетину l_n з віссю абсцис.

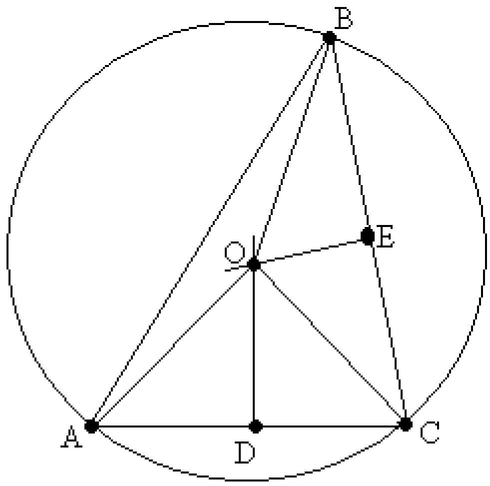
Доведемо індукцією по кількості точок n, що ця відстань більша числа хороших точок. База очевидна. Якщо точка B_n не хороша, то відкинемо її, при цьому число хороших точок не зміниться, а відрізок зменшиться (так як $b_{n-1} \leq b_n$). Якщо ж вона хороша, то нехай B_k найближча (по осі абсцис) точка, що лежить під l_n. Тоді відкинемо всі точки від B_{k+1} до B_n (вони всі хороші), кількість хороших точок зменшиться на n-k, а відрізок –більше, ніж на n-k.

Для учнів пропонуються різні задачі, які допомагають їхньому розвитку. Тому вчитель з учнями розглядає задачі як з геометрії, так і з алгебри. Наприклад, на описане коло навколо трикутника і вписане коло в трикутник.

Коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

Теорема. Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину перпендикулярів до сторін трикутника, проведених через середини цих сторін.

Доведення. Нехай ABC –даний трикутник і O –центр описаного навколо нього кола (мал. 1). Трикутник AOC –рівнобедрений; у ньому сторони OA і OC рівні як радіуси. Медіана OD цього трикутника одночасно є його висотою. Тому центр кола лежить на прямій, яка перпендикулярна до сторони AC і проходить через її середину. Так само доводимо, що центр кола лежить на перпендикулярах до двох інших сторін трикутника. Теорему доведено.



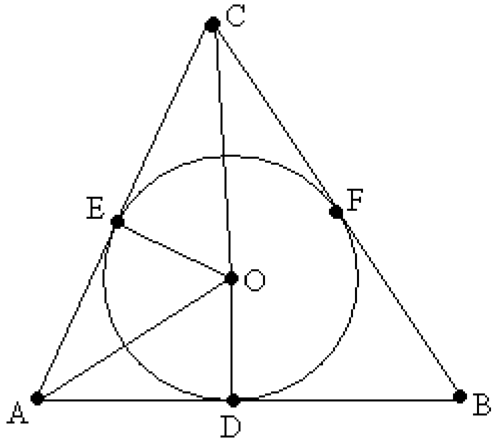
Мал. 1

Зауваження. Пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, часто називають серединним перпендикуляром. У зв'язку з цим інколи говорять, що центр кола, описаного навколо трикутника, лежить на перетині серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

Коло називається вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Теорема. Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.

Доведення. Нехай ABC –даний трикутник, O –центр вписаного в нього кола, D, E і F –точки дотику кола із сторонами (мал. 2). Прямокутні трикутники AOD і AOE рівні за гіпотенузою і катетом. У них гіпотенуза AO спільна, а катети OD і OE рівні як радіуси. З рівності трикутників випливає рівність кутів OAD і OAE. А це означає, що точка O лежить на бісектрисі трикутника, проведеній з вершини A. Так само доводимо, що точка O лежить на двох інших бісектрисах трикутника. Теорему доведено.[1]

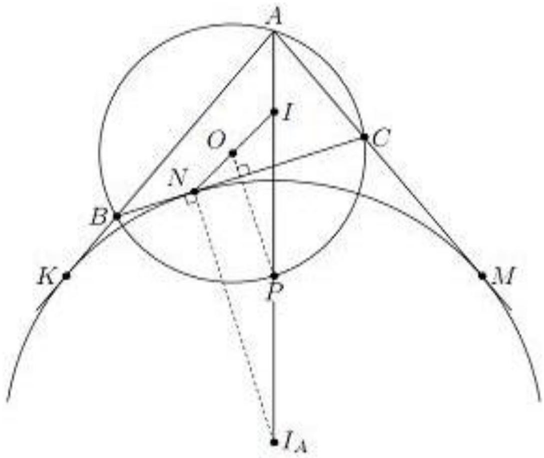


Мал. 2

Задача. В трикутнику ABC через O, I позначено центри відповідно описаного і вписаного кіл. Коло ω_a, яке не вписане в трикутник, дотикається продовжень сторін AB і AC відповідно в точках K і M, а сторони BC –в точці N. Відомо, що середина P відрізка KM лежить на описаному колі трикутника ABC. Доведіть, що точка O, N і I лежать на одній прямій. [3]

Перший спосіб розв'язання. У випадку BC || KM (тобто AB = AC) доведення задачі очевидне. Нехай BC не паралельно KM.

Нехай R –радіус описаного кола, I_A і r_A –відповідно центр і радіус кола ω_a.



Мал. 3

Оскільки AK = AM, пряма AP є бісектрисою кута KAM, слідує, що P – середина дуги BC (див. мал. 3).

Відмітимо, що $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90^0$, оскільки BI і CI –внутрішні бісектриси, а BI_A і CI_A –зовнішні бісектриси трикутника ABC. Звідси слідує, що чотирикутник I_ABIC вписаний в коло з діаметром I I_A. Центр цього кола лежить на перетині серединного перпендикуляра до BC і прямої I I_A (бісектриси кута BAC), тобто знаходиться в точці P. Тому PI = PI_A = PB = $2R\sin\angle BAP$. Так як $\angle AKI_A = \angle APK = 90^0$, то $\angle I_AKP = \angle BAP$, і в силу теореми синусів $2R\sin\angle BAP = PI_A = I_AK \sin\angle BAP = r_A\sin\angle BAP$. Звідси $2R = r_A \Rightarrow I_AN = 2PO$. Відрізок PO паралельний I_AN (так як вони обидва перпендикулярні BC), проходить через середину P відрізка I I_A і рівний $\frac{I_AN}{2}$, тому PO –середня лінія трикутника I I_AN, тому O –середина IN.

Другий спосіб розв'язання. Як і у першому розв'язанні, припустимо, що BC не паралельний KM.

Позначимо через I_A, I_B, I_C відповідні центри невписаних кіл, а через X – середину відрізка MN. Серединні перпендикуляри до відрізків KM і MN є бісектрисою кута A і зовнішньою бісектрисою кута C відповідно. Тому точки P і X лежать на I I_A і I_AI_B відповідно. Як показано в першому розв'язанні, точка P –середина дуги BC описаного кола трикутника ABC і є серединою I I_A. PX – середня лінія трикутника KMN, тому PX || KN || I I_B, а оскільки P –середина I I_A, PX –середня лінія трикутника I_BI_AI. Оскільки XN $\perp$ I_AI_B, точка N лежить на серединному перпендикулярі до I_BI_A (аналогічно і до I_AI_C), звідки $NI_B = NI_A = NI_C$. Тоді N –центр описаного кола трикутника $I_AI_BI_C$. Відмітимо, що він лежить на прямій Ейлера цього трикутника, яка також проходить через його ортоцентр I і центр кола дев'яти точок O.

Розв'язання таких задач сприяє розвиткові логічного мислення, вміння робити припущення і доводити задачу, а також зіставляти судження за визначеними правилами, в учнів краще розвивається просторова уява. Задачі такого типу даються учням на олімпіаді в 11-их класах.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова.- М.: МЦНМО, 2007. -472 с.
2. Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики: Навчальний посібник.- Харків: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2006. -368 с.
3. [3] Погорєлов А. В. Геометрія: Підруч. Для 7-11 кл. серед. шк. –К.: Рад. шк., 1991. -352 с.

Комарівський В'ячеслав Дмитрович
студент 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

СТЕПАН ІВАНОВИЧ ТА ЛЕЖАЧА БОЧКА

Тракторист Степан Іванович живе далеко від автозаправної станції. Задля економії він завжди купує багато палива і зберігає його в себе на подвір'ї в лежачій циліндричній бочці радіусу R і довжини L. Степан Іванович хотів би знати, який об'єм палива міститься в його бочці, якщо відома висота рівня бензину h. На жаль, у школі він не приділяв належної уваги вивченню математику. Допоможіть Степану Івановичу розв'язати цю задачу.

Студент-математики знайшов три способи розв'язання цієї задачі.

Перший спосіб розв'язання

Розглянемо випадок, коли $h<R$.

Для того щоб визначити шуканий нами об'єм потрібно довжину бочки L помножити на площу сегмента висотою h кола, отриманого перерізом циліндра площиною.

Виведемо площу сегмента через рівень висоти палива h.

Розглянемо хорди CD та AB на рисунку 1. Скориставшись властивістю хорд кола, що перетинаються, маємо:

$$CK \cdot KD = AK \cdot KB;$$

$$a \cdot a = (2R-h) \cdot h;$$

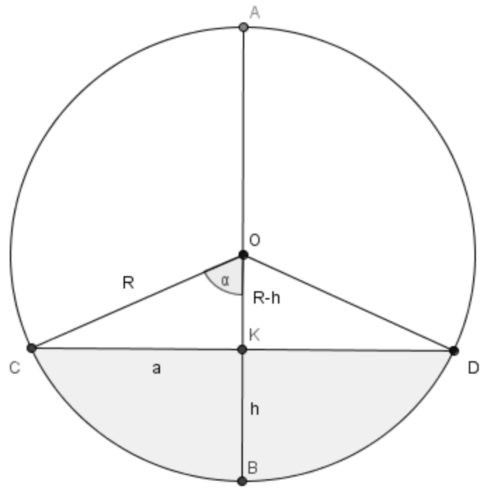


Рисунок 1

$a^2 = \left(2R-h\right)\cdot h;$

$a = \sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}\,.$

Знайдемо $\angle\alpha$ (з ΔCOK):

$$\sin\alpha = \frac{a}{R} = \frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R}$$

Знайдемо площу сектора COB:

$$S_{COB} = \frac{\alpha\cdot R^2}{2} = \frac{R^2\cdot\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}}{R}\right)}{2}.$$

Знайдемо площу сектора COD:

$$S_{COD} = 2\cdot S_{COB} = 2\cdot\frac{R^2\cdot\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}}{R}\right)}{2} = R^2\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}}{R}\right).$$

Знайдемо площу ΔCOK:

$$OK = \sqrt{R^2-a^2} = \sqrt{R^2-\left(2R-h\right)\cdot h} = \sqrt{R^2-2Rh+h^2} = R-h;$$

$$S_{\Delta COK} = \frac{1}{2}\cdot OK\cdot CK = \frac{1}{2}(R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h}\,.$$

Знайдемо площу ΔCOD:

$$S_{\Delta COD} = 2\cdot S_{\Delta COK} = (R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h}\,.$$

Тепер отримаємо площу шуканого сегмента:

$$S = S_{COD} - S_{\Delta COD} = R^2\arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}}{R}\right) - (R-h)\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}\,.$$

Знайдемо шуканий об’єм:

$$V = S\cdot L = L\cdot\left(R^2\arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}}{R}\right) - (R-h)\sqrt{\left(2R-\right.}\right.$$

.

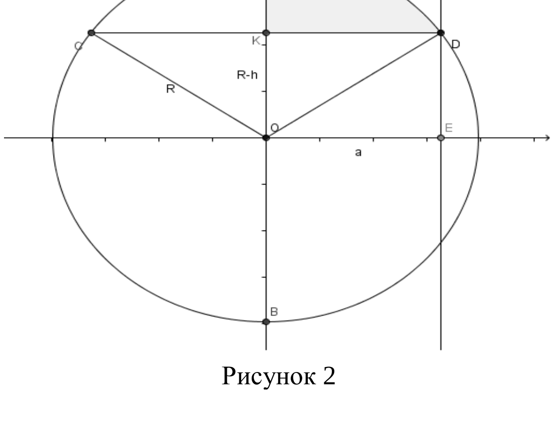


Рисунок 2

Другий спосіб розв’язання

Розглянемо хорди CD та AB на рисунку 2. Скориставшись властивістю хорд кола, що перетинаються, маємо:

$CK\cdot KD = AK\cdot KB;$

$a\cdot a = \left(2R-h\right)\cdot h;$

$a^2 = \left(2R-h\right)\cdot h;$

$a = \sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}\,.$

Виберемо систему координат так, щоб початок координат співпав з центром кола. Обчислимо площу криволінійної трапеції AODE за допомогою інтегрального числення. Від площі даної трапеції віднімемо площу прямокутника OKDE і отриманий результат буде половиною шуканої площі сегмента.

У першій координатній площині коло можна задати рівнянням $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Обчислимо визначений інтеграл $\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\sqrt{R^2-x^2}dx$:

$$\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\sqrt{R^2-x^2}dx=\begin{bmatrix} u=\sqrt{R^2-x^2} & dv=dx \\ du=\dfrac{-xdx}{\sqrt{R^2-x^2}} & v=x \end{bmatrix}=$$

$$=x\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h}}-\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\frac{-xdx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h}}-\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\frac{\left(R^2-x-R^2\right)dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h}}-\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\sqrt{R^2-x^2}dx+\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\frac{R^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}};$$

$$2\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\sqrt{R^2-x^2}dx=x\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h}}+\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\frac{R^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}};$$

$$2\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\sqrt{R^2-x^2}dx=x\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h}}+\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h}};$$

$$\int_0^{\sqrt{2Rh-h}}\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h}}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{\sqrt{2Rh-h}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2Rh-h}}{2}\sqrt{R^2-2Rh+h^2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2Rh-h}}{R}=$$

$$=\frac{\sqrt{2Rh-h}}{2}\left(R-h\right)+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2Rh-h}}{R}.$$

Обчислимо площу прямокутника OKDE:

$S_{OKDE}=(R-h)\cdot a=(R-h)\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}$.

Від площі криволінійної трапеції віднімемо площу прямокутника OKDE:

$$\frac{\sqrt{2Rh-h}}{2}\left(R-h\right)+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2Rh-h}}{R}-\sqrt{2Rh-h}\left(R-h\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2Rh-h}\left(R-h\right)}{2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2Rh-h}}{R}$$

Тоді отримаємо шукану площу сегмента:

$$S=-2\cdot\frac{\sqrt{2Rh-h}\left(R-h\right)}{2}+2\cdot\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2Rh-h}}{R}=$$

$$-\sqrt{2Rh-h}\left(R-h\right)+R^2\arcsin\frac{\sqrt{2Rh-h}}{R}$$

Отже, шуканий об'єм буде

$$V=S\cdot L=L\cdot\left(R^2\arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}}{R}\right)-(R-h)\sqrt{\left(2R-h\right)\cdot h}\right).$$

Третій спосіб розв'язання

Виберемо систему координат так, щоб початок координат співпав з центром кола.

Розглянемо верхнє півколо на рисунку 3. Аналітично його можна задати так: $y=\sqrt{R^2-x^2}$

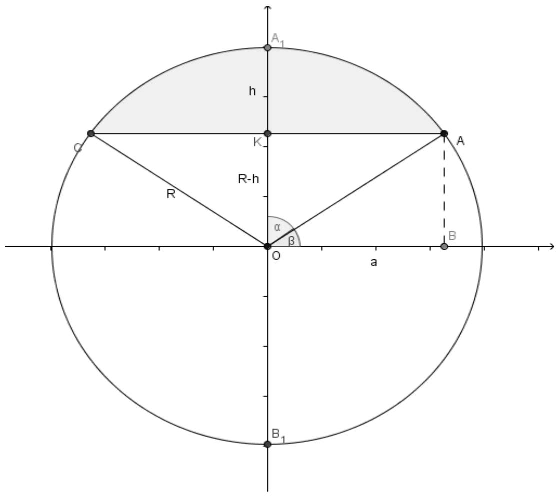


Рисунок 3

Розглянемо точку А. Її абсциса нам відома – R-h. Обчислимо її ординату, підставивши значення абсциси R-h у рівняння $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

$$R-h=\sqrt{R^2-x^2};$$
$$\left(R-h\right)^2=R^2-x^2;$$
$$R^2-2Rh+h^2=R^2-x^2;$$
$$x^2=2Rh-h^2;$$
$$x=\sqrt{2Rh-h^2}.$$

Отже, точка А має координати $\left(\sqrt{2Rh-h^2},R-h\right)$.

Очевидно, що точка B має координати $\left(\sqrt{2Rh-h^2},0\right)$.

Знайдемо кут β між векторами $\overrightarrow{OA}\left(\sqrt{2Rh-h^2},R-h\right)$ та $\overrightarrow{OB}\left(\sqrt{2Rh-h^2},0\right)$:

$$\cos\beta=\frac{2Rh-h^2}{\sqrt{2Rh-h^2+\left(R-h\right)^2}\cdot\sqrt{2Rh-h^2}}=$$

$$=\frac{2Rh-h^2}{\sqrt{2Rh-h^2+R^2-2Rh+h^2}\cdot\sqrt{2Rh-h^2}}=\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R}.$$

Знайдемо кут α:

$$\sin\alpha=\cos\left(90^o-\alpha\right)=\cos\beta=\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R}.$$

Знайдемо площу сектора AOA_1:

$$S_{AOA_1}=\frac{\alpha\cdot R^2}{2}=\frac{R^2\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R}\right)}{2}.$$

Знайдемо площу сектора AOC:

$$S_{AOC}=2\cdot S_{AOA_1}=2\cdot\frac{R^2\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R}\right)}{2}=R^2\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R}\right).$$

Знайдемо площу ΔAOK:

$$OK=\sqrt{R^2-a^2}=\sqrt{R^2-(2R-h)\cdot h}=\sqrt{R^2-2Rh+h^2}=R-h;$$

$$S_{\Delta AOK}=\frac{1}{2}\cdot OK\cdot CK=\frac{1}{2}(R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h}.$$

Знайдемо площу ΔAOC:

$$S_{\Delta AOC}=2\cdot S_{\Delta AOK}=(R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h}.$$

Тепер отримаємо площу шуканого сегмента:

$$S=S_{AOC}-S_{\Delta AOC}=R^2\arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R}\right)-(R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h}.$$

Таким чином шуканий об'єм є:

$$V=S\cdot L=L\cdot\left(R^2\arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R}\right)-(R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h}\right).$$

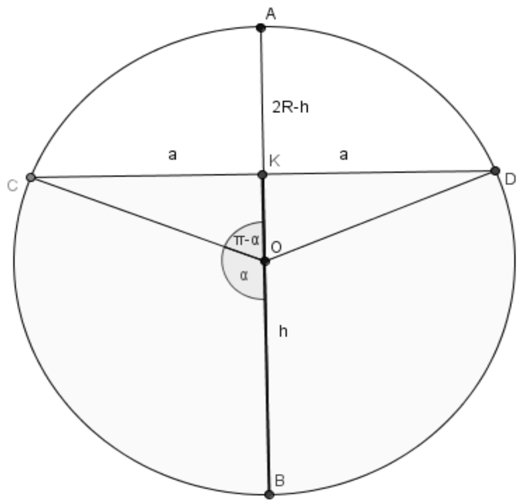


Рисунок 4

Розглянемо випадок, коли h>R.

Розглянемо хорди CD та AB на рисунку 4. Скориставшись властивістю хорд кола, що перетинаються, маємо:

$$a\cdot a=(2R-h)\cdot h;$$

$$a^2=(2R-h)\cdot h;$$

$$a=\sqrt{(2R-h)\cdot h}.$$

Знайдемо $\angle(\pi-\alpha)$ (з ΔCOK):

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{a}{R}=\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R}$$ Очевидно, що площа сегмента CAD буде обчислюватись аналогічно до випадку, коли h<R.

$$S_{CAD}=R^2\arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R}\right)-$$

$$-(R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h}$$

Тоді, для того щоб обчислити шукану нами площу, потрібно від площі кола відняти площу сегмента CAD.

$$S = \pi R^2 - S_{CAD} = \pi R^2 - \left(R^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R} \right) - (R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h} \right) =$$

$$= \pi R^2 - R^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R} \right) + (R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h}.$$

Таким чином шуканий об’єм є:

$$V = S \cdot L = L \cdot \left(\pi R^2 - R^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{(2R-h)\cdot h}}{R} \right) + (R-h)\sqrt{(2R-h)\cdot h} \right).$$

У випадку, коли h=R площа сегмента буде рівна половині площі круга. Отже, об’єм обчислиться за формулою $V = L\dfrac{\pi R^2}{2}$.

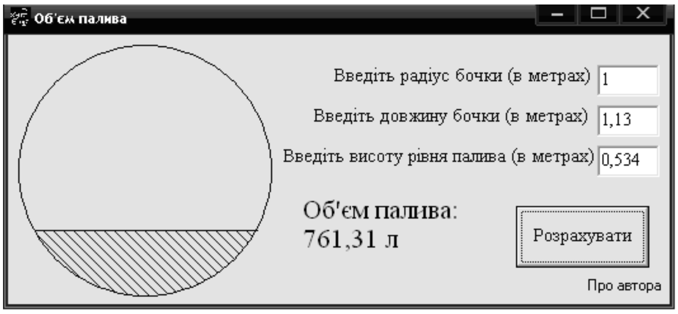


Рисунок 5

Для того, щоб Степану Івановичу не довелося щоразу обчислювати за такою складною формулою об’єм палива, що залишився в бочці, студент-математик написав спеціальну програму, яка буде займатися підрахунками. Цю програму Степан Іванович може завантажити за адресою http://mathforum.at.ua/bochka.exe .

Література

1. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К., Геометрія. Підручник. 10-11 клас, – Т.: «Богдан», 2003. – 264 с.
2. Ковтонюк М.М., Лекції з математичного аналізу (Інтегральне числення однієї змінної. Ряди), – В.: «Едельвейс і К», 2008. – 228 с.

Кривешко Інна Анатоліївна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ НА ЗВАЖУВАННЯ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Задачі на зважування - досить поширений вид математичних задач. У таких завданнях від даного потрібно локалізувати предмет, який відрізняється від інших предметів вагою за обмежену кількість зважувань. Пошук рішення в цьому випадку здійснюється шляхом операцій порівняння, правда, не тільки поодиноких елементів, але і груп елементів між собою.

Задачі на зважування - тип олімпіадних завдань з математики, в яких потрібно встановити той чи інший факт (виділити фальшиву монету серед справжніх, відсортувати набір вантажів за зростанням ваги і т. п.) за допомогою зважування на важільних вагах без циферблату. Найчастіше в якості зважуваних об'єктів використовуються монети. Рідше є набір гирьок відомої маси.

Дуже часто використовується постановка завдання, що вимагає визначити або мінімальне число зважувань, що потрібне для встановлення певного факту, або привести алгоритм визначення цього факту за певну кількість зважувань.

Рідше зустрічається постановка, що вимагає відповісти на питання, чи можливе встановлення певного факту за деяку кількість зважувань. Часто така постановка є не дуже вдалою, тому що при позитивній відповіді на питання, завдання найчастіше зводиться до побудови алгоритму, а негативний майже не зустрічається в олімпіадної практиці.

При розв’язуванні завдань на зважування часто відбувається типова помилка: потрібно визначити мінімальну кількість зважувань. При розв’язанні будується алгоритм, який дозволяє розв’язати задачу за N кроків. При цьому N дійсно є вірною відповіддю на запитання «яка мінімальна кількість зважувань», але цей факт в рішенні не доведений. Іноді ця помилка допускається і самими упорядниками завдань.

Аналіз задачі з точки зору теорії інформації

При рішенні цих завдань часто використовується таке міркування: ваги можуть перебувати в одному з тих станів

- переважила ліва чашка
- переважила права чашка
- чашки знаходяться в рівновазі

Таким чином, єдине зважування повідомляє нам один розряд в трійкової системі числення, а N зважувань дозволяють розділити не більш ніж N^3 різних ситуацій. Особливо це міркування корисно при доведенні мінімальності необхідної кількості зважувань і при доведенні неможливості визначити конкретний факт за дану кількість зважувань (в останньому випадку зазвичай потрібно комбінаторний аналіз простору можливих відповідей).

Приклад: за два зважування неможливо точно виділити найважчу з 10 гирьок, оскільки два зважування дають можливість розділити тільки 9 можливих відповідей, а найтяжчою може виявитися будь-яка з 10 гирьок.

Знання про системи числення не є необхідними; досить тривіального комбінаторного міркування типу «набір довжини N, в кожному з яких a варіантів, дає N^a комбінацій».

Іноді відбувається помилка, коли існують правильні міркування, але не береться до уваги «нейтральне» положення ваг, і вважається, що при кожному зважуванні повідомляється один з двох, а не один з трьох можливих результатів.

Іноді зустрічаються «*нестандартні*» завдання на зважування, наприклад:

- у них фігурують годинник, безпосередньо показують вагу
- у них фігурують важільні годинник з циферблатом, що показує різницю ваги вантажів на шальках
- в них фігурує безмін (найпростіші важільні терези.)
- у них фігурують нерівноплічності ваги

А тепер перейдемо до нашої задачі, яка була запропонована у 2001–2002 р. на окружному етапі всеросійської олімпіади з математики у 8 класі С.Токаревим.

Задача. Серед 18 деталей, виставлених в ряд, три стоячі підряд важать по 99 г, а решта — по 100 г. Двома зважуваннями на вагах зі стрілкою визначити всі 99 грамові деталі.

Перший спосіб розв'язання

Пронумерувавши деталі зліва направо числами 1, 2, . . . , 18, зважимо деталі с номерами 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15. Можливі чотири випадки:

1) Маса всіх зважених деталей дорівнює 800 г, тобто серед них немає ні одної 99-грамової. Для другого зважування візьмемо деталі з номерами 1, 2, 3, 8, 9. Їх маса може бути рівна 497 г (і тоді по 99 г важать деталі 1, 2, 3), 498 г (якщо по 99 г важать 8, 9, 10), 499 г (9, 10, 11) і 500 г (16, 17, 18).

2) Маса всіх зважених деталей — 799 г, тобто серед них рівно одна 99-грамова. Зважимо деталі 2, 3, 4, 7, 8, 12. Тут маса може дорівнювати 597 г, 598 г, 599 г і 600 г, а відповідними трійками 99-грамових деталей будуть (2, 3, 4), (7, 8, 9), (10, 11, 12) і (15, 16, 17).

3) Маса всіх зважених деталей — 798 г, тобто серед них рівно дві 99-грамові. Тоді зважимо деталі 3, 4, 5, 6, 7, 12, і в випадках, коли ваги покажуть 597 г, 598 г, 599 г і 600 г, шуканими трійками будуть (3, 4, 5), (6, 7, 8), (11, 12, 13) і (14, 15, 16) відповідно.

4) Маса всіх зважених деталей—797 г, тобто всі 99-грамові деталі знаходяться серед них. Другим зважуванням дізнаємось масу деталей 4, 5, 6, 12. У залежності від того, рівна вона 397 г, 398 г, 399 г чи 400 г, шуканими трійками деталей будуть (4, 5, 6), (5, 6, 7), (12, 13, 14) чи (13, 14, 15) відповідно.

Другий спосіб розв'язання

Назвемо деталі, вагою по 99 г, фальшивими. Зважування на вагах зі стрілкою дозволяє визначити, скільки фальшивих деталей було серед зважених. У відрізка із трьох деталей є 16 можливих положень — най лівіша із фальшивих може мати номер від 1 до 16.

Припустимо, що в нас є два конкретних зважування. Тоді ми можемо нарисувати таблицю результатів, що показує для кожного положення лівого кінця фальшивого відрізка, скільки фальшивих деталей було б зважено. Якщо в таблиці кожна пара чисел від 0 до 3 (їх всього 16) зустрічається рівно 1 раз, то по результату зважування можна однозначно визначити положення фальшивого відрізка. Наведемо таку таблицю:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3

0	1	2	3	3	2	1	0	0	1	2	3	3	2	1	0

Рис. 143

Покажемо, як знайти зважування завдяки яким отримаємо дану таблицю. Перше зважування: із першого відрізка повинно потрапити нуль деталей, значить, з 1 по 3 — не беремо, із другого (з 2 по 4) — також нуль, значить, 4 не беремо, і так до 5 відрізка (з 5 по 7), із нього повинна бути взята одна деталь, значить це деталь 7, тому що всі до 7 вже не взяті. Із відрізка 6 повинна бути взята одна деталь, але вже взята деталь 7, значить 8 не беремо. І так далі: кожний наступний відрізок містить одну нову деталь, тому ми можемо однозначно визначити, брати її чи ні. Провівши вказаний алгоритм, отримаємо, що необхідні зважування існують: 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18 і 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15.

На конкретному прикладі ми побачили переваги різних способів розв'язування задач на зважування. Такі розв'язання задачі не тільки сприяють глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу, але й підвищують інтерес до вивчення математики.

Література

1. Агаханов Н. Х**.** Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006 окружной и финальный этапы/ Агаханов Н. Х**.,** Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д. А., Под редакцией Агаханова Н. Х. – М.: МЦНМО, 2007. – с. 39, 204-205.

Лабанська Крістіна Олегівна

студентка магістратури, напрям підготовки „Математика”

ДЕКІЛЬКА СПОСОБІВ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТІ, ЩО БУЛА ЗАПРОПОНОВАНА НА МІЖНАРОДНІЙ ОЛІМПІАДІ ШКОЛЯРІВ У 1984 Р.

Задачі на доведення нерівностей, які пропонуються на олімпіадах школярам, також часто зводяться до оцінювання значень деяких функцій. Ці задачі, звичайно, мають способи розв'язання, що не потребують фактів поза шкільною програмою, проте деякі знання з математичного аналізу можуть допомогти школяреві отримати інше строге розв'язання.

Зауважимо, що багато учасників олімпіад у своїх роботах використовують різноманітні методи дослідження функцій. При цьому вони іноді поширюють на функції багатьох змінних методи, відомі їм з шкільного курсу для функцій однієї змінної. Звичайно тут криються помилки розв'язання.

Розглянемо задачу, яку було запропоновано учасникам 25-ої Міжнародної математичної олімпіади школярів, яка у 1984 р. проходила в Чехословаччині, в її столиці м. Прага.

Задача. Нехай x, y, z – невід'ємні дійсні числа такі, що $x+y+z=1$. Доведіть, що виконується така нерівність

$$0 \le xy+yz+zx-2xyz \le \frac{7}{27}.$$

Перший спосіб розв'язання

Оскільки $x+y+z=1$, то наша нерівність, еквівалентна такій нерівності

$$0 \le (xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz \le \frac{7}{27}(x+y+z)^3.$$

(Ми "вирівняли" степінь усіх членів нерівності, тобто зробили їх рівною три.)

Спочатку доведемо ліву нерівність:

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz \ge 0.$$

Розкривши дужки і, звівши подібні доданки, вона запишеться так

$$xyz+x^2y+y^2z+z^2x+x^2z+y^2x+z^2y \ge 0.$$

Ця нерівність є очевидною, бо x, y, z – невід'ємні дійсні числа.

Тепер доведемо праву нерівність:

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz \le \frac{7}{27}(x+y+z)^3.$$

Спочатку помножимо її обидві частини на 27, а потім розглянемо різницю між правою і лівою частинами нерівності, що одержимо. Розкривши дужки і, звівши подібні доданки, ця різниця перепишеться так:

$$7\left(x^3+y^3+z^3\right)+15xyz-6\left(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2\right) \ge 0.$$

Щоб довести цю нерівність, зробимо такі перетворення її лівої частини:

$$\left(2\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2\right)\right)+$$

$$+5\left(3xyz+\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2\right)\right) \ge 0.$$

Оскільки за нерівністю *Коші* виконується така нерівність:

$$x^3+y^3+z^3 \ge 3xyz,$$

то

$$2\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2\right) \ge$$

$$\ge 3xyz+\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2\right) \ge 0,$$

що і треба було довести, бо остання нерівність зводиться до відомої нерівністі Шура:

$$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y) \ge 0.$$

Другий спосіб розв'язання

Ліва частина нерівності легко випливає з нерівності Коші для трьох доданків і того, що дані числа не перевищують 1;

$$xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \ge 3xyz \ge 2xyz\,.$$

Для доведення правої частини зробимо заміну $z = 1-(x+y)$ і прийдемо до нерівності

$$-3xy - x^2 - y^2 + x + y + 2xy\left(x+y\right) \le \frac{7}{27}\,.$$

Позначимо ліву частину через $\alpha(x,y)$, ця функція на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ неперервна, оскільки є многочленом. Ми її розглядаємо на множині $A = \left\{\left(x,y\right): x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\right\}$, вона обмежена і замкнена, тому є компактом. Значить f в деякій точці приймає своє найбільше значення. Якщо ця точка не на межі, в ній виконуються рівності

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy + 2y^2 - 2x - 3y + 1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy + 2x^2 - 2y - 3x + 1 = 0\,.$$

Віднімаючи одне рівняння з іншого, знаходимо, що $x = y$, і далі, що їхнє загальне значення тут дорівнює $\frac{1}{3}$. Відзначимо, що $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$.

Тепер розглянемо f на межі нашої множини, тобто в точках, де $x=0$, $y=0$ або $x+y=1$.

$$f\left(0,y\right) = -y^2 + y \le \frac{1}{4} < \frac{7}{27},$$

$$f\left(x,0\right) = -x^2 + x \le \frac{1}{4},$$

$$f\left(x,1-x\right) = -x^2 + x \le \frac{1}{4}\,.$$

Тому найбільше значення нашої функції на зазначеній множині дорівнює $\frac{7}{27}$, нерівність доведена.

В останньому прикладі було потрібно довести нерівність для змінних, які задовольняють деякій додатковій умові (тут – рівності $x+y+z=1$). Фактично ми знаходили найбільше значення функції $xy+yz+zx-2xyz$ при виконанні цієї умови. Такі екстремуми називаються умовними, і для їх знаходження існує спеціальний метод – метод множників Лагранжа. При цьому, звичайно, можна знаходити і так, як ми робили вище – позбуватися додаткової умови підстановкою.

Нехай потрібно знайти найбільше або найменше значення функції f на множині $A\subset\mathbb{R}^m$ при виконанні умови $\phi(x_1,x_2,\dots x_m)=0$. Нехай функції f і ϕ мають неперервні частинні похідні у всіх точках A.

Якщо точка $\left(a_1,a_2,\dots,a_m\right)$ – точка зазначеного найбільшого або найменшого значення, що не є точкою межі A і в ній не виконується хоча б одна з рівностей $\frac{\partial\phi}{\partial x_k}=0,\ \ 1\le k\le m$, то для деякого числа λ для функції $F=f+\lambda\phi$, мають місце співвідношення $\frac{\partial F}{\partial x_k}(a_1,a_2,...,a_m)=0,\ 1\le k\le m$.

На відзначеному твердженні звичайно і ґрунтується відшукання умовних екстремумів. Функція F звичайно називається функцією Лагранжа, число λ – множником Лагранжа.

Для знаходження найбільшого значення f перебираються всі точки, в яких дорівнюють нулю частинні похідні функції Лагранжа для деякого λ, тобто критичні точки. Для відшукання невідомих m координат і одного λ ми маємо m рівностей нулю похідних і одне рівняння $\phi(x_1,x_2,...x_m)=0$. Після знаходження значень f в цих точках, ми досліджуємо значення f на межі множини A.

Третій спосіб розв'язання

Оскільки $x+y+z=1$, то наша нерівність, еквівалентна такій нерівності

$$0\le(xy+yz+zx)(x+y+z)-2xyz\le\frac{7}{27}(x+y+z)^3.$$

(Ми "вирівняли" степінь усіх членів нерівності, тобто зробили їх рівною три.) Доведемо цю нерівність для будь-яких невід'ємних дійсних чисел.

Для цього розглянемо два однорідних симетричних кубічних многочлени:

$$P(u,v,w)=(uv+vw+wu)(u+v+w)-2uvw$$

та

$$Q(u,v,w)=\frac{7}{27}(u+v+w)^3-(uv+vw+wu)(u+v+w)+2uvw.$$

Оскільки всі значення $P(1,1,1)=7$, $P(1,1,0)=2$, $P(1,0,0)=0$ та $Q(1,1,1)=0$, $Q(1,1,0)=\frac{2}{27}$, $Q(1,0,0)=\frac{7}{27}$ – невід'ємні, то за теоремою про *кубічну нерівність* одержуємо, що $P(x,y,z)\ge 0$ при всіх $x,y,z\ge 0$. Звідси, при $x+y+z=1$, одержуємо справедливість твердження задачі.

Тут ми скористалися відомою теоремою, яка є цікавим наслідком з нерівності *Шура*, яку називають *кубічною нерівністю.*

Теорема. Нехай $P(u,v,w)$ — однорідний симетричний многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами. Якщо $P(1,1,1)\ge 0$, $P(1,1,0)\ge 0$ і $P(1,0,0)\ge 0$, то для будь-яких дійсних невід'ємних x, y та z виконується така нерівність $P(x,y,z)\ge 0$.

Четвертий спосіб розв'язання

Для доведення лівої частини нерівності зауважимо, що всі числа x,y,z належать інтервалу [0,1] так що

$$yz+zx+xy-2xyz=yz(1-x)+xy(1-z)+zx$$

не невід'ємна.

Для доведення правої частини нерівності, будемо розрізняти два випадки.

а) Всі три числа x, y, z менші ніж $\frac{1}{2}$. Візьмемо нові додатні змінні x', y', z', для яких

$$x' = 1 - 2x,\ y' = 1 - 2y,\ z' = 1 - 2z.$$

Додавши ці рівності ми отримаємо

$$x' + y' + z' = 1 - 2x + 1 - 2y + 1 - 2z = 3 - 2(x + y + z) = 1.$$

Тому,

$$yz + zx + xy - 2xyz = \frac{1}{4}\left(1 + x'y'z'\right).$$

Перемноживши рівності

$$x' = 1 - 2x,\ y' = 1 - 2y,\ z' = 1 - 2z,$$

ми отримаємо

$$\begin{gathered} x'y'z' = (1-2x)(1-2y)(1-2z) = \\ = 1 - 2z - 2y + 4yz - 2x + 4xz + 4xy - 8xyz = \\ = 1 - 2(x + y + z) + 4(yz + xz + xy) - 8xyz = \\ = 1 - 2 + 4(yz + xz + xy) - 8xyz = \\ = -1 + 4(yz + xz + xy) - 8xyz. \end{gathered}$$

Поділимо обидві частини одержаної рівності на 4 і отримаємо:

$$\frac{x'y'z'}{4} = -\frac{1}{4} + (yz + xz + xy) - 2xyz.$$

Звідки

$$(x'y'z' + 1)\frac{1}{4} = (yz + xz + xy) - 2xyz.$$

За нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним, маємо:

$$x'y'z' \le \left(\frac{x' + y' + z'}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Звідки $x'y'z' \le \frac{1}{27}$. Тому

$$(yz + xz + xy) - 2xyz = (x'y'z' + 1)\frac{1}{4} \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{7}{27}.$$

б) Нехай одне із чисел, наприклад x, не менше $\frac{1}{2}$, тобто $x \ge \frac{1}{2}$. Тоді

$$\begin{gathered} yzx + xy - 2xyz = yz(1-2x) + x(y+z) = \\ = yz(1-2x) + x(1-x) \le x\left(1-x\right) \le \left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}. \end{gathered}$$

П'ятий спосіб розв'язання

Перша нерівність легко випливає з $ab \ge abc$ і $bc \ge abc$. А далі застосуємо *метод Штурма*.

Розглянемо вираз

$$E(a,b,c) = ab + bc + ac - 2abc$$

і будемо змінювати його змінні так, щоб виконувалися умови задачі, а його значення збільшувалося. Припустимо, що $a \le b \le c$. Нехай

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{3} - a; c - \frac{1}{3}\right\}$$

що є додатним числом. Обчислимо

$$E(a+\alpha,b,c-\alpha)=E(a,b,c)+\alpha(1-2b)[(c-a)-\alpha].$$

З того, що $b\le c$ і $a+b+c=1$, ми маємо $b\le\frac{1}{2}$. Це означає що

$$E(a+\alpha,b,c-\alpha)\ge E(a,b,c),$$

тобто ми в змозі зробити одне із a чи c рівним $\frac{1}{3}$, за рахунок збільшення значення виразу $E(a,b,c)$. Повторюючи міркування для решти двох чисел, ми в змозі збільшити $E(a,b,c)$ до $E\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$. Це доводить нерівність.

Література

1. Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Petrović. The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004
2. http://my.netian.coml/~ideahitmeleng.htm (Hojoo Lee Topics in inequalities)
3. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады(Сост. А.А Фомин, Г.М. Кузнєцова.–М.:Дрофа, 1998-160с.:ил)
4. http://www.mechmat.univ.kiev.ua/eng/ppages/radchenko/Publications_ PopMath/vysh_mat.pdf.

Майданюк Олена Леонідівна

студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ НА ВИКОРИСТАННЯ «ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ» В ГЕОМЕТРІЇ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОЇ РЕШІТКИ

Розглянемо на координатній площині систему прямих, що задані рівняннями $x=m$ і $y=n$, де кожне m і n пробігає усі цілі числа. Ці прямі утворюють решітку квадратів або *цілочисельну решітку*. Вершини цих квадратів, тобто точки з цілочисельними координатами, називають *вузлами* цілочисельної решітки.

«Принцип Діріхле» має декілька формулювань. Основне формулювання таке: *якщо в k клітках більше ніж nk кроликів, то хоча б в одній клітці сидять більше ніж n кроликів.*

Доведення. Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що це не так. Тоді в кожній клітці сидять не більше, ніж n кроликів. Оскільки усі кролики сидять в k клітках, всього у них буде не більше, ніж nk кроликів, що суперечить умові.

Наведемо ще кілька схожих на «принцип Діріхле» тверджень, які використовуються в геометрії та аналітичних задачах:

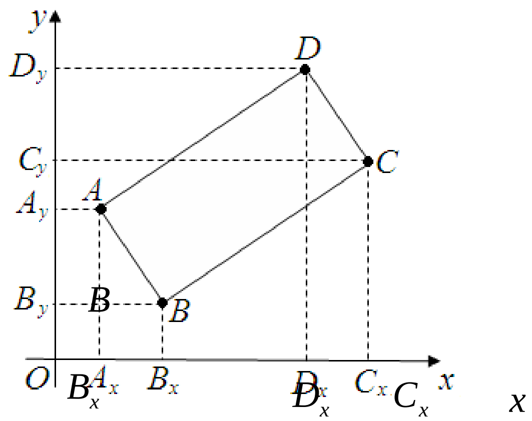
1. Якщо сума площ декількох фігур менша за S, то ними не можна покрити фігуру, площа якої дорівнює S.

2. Якщо на відрізку довжиною 1 розташовано декілька відрізків з сумою довжин l, знайдеться точка цього відрізка, яка буде накрита не більше, ніж $[l]$ цими відрізками.
3. Якщо середнє арифметичне декількох чисел більше a, то хоча б одне з цих чисел більше a.[2]

Розглянемо олімпіадну задачу про цілочисельну решітку, яка була запропонована учням 10–го класу на окружній Всеросійській математичній олімпіаді у 2004-2005 навчальному році.

<u>*Задача.*</u> На папері в клітинку намальований прямокутник, сторони якого утворюють кути по 45° з лініями решітки, а його вершини не лежать на її лініях. Чи може кожну сторону прямокутника перетнути непарна кількість ліній решітки?[1]

Перший спосіб розв'язання



Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що таке можливо для деякого прямокутника $ABCD$. Нехай AB – його найменша сторона. Виберемо початок координат у вузлі решітки, і задамо напрямок осі координат вздовж лінії решітки так, щоб серед вершин прямокутника вершина A мала найменшу абсцису, а вершина B – найменшу ординату. Через, A_x, B_x, C_x, D_x і A_y, B_y, C_y, D_y позначимо проекції вершин на осі (див. мал.). Абсциси точок A_x, B_x, C_x, D_x і ординати точок A_y, B_y, C_y, D_y – не цілі, так як вершини A, B, C, D не лежать на лініях решітки.

Так як $\overrightarrow{D_xC_x} = \overrightarrow{A_xB_x}$ і $A_xD_x = AD \cdot \cos 45° \geq AB \cdot \cos 45° = A_xB_x$, то точки на осі Ox лежать у порядку A_x, B_x, D_x, C_x (B_x і D_x можуть співпадати). Аналогічно доводиться, що точки на осі Ox лежать в порядку B_y, A_y, C_y, D_y. При цьому $A_xB_x = D_xC_x = B_yA_y = C_yD_y = AB\cos 45^{\circ}$, $B_xD_x = A_yC_y = (AD - AB)\cos 45^{\circ}$.

Через $t_1, t_2, t_3, t_4, s_1, s_2$ позначимо кількість точок з цілими координатами відповідно на відрізках A_xB_x, B_yA_y, D_xC_x, C_yD_y, B_xD_x, A_yC_y На відрізку A_xB_x рівно t_1 цілочисельних точок, тому сторона AB перетинає рівно t_1 вертикальних ліній решітки; на відрізку A_yD_y $t_4 + s_2$ цілочисельних точок, отже, сторона AD перетинає рівно $t_4 + s_2$ горизонтальних ліній решітки, і т. д. Таким чином, умова перетину кожною стороною непарного числа ліній решітки еквівалентно непарності чисел $t_1 + t_2$, $t_3 + t_4$, $t_1 + t_4 + s_1 + s_2$, $t_2 + t_3 + s_1 + s_2$.

Лема. Якщо два відрізка, довжиною d кожний, розташовані на числовій прямій так, що їх кінці нецілочисельні, то кількості цілих точок на цих відрізках відрізняються не більше, ніж на 1.

Доведення. Справді, якщо на відрізку з лівим кінцем в нецілій точці a і правим кінцем у нецілій точці b лежить k цілих точок $n, n+1, \dots, n+k-1$, то $n-1<a<n$ і $n+k-1<b<n+k$, тому $k-1<d=b-a<k+1$ і $d-1<k<d+1$, тобто $k=[d]$ або $k=[d]+1$. Лему доведено.

Із леми слідує, що числа t_1, t_2, t_3, t_4 відрізняються не більше, ніж на 1, тобто рівні t або $t+1$, і також числа s_1 і s_2 рівні s або $s+1$. Так як t_1+t_2 непарне, то $t_1 \neq t_2$. Нехай для визначеності $t_2=t+1$.

1) Якщо $t_3=t$, то $t_4=t+1$, так як t_3+t_4 непарне, тоді $s_1+s_2=(t_1+t_4+s_1+s_2)-(t_1+t_4)=(t_1+t_4+s_1+s_2)-(2t+1)$ – парне. Звідси $s_1=s_2$. Але тоді $(t_2+s_2+t_4)-(t_1+s_1+t_3)=2$, що суперечить твердженню леми для відрізків A_xC_x і B_yD_y.
2) Якщо ж $t_3=t+1$, то $t_4=t$. Тоді $s_1+s_2=(t_1+t_4+s_1+s_2)-(t_1+t_4)$ – непарне, тобто або $s_1=s, s_2=s+1$, або $s_1=s+1, s_2=s$. Перший випадок перечить твердженню леми для відрізків A_xD_x і B_yC_y, другий – для відрізків B_xC_x і A_yD_y.

Другий спосіб розв'язання

Припустимо, що такий прямокутник $ABCD$ існує. Нехай $AB \geq \sqrt{2}$. Відкладемо на сторонах AB і CD відрізки $BB'=CC'=\sqrt{2}\left[\frac{AB}{\sqrt{2}}\right]$. Тоді відрізки BB' і CC' перетинають по одній вертикальній і горизонтальній лініях, а відрізок $B'C'$ одержується із BC переносом на вектор $\overrightarrow{BB'}$ з цілими координатами. Тому прямокутник $AB'C'D$ також задовольняє умову. Продовжуючи такі дії, отримаємо в результаті прямокутник, всі сторони якого менші $\sqrt{2}$ (позначимо його знову $ABCD$). Тоді кожна сторона перетинає не більше одної прямої кожного напрямку, тобто рівно по одній прямій – або вертикальній, або горизонтальній.

Нехай A – лівіша точка прямокутника, а B – найнижча, тоді C – правіша, а D – найвища. Якщо відрізки AB і BC перетинають вертикальні прямі, то ламана CDA їх також перетинає, а горизонтальні прямі, відповідно, не перетинає. Тоді проекція $ABCD$ на горизонтальну пряму має довжину більшу за 1 (між A і C дві вертикальні прямі), а на вертикальну – меншу за 1, що неможливо.

Якщо відрізки AB і BC перетинають (одну і ту ж саму) горизонтальну пряму, то $ABCD$ лежить в проміжку між двома сусідніми вертикалями, а тоді AD і DC також перетинають горизонтальну пряму, що неможливо з тих же міркувань.

Залишився єдиний (з точністю до симетрії) випадок – AB і CD перетинають одну і ту ж вертикальну пряму v, а BC і AD – одну і ту ж горизонтальну пряму h. Тоді A і B лежать під h, а C – над h, тому $BC > AB$. Аналогічно, B і C лежать правіше v, а D – лівіше v, тому $BC < CD$. Тому $AB < BC < CD$, що неможливо.

Розв’язання задач на «принцип Діріхле» сприяє розвиткові логічного мислення, вмінню здійснювати правильні міркування без наочності, правильно співставляти висновки.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.: МЦНМО, 2007. – 472 с.
2. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. — Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2008. — 208 с.

Рафа Наталя Володимирівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗ’ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ З ТЕОРІЇ МАТЕМАТИЧНИХ ІГОР РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Серед задач, які пропонуються учасникам на математичних олімпіадах, є задачі з різних розділів математики, але є й задачі з теорії математичних ігор.

Теорія ігор – розділ прикладної математики, який використовується в соціальних науках (найбільше в економіці), біології, політичних науках, комп'ютерних науках (головним чином для штучного інтелекту) і філософії. Теорія ігор намагається математично зафіксувати поведінку в стратегічних ситуаціях, в яких успіх суб'єкта, що робить вибір залежить від вибору інших учасників.

Теорія ігор широко використовує різноманітні математичні методи і результати теорії ймовірностей, класичного аналізу, функціонального аналізу (особливо важливими є теореми про нерухомі точки), комбінаторної топології, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, та інші.

В деяких іграх можливі ходи противника розбивати на пари. Один з може виграти, відповідаючи парним ходом. В загальному до цього типу відносяться ігри, які допускають симетричну стратегію за одного з гравців.

В різних іграх можливо визначити виграшну ситуацію для кожного з гравців. Щоб це зробити, корисно аналізувати гру з кінця. В невеликій кількості задач припущення про існування виграшної ситуації у одного з гравців інколи можна спростувати (шляхом так названої *передачі ходу*). В такому випадку наявність виграшної стратегії можна обґрунтувати без наявного представлення. У статті ми розглянемо задачу з теорії математичних ігор, яка була запропонована на заключному етапі всеросійської олімпіади з математики для учнів 10 класу $2005-2006$ навчального року, та пропоную два способи розв'язання цієї задачі $[1]$.

Задача. В клітчастому прямокутнику 46×69 відмічені всі $50\cdot 70$ вершин кліток. Два гравця грають в наступну гру: кожним своїм ходом кожен гравець з'єднує дві точки відрізка, при цьому одна точка не може бути кінцем двох проведених відрізків. Відрізки можуть містити спільні точки. Відрізки проводяться до тих пір, поки точки не закінчаться. Якщо після цього перший може вибрати на всіх проведених відрізках направлення так, щоб сума всіх отриманих векторів рівна нульовому вектору, то він виграє, інакше виграє другий. Хто виграє при правильній грі?

Перший спосіб розв'язання

Розіб'ємо всі відмічені точки на пари так, щоб будь-який відрізок з кінцями в точках однієї пари – горизонтальний відрізок довжини 1. Опишемо виграшну стратегію першого гравця. Нехай першим ходом він з'єднає точки з якої-небудь пари. Далі, якщо другий з'єднує відрізком дві точки якої-небудь пари, то перший з'єднує відрізком дві точки другої пари (назвемо ці два проведених відрізка двійкою першого типу). Якщо ж другий з'єднує відрізком дві точки з різних пар, то перший з'єднує відрізком дві залишені точки з цих пар (назвемо ці два проведених відрізка двійкою другого типу). Зауважимо, що кількість точок ділиться на 4, тому останній хід зробить другий. Перший буде робити ходи у відповідь до тих пір, поки не залишиться одна пара – ці дві залишені точки з'єднає відрізком другий гравець. Тепер зауважимо, що в двійці першого типу можна вибрати напрямок так, щоб сума двох векторів рівнялась нульовому вектору, а двійці другого типу можна вибрати напрямок так, щоб сума двох векторів рівнялась горизонтальному вектору довжини 2 (будь-якого з двох напрямків). Тепер першому потрібно так вибрати напрямок в двійках другого типу, щоб сумарна довжина всіх векторів в цій двійці рівнялась або нульовому вектору, або горизонтальному вектору довжини 2. Після цього залишиться тільки два відрізка довжини 1 (перший хід першого гравця і останній хід другого), на яких першому гравцеві потрібно вибрати напрямок так, щоб сума всіх векторів рівнялась нульовому вектору.

Другий спосіб розв'язання

Будемо вважати, що більша сторона прямокутника паралельна осі, Ox а менша – Oy, при цьому лівий нижній кут прямокутника співпадає з початком координат.

Лема 1**.** Нехай гравці провели всі відрізки. Тоді, незалежно від розташування стрілок, проекції вектора суми на кожну з осей буде мати парну довжину.

Доведення. Розглянемо проекцію вектора суми на вісь Ox. Для кожної точки в залежності від напрямку вектора її координата по вісі Ox береться або з знаком плюс, або зі знаком мінус. Сума координат (з відповідними знаками) по вісі Ox всіх точок прямокутника і дасть проекцію вектора суми на вісь Ox. Однак п'ятдесят із цих точок має координату 0, п'ятдесят мають координату 1, …, п'ятдесят мають координату 69. Тому є серед цих чисел парна кількість непарних. Це і означає, що відповідна сума буде парною. Аналогічно проекція вектора суми на вісь Oy буде мати парну довжину.

Лема доведена.

Лема 2. Нехай маємо набір відрізків з кінцями в цілочисельних точках прямокутника 46×69. Тоді можна так вибрати напрямок на цих відрізках, щоб проекція суми на вісь Ox буде менше 140, а на вісь Oy – менше 100.

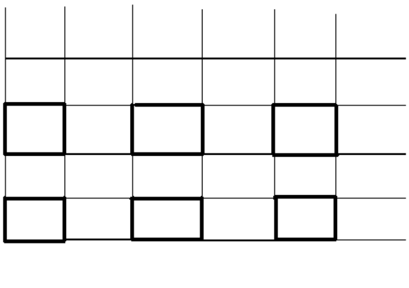
Доведення. Розіб'ємо відрізки набора на чотири групи: паралельних вісі Ox (група A), паралельних вісі Oy (група B), тих,у яких правий кінець вище лівого (група C), і тих, у яких правий кінець нижче лівого (група D). Зауважимо, що якщо взяти два відрізка із однієї групи, то на них так можна вибрати напрямок, що по модулю координати вектора їх суми буде не більше 69 по вісі Ox і не більше 49 по вісі Oy (назвемо такий вектор *коротним*). Також зауважимо, що якщо у наборі вектора всі напрямки поміняти на протилежні, то вектор суми змінить лише знак.

Будемо тепер проводити наступну процедуру. На кожному кроці будемо вибирати пару відрізків із однієї групи і замінювати їх відповідним відрізком, який відповідає короткому вектору (новий відрізок може потрапити в другу групу). Якщо в процесі отримаємо відрізок нульової довжини, викинемо його. Зауважимо тоді, що якщо в отриманому наборі ми можемо розставити напрямок потрібним образом, то і в старому це було можливо.

Через деяке число кроків ми прийдемо до такої ситуації, що в кожній групі будемо не більше одного відрізка. Вибравши напрямок на відрізках із групи C і D, ми отримаємо вектор, проекція якого на вісь Ox буде менше 140, а на вісь Oy – менше 100. Нехай обидві його координати невід'ємні. Якщо тепер на відрізках із групи A і B від'ємні напрямки, то в остаточного векторі сума проекцій буде менше 140, а на вісь Oy – менше 100.

Лема доведена.

Перейдемо до розв'язування задачі. Опишемо стратегію першого гравця. Йому потрібно буде провести 140 горизонтальних відрізків довжини 1 і 100 вертикальних відрізків довжини 1 (назвемо їх *красними*). Тоді, після того як будуть проведені всі відрізки, на всіх не красних відрізках по лемі 2 він так може вибрати напрямок, що проекція вектора суми на вісь Ох буде менше 140, а на Oy – менше 100. Тепер йому залишиться вибрати напрямок на красних відрізках так, щоб проекція вектора суми на кожну із осей буде рівна нулю. Оскільки по лемі 1 проекція вектора суми на кожну із осей буде мати парну довжину, то зможе це зробити і виграти.



Покажемо, як першому гравцеві провести потрібну кількість красних відрізків. Виділимо

$25\cdot 35=875$ квадратів, кожен з яких містить чотири відрізка довжини 1 (см. Рис. 1).

Кожним своїм ходом перший буде відмічати вертикальний і горизонтальний відрізок в одному із квадратів. Для цього йому Рис.1.

потрібно 240 ходів, кожен із яких перший витрачає один квадрат. Зауважимо, що другий кожним своїм ходом «псує» не більше двох квадратів. Таким чином, після кожного ходу першого і другого використовується не більше трьох квадратів. Оскільки $240\cdot 3=720<875$, перший зможе провести 240 красних відрізків потрібних напрямків, що і потрібно.

Таким чином, можна зробити висновок, що розв'язування олімпіадних задач з теорії математичних ігор різними способами дає можливість формувати в учнів вміння і навички застосовувати теоретичний матеріал, що вивчається не лише в шкільному курсі математики, а й виходить за його межі, розвивати пам'ять, логічне мислення та уяву учнів.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы /Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х.Агаханова . – М.:МЦНМО, 2007. –472с.
2. Енциклопедія кібернетики / Н. Н. Воробйов, т. 1, С. 333—334.

Сандульська Ольга Сергіївна

студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ ЯК ШЛЯХ ФОРМУВАННЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ АКТИВНОСТІ УЧНІВ

Сучасний розвиток суспільства у всіх сферах життя вимагає сьогодні від нас пошуку нових шляхів і засобів вирішення нестандартних завдань, формування таких якостей як творчий підхід, нетривіальне мислення і вміння вивчати проблему з різних сторін. Це є метою створення олімпіадних задач з математики. Не випадково академік А. Н. Колмогоров у своїй промові на відкритті порівняв роботу математика з «низкою рішення (часом великих і важких) олімпіадних завдань».

Отже, олімпіадні задачі в математиці – термін для позначення кола завдань, для вирішення яких обов'язково потрібно несподіваний і оригінальний підхід.

Характерна особливість олімпіадних завдань у тому, що розв'язування з вигляду нескладної проблеми може вимагати застосування методів, що використовуються в серйозних математичних дослідженнях. Нижче наводиться олімпіадна задача з математики 1998 року для 9-го класу та способи її розв'язання:

Задача. На відрізку [0; 1] відкладено декілька різних точок. При цьому, кожна з точок розташована або рівно посередині між двома іншими відкладеними точками (не обов'язково сусідними з нею), або рівно посередині між відкладеною точкою і кінцем відрізка. Доведіть, що всі відкладені точки раціональні.

Перший спосіб розв'язання

1^0. Позначимо координати кінців відрізка і відкладених точок через $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$ $(0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} = 1)$. За умовою задачі, виконується n рівностей вигляду

$$x_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i) \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

де кожний із символів a_i і b_i означає яке-небудь з чисел x_j $(j = 0, 1, ..., n+1)$, при цьому можна вважати, що $a_i < x_i < b_i$.

2^0. В усі праві частини цих рівностей, в яких присутній x_1, підставимо його значення з першої рівності. Отримаємо новий набір рівностей (з тими ж лівими частинами, що і в попередньому), праві частини яких уже не містять x_1. Якщо при цьому в правій частині другої рівності з'явиться член вигляду αx_2, то перенесемо його в ліву частину і розділимо обидві частини на $1-\alpha$ (нижче доведемо, що $\alpha \neq 1$). Друга рівність тепер має вигляд:

$$x_2 = \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + ... + \beta_n x_n + \beta_{n+1},$$

де β_i - деякі раціональні числа.

Розглянемо тепер всі рівності, крім першої і другої. В усі праві частини, що містять x_2, підставимо його значення із другої рівності, потім використаємо третю рівність, щоб виразити x_3 через змінні $x_4, ..., x_n$, і підставимо його значення в усі рівності, починаючи з четвертої. Знову ж, потрібно довести, що при цьому не доведеться ділити на нуль.

Повторяючи цю операцію n разів, прийдемо до рівності $x_n = \gamma$ (в правій частині не залишилось жодного невідомого). Неважко зрозуміти, що на кожному кроці всі коефіцієнти раціональні. Дійсно, спочатку це так, а при наших операціях використовуємо тільки додавання, множення, віднімання і ділення.

Отже, x_n раціональне. Далі, x_{n-1} виражено через x_n і раціональні числа, отже, теж раціональне і т.д. Отже, всі числа раціональні.

3^0. Залишилось довести, що на жодному кроці не доведеться ділити на нуль (див. зауваження).

Зауваження

1) Те, що на жодному кроці не доводиться ділити на нуль, принципово: наприклад, система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 2, \\ x_2 = \dfrac{x_1}{2} + 1 \end{cases}$$

має наступний ірраціональний розв'язок: $x_1 = 2\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2} + 1.$

2) Те, що ми робимо, – це по суті метод Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь [2].

Другий спосіб розв'язання

1^0. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – координати відкладених точок. Умова, що точка знаходиться між двома іншими, записується у вигляді лінійного рівняння $x_i = \frac{1}{2}(a+b)$, де a і b - координати інших точок чи кінців відрізка (тобто 0 або 1). Таким чином, координати наших точок є розв'язками деякої системи лінійних рівнянь (позначимо її (*)) з раціональними коефіцієнтами і раціональними вільними членами (будемо називати таку систему *раціональною*). Потрібно довести, що ця система не може мати ірраціонального розв'язку (тобто розв'язку, значення хоча б однієї змінної в якому ірраціональне).

Якщо раціональна система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, то цей розв'язок раціональний. Дійсно, якщо розв'язок єдиний, то його можна знайти методом Гауса, в процесі якого потрібно тільки додавати, віднімати, множити і ділити, а роблячи такі дії з раціональними числами, ми не можемо отримати ірраціональне число.

2^0. Залишилось довести, що розв'язок системи (*) єдиний. Методом від супротивного, нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ і $y_1, y_2, ..., y_n$ - два різних розв'язки даної системи рівнянь.

Тоді числа $t_1 = x_1 - y_1, t_2 = x_2 - y_2, ..., t_n = x_n - y_n$ утворюють ненульовий розв'язок відповідної однорідної системи (*), в якій всі вільні члени замінили на нулі.

Іншими словами, для кожного i виконується лінійна рівність: $t_i = \frac{1}{2}(a+b)$, де a - одне з чисел $t_i \, (i \neq j)$ або нуль. Розглянувши число t_i, яке має максимальний модуль, приходимо до суперечності. Тобто, система має єдиний розв'язок [1].

Література

1. Винберг Э. Б. Курс алгебры. – М.: Факториал Пресс, 2002.
2. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.

Слободян Вікторія Петрівна

студентка 3 курсу, напрям підготовки « Математика»

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ НА ОПЕРАЦІЇ ТА ІНВАРІАНТИ З МІФОЛОГІЧНИМ СЮЖЕТОМ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

У задачах, де потрібно з’ясувати, чи можна за допомогою заданих операцій від одного об’єкта до другого, часто корисно знайти «інваріант» − числову характеристику об’єкту (або функцію із якимись іншими значеннями на множині об’єктів), яка не змінюється при вказаних операціях. Якщо при цьому значення інваріанта на двох об’єктах різні, то перетворити один в інший неможна. У цілочисельних та інших «дискретних» задачах інваріантом може бути остача від ділення на 2 (парність) або на інший натуральний дільник.

Якщо всі задані операції оборотні, то вся множина об’єктів, над якими вони виконуються, розбивається на класи еквівалентності (два об’єкти еквівалентні, якщо один з них може бути одержаний з другого за допомогою даної операції).

У задачах, де потрібно оцінити кількість операцій чи довести, що їх не можна виконувати безліч разів (наприклад, впевнитись у відсутності «циклу»), іноді буває корисно придумати функцію, яка після кожної дії (операції) монотонно зростає (чи спадає).

Легенда про Сізіфа. Вираз «сізіфова праця» означає безплідність, марність будь-якої справи. З'явилося воно завдяки міфу про Сізіфа, який розповів дуже давно Овідій.

Сізіф був сином Еола, бога-повелителя всіх вітрів. Сізіф був царем Корінфа. По всій Греції він вважався першим по хитрості, підступності й спритності розуму. Завдяки цим якостям він зумів зібрати у своєму місті всі мислимі багатства. Коринф славився найбагатшим містом Греції.

Прийшла пора йти йому в світ Аїда. Прийшов за ним Танат, похмурий і зловісний бог смерті, щоб провести його. Але Сізіф, відчувши наближення такого небажаного бога, хитрістю обдурив його і закував у кайдани. Не стало смерті на землі - люди не вмирали, більше не було пишних похоронів, не потрібні стали підношення і жертви богам підземного світу. Рівновага і порядок, встановлені ще самим Зевсом, порушилися. Тільки Арес, бог війни, зміг звільнити Танатоса з полону. Бог смерті все-таки повів душу хитруна Сізіфа в царство тіней.

Але і там Сізіф продовжував хитрувати. Він наказав дружині не ховати його і не приносити жертви підземним богам. Дружина виконала чоловіків заповіт. Аїд і Персефона не дочекалися похоронних жертв. Тоді Сізіф запропонував Аїду виправити ситуацію, а для цього його повинні випустити в живий світ. Він накаже дружині принести жертви богам і повернеться назад. Таким обманом повернувся Сізіф у світ живих, а повертатися в царство тіней не мав наміру. Він жив і бенкетував у своєму палаці, радіючи, що він смертний зміг обдурити богів. Але Танат за наказом Аїда забрав-таки душу хитруна назад у царство мертвих. А Сізіф за таке підступність і всі інші земні обмани покараний - його доля носити величезний камінь на високу круту гору. Важка його робота, тільки виконати її до кінця неможливо: біля самої вершини, коли, здавалося б, залишається трохи до кінця шляху, камінь зривається і котиться до підніжжя. Сізіфові знову доводиться починати все спочатку. Потім знову все повторюється, і так до нескінченності. І ніяк Сізіф не може досягти вершини - кінцевої мети його роботи.

Розглянемо задачу про Сізіфа, яка розглядалася на заключному етапі олімпіади $1994-1995$ року для 9 класу .

Задача. Є три купи каменів. Сізіф переносить по одному каменю з купи в купу. За кожне перетягання він отримує від Зевса кількість монет, рівну різниці числа каменів в купі, в яку він кладе камінь, і числа каменів в купі, з якої він бере камінь (сам камінь, що перетягується, при цьому не враховується). Якщо вказана різниця від'ємна, то Сізіф повертає Зевсові відповідну суму. (Якщо Сізіф не може розплатитися, то великодушний Зевс дозволяє йому здійснювати перетягування у борг.)

У деякий момент виявилось, що всі камені лежать в тих же купах, в яких лежали спочатку. Який найбільший сумарний заробіток Сізіфа на цей момент?

Перший спосіб розв'язання

Будемо називати каміння з однієї купи *знайомими*, а з різних — *незнайомими*. Тоді дохід Сізіфа за одне перетягування дорівнює зміні кількості пар знайомих каменів. Оскільки в кінцевий момент всі камені виявилися в вихідних купах, то загальна зміна кількості знайомств дорівнює нулю, а, означає, і дохід Сізіфа дорівнює нулю.

Другий спосіб розв'язання

Покажемо, що величина $A=ab+bc+ca+S$, де a, b і c — кількість каміння в купах, S — дохід Сізіфа, не зміниться при перетягуванні каміння. Справді, без обмеження спільності можна рахувати, що Сізіф перетягнув камінь з першої купи в другу.

Тоді

$$A'=(a-1)(b+1)+(b+1)c+c(a-1)+S'=A,$$

так як $S'=S+\left(b-(a-1)\right)$. Але величина $ab+bc+ca$ в початковий і кінцевий момент одна и та сама, а, отже, і кінцевий дохід Сізіфа рівний початковому, тобто нулю.

Аналогічним являється рішення, що використовує інваріантність величини

$$B=a^2+b^2+c^2-2S.$$

Третій спосіб розв'язання

Можна перевірити, що якщо поміняти місцями черговість двох перетягань каменів, то S при цьому зміниться на одну і ту ж величину. Крім того, за два перетягання каміння: з купи A в купу B, а потім із B в A, дохід Сізіфа рівний нулю. Таким же буде дохід за три перетягування:

$$A\to B,\ B\to C,\ C\to A.$$

З того, що в кінці всі камені виявилися в вихідних купах, витікає, що порядок перетягання каменів можна змінити так, що всі перетягання розіб'ються на трійки вигляду $A \to B \to C \to A$ і двійки вигляду $A \to B \to A$, що дають Сізіфові нульовий дохід.

Відповідь. 0.

Література

1. Агаханов Н. Х**.** Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006 окружной и финальный этапы/ Агаханов Н. Х**.,** Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д. А., Под редакцией Агаханова Н. Х. – М.: МЦНМО, 2007. – с. 39, 204-205.

Стецюк Олеся Вікторівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ КІЛЬКОМА СПОСОБАМИ З КОМБІНАТОРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Комбінаторна геометрія, ця назва стосується різноманітних оцінок, пов'язаних з розміщеннями, покриттями, різними комбінаціями геометричних фігур. Тут використовуються тільки загальні властивості, пов'язані з розташуванням фігур на площині або в просторі.

Слід також пам'ятати означення опуклої множини (фігури) – це множина точок, яка разом з кожними двома своїми точками містить і увесь відрізок, який з'єднує ці точки. *Опуклою оболонкою* фігури називають найменшу опуклу множину, що містить цю фігуру; опукла оболонка скінченної множини точок – многокутник (у просторі – многогранник) з вершинами в деяких із даних точок.

Розглянемо олімпіадну задачу з даної тематики, яка була запропонована учням 10–го класу на окружній Всеукраїнській математичній олімпіаді у 2003-2004 навчальному році. [2]

Задача. Трикутник T міститься всередині опуклого центрально-симетричного многокутника M. Трикутник T' отримується з трикутника T центральною симетрією відносно деякої точки P, що лежить всередині трикутника T. Довести, що хоча б одна із вершин трикутника T' лежить всередині або на межі многокутника M. [1]

Перший спосіб розв'язання

Нехай O – центр симетрії многокутника, A, B, C – вершини T, A', B', C' – відповідно вершини T'; нехай трикутник ABC при симетрії відносно точки O переходить у трикутник $A_0B_0C_0$ (що лежить у M). Якщо $O = P$, твердження очевидне. Нехай d – промінь прямої OP з вершиною у точці P, який не містить точку O. Тоді d перетинає одну із сторін трикутника ABC, скажімо, AB.

Розглянемо паралелограм ABA_0B_0, що лежить в M. Пряма OP відсікає на ньому відрізок симетричний відносно O; тоді відрізок $A'B'$ перетинається з цією прямою у внутрішній точці K паралелограма (див. рис. 1).

Тепер, оскільки $A'B' \| AB \| A_0B_0$, то одна з точок A' чи B' лежать у цьому паралелограмі (або на його межі), інакше $A'B' > AB$, що не можливо.

Другий спосіб розв'язання

У цьому випадку для розв'язання скористаємося лемою:

Лема. Якщо на площині дано трикутник XYZ і точка S, то трикутник XYZ покривається трикутниками SXY, SYZ, SZX.

Доведення. Дійсно, прямі XY, YZ, ZX розбивають площину на 7 частин (див. рис. 2).

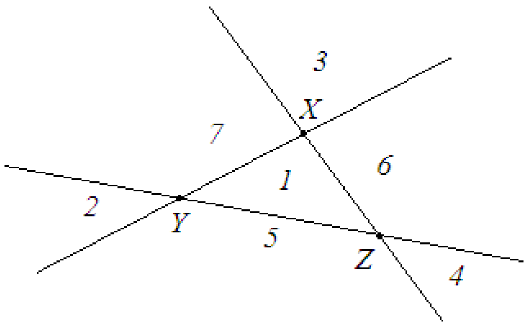


Рис. 2

Якщо S лежить в частині 1, то трикутник $XYZ = SXY \cup SYZ \cup SZX$; якщо S лежить в частині 2, то $XYZ \subset SYZ$ (для частин 3, 4 аналогічно); якщо S лежить в частині 5, то $XYZ \subset SXY \subset SZX$ (для частин 6, 7 аналогічно).

Перейдемо до розв'язання задачі. Позначимо через O центр симетрії многокутника M, через A, B, C – вершини трикутника T, а через A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, CA, AB відповідно.

Розглянемо многокутник V_A, що є опуклою оболонкою точок O, A, B_1, C_1. Зауважимо, що V_A покриває AB_1C_1. Визначимо також V_B та V_C як опуклі оболонки четвірок O, B, C_1, A_1 та O, C, A_1, B_1. При цьому V_B покриває BA_1C_1, V_C покриває CA_1B_1. Крім того, $V_A \supset OB_1C_1$, $V_B \supset OC_1A_1$, $V_C \supset OA_1B_1$. Звідси, застосовуючи лему, отримуємо, що об'єднання V многокутників V_A, V_B, V_C покриває $A_1B_1C_1$. Отже, V покриває об'єднання трикутників AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1, $A_1B_1C_1$, тобто V покриває ABC. Це означає, що один із многокутників V_A, V_B, V_C містить точку P, нехай, для означеності, $P \in V_A$ (див. рис. 3).

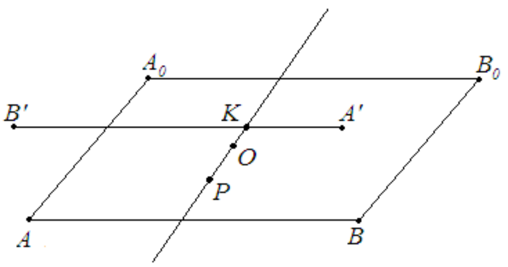


Рис. 1

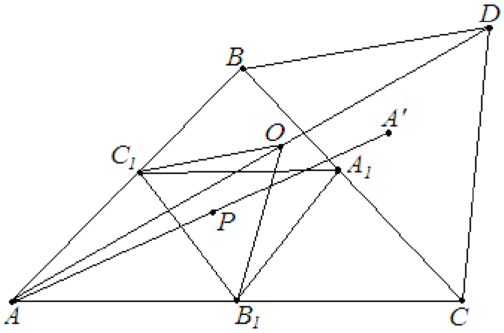


Рис. 3

Нехай A' – вершина трикутника T', тобто точка, симетрична точці A відносно P; нехай D – точка, симетрична точці A відносно

O. При гомотетії з центром в точці A і коефіцієнтом $k = 2$ точка P перейде в A', O перейде в D, C_1 перейде в B, B_1 перейде в C. Відповідно, многокутник V_A перейде в опуклу оболонку U точок D, A, C, B, причому точка A' міститься у U. Так як A, B, $C \in M$ і M – симетричний відносно O, то $D \in M$. Оскільки M – опуклий, $U \in M$. Значить, $A' \in M$, що і потрібно було показати.

Розв'язання задач з комбінаторної геометрії сприяє розвитку логічного мислення, просторової уяви, уміння міркувати та правильно співставляти висновки.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы/ Н. Х. Агаханов и др. под ред. Н. Х. Агаханова. – М.: МЦНМО, 2007. – 472 с.
2. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.

Утямишева Олена Андріївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ НА ВЕКТОРИ ДЕКІЛЬКОМА СПОСОБАМИ

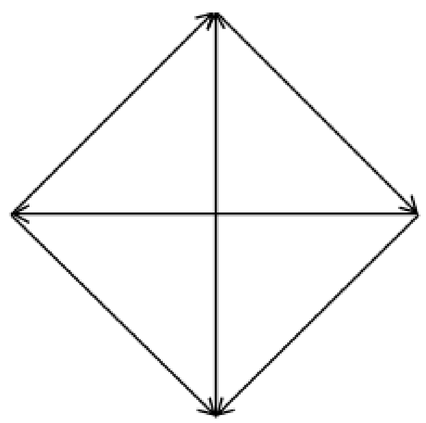
Розв'язування олімпіадних задач цікаві як для учнів загальноосвітніх навчальних закладів, так і для учителів, які керують математичними факультативами і гуртками. Вони дають змогу підвищити рівень вивчення математики у класі і у школі. Використовувати такі задачі можна не лише в межах олімпіад, а і в позакласній роботі з учнями.

Розглянута нами задача взята із збірника «Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2006». Передбачена вона для учнів 11 класів. Розглянемо два способи її розв'язання (автор С. Токарев) з використанням деяких властивостей векторів.

<u>*Задача.*</u> Дано правильний $2n$- кутник. Довести, що на всіх його сторонах і діагоналях можна розставити стрілки так, щоб сума отриманих векторів була рівна $\vec{0}$. [1, С. 9]

Перший спосіб розв'язання

Необхідна розстановка стрілок для квадрата зображена на рис. 1.



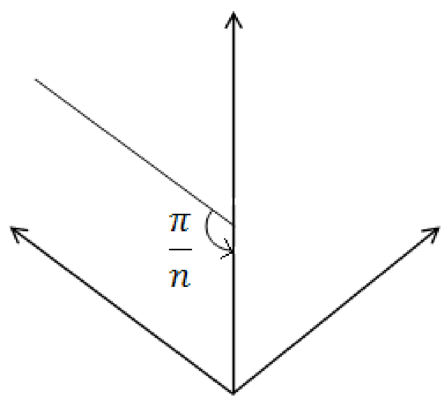


Рис. 1 Рис. 2

Взявши вершини $2n$-кутника ($n \geq 3$) через одну, отримаємо два правильних n- кутника M_1 і M_2. Припустимо, що розв'язання задачі для правильного n- кутника нам відоме. Для розв'язання цієї задачі у випадку $2n$-кутника, достатньо з кожної вершини M_1 провести вектори у всі вершини M_2 (рис. 2); оскільки їх сума не зміниться при повороті на кут $\frac{2\pi}{n}$ навколо центра, то вона дорівнює $\vec{0}$.

Якщо n – непарне число, то проведемо з кожної вершини вектори в наступні за нею $\frac{n-1}{2}$ вершини (рис. 2), тоді їх сума дорівнює $\vec{0}$, оскільки вона не зміниться при повороті на кут $\frac{\pi}{n}$ навколо центра.

Отже, почавши з квадрата або многокутника з непарною кількістю кутів, подвоєнням числа сторін отримати необхідну розстановку стрілок для будь-якого $2n$-кутника.

Другий спосіб розв'язання

Діагональ правильного многокутника називатимемо *головною*, якщо вона проходить через його центр. Для кожної неголовної діагоналі існує симетрична їй відносно центра неголовна діагональ. Таким чином, всі неголовні діагоналі розділяються на пари. Розставивши в кожній такій парі стрілки в протилежних напрямах, ми отримаємо вектори, які в сумі будуть рівні $\vec{0}$ (рис. 3).

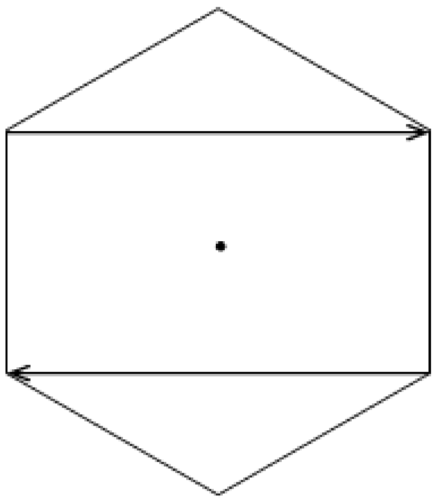


Рис. 3

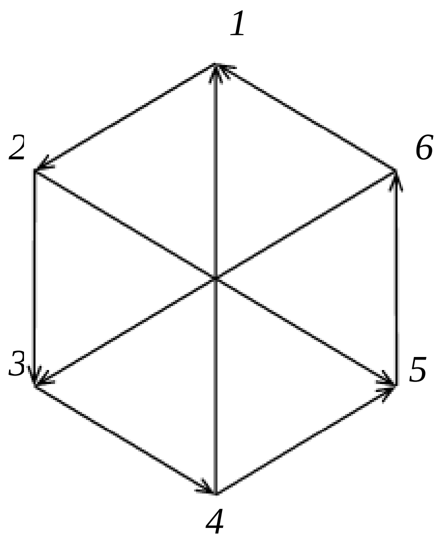


Рис. 4

Залишилося розставити стрілки на сторонах і головних діагоналях.

Випадок $n = 2k+1$ (рис. 4).

Розставимо стрілки на сторонах по циклу, отримані вектори в сумі дадуть $\vec{0}$. Поставимо стрілки на головних діагоналях до 1-ї, 3-ї,…, $(2n-1)$-ї вершин.

Тоді на кожній діагоналі виявиться рівно одна стрілка. Отримана система векторів переходить сама в себе при повороті навколо центра на кут $\frac{2\pi}{2k+1}$, отже, при такому повороті в себе переходить і вектор, який є їх сумою, а тому він дорівнює $\vec{0}$.

Випадок $n = 2k$ (рис. 5).

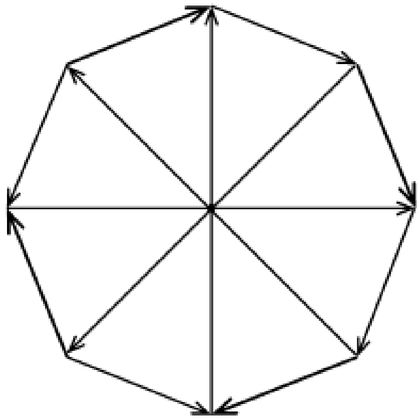


Рис. 5

Виділимо в многокутнику цикли, які складаються з пар сусідніх головних діагоналей і сторін, які їх з'єднують. В кожному циклі поставимо стрілки так, щоб сума отриманих векторів була рівна $\vec{0}$. Залишилось поставити стрілки на сторонах, взятих через одну. Розставимо їх по циклу і отримаємо $\vec{0}$, оскільки вони переходять в себе при повороті на кут $\frac{\pi}{k}$ навколо центра.

Відмітимо теорему, доведену Л. Ейлером: якщо у многокутнику з кожної вершини виходить парне число відрізків, які з'єднують її з іншими вершинами, то всі ці відрізки можна зобразити, не відриваючи олівець від листка і не зображаючи жоден відрізок двічі. Звідси слідує розв'язання нашої задачі для многокутника з непарною кількістю кутів і не обов'язково правильного.

Як бачимо розв'язання даної задачі сприяє розвитку логічного мислення, уяви та пам'яті учнів. Щоб розв'язати її різними способами і визначити найбільш раціональний потрібно володіти матеріалом на досить високому рівні. Це ще раз підтверджує вагомість проведення учителями в школі позакласної роботи для вивчення не лише основних типів завдань, а і нестандартних.

Література

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2006: Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.: МЦНМО, 2007. – 427 с.

Хапіцької Марія Ігорівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДЕКІЛЬКА СПОСОБІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ ОЛІМПІАДНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО КУТИ І КОЛА

Дана задача була запропонована у 2000 – 2001 навчальному році одинадцятикласникам на всеросійській олімпіаді з математики. Оригінальність полягає в тому, що її можна розв'язувати декількома способами. При цьому слід зауважити, що обидва способи рівносильні за складністю, тому учні мають можливість обрати доступніший для себе.

Означення 1. Бісектриса – відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає дану вершину з точкою на протилежній стороні.

Означення 2. Дотична до кола – пряма, що має з колом тільки одну спільну точку (точка дотику).

Два кола, що перетинаються, мають дві спільні дотичні; ці дотичні перетинаються в точці, що лежить на прямій, яка сполучає центри; якщо ж радіуси цих кіл рівні, то спільні дотичні паралельні.

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику; якщо пряма проходить через кінець радіуса, що лежить на колі, і перпендикулярна до радіуса, то вона є дотичною.

Кут, вписаний в коло, дорівнює половині відповідного центрального кута.

Означення 3. Гомотетією відносно центра O називається перетворення, за яким відстань від кожної точки фігури до даного центра змінюється в даному напрямку у k разів (k – коефіцієнт гомотетії); при цьому фігура переходить у гомотетичну їй фігуру[1].

<u>*Задача.*</u> Нехай AD – бісектриса трикутника ABC, і пряма l дотикається до кіл, описаних навколо трикутників ADB та ADC в точках M і N відповідно. Доведіть, що коло, яке проходить через середини відрізків BD, DC і MN, дотикається до прямої l [2].

Перший спосіб розв'язання

Позначимо центри кіл, описаних навколо трикутників ADB та ADC через O_1 і O_2, а середини відрізків BD, DC, MN, DO_2 і O_1O_2 – через A_1, A_2, K, E і O відповідно (рис. 1). Нехай $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$. Тоді $\angle A_1O_1D = \angle A_2O_2D = \alpha$ (так як половина центрального кута дорівнює вписаному, що спирається на ту саму дугу). Відрізок OK – середня лінія трапеції (або прямокутника) O_1MNO_2, звіди слідує, що $OK \perp l$, і $OK = \frac{O_1M + O_2N}{2} = \frac{O_1D}{2} + \frac{O_2D}{2} = OE + EA_2$ Помітимо, що точки O, E і A_2 лежать на одній прямій, так як

$\angle OEO_2 + \angle O_2EA_2 = \angle O_1DO_2 + \angle O_2EA_2 = \angle O_1AO_2 + (180^\circ - \angle DO_2C) = 2\alpha +$
$+ (180^\circ - 2\alpha) = 180^\circ$,

тобто $OK = OE + EA_2 = OA_2$. Аналогічно доводиться, що $OA_1 = OK$. Це означає, що точки A_1, A_2, K лежать на колі з центром O, а так як $OK \perp l$, то це коло дотикається до прямої l.

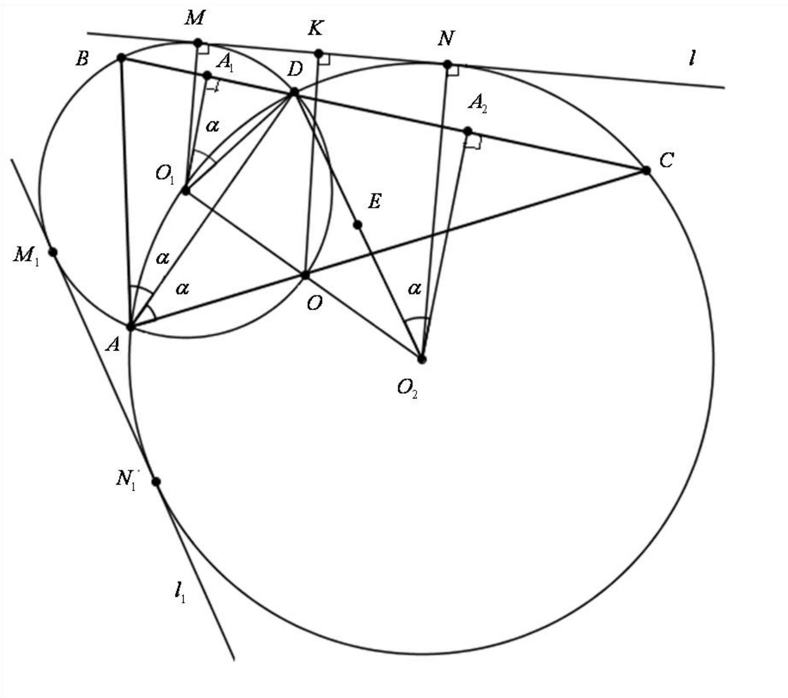


Рис. 6

Випадок, коли замість прямої l розглядається пряма l_1, доводиться аналогічно.

Другий спосіб розв'язання

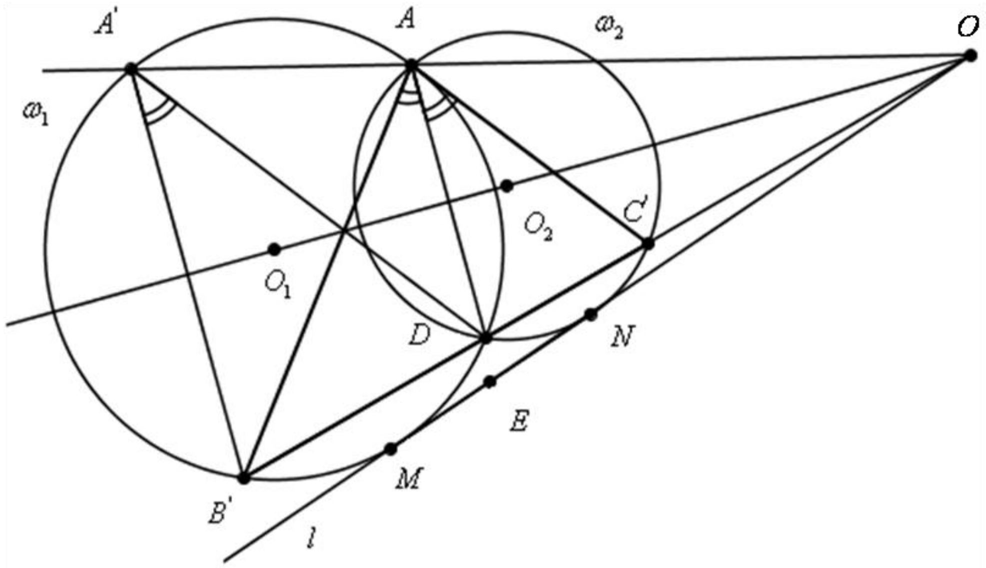


Рис. 7

Нехай радіуси кіл ω_1 і ω_2, описаних навколо трикутників ADB і ADC, рівні R_1 і R_2. Якщо ці радіуси різні, то пряма l перетинає лінію центрів O_1O_2 в точці O (рис. 2). Нехай OD перетинає кола в точках B' та C', і OA перетинає ω_1 в точці A'. При гомотетії H з центром O і коефіцієнтом $k = \frac{R_1}{R_2}$ точки C', D і A переходять в точки D, B' і A' відповідно, звідси слідує, що $\angle DAC' = \angle B'A'D$. З іншого боку, $\angle B'A'D = \angle B'AD$, тому $\angle B'AD = \angle C'AD$. А це означає, що точки B' і C' співпадають з точками B і C, так як в іншому випадку один із кутів BAD і CAD був би меншим α, а інший – більший за α $(\alpha = \angle B'AD = \angle C'AD)$.

Розглянемо гомотетію H_1 з центром O, яка переводить ω_1 в коло ω, що проходить через точку E – середину відрізка MN. З того, що l проходить через точку O і ω_2 дотикається до l випливає, що ω дотикається до l в точці E. Крім того, із гомотетії трикутників ONC і OMD (гомотетія H) випливає, що NC і MD паралельні. Крім того, $H_1(C) = C_1$, де EC_1 і NC паралельні. Тому EC_1 – середня лінія трапеції $CNMD$, тобто гомотетія H_1 переводить точку C в середину DC. Аналогічно, вона переводить D в середину відрізка BD. Це означає, що ω проходить через середини відрізків BD і DC.

Якщо ж $R_1 = R_2$, то замість гомотетії потрібно розглянути паралельне перенесення на вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{O_2O_1}$.

Отже, розв'язування даної задачі розвиває в учнів увагу, мислення, уяву. А також потребує ґрунтовних знань з шкільного курсу геометрії.

Література

1. Бровченко О.М. Геометрія в таблицях і схемах / Бровченко О.М. – К.: Логос, 2005. – 128 с. – (Серія «Бібліотека школяра»).
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 – 2006: Окружной и финальный этапы / Н.Х.Агаханов и др. Под ред. Н.Х.Агаханова. – М.:МНЦМО, 2007. – 472с.

Чабан Наталія Володимирівна
студентка 1 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ ОДНІЄЇ СИМЕТРИЧНОЇ НЕРІВНОСТІ

Доведення нерівностей – традиційна задача на математичних олімпіадах, оскільки вимагає від учнів гнучкого мислення.

«Арсенал» для доведення нерівностей достатньо різноманітний і часто одну і ту ж задачу можна довести різними способами. Проілюструємо це на такому прикладі. [3, с.30]

Довести, що для довільних $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ має місце нерівність

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{1}{2}(x+y+z) \qquad (*)$$

Перший спосіб розв'язання (з використанням нерівності Коші).

Нерівність Коші для двох чисел полягає в тому, що для довільних $a\geq 0, b\geq 0$:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\,.$$

Застосуємо нерівність Коші послідовно для додатних чисел $\frac{x^2}{y+z}$ та $\frac{y+z}{4}$, $\frac{y^2}{x+z}$ та $\frac{x+z}{4}$, $\frac{z^2}{x+y}$ та $\frac{x+y}{4}$.

Дістанемо:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{x^2}{y+z}\cdot\frac{y+z}{4}}=x,\\ \frac{y^2}{x+z}+\frac{x+z}{4}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{y^2}{x+z}\cdot\frac{x+z}{4}}=y,\\ \frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{z^2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{4}}=z.\end{cases}$$

Додавши ці три нерівності, одержимо:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{2(x+y+z)}{4}\geq x+y+z\,,$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{1}{2}(x+y+z),$$

що й потрібно було довести.

Другий спосіб розв'язання

Базовим у цьому способі буде таке твердження.

Лема 1.Для довільних $x_1,x_2,y_1,y_2>0$, має місце $\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}\geq\frac{(x_1+x_2)^2}{y_1+y_2}$.

Доведення леми 1.

Складемо різницю між правою і лівою частинами нерівності.

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}-\frac{(x_1+x_2)^2}{y_1+y_2}=\frac{x_1^2\left(y_1y_2+y_2^2\right)+x_2^2\left(y_1^2+y_1y_2\right)-y_1y_2\left(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\right)}{y_1y_2(y_1+y_2)}=$$

$$=\frac{x_1^2y_1y_2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_2^2y_1y_2-x_1^2y_1y_2-2x_1x_2y_1y_2-x_2^2y_1y_2}{y_1y_2(y_1+y_2)}=$$

$$=\frac{(x_1y_2)^2+(x_2y_1)^2-2x_1x_2y_1y_2}{y_1y_2(y_1+y_2)}=\frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{y_1y_2(y_1+y_2)}\geq 0.$$

Наслідок. Для довільних додатних $x_1,...,x_n$, $y_1,...,y_n$ виконується:

$$\frac{x_1^{\ 2}}{y_1}+\frac{x_2^{\ 2}}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geq\frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{y_1+\ldots+y_n}.$$

Отже:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{1}{2}(x+y+z).$$

Третій спосіб розв'язання

Перейдемо до нових змінних.

Нехай $\begin{cases}x+y=a,\\ y+z=b,\\ x+z=c.\end{cases}$

Очевидно, що $a,b,c>0$.

Додавши останні три рівності, матимемо:

$$2(x+y+z)=a+b+c,$$

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Звідки:

$$\begin{cases}x=\dfrac{a+b+c}{2}-(z+y)=\dfrac{a+b+c}{2}-b=\dfrac{a-b+c}{2},\\ y=\dfrac{a+b+c}{2}-(x+z)=\dfrac{a+b+c}{2}-c=\dfrac{a+b-c}{2},\\ z=\dfrac{a+b+c}{2}-(x+y)=\dfrac{a+b+c}{2}-a=\dfrac{-a+b+c}{2}\end{cases}$$

Підставимо ці рівності у нашу нерівність:

$$\frac{\left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2}{b}+\frac{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2}{c}+\frac{\left(\frac{a-b+c}{2}\right)^2}{a}\geq\frac{1}{4}(a+b+c);$$

$$\frac{(a-b+c)^2}{b}+\frac{(a+b-c)^2}{c}+\frac{(-a+b+c)^2}{a}\geq a+b+c.$$

Для подальшого доведення застосуємо наступну лему.

Лема 2. Для довільних $x>0, y>0$: $\dfrac{x^2}{y}\geq 2x-y$.

Справді, $\dfrac{x^2}{y}-2x+y=\dfrac{x^2-2xy+y^2}{y}=\dfrac{(x-y)^2}{y}\geq 0.$

Тоді:

$$\begin{cases}\dfrac{(a-b+c)^2}{b}\geq 2(a-b+c)-b=2a-3b+2c,\\ \dfrac{(a+b-c)^2}{c}\geq 2(a+b-c)-c=2a+2b-3c,\\ \dfrac{(-a+b+c)^2}{a}\geq 2(-a+b+c)-a=-3a+2b+2c.\end{cases}$$

Додавши ці три нерівності, отримаємо:

$$\frac{(a-b+c)^2}{b}+\frac{(a+b-c)^2}{c}+\frac{(-a+b+c)^2}{a}\ge a+b+c,$$

що й треба було довести.

Четвертий спосіб розв'язання

Використання леми 2 безпосередньо для виразів $\frac{x^2}{y+z}$, $\frac{y^2}{x+z}$, $\frac{z^2}{x+y}$ не приводить до нерівності (*).

Втім з леми 2 встановлюємо такі співвідношення:

$$\begin{cases}\frac{4x^2}{y+z}\ge 4x-y-z,\\ \frac{4y^2}{x+z}\ge 4y-x-z,\\ \frac{4y^2}{x+z}\ge 4y-x-z.\end{cases}$$

Додавши останні три нерівності, дістанемо:

$$\frac{4x^2}{y+z}+\frac{4y^2}{x+z}+\frac{4z^2}{x+y}\ge 4x-y-z+4y-x-z+4z-x-y;$$

$$4\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)\ge 2(x+y+z);$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{1}{2}(x+y+z).$$

П'ятий спосіб розв'язання

Цей спосіб ґрунтується на нерівності Коші-Буняковського:
$\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right)\ge\left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2$ для довільних $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$.

Якщо позначити $\vec{a}(x_1,\ldots,x_n)$, $\vec{b}(y_1,\ldots,y_n)$, то нерівність Коші-Буняковського набуває виду $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\ge\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Розглянемо вектори $\vec{a}\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}};\frac{y}{\sqrt{x+z}};\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$, $\vec{b}\left(\sqrt{y+z};\sqrt{x+z};\sqrt{x+y}\right)$.

Тоді $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\ge\vec{a}\cdot\vec{b}$ і

$$\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{y+z}\right)^2+\left(\sqrt{x+z}\right)^2+\left(\sqrt{x+y}\right)^2}\ge$$

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}\cdot\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{x+z}}\cdot\sqrt{x+z}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\cdot\sqrt{x+y};$$

Після спрощень і піднесення до квадрату, одержимо:

$$\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)\cdot 2\cdot(x+y+z)\ge(x+y+z)^2.$$

Поділивши обидві частини нерівності на $2(x+y+z)$, отримаємо нерівність (*).

Шостий спосіб розв'язання

Цей спосіб базується на так званій перестановочній нерівності. [2]
Нехай маємо два набори чисел $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$, $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ і нехай $(i_1, i_2, .., i_n)$ – деяка перестановка чисел 1,2,…,n.
Позначимо:

$$M = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n,$$

$$m = a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1.$$

Тоді для довільних $(i_1, ..., i_n)$ виконується така нерівність:

$$m \le a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + ... + a_nb_{i_n} \le M.$$

В силу симетричності нерівності (*), не втрачаючи загальності, можна припустити, що $x \le y \le z,$ тоді легко перевірити, що $\frac{x}{y+z} \le \frac{y}{x+z} \le \frac{z}{x+y}$.
Далі, застосовуючи перестановочну нерівність для вказаних наборів, знаходимо нерівності:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{xy}{x+z} + \frac{yz}{x+y}\frac{zx}{y+z},$$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{yz}{x+z} + \frac{zx}{x+y} + \frac{xy}{y+z},$$

додавши які, отримуємо нерівність (*):

$$2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right) \ge x+y+z,$$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Література:

1. Перехейда О.М. Доведення нерівностей / О.М. Перехейда, Р.П. Ушаков. – Х.: Вид. гр.. «Основа», 2003. – 96 с.
2. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіад них задач з математики (і не тільки їх): посібник для підготовки до мате2матичних олімпіад (І.В. Федак. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – С. 130–152.
3. Мерзляк А.Г., Полонський В. Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, 2009. – С.11 – 36.

Швидюк Ігор Васильович

студент магістратури, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОЛІМПІАДНОЇ ЗАДАЧІ З МАТЕМАТИКИ РІЗНИМИ СПОСОБАМИ

Пошук різних методів розв'язання дуже важливий як для учнів, так і для студентів, тому що це розвиває логіку, удосконалює знання з теми, формує практичні навички, а також розвиває мислення. У даній статті буде розглянуто декілька способів розв'язання завдання олімпіадного рівня, яке пропонувалось у 1995-1996 роках в 11 класі . Отже,

№101. Дана функція $f(x)=\left|4-4|x|\right|-2$. Скільки розв'язків має рівняння $f\left(f\left(x\right)\right)=x$? [1, с.19]

Перший спосіб розв'язання

Нехай x_0 – розв'язок рівняння $f\left(f\left(x\right)\right)=x$, а $y_0=f\left(x_0\right)$. Тоді і $x_0=f\left(y_0\right)$, а тому точка з координатами $\left(x_0;y_0\right)$ належить кожному з графіків $y=f\left(x\right)$ і $x=f\left(y\right)$. Навпаки, якщо точка $\left(x_0;y_0\right)$ належить перетину цих графіків, то $y_0=f\left(x_0\right)$ і $x_0=f\left(x_0\right)$, звідки $f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0$. Тим самим показано, що кількість розв'язків рівняння $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ співпадає з кількістю точок перетину графіків $y=f\left(x\right)$ та $x=f\left(y\right)$, а їх 16 (див. рис.1) [1, с.141]

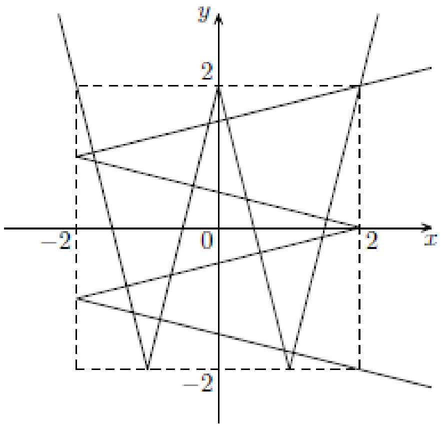


Рис.1

Другий спосіб розв'язання

Розв'яжемо дане рівняння аналітично. Для цього запишемо композицію даних функцій: $\left|4-4\left|4-4|x|\right|-2\right|-2=x$. Для його розв'язання будемо користуватись означенням модуля:

$$\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases}f(x), & f(x)\ge 0,\\ -f(x), & f(x)<0.\end{cases}$$

Тепер рівняння еквівалентне сукупності наступних випадків. Запишемо та розв'яжемо їх:

Випадок 1. $\begin{cases}x\ge 0,\\ \left|4-4\left|4-4x\right|-2\right|-2=x.\end{cases}$

Далі послідовно розкриваючи модуль за означенням у рівнянні системи, звичайно ж враховуючи необхідні умови, ми отримаємо такі значення для x:

$$\frac{2}{17};\ \frac{2}{5};\ \frac{10}{17};\ \frac{14}{15};\ \frac{18}{17};\ \frac{22}{15};\ \frac{26}{17};\ 2.$$

Випадок 2. $\begin{cases} x < 0, \\ \left|4-4\left|\left|4+4x\right|-2\right|\right|-2 = x. \end{cases}$

Аналогічно до першого випадку, розкриваючи послідовно значення модуля при різних значеннях змінної, отримаємо такі для неї значення:

$$-\frac{30}{17};\ -\frac{26}{15};\ -\frac{22}{17};\ -\frac{6}{5};\ -\frac{14}{17};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{6}{17};\ -\frac{2}{15}.$$

Як бачимо вихідне рівняння має 16 коренів:

$$-\frac{30}{17};-\frac{26}{15};-\frac{22}{17};-\frac{6}{5};-\frac{14}{17};-\frac{2}{3};-\frac{6}{17};-\frac{2}{15};\frac{2}{17};\frac{2}{5};\frac{10}{17};\frac{14}{15};\frac{18}{17};\frac{22}{15};\frac{26}{17};2.$$

Третій спосіб розв’язання

Підрахувати кількість коренів даного рівняння можна також графічним методом. Для цього нам потрібно лише побудувати графік лівої частини $J(x) = \left|4-4\left|\left|4-4|x|\right|-2\right|\right|-2$ та графік правої частини $g(x) = x$. Скільки разів вони перетнуться – стільки і коренів матиме вихідне рівняння. Для цього потрібно лише нагадати як будувати графіки функцій за допомогою найпростіших геометричних перетворень. Отже після перетворень зображення графіка функції $J(x)$ матиме такий вигляд (див рис. 2):

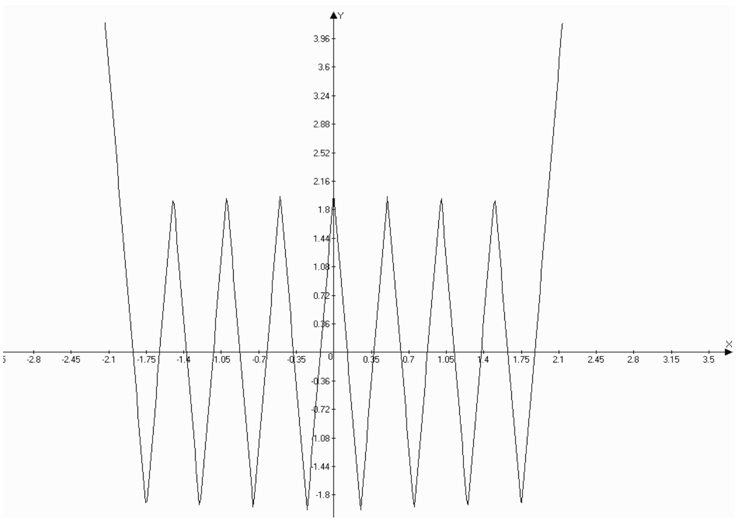


Рис. 2

Зобразивши також графік функції $g(x) = x$ ми зможемо порахувати кількість перетинів. Легко бачити, що їх 16 (див рис. 3).

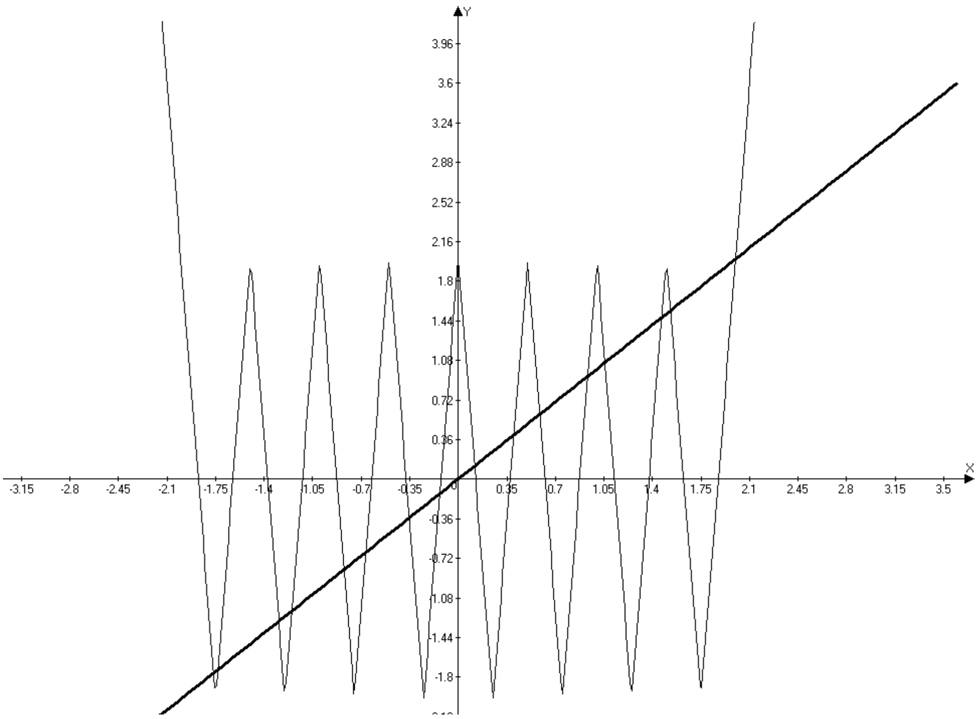


Рис. 3

Відповідь. Рівняння має 16 різних коренів.

Як бачимо, пошук різних способів розв’язання охоплює значну кількість навчального матеріалу, причому в найкращому його розумінні. Незважаючи на те, що способів декілька, є найраціональніші. Раціональний спосіб розв’язання залежить від бази знань, якими володіє учень. Також очевидно, що у кожного способу є свої переваги над іншим та недоліки. Та використання його чи пошук свого, оригінального – це вибір кожного.

Література

1. Агаханов Н.Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006: Окружной и финальный этапы /Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. – М.:МЦНМО, 2007. – 472 с.

Навчально-методичне видання

Методичний пошук. Задача одна – способи розв’язання різні

Випуск 1

Комп’ютерний набір Е. А. Чобанова

Оригінал-макет Ю.В. Фірманюк
О. С. Швабська