УДК 51(07)
ББК 22.1р30
М54

Методичний пошук. Технології введення математичних понять у процесі навчання математики // Студентський науково-методичний збірник. Випуск 2. – Вінниця: СамІздат, 2012. – 339 с.

Затверджено до друку
вченою радою Інституту математики,
фізики і технологічної освіти
(протокол № 6 від 11.01.2012)

Редакційна колегія:

Ю.В. Фірманюк – відповідальний редактор, студентка магістратури
Д.О. Баб'юк – заступник відповідального редактора, студент магістратури
К.І. Полянська – секретар редакційної колегії, студентка четвертого курсу
М.В. Савченко – секретар редакційної колегії, студентка четвертого курсу
Ю.В. Фірманюк – комп'ютерна верстка та дизайн

Відповідальність за автентичність цитат, правильність фактів і посилань несуть автори статей.

Основу збірника складають праці студентів різних курсів напряму підготовки «Математика» Інституту математики, фізики і технологічної освіти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, присвячені актуальній проблемі фахової підготовки майбутніх учителів математики: формування умов якісного засвоєння учнями математичних понять у процесі навчання математики.

Для вчителів і студентів напряму підготовки «Математика».

Рецензенти:

О.І. Матяш, кандидат педагогічних наук, доцент
І.О. Рокіцький, кандидат педагогічних наук, професор університету
В.А. Ясінський, заслужений вчитель України, доцент
В.С. Гарвацький, кандидат фізико-математичних наук, доцент
М.В. Миронюк, кандидат педагогічних наук, доцент
Л.Ф. Михайленко, кандидат педагогічних наук, доцент
І.В. Калашніков, кандидат педагогічних наук, доцент
О.Л. Коношевський, кандидат педагогічних наук, доцент
Л.Й. Наконечна, кандидат педагогічних наук, старший викладач
О.Б. Панасенко, кандидат фізико-математичних наук, старший викладач

ЗМІСТ

<u>РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ</u>

Баб'юк Дмитро Олександрович
студент магістратури, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ НОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ В УМОВАХ ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕРАКТИВНОЇ ДОШКИ

Постановка проблеми. Науково-технічний прогрес та сучасна педагогічна наука, забезпечуючи вчителя найновішими методиками і технічними засобами подачі навчального матеріалу, вимагають від нього постійної самоосвіти та зусиль щодо вдосконалення педагогічної майстерності, як однієї з найвагоміших умов забезпечення належного рівня навчально-виховного процесу. Сучасні освітні теорії говорять про необхідність стимулювати зацікавленість учнів, що є наріжним каменем знання. У педагогічному процесі існує багата педагогічна традиція щодо поліпшення сприйняття навчальної інформації.

Останнім часом інтерактивні технології активно входять у наше життя, допомагають кожному максимально розкрити власний творчий потенціал, досягти успіхів у навчанні та фаховій діяльності, зробити світ яскравішим. Сьогодні до традиційних «помічників» вчителя математики, таких як дошка й крейда, додаються сучасні пристрої: комп'ютер, проектор, інтерактивна дошка. Аналізуючи проблему використання інтерактивної дошки на уроках математики ми прийшли до висновку, що вчителі не забезпечені дидактичними матеріалами та методичними рекомендаціями.

Аналіз останніх досліджень. Питанням використання інтерактивної дошки в освіті присвячені роботи JI П. Бельковец, К. Волкова Н.Н. Гомуліной, С.В. Кувшинова, А.В. Парфенової, E.JI. Рачевського, І. Рогожкина, Д.Ю. Усенкова, Е.І. Ярославцевой, S. Hennessy, R. Deaney. Ruthven, M. Winterbottom.

На сьогоднішній день проблему використання інтерактивних мультимедійних засобів навчання досліджували І. Гонтаренко, Н. Агеєва, Л.Н. Кримова (Барнаул) та інші. На офіційних сайтах розробники проводять різноманітні курси та конкурси на кращий урок з використанням цих технологій.

Аналіз літератури з проблеми упровадження технології SMART засвідчує наявність значної кількості робіт, присвячених питанню розробки навчальних матеріалів до уроків заданої тематики та методики застосування інтерактивної дошки на уроках. Проте теоретичний аспект проблеми проектування й застосування інтерактивних мультимедійних матеріалів у навчальному процесі залишається актуальним.

Мета даної статті: виокремити та обґрунтувати, чому використання інтерактивної дошки у процесі введення математичних понять на уроках математики в школі значно впливає на якість сприйняття та засвоєння учнями нового навчального матеріалу.

Виклад основного матеріалу. З позицій філософії, процес пізнання інтерпретується як відображення об’єктивної дійсності в нашій свідомості, без відображення пізнання не існує.

Відображення учня починається з відчуття, без якого неможливе формування в свідомості якихось образів, знань. Тому органи чуттів і створені на їх основі почуттєві методи пізнання являють собою канал, через який інформація від об’єкта пізнання прямує до свідомості. Почуттєве пізнання закінчується сприйняттям відображення об’єкта, тобто вводом його органами чуттів у свідомість учня.

Органи чуттів людини мають різну здатність до сприйняття та запам’ятовування інформації. На рис. 1 наведено їх порівняльну характеристику.

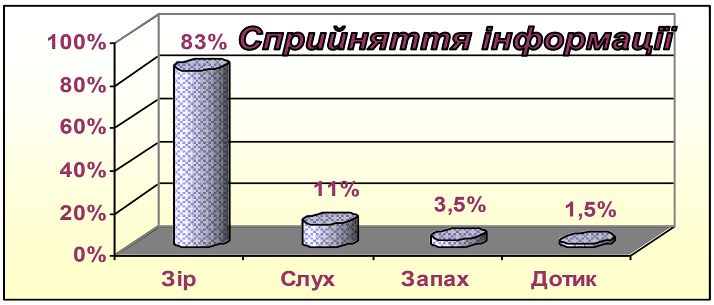


Рис.1 Порівняльна характеристика сприйняття інформації.

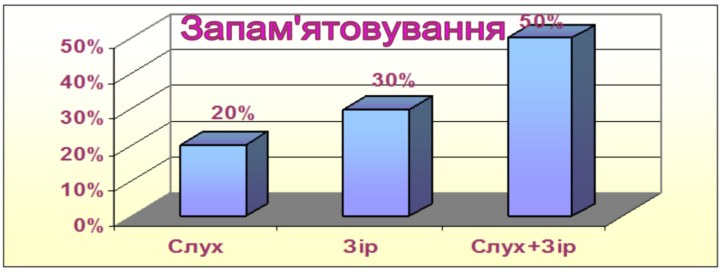


Рис.2 Порівняльна характеристика запам’ятовування інформації.

Застосування інтерактивних дошок на уроках тільки розширює можливості органів чуттів. Технічні засоби взагалі і навчання зокрема в пізнавальному процесі виконують роль знарядь праці вчителя і учня, вони служать продовженням органів чуттів.

З наведених діаграм очевидно, що основними каналами прийому та запам’ятовування інформації в навчальному процесі є зоровий і слуховий канали Рис. 2. Відповідно основними формами представлення інформації – мова, слово, за допомогою яких вчитель кодує інформацію і передає її учням.

Позитив при введені нових математичних понять на уроках математики із використанням інтерактивної дошки:

- обсяг матеріалу, який можна показати, обговорити, виправити, акцентувати на уроці набагато більший, ніж при використання звичайної дошки;
- інтерактивна дошка – інтерактивний метод навчання (доторкання до об’єктів поглиблює їх розуміння багатьох понять);

- дозволяє в реальному часі наносити на проектоване зображення позначки на важливі ділянки, малювати схеми або коректувати їх;
- де б не сидів учень на першій чи на останній парті - з кожного куточка класу добре видно презентаційний матеріал;

Розглянемо, за рахунок чого відбувається стійке підвищення ефективності сприйняття та засвоєння нових математичних понять в умовах використання інтерактивної дошки на уроці математики.

Дослідження показують, що інтерактивне навчання, при правильному застосуванні, робить можливим різко збільшити процент засвоєння матеріалу, оскільки запам'ятовування відбувається не лише через "зазубрювання" означень та формул а й в значній мірі завдяки зоровій пам'яті та використанню аналогій із оточуючими речами. Результати досліджень відображені в схемі, що отримали назву «Піраміда навчання»:

- Лекція - 5 % засвоєння
- Самостійне читання - 10 % засвоєння
- Відео/аудіо матеріали - 20 % засвоєння
- Демонстрація – 30 % засвоєння
- Дискусійні групи - 50 % засвоєння
- Практика через дію - 70 % засвоєння
- Навчання інших - 90 % засвоєння

Звідси видно, що використання демонстрації, на відміну від лекції збільшує рівень засвоєння з 5% до 30%.

Звичайно, є теми, при вивченні яких ефективність інтерактивної дошки не так очевидна, але використання дошки доцільне навіть у цьому випадку, тому що дозволяє задіяти її фрагментарно.

Слід зазначити, що час на попередню підготовку вчителя при використанні інтерактивної дошки на першому етапі, безсумнівно, збільшується, однак поступово накопичується методична база, що створюється спільно вчителями й учнями, а це значно полегшує таку підготовку в подальшому.

Також слід зазначити, що використання інтерактивної дошки дозволяє підвищити увагу (зацікавленість) учнів за рахунок новизни способу викладання матеріалу. Підвищується й інтерес до математики в цілому. Учні активно включаються в підготовку презентацій до уроку, що у свою чергу розвиває в них навички навчально-дослідницької діяльності та дозволяє домогтися кращих результатів не тільки у вивченні математики, а й інформатики, фізики тощо.

Інтерактивна дошка надає учителю можливість створювати нестандартні наочності, необхідні майже на кожному етапі уроку. Звичайна шкільна дошка, таблиці та плакати не дають таких можливостей для створення різноманітних нескінченних наочних кроків уроку та не можуть стати ігровим полем навчально-виховного процесу, до якого б із радістю долучалися учні, і, як наслідок, долучалися б до розкриття різноманітних математичних таємниць. Інтерактивна дошка допомагає зробити будь-яке пояснення наочним та доступним.

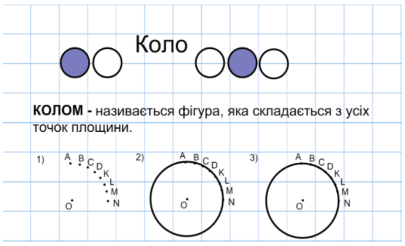
Розглянемо декілька ситуацій, де ми можемо успішно використовувати програмне забезпечення інтерактивної дошки на уроках математики. Наприклад:

- Для поступового відкриття учням необхідної інформації або повернення до вже використаної.
- Для взаємодії різних об'єктів, їх руху і обертання на потрібний кут.
- Для комбінування вмісту галереї малюнків, приєднання до об'єкта звуку або посилань на іншу сторінку презентації, веб-сторінку, файл у комп'ютері.
- Можливість переміщення об'єктів на екрані. У своїй роботі ми використовуємо її зокрема, при класифікації досліджуваних понять за різними ознаками і при проведенні гри «Збери визначення", в якій необхідно скласти вірні визначення декількох понять з наявних фрагментів визначень. При знайомстві учнів з «Танграмом» використовую можливість пересувати частини головоломки, розгортати і будувати з них геометричні фігури і фігурки тварин.
- Можливість клонування зображення. Її можна використовувати, наприклад, при вивченні теми «Симетрія»: пропоную учням створити на дошці фрагмент орнаменту з геометричних фігур, а потім, клонуючи його, сконструювати різні орнаменти. При вирішенні завдань, пов'язаних з побудовою на координатою площині точок, фігур, графіків функцій, легко і швидко можна клонувати як саму координатну площину, так і побудовані на ній точки, фігури, графіки. При побудові перерізів многогранника різними площинами можна клонувати багатогранник і не витрачати час на його повторне побудова.

Також варто відзначити, що на відміну від роботи зі звичайним екраном, коли вчитель «прив'язаний» до комп'ютера, інтерактивна дошка дозволяє йому залишатись поруч із нею. Замість маніпуляцій комп'ютерною мишею достатньо дотикатися до поверхні дошки. Це сприяє високій активності та зацікавленості учнів, уроки математики проходять динамічно, матеріал засвоюється краще, підвищується успішність та мотивація до навчання.

Використання інтерактивної дошки допомагає вчителю привернути увагу всіх учнів класу, зосередити їхню увагу у потрібний момент. Слід зазначити, що на уроці геометрії при розгляді необхідних для засвоєння нового поняття якісних зображень на інтерактивній дошці в учнів одночасно стимулюється декілька видів пам'яті.

Розглянемо найпростіший варіант роботи з інтерактивною дошкою при вивченні нових понять . На сторінку презентації послідовно виводяться об’єкти, формули, виділяються точки, відрізки, кути тощо. Наявність таких модулів у скарбничці вчителя може допомогти проілюструвати новий матеріал, показати цікаві приклади.



Якщо вести мову про більш цікаві варіанти використання інтерактивної дошки у процесі введення нових математичних понять в школі, то очевидно в першу чергу мова йде, про підготовку і використання анімацій.

Пояснення вчителя доповнюється фотографіями, малюнками, анімаціями, відео, текстом тощо. Бажано використовувати звуковий супровід або звукові ефекти, і дотикальні слайди для учнів. В такому випадку задіяні різні види рецепторів і різні види пам’яті, що дає змогу запам’ятати матеріал усім учням у класі. Учні можуть не записувати зміст почутого, оскільки нотатки з даної теми (або презентацію до уроку) вчитель може роздрукувати учням, переписати на флешку або вислати електронною поштою. Відтак у учнів з’являється дидактичний матеріал, що полегшує процес відтворення інформації, що була почута на уроці.

Висновки. Використання інтерактивної дошки на уроках математики, на наш погляд — це правильний вибір учителя, оскільки надає низку переваг над стандартним викладенням навчального матеріалу за допомогою крейди та звичайної дошки, як вчителю, так і учням:

- Забезпечує високий темп уроку.
- Забезпечує більш ефективний, яскравий та динамічний процес вивчення нового матеріалу за рахунок використання презентацій, інтерактивних та мультимедійних ресурсів.
- Забезпечує багаторазове використання методичних заготовок та можливість обмінюватися ними між вчителями.
- Спонукає до навчання завдяки різноманітним цікавим шаблонам інтерактивності.
- Спрощує перевірку засвоєного матеріалу.
- Сприяє професійному розвитку вчителя та пошуку ним нових шляхів і підходів у реалізації навчально-виховного процесу.

Звісно, не потрібно перебільшувати місце і значення мультимедійної дошки. Всі переваги проведення уроків з комп’ютерними технологіями починають одразу зникати, якщо не знати міри.

Література

1. Активные методы обучения и программирование: проблемы, возможности, перспективы: Межвузовский сборник научных трудов. – К., 1993
2. Дмитриева В.В. Интерактивные технологии. - http://www.nbuv.gov.ua/Articles/KultNar ... _48-50.pdf
3. Патрин А.Н. Каковы преимущества интерактивной доски. Мультимедиа в школе. - http://interaktiveboard.ru
4. Керівництво користувача Smart Board. - http://www.smartboard.com.ua/ru/practice/9.htm

Войтко Людмила Валеріївна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСНОВИ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ

Дослідження психологів показали, що для розвитку мислення учнів потрібно формувати в них узагальнені прийоми міркувань. Оволодіння такими прийомами означає суттєве зрушення в інтелектуальному розвитку, розширює можливості переносу знань у відносно нові умови.

Мислення відіграє вирішальну роль у процесі формування понять, джерелом яких є матеріальний світ. Поняття – це мислене відображення речей, результат узагальнення багатьох одиничних конкретних предметів і явищ. Наприклад, до поняття похідної приводять багато задач з математики, фізики, техніки; зокрема, поняття похідної є узагальнене поняття миттєвої швидкості точки, що рухається прямолінійно.

Психологами встановлено, що для засвоєння понять обов'язкові такі три дії:

1) підведення дії поняття;
2) вибір необхідних і достатніх ознак для розпізнання об'єкта;
3) виведення наслідків про належність або неналежність предмета до поняття.

Становлення понять – це процес формування не тільки особистого образу як картини світу, але й певної операційної системи, що має свою внутрішню структуру. На думку психологів, дії, операції і складають психологічний механізм поняття.

Поняття повинні формуватися не ізольовано один від одного, а виступати як елементи системи, що знаходяться між собою в певних відношеннях. Якщо цього немає, то виведення наслідків не може привести до позитивного результату.

Виявлення властивостей понять як наслідків їх взаємодії – один з найважчих моментів у мислительній діяльності учнів.

Головними суттєвими компонентами при оволодінні поняттями слід вважати:

1) засвоєння певної системи знань про поняття;
2) оволодіння спеціальною операційною системою дій (підведення під поняття, вибір необхідних і достатніх ознак для розпізнання об'єкту, виведення наслідків);
3) встановлення системи понять та їх родо-видових відношень всередині системи, взаємозв'язки їх ознак;
4) розкриття ґенезу понять.

Які ж знання про поняття головні? Психологи довели, що це знання про зміст понять і знання про ті дії, які необхідні при роботі з доцільними поняттями.

Щоб свідомо засвоїти те чи інше поняття, потрібно вміти з нескінченної кількості ознак відповідного предмету виділити ті, що визначають суть (зміст) предмету. Таке виділення здійснюється за допомогою таких логічних прийомів формування понять, як порівняння, аналіз, синтез, абстрагування та узагальнення.

Вітчизняні психологи провели детальне дослідження процесу формування арифметичних понять. Їм вдалося встановити прийоми розумової діяльності, необхідні для формування відповідних знань, та способи навчання цим прийомам. Встановлені також основні етапи, які спостерігаються при формуванні знань в процесі навчання. Спочатку уявлення і поняття учнів мають дифузний характер; застосовуючи їх учень не розуміє тих ознак, на які спирається. Потім виділяються і осмислюються деякі ознаки, які найбільш часто зустрічаються, що кидаються у вічі. Але ще не осмислюється різниця між ознаками суттєвими і несуттєвими. Пізніше виділяють суттєві ознаки. На останньому етапі поняття зв'язується із все більшим числом різних об'єктів, в нього включаються можливі різновиди і конкретні особливості цих об'єктів. Знання поглиблюються і узагальнюються.

Формування правильного поняття йде через спробу його вживати і регулюється результатами цих спроб.

Звідси поняття можуть формуватися на основі чуттєво-практичної діяльності і на основі ідеальної розумової діяльності. Формування поняття йде через висунення і перевірку гіпотез про значимість тих чи інших ознак об'єктів.

Формування понять являє собою не пасивне сприймання, а активну діяльність, напрямлену на розв'язання пізнавальних задач. Ця діяльність включає постановку і розв'язання проблем, формулювання та випробування гіпотез, пошук і перевірку знань.

На відміну від уявлень і життєвих псевдопонять, наукові поняття відображають не безпосередні чуттєві властивості предметів, а їх спільні і суттєві об'єктивні відношення. Відповідно, як відмітив Л. С. Виготський, значення наукових понять розкривається тільки в їх системі, через відношення понять. Відношення відображають відповідні об'єктивні зв'язки речей та явищ. Ці зв'язки виявляються не безпосереднім сприйняттям, а за допомогою діяльності. Звідси, джерело наукового поняття – не сам чуттєвий досвід, а дія.

Наукові поняття не просто «виводяться з досвіду», а створюються, конструюються, щоб досягти максимальної організації інформації у відповідності з поставленою задачею. Такий шлях називається інвективним утворенням понять. Практично він заклечається в тому, що знання, які вже є, використовуються з нової точки зору, для вироблення нових класифікацій об'єктів, відшукання нових способів розв'язання нових задач.

В багаторазових експериментах психологи ретельно досліджували умови формування понять. Вони встановили, що до фактів, що впливають на інвертивне утворення понять, відносяться наступні:

1) Особливості особистості і мотивації. Функції об'єктів, закріплені в поняттях, повинні зацікавити учня, стати необхідними для розв'язання задач, перетворитися на проблему. Тоді сприймання і мислення учня

почне шукати і виділяти в об'єктах відповідні функціональні структури.

2) Направлені зусилля, пошуки і багаторазові спроби, супроводжувані перевіркою результатів. Такі пошуки приводять до усвідомлення всіх нових відношень і властивостей об'єктів, доки серед них не з'являться суттєві для розв'язання даного типу задач.
3) Наявність відповідних знань і умінь. З цієї умови випливає, що насамперед ніж навчити поняттям, учнів потрібно ознайомити з властивостями, відношеннями і функціями об'єктів, на які спираються поняття, що вивчаються. Тому навчання рекомендують починати з найбільш загальних понять, тобто загальних властивостей (структурних).
4) Попередній аналіз суті мислительної задачі і оцінка можливих її розв'язків. Поняття утворюються швидше і правильніше, якщо учень розуміє, для чого воно потрібне, які задачі дозволяє розв'язати, до яких областей дійсності відноситься.
5) Направленість мислення. Експерименти психологів довели, що тільки бажання, старанності та знання часто недостатньо для утворення в учнів правильних понять. Потрібно, щоб мислення було напрямлене на відповідні функції і ознаки об'єкта.

Проблемі формування понять, в тому числі і математичних, присвячено багато досліджень психологів та методистів, але на питання «Що головне при формуванні і засвоєнні понять?» вчителю не так легко відповісти.

Ось що пише у своїй книзі для учителя «Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике» В. Н. Осінська: у шкільній практиці багато вчителів вимагають від учнів заучування означень понять і вимагають знання їх доведення основних ознак. Але результати такого навчання часто незначні. Чому? Дослідження психологів і практика показують, що більшість учнів, застосовуючи поняття, засвоєні у школі, спираються на малосуттєві їх ознаки, а суттєві ознаки понять учні усвідомлюють і відтворюють тільки при відповіді на питання, що потребують означення поняття. Звідси, заучування означень понять є необхідною, але не достатньою умовою їх засвоєння.

Головне при засвоєнні понять – вміння їх застосовувати. Відомий психолог В. В. Давидов пише: «Оволодіти поняттям – це значить не тільки знати ознаки предметів і явищ, що охоплюються даним поняттям, але і вміти застосовувати поняття на практиці, вміти оперувати ними». Ґрунтуючись на одному з ведучих методів психології про єдність знань і дій можна стверджувати, що оволодіння поняттям складається з таких двох головних компонентів: засвоєння певних знань про поняття і формування адекватних цим знанням дій. В методиці вивчення математики більше уваги приділяється першому компоненту.

Глибокі дослідження з проблеми формування понять як єдності знань і дій виконала Н. Ф. Тализіна з групою співробітників. «Знання, – пише Тализіна, – не повинні протиставлятися вмінням та навичкам, що являють собою дії з певними властивостями, а розглядатися як їх складові частини. Знання не можуть бути ні засвоєні, ні збережені поза діями учня».

Психологи встановили також, що розумові операції можна цілеспрямовано формувати поступовим переходом від розгорнутих зовнішніх дій, завчасно запрограмованих у даній послідовності, до все більше згорнутих розумових дій. Мозок людини створює нові уявлення на основі наявного досвіду. Тому чим більше «точок зчеплення» має новий матеріал з попередніми знаннями і досвідом, тим точнішою буде створювана мислено інформаційна схема цього теоретичного матеріалу, тим краще логічні зв'язки даного матеріалу з іншими питання курсу математики.

Висновки. Проблемі формування в учнів математичних понять присвячена значна кількість вітчизняної й зарубіжної літератури. Ця проблема завжди є актуальною, завжди потребує певних зусиль як від учителя при поданні нового поняття, так і від учня під час засвоєння. В процесі навчання математики на будь-якому рівні ми маємо справу з поняттями, висловленнями (твердженнями) і доведеннями. Засвоєння математичних знань зводиться, нарешті, до засвоєння певної системи понять, висловлень та їх доведень.

Література

1. Биркгофф Г. Математика и психология. – М.: Советское радио, 1997.
2. Гнаденко Б. В. Формирование мировоззрения учащимися в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982.
3. Груденов Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем. – М.: Просвещение, 1981.
4. Дорофеев Г. В. Строгость определений математических понятий школьного курса с методической точки зрения. // Математика в школе - 1984. - №3.
5. Епишева О. Б., Крупич В. И. Учить школьников учиться математике. – М.: Просвещение, 1990.
6. Иржавцева В. П., Федченко Л. Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математике. – К.: Радянська школа, 1988.
7. Курганов С. Ю. Психологические проблемы ученого диалога. // Вопросы психологи. – 1988. - №2.
8. Осинская В. Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике. – К: Радянська школа, 1989.
9. Петровский А. В. Возрастная и педагогическая психология. – М.: Просвещение, 1973.
10. Скаткин М. Н. Совершенствование процесса обучения. – М.: Педагогика, 1971.
11. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний. – Изд-во МГУ, 1975.
12. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математики в школе. – М.:Просвещение, 1983.

Гикавчук Альона Миколаївна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»,
напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

У сучасній математичній науці поняття математичної моделі суттєве. Раніше математику характеризували через величини, просторові форми і кількісні відношення або через математичні структури, сьогодні здебільшого вважають, що математика – це наука про математичні моделі та їх застосування.

За часів Радянського Союзу тема «Математичне моделювання» не вивчалася у загальноосвітній школах. Починаючи з 1997 року тему «Математичне моделювання» стали вивчати у дев'ятому класі в курсі алгебри.

Відповідно до діючої навчальної програми з математики для основної школи тема «Математичне моделювання» (2 год) вивчається у 9 класі. У пояснювальній записці навчальної програми з математики для старшої школи (академічний рівень) зазначається, що побудова курсу математики здійснюється на засадах застосування методу математичного моделювання. Вивчення курсу алгебри і початків аналізу слід розпочати вступним заняттям, метою якого є ознайомлення учнів з характерними рисами процесу математичного моделювання. Подібні настанови у пояснювальній записці навчальної програми з математики і з приводу геометрії. Серед практичних компетентностей, якими має володіти кожний випускник середньої школи це будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі.[4]

Основоположниками сучасної методології математичного моделювання були Глушков В.М., Гнеденко Б. В., Колмогоров А. М., Королюк В. С., Остапенко М. К, Самарський О. А., Тихонов А. М., Турбін А. Ф. та інші.

У математичній та методичній літературі пропонується багато різних означень поняття математична модель, зокрема:

«Математична модель — наближений опис явищ навколишнього світу за допомогою математичної символіки» (А.М.Тихонов);

«Математична модель — це логічна структура, у якої описано ряд відношень між її елементами» (Л. Д. Кудрявцев);

«Об'єкт *М* є моделлю об'єкта А відносно деякої системи S характеристик (властивостей), якщо *М* будується (або вибирається) для імітації *А* за цими характеристиками» (І. І. Блехман та ін.).

«Математичними моделями прийнято називати системи математичних співвідношень, які символічно описують процес або явище, що вивчаються» (К. О. Рибніков).[1]

У шкільних підручниках алгебри для 9 класу автори описують по різному поняття математичного моделювання.

Наприклад, у підручнику «Алгебра 9» авторського колективу МерзлякА.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. у параграфі «Математичне моделювання» строгого означення математичної моделі не наводиться, а вказується, що математична модель це результат перекладу прикладної задачі мовою математики. А наука, яка займається побудовою і вивченням математичних моделей, називається математичним моделюванням.[6]

Автори Кравчук В.Р. та інші підручника «Алгебра 9» [3] також виділили окремий пункт «Математичне моделювання». Тут коректніше пояснено поняття прикладної задачі, моделі і математичної моделі: «Математична модель — це опис якогось реального об'єкта або процесу мовою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо». Згодом доповнюється: «Математична модель об'єкта чи явища будується на основі деяких спрощень, а тому завжди є їхнім наближеним описом». Таке трактування розглядуваних понять для школи краще від згадуваних вище означень. У ньому також ідеться тільки про модель реального об'єкта, тобто математична модель розглядається тільки з погляду прикладної математики.

У підручнику «Алгебра 9», колективу авторів Возняк Г. М., Литвиненко Г. М., Мальований Р. І. в окремому параграфі «Математичне моделювання» всі теоретичні відомості висловлені в одному абзаці. Задачі, для розв'язування яких доводиться звертатися до математичних методів, зазвичай називають прикладними.Для того, щоб розв'язати прикладну задачу передусім потрібно перекласти її зміст на мову математики. Результатом такого перекладу є математична задача, або математична модельпочаткової (вихідної) прикладної задачі, записана у вигляді рівняння, функції, графіка чи рисунка фігури. [2] Погоджуємося із міркуванням Г.П. Бевза, що введене так поняття є занадто розширеним для поняття прикладної задачі. Оскільки і кожну абстрактну математичну задачу в школі розв'язують математичними методами, то виходить — усі задачі, що є в шкільних підручниках математики, прикладні. Це не так. І перелік форм запису математичної моделі неповний: наприклад, чимало прикладних задач розв'язують за допомогою систем чи сукупностей рівнянь, діаграм, графів тощо. [1]

Дамо означення математичної моделі і з'ясуємо основні особливості математичного моделювання.

Математична модель — це система математичних понять чи відношень, які відповідають досліджувану об'єкту чи процесу. Основна мета моделювання – дослідити об'єкти і передбачити результати майбутніх спостережень. Під математичним моделюванням, у вузькому значенні слова, розуміють опис у вигляді рівнянь і нерівностей реальних фізичних, хімічних, технологічних, біологічних, економічних і інших процесів. Для того, щоб використовувати математичні методи для аналізу і синтезу різних процесів, необхідно вміти описати ці процеси мовою математики, тобто описати у вигляді системи рівнянь і нерівностей.

Виділяють такі три етапи розв'язання прикладної задачі:

1) перевести умову прикладної задачі на мову математики;
2) розв'язати отриману математичну задачу;
3) скористатися результатами розв'язання математичної задачі, щоб знайти правильний розв'язок.[5]

Можна ці етапи зобразити схематично A→B→C→D, де A — прикладна задача; B – її математична модель; C — відповідь для моделі; D — відповідь для прикладної задачі A. Створення моделі — процес моделювання. Щоб створити відповідну модель, треба знати не тільки математику, а й ту галузь науки чи виробництва, з якою пов'язана певна прикладна задача. Якщо модель складено неправильно, то неправильними будуть і розв'язання задачі і відповідь. Важливим є також останній етап розв'язування прикладної задачі. Відповідь C може бути точною для задачі *B*, а відповідь для прикладної задачі *A* майже завжди наближена. Тому її слід записувати відповідно до правил наближених обчислень.

Ознайомлення із математичним моделюванням учнів відбувалося вперше не в 9 класі, а ще раніше. Адже ще в 6 класі, учні розв’язують задачі за допомогою складання рівнянь, пропорції. В 9 класі вже проводиться узагальнення цього поняття і виділення етапів розв’язування задачі.

При введенні даного поняття слід наголосити на тому, що математична модель може бути складена за умовою задачі з будь-якої галузі науки і техніки та навести якомога більше прикладів прикладних задач, для яких показати математичні моделі.

Наприклад, розглянемо таку задачу:корова прив'язана на галявині до кілка мотузкою завдовжки 8 м. Яку площу вона випасає?

Ця задача прикладна, оскільки в ній слід знайти площу частини галявини, на якій може пастися корова. Частина галявини — нематематичне поняття. Замінимо цю задачу іншою: замість частини галявини будемо розглядати круг. Задача про знаходження площі круга — модель даної прикладної задачі.

Також варто розглянути завдання на знаходження математичної моделі реальної ситуації, наприклад, в тестовій формі:

«Яке з наведених рівнянь може бути математичною моделлю реальної ситуації: автомобіль їхав a год зі швидкістю 60 км/год і b год зі швидкістю 75 км/год і подолав відстань 510 км?»

А	Б	В	Г
$\frac{60}{a}+\frac{75}{b}=510$	$60a+75b=510$	$\frac{a}{60}+\frac{b}{75}=510$	$(a+b)(60+75)=510$

Далі можна розглянути розв’язання наступних задач:

1. Турист проїхав 2200 км , причому на теплоході проїхав вдвічі більше, ніж на автомобілі, а на поїзді в 4 рази більше, ніж на теплоході. Скільки кілометрів проїхав турист окремо на кожному виді транспорту?

Розв’язання. При розв’язуванні виділимо три етапи.

Перший етап. Приймемо відстань, яку проїхав турист на автомобілі за *xкм.* Відомо, що на теплоході проїхав вдвічі більше, ніж на автомобілі, тобто $2x$ км. На поїзді проїхав у 4 рази більше, ніж на теплоході, тобто $4\cdot 2x$. Весь шлях - це сума відстаней, які проїхав турист на кожному з видів транспорту і він дорівнює 2200 км . Отримаємо наступне рівняння: $x+2x+8x=2200$ - це і є математична модель даної задачі.

Другий етап. Розв’язання рівняння: $11x=2200$, $x=200$.

Третій етап. Аналіз результату, отриманого на другому етапі, виходячи зі змісту прикладної задачі.

Отже, турист проїхав на автомобілі 200 км, на теплоході 400 км, а на поїзді 1600 км.

Відповідь. 200 км, 400 км, 1600 км.

2. Маса дерев'яної балки становить 120 кг, а маса залізної балки – 140 кг, причому залізна балка на 1 м коротша від дерев'яної. Яка довжина кожної балки, якщо маса 1 м залізної балки на 5 кг більша за масу 1 м дерев'яної?

Розв'язання.

Перший етап. Побудова математичної моделі.

Нехай довжина дерев'яної балки дорівнює x м, тоді довжина залізної становить (x-1) м. Маса 1 м дерев'яної балки дорівнює $\frac{120}{x}$ кг, а маса 1 м залізної - $\frac{140}{x-1}$ кг, що на 5 кг більше за масу 1 м дерев'яної. Тоді $\frac{140}{x-1}-\frac{120}{x}=5$. Отримане рівняння і є математичною моделлю даної прикладної задачі.

Другий етап. Розв'язання рівняння

Маємо:

$$\frac{140}{x-1}-\frac{120}{x}=5;\ \frac{28}{x-1}-\frac{24}{x}=1;\ \begin{cases}28x-24(x-1)=x^2-x,\\ x\neq 0,\\ x\neq 1;\end{cases}\ \begin{cases}x^2-5x-24=0,\\ x\neq 0,\\ x\neq 1;\end{cases}$$

$x=8$ або $x=-3$.

Третій етап. Аналіз результату, отриманого на другому етапі, виходячи зі змісту прикладної задачі

Корінь -3 не задовольняє умову задачі, оскільки така величина, як довжина, не може виражатися від'ємним числом.

Отже, довжина дерев'яної балки дорівнює 8 м, а довжина залізної – 7 м.

Відповідь: 8 м, 7 м.

Література

1) Бевз Г.П. Не звужуйте поняття математичного моделювання / Г. П. Бевз// Математика в школі – 2009. - №12. – С.3-7.

2) Возняк Г.М., Литвиненко Г.М. Алгебра, підручник для 9 класу. - Тернопіль: Богдан, 2001. – 390 с.

3) Кравчук. В.Р., Підручна М.В., Янченко Г. М. Алгебра, пробний підручник для 9 класу. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 400 с.

4) Математика: навчальна програма для учнів 10-12 класів загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень // Математика.-2010. - №17. – С. 3 - 8.

5) Великодний С. М. Математичне моделювання при розв'язуванні задач/ С. М. Великодний // Математика в школі. – 2005. - №9 . – С.15-20.

6) Мерзляк А.Г. , Полонський В. Б., Якір М. С.. Алгебра: Підручн. для 9 кл. з поглибл. вивченням математики. – Х.: Гімназія, 2009. -384 с.

Дубовик Віталій Васильович
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
Інститут природничо-математичної та технологічної освіти,
студент магістратури, фізико-математичний факультет

ВВЕДЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОНЯТЬ У СТАРШІЙ ШКОЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ MICROSOFT OFFICE POWERPOINT

Потужний потік нової інформації, реклами, застосування комп'ютерних технологій на телебаченні, розповсюдження ігрових приставок, електронних іграшок і комп'ютерів значною мірою впливають на виховання дитини і його сприйняття навколишнього світу. Розвиток нових інформаційних технологій тягне за собою становлення принципово нової освітньої системи, яка забезпечує освітні послуги мільйонам людей [2].

Вже давно доведено, що кожен учень по-різному освоює нові знання. Раніше викладачам важко було знайти індивідуальний підхід до кожного учня. Тепер же, з використанням інтерактивних комп'ютерних технологій, школи отримали можливість подавати нову інформацію таким чином, щоб задовольнити індивідуальні запити кожного учня.

Необхідно навчити кожну дитину за короткий проміжок часу освоювати, перетворювати і використовувати в практичній діяльності величезні об’єми інформації. Дуже важливо організувати процес навчання так, щоб дитина активно, з цікавістю і захопленням працювала на уроці, бачила плоди своєї праці і могла їх оцінити. Активній навчальній діяльності учнів сприяє величезна кількість програмних засобів, які мають багато переваг при поданні нового матеріалу чи закріпленні набутих вмінь і навичок, як у навчальному процесі загалом, так і на уроках математики зокрема.

Часто вчителі використовують комп’ютерні технології лише на деяких уроках математики, здебільшого для ознайомлення із властивостями тих чи інших геометричних фігур (GRAN 2, GRAN 2), побудови графіків функції чи при дослідженні функцій (MathCad, GRAN 1) тощо. Але мало хто вводив математичні поняття, використовуючи певні програмні засоби. Не потрібно копати глибоко, вигадуючи якісь складні альтернативи, – досить використати середовищем Microsoft Office PowerPoint. Простота використання і максимальна візуалізація дозволить зручно і оригінально ввести математичні поняття, особливо на уроках геометрії. Майстер публікацій можна використовувати як при введені, так і при засвоєнні і закріпленні поняття. Чому саме Microsoft Office PowerPoint?

- Зміст, основні параметри і настроювання легко видозмінити за короткий проміжок часу.
- Зручний дизайн.
- Майстер автозаповнення.
- Зручна слайдова структура.
- Значний об’єм текстової і графічної інформації.

- В презентацію можна вставити звук і невеликий відео ролик.
- Для створення презентації потрібно небагато часу.
- Збереження презентації в режимі «Демонстрація» дає змогу захистити авторські права і презентацію від несанкціонованого доступу.

Все це дозволяє з легкістю засвоїти навчальний матеріал на уроках геометрії.

Особливе значення слід приділити саме введенню поняття, адже правильно поданий матеріал є основою знань учнів.

Під час даного етапу потрібно врахувати наступне [1]:

- перш за все, необхідно забезпечити мотивацію введення даного поняття;
- при побудові системи завдань на підведення під поняття, забезпечити найбільш повний обсяг матеріалу;
- важливо показати, що обсяг поняття - не порожня множина;
- розкрити зміст поняття, працювати над суттєвими ознаками, виділяючи несуттєві;
- крім знання визначення, бажано, щоб учні мали зорове уявлення про поняття;
- засвоєння термінології і символіки.

Кожен із даних аспектів доцільно розкрити використовуючи Microsoft Office PowerPoint.

Мотивація введення даного поняття краще забезпечуються при використанні одного із принципів – зв'язок навчання із життям. Тобто, слід ознайомити, показати, а, можливо, і розповісти учням про об'єкти природи чи навколишнього середовища, які за своєю формою або властивостями більш-менш відповідають тій геометричній фігурі чи поняттю, що вивчається. Так, наприклад, при підведення до поняття «піраміда», учням можна розповісти про історію виникнення, показати зображення піраміди, можливо розповісти про цікаві факти, використовуючи презентацію. Але слід пам'ятати, що кожна розповідь вчителя повинна супроводжуватися зображеннями, рисунками чи короткими написами, для кращого осмислення і запам'ятовування матеріалу.

При побудові системи завдань на підведення під поняття чи його властивості також доцільно використовувати Microsoft Office PowerPoint. Дуже часто вчителеві доводиться малювати рисунки на дошці, що забирає багато часу і зазвичай вони не є досить досконалими. Учням в деяких моментах важко зрозуміти чи побачити елементи рисунка. Досить важливим є поетапне підведення до поняття і інколи трапляється, що потрібно повертатися до попереднього. У презентації є можливість переходити від одного рисунка, до другого, витрачаючи при цьому мінімум часу. Часто при підведенні до поняття використовується багато прикладів чи задач, які на слух погано сприймаються учнями, і, прослухавши наступні, вони не можуть усвідомити зв'язок із попередніми. Середовище Microsoft Office PowerPoint дозволяє розмістити велику кількість прикладів на екрані.

Одним із варіантів введення поняття, використовуючи даний програмний засіб, є самостійне покрокове виведення його учнями. Більшість методистів переконані, що неможливо передати поняття в готовому вигляді. Дитина може отримати його лише в результаті своєї власної діяльності, спрямованої не на слова, а на ті предмети, поняття про які ми хочемо у нього сформувати [3].

Але це завдання може бути складним, тому пропонується вибирати декілька варіантів і за ними будувати логічний ланцюжок. Цей ланцюжок повинен бути зображений на екрані, щоб учні могли по ньому побачити кінцевий результат. Краще за все, коли варіанти відповідей у вигляді рисунків, що дозволить більш точно підійти до визначення поняття. На прикладі поняття «конус» можна запропонувати такий ланцюжок:

Презентація дозволить прибрати зайві варіанти відповіді з екрана і залишити правильні. Після того, як учні дали правильну відповідь, ланцюжок продовжується з новими варіантами відповіді:

По закінченню, учням буде запропонована схема, яка дозволить самостійно підійти до визначення поняття.

Отже, програмне забезпечення Microsoft Office PowerPoint, при введенні математичних понять, зокрема на уроках геометрії, дозволяє: краще організувати мотивацію введення цього поняття, вдалим методом забезпечити подання завдань на підведення до поняття, економить час як учителя, якому не потрібно малювати рисунки на дошці, так і учнів, яким не потрібно чекати поки рисунок буде намальований. Але саме основне те, що матеріал буде поданий у цікавій формі,оригінально і сприяє кращому засвоєнню даного поняття.

Література

1. http://ua-referat.com/
2. Абалуев Р.Н., Астафьева Н.Г., Баскакова Н.И. и др. Интернет-технологии в образовании: Учебно-методическое пособие. Ч.3. - Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2002. - 114 с.
3. Тализіна Н.Ф. Педагогічна психологія.: Навчальний посібник для середніх педагогічних закладів. - М.: Академія, 2001.

Тягай Іван Олександрович
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини
Інститут природничо-математичної та технологічної освіти,
студент магістратури, фізико-математичний факультет

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ ПЕРШОКУРСНИКІВ ПРИ ВВЕДЕННІ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Розвиток українського суспільства на засадах загальнолюдських цінностей і національних пріоритетів вимагає розробки нових методологічних підходів до професійної освіти, в центрі яких – формування духовності особистості, накопичення культурного потенціалу суспільства.

Культура є мірою розвитку людини, оскільки віддзеркалює не тільки обсяг засвоєних цінностей громадської діяльності, але й сам спосіб, у який людина залучається до таких цінностей[1].

Крім загальної культури, яка має бути притаманна кожному члену суспільства, незважаючи на його фахову належність, учитель повинен мати високого рівня професійну культуру і керуватися нею у своїй педагогічній діяльності.

Професійна культура – це той комплекс знань, умінь і навичок, наявність яких робить фахівця кожного виду діяльності майстром своєї справи.

Подаючи характеристику професійної культури вчителя математики, Г.О. Михалін визначає її основні компоненти (математичну, методичну, педагогічну, психологічну, інформаційну, мовну і моральну складові) та підкреслює, що професійна культура цілком визначається рівнем освіченості і вихованостілюдини та рівнем володіння галуззю діяльності вчителя математики[2].

Для вчителя математики важливим компонентом культури є математична культура. Розглядаючи формування математичної культури в умовах фахової підготовки студентів, Т.Г.Захарова так розкриває зміст цього виду культури: «Математична культура є складною, генетично і соціально детермінованою системою, невід'ємною від загальнолюдської культури, інтеграційним особистісним утворенням кваліфікованого фахівця і характеризується наявністю у нього достатнього запасу математичних знань, переконань, навичок і норм діяльності, поведінки в сукупності» [3,с. 43].

Математична культура включає в себе:

- алгоритмічну культуру;
- графічну культуру;
- логічну культуру;
- комунікативну культуру.

Кожна із цих складових математичної культури є невід'ємною складовою при навчанні учнів математиці. Обов'язком викладача вищої школи є формування у студентів, як майбутніх вчителів, математичної культури. Так як кожен майбутній вчитель повинен володіти математичними поняттями та вміти навчити та пояснити їх у майбутньому своїм учням, то при вивченні курсу елементарної математики потрібно звертати більше уваги на поняття та означення при вивченні певної теми. Використовуючи різні технології та форми введення математичних понять при вивченні математики у вищій школі, ми тим самим формуємо математичну культуру студента та готуємо його до професійної діяльності.

Наведемо приклади формування математичної культури першокурсника при введенні математичних понять у процесі навчання елементарної математики. На першому курсі відповідно до навчальної та робочої програми дисципліни «Елементарна математика» у другому семестрі вивчається тема «Функції та їх графіки». При вивченні даної теми студентам можна ввести поняття функції декількома способами. Наприклад, спочатку можна запропонувати першокурсникам самостійно розкрити зміст поняття функція. Уважно вислухавши всі варіанти, студенти повинні обрати на їх думку найбільш правильний варіант. Для того, щоб сформувати математичне поняття, студенти мають розкрити всі суттєві властивості математичного об’єкта. Таким чином вони розвивають математичну логіку, мову, вчаться слухати один одного, приходити до спільної думки. Вся ця діяльність розвиває логічну та комунікативну культуру студента.

Можна ввести поняття функції студентам за допомогою графіка функції. Навести декілька прикладів графіків функції та показати залежність функції y від незалежної змінної x. І тоді разом із студентами потрібно ввести правильне поняття функції. Або ж можна в зворотному порядку виконати ті ж операції – надати студентам аналітичний вигляд функції та запропонувати знайти значення y при різних значеннях x. По знайденим координатам точок побудувати графік функції. Після виконання даних дій потрібно запропонувати студентам ввести поняття функції. За допомогою таких технологій у студентів формуватиметься графічна культура студентів.

Використовуючи різні технології введення понять, студенту легше буде сприймати нові поняття та закріплювати раніше їм відомі, а також це знадобиться студентам для подальшої педагогічної діяльності і тим самим ми розвиватимемо їх математичну культуру.

Література

1. Гаврилюк О.О. Формування комунікативної культури майбутніх учителів засобами поза аудиторної роботи [Електронний ресурс] – Режим доступу:http://referatu.com.ua/referats/7569/170446
2. Євтушенко Н.В. Складові культури вчителя математики [Електронний ресурс] – Режим доступу:http://www.nbuv.gov.ua/portal/Soc_Gum/Dmpd/2011_35/_35/103-107%2035_2011.pdf
3. Захарова Т.Г. Формирование математической культуры в условиях профессиональной подготовки студентов вуза: дис. канд. пед. наук: 13.00.08 / Татьяна Григорьевна Захарова: Саратов, 2005. 173 с.

Швабська Ольга Сергіївна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТЕСЛЕНКА І.Ф. ЩОДО ВВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ В ШКОЛІ

Постановка проблеми. Нині шкільна математична освіта, як і загальна середня освіта в Україні зазнають радикальних змін. Важливою передумовою цього є необхідність збереження й примноження національних надбань, традицій освіти. Назріла потреба об'єктивно проаналізувати, переосмислити й висвітлити позитивний досвід минулого з питань шкільної математичної освіти в контексті сучасних освітніх змін. У працях визначних українських методистів ми маємо змогу знайти безліч рекомендацій щодо введення математичних понять у процесі навчання математикив школі, щодо поліпшення якості навчання, економії часу та формування математичної компетентності у випускників загальноосвітніх шкіл.

Мета даної статті: на основі аналізу методичної спадщини видатного українського методиста Тесленка І.Ф. виокремити конкретні методичні вказівки ученого щодо основ ефективності процесу введення математичних понять на уроках геометрії в школі.

Виклад основного матеріалу.Тесленко Іван Федорович (26.01.1908–22.12.1994) – відомий український математик-педагог, основні наукові інтереси якого стосувалися методики навчання геометрії.

Учительську діяльність Іван Федорович розпочав у 1926 році керівником форпосту піонерів. Впродовж наступних років працював в Бородаївській початковій школі, пізніше вчителем математики і фізики в школі – дев'ятирічці на Донбасі і в гірському промисловому училищі Брянської копальні Кадіївського району, викладав у Харківському педагогічному інституті. Тесленко І.Ф. 8 років керував кафедрою методики математики, методики та історії математики Львівського педагогічного інституту . Більш ніж 25 останніх років свого життя Тесленко І.Ф. керував відділом методики математики та фізики Науково-дослідницького інституту педагогіки УРСР у Києві. Кандидатську дисертацію захистив на тему «Метод інверсії в геометрії». Докторську дисертацію захистив з методики викладання математики на тему «Педагогічні основи навчання геометрії».

Тесленком І.Ф. опубліковано більше 250 науково-методичних праць, під його керівництвом захищено біля 50 кандидатських дисертацій та кілька докторських дисертацій. [1; 2]

В межах дипломного дослідження «Методика вивчення шкільного курсу планіметрії у спадщині визначних українських методистів» нами опрацьовано 16 науково-методичних праць Тесленка І.Ф. та 5 праць про його науково-методичну діяльність. На основі ґрунтовного аналізу вказаних публікацій ми вибрали та систематизували точку зору відомого українського вченого-методиста Тесленка І.Ф. щодо процесу введення математичних понять на уроках геометрії в школах. Виокремлюємо, зокрема, такі методичні вказівки Івана Федоровича.

1) Останні наукові дослідження підтверджують доцільність такого процесу засвоєння навчальної інформації, в якому б органічно поєднувались знання і діяльність.[8]

2) Вміння «бачити» геометричні фігури, розрізняти в них спільне, відмінне, схоже значно поліпшується, коли до процесу споглядання приєднується і дотик. Просторове уявлення дітей розвиватиметься набагато краще, якщо вони не тільки спостерігатимуть різноманітні геометричні фігури, а й відтворюватимуть самостійно їхні форми і розміри. Тому на кожному уроці, де вивчатиметься новий геометричний матеріал, учні повинні мати креслярське приладдя (олівець, лінійка, косинець, транспортир, циркуль), кольоровий папір, ножиці, матеріал для виготовлення моделей (пластилін, м'який дріт тощо). В класі повинен бути також набір просторових фігур різної форми і величини.[15]

3) Для розвитку абстрактних просторових уявлень в учнів самих тільки ілюстрацій моделей або готових фігур, навіть побудованих ними самими, ще недостатньо. Синтетичні й аналітичні здібності школяра ефективніше розвиваються при спогляданні рухомих моделей, коли увага зосереджується здебільшого на перетворюваних властивостях об'єкта, тобто на операціях над властивостями, які, по суті, є абстрактними. Ось чому дуже корисні для учнів мультиплікативні геометричні фрагменти, серії рисунків, конструктори – їх бажано мати як для індивідуального, так і колективного користування.[8]

4) Особливо потрібно дбати про правильне зорове сприйняття просторових об'єктів. Як відомо, зорове сприймання дитини розвивається під впливом «просторового оточення», або, як кажуть ще, «просторового клімату». Речі, предмети, явища в їх натуральному(природному) вигляді останнім часом значно поповнюються і весь час інтенсивно збагачуються створеними людьми досить абстрактними просторовими формами. Зазнали змін і особливості зорового сприймання. Досвід показує, що ступінь наочності просторової фігури чи тіла для учнів завжди визначається його натуральністю. Нерідко зображення фігури кольоровою крейдою на дошці або на телевізійному екрані чи у кінофрагменті є більш наочним, ніж демонстрація її у натуральному вигляді. Тому на уроках з геометрії доцільно приділяти особливу увагу просторовим рухомим моделям з виділенням кольором потрібних елементів. [8]

5) Серйозної уваги потребує і забезпечення індивідуальної роботи з учнями на уроці за допомогою диференційованих завдань.

6) На уроках геометрії варто розглядати питання теорії і розв'язувати найбільш складні задачі. Домашні ж завдання повинні бути аналогічними до тих, які виконувались на уроці, а також передбачати завдання на виготовлення моделей з різного матеріалу.[15]

7) Задачі допомагають ефективному досягненню багатьох навчально-виховних цілей. Їх використання необхідне для глибшого засвоєння теоретичних знань, ілюстрації конкретного застосування математичних тверджень, виникнення в учнів потреби нових математичних знань,

самостійних «відкриттів», пошуку певних математичних закономірностей, для контролю, самоконтролю знань, умінь і навичок, розвитку інтересу до науки, розвитку мислення тощо.

8) Самостійне, глибоке осмислення навчального матеріалу, самостійна розумова переробка світоглядних знань з властивими кожному учневі формами та способами запам'ятовування його сприяють найкращому виробленню міцних переконань, бо світогляду не можна навчитись, перейняти «готовим» в інших людей, його сутність треба самостійно осмислити, відчути, пережити самому, втілити в переконаннях і вчинках.[14]

9) В процесі навчання математики мають відбуватись два взаємозв'язаних процеси: *засвоєння* учнями готових, набутих суспільством наукових знань як основи їх свідомості і *розвиток* здатності учнів самостійно мислити та виробляти уміння цілеспрямованого використання знань і навичок у майбутній суспільній діяльності.[14]

10) Між обсягом предметних (зокрема, математичних) знань, що їх засвоює учень, і рівнем розвитку його самостійного мислення, як показує досвід, не має прямої залежності виду: «чим більше знаєш, тим краще мислиш». Можна організувати навчальну діяльність учня так, що він добре запам'ятає значення понять, оволодіє певними алгоритмами певних математичних операцій і навчиться за їх допомогою розв'язувати задачі, але самостійно мислити не зможе. Такий учень, «наповнений» готовими знаннями, схемами інтелектуальних операцій і дій може використовувати свої математичні знання, як правило, тільки в певних стандартних умовах.Поєднати, взаємопов'язати процеси засвоєння знань і розвиток мислення – найголовніше завдання в формуванні світогляду учнів. Цього можна досягти тільки за суворого дотримання відомого логічного принципу, який вважають основою діалектики – розвивати мислення через подолання суперечностей, ставити в процесі оволодіння знаннями інтелект учня перед суперечностями й допомагати їх переборювати. [14]

11) Перехід до нових ідей, понять і тверджень потрібно мотивувати зрозумілими і доступними для учнів способами.

12) Кожний напрям математичної роботи учня, якщо його розпочати, потрібно доводити до тих мінімальних результатів, які його виправдовують; це означає, що на уроках математики не слід завантажувати пам'ять учнів таким матеріалом, який у шкільному курсі не знаходить належного використання, розраховуючи на те, що ці знання колись знадобляться. [6]

13) Однією з вимог продуктивності уроку є забезпечення досить швидкого темпу його проведення при одночасному запобіганні втомлюваності учнів. Шлях до цього – урізноманітнення видів роботи на уроці. [13]

14) Велике значення для свідомого засвоєння навчального матеріалу має повторення його в певній системі. Повторення слід проводити, в основному, на вправах з наступними самостійними висновками і поясненнями учнів. Однією з можливих і доцільних форм організації такого повторення є фронтальна робота з класом з використанням наочних посібників. [13]

Висновки.Навчання геометрії в школі, як свідчать, зокрема, результати наукових досліджень та результати ДПА та ЗНО, потребує відшукання шляхів підвищення ефективності формування геометричних знань та вмінь учнів. Актуальним сьогодні є обґрунтування впровадження нових технологій у процес навчання геометрії в школі. Однак, будь-які інновації в шкільній освіті, як свічить практика роботи школи, дають позитивні результати лише при вдалому поєднанні із кращими традиціями формування знань та вмінь учнів з математики. Вивчення і дослідження методичної спадщини видатних українських математиків-педагогів має слугувати доброю основою для визначення шляхів підвищення ефективності навчання геометрії в школі.

Література

1. Бурда М.И., Гнеденко Б.В., Черкасов Р.С. Иван Федорович Тесленко: [Методист преподавания математики в школе] К 75-летию со дня рождения // Математика в школе, - 1983. - №2. – с.78-79, портр
2. Кованцов М. і Мазуркевич О. Для школи і науки. [До 60-річчя методиста – математика І.Ф. Тесленка]. // Радянська школа, - 1968. - №2. – с.82
3. Методика преподавания планиметрии : Метод. пособие / И. Ф. Тесленко, С. М. Чашечников, Л. И. Чашечникова. - К.: Рад. шк., 1986- 169 с.
4. Метрические пространства в школьном курсе математики : Пособие для самообразования учителей, / И. Ф. Тесленко. – К.: Рад. школа 1978 . - 109 с.
5. О преподавании геометрии в средней школе : (По учеб. пособию А. В. Погорелова "Геометрия 6-10"). Кн. для учителя / И. Ф. Тесленко. - М.: Просвещение, 1985. – 95 с.
6. Орел О.В. Погляди І.Ф. Тесленка на нову програму зі шкільного курсу геометрії 70-х років ХХ ст.. Наукові записки НДУ ім. М. Гоголя. Психолого – педагогічні науки. – 2011. - №7. – с. 186-191
7. Проблемный подход к обучению математике : Метод. пособие / В. Г. Коваленко, И. Ф. Тесленко. - К.: Рад. шк., 1985. - 87 с.
8. Тесленко І.Ф.Вивчення геометричних перетворень у Vкласі. – Радянська школа, 1971, №11. – с.32-36
9. Тесленко І.Ф. Елементарна математика. Геометрія. – К., «Вища школа», 1973, 299 с.
10. Тесленко І.Ф. Зміст і основні ідеї нової програми з математики для восьмирічної школи: [посібник] / І.Ф. Тесленко. – К.: Рад. школа, 1969. – 64 с.
11. Тесленко І.Ф. Методика викладання математики в IV-V класах. Геометрія /І.Ф. Тесленко. – К.: Радянська школа, 1974. – 103 с.
12. Тесленко І.Ф. Питання методики геометрії (IX-XI кл.) Посібник для вчителів. - К.: Рад. школа, 1962. - 151 с.
13. Тесленко І.Ф.Учителям IV класів. – Радянська школа, 1971, №7. – с.61-67
14. Тесленко І.Ф. Формування діалектико – матеріалістичного світогляду учнів при вивченні математики: Пос. для вчителів [пер. з рос. М.,1979]. – К.: Радянська школа, 1982. – 160 с.
15. Тесленко І.Ф. Як вивчати геометрію в IV класі. – Радянська школа, 1970, №9. – с.38 – 47

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ АЛГЕБРИ

Білик Юлія Петрівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ПЕРІОДУ ФУНКЦІЇ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ШКОЛІ

До поняття періодичної функції та її періоду у шкільному курсі математики підходять у десятому класі під час вивчення тригонометричних функцій.

Для кращого розуміння періодичної функції, періоду періодичної функції, періодичних процесів доцільно навести учням приклади, у яких зустрічається поняття періоду. Наприклад, періодичною є функція, яка відповідає роботі серця здорової людини (рис.1).

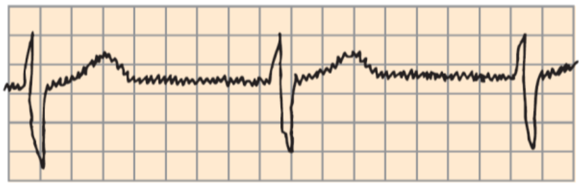


Рис.1.

Періодичнимиможуть бути вишивки, орнаменти, візерунки на тканинах чи шпалерах тощо. Такими є, зокрема, давньогрецькі орнаменти меандрі акант (рис.2).Це – приклади стрічкових орнаментів, періодичних в одному напрямі. Є також площинні орнаменти, періодичні в різних напрямах.

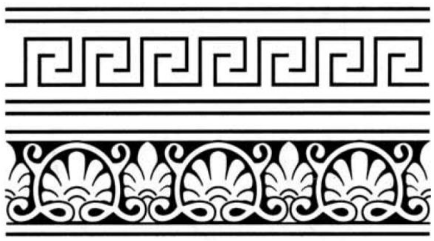


Рис. 2.

Подібні площинні орнаменти особливо поширені в країнах ісламу, але – без зображень людей та інших живих істот. Голландський художник М. Ешер створив багато оригінальних орнаментів із зображень людей і тварин. Такою є, наприклад, його мозаїка «Вершники» (рис.3).

Рис. 3.

На основі цього вказується, що подібні явища і процеси називають періодичними, а функції, які є їх математичними моделями, – періодичними функціями. Тобто до поняття періодичної функції приводять періодичні процеси, у яких стан певних змінних повторюється. Прикладами таких процесів є рух поршняу двигунах внутрішнього згоряння, різні обертальні рухи, електромагнітні коливання тощо.

Означення 1. Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції f виконуються рівності

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T). \qquad (1)$$

Число T називають періодом функції.Наприклад, на (рис. 4) зображено графік деякої періодичної функції.

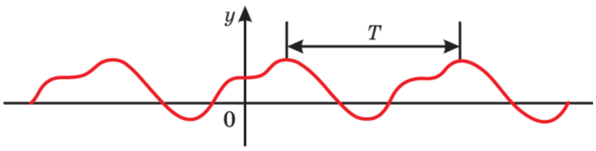


Рис. 4.

Виконання записаних рівностей (1) для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення періодичної функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $(x_0-T) \in D(f)$ і $(x_0+T) \in D(f)$.

Учням уже відомо, що для будь-якого числа x виконуються рівності

$$\sin(x-2\pi)=\sin x=\sin(x+2\pi),$$

$$\cos(x-2\pi)=\cos x=\cos(x+2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються при зміні аргументу на 2π. Функції $y=\sin x$ і $y=\cos x$ є прикладами періодичних функцій.

Відомо,що для будь-якого x з області визначення функції $y=tg\,x$, $y=ctg\,x$ виконуються рівності

$$tg(x-\pi)=tg\,x=tg(x+\pi),$$

$$ctg(x-\pi)=ctg\,x=ctg(x+\pi).$$

Тоді з означення періодичної функції випливає, що тангенс і котангенс є також періодичними функціями з періодом π.

У класі з поглибленим вивченням математики поняття періодичної функції можна вводити, розглянувши графік функції $f(x)=\{x\}$ (рис. 5), з якою учні знайомі з дев'ятого класу. Учні безпосередньо за графіком визначають, що в разі додавання до будь-якого значення аргументу x число $T=1$ значення функції незмінюється. Воно не зміниться і тоді, коли до будь-якого x додати число nT, де n–ціле число. У такому випадку кажуть, щофункція $f(x)=\{x\}$ періодична з найменшим додатним періодом $T=1$. Її періодом є будь-яке ціле число, відмінне від нуля. Справді, для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{Z}$ виконується рівність $\{x+k\}=\{x\}$.

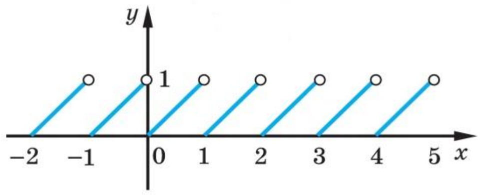


Рис. 5.

Із властивостей періодичної функції випливає важливий практичний висновок: для побудови графіка періодичної функції з періодом T досить побудувати графік на відрізку $[0;T]$, а потім паралельно перенести побудованийграфік вліво і вправо вздовж осі x на відстані nT, де n– натуральне число.

Доцільно наступним кроком розглянути деякі властивості періодичних функцій, подані нижче у вигляді теорем.

*Теорема 1.*Якщо число T є періодом функції f, то і число $-T$ також є періодом функції f.

Справедливість цієї теореми випливає з означення періодичної функції.

*Теорема 2.*Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції причому $T_1+T_2\neq 0$, то число T_1+T_2також є періодом функції f.

Доведення цього факту подано в [3].

Наслідок.Якщо число T є періодом функції f то будь-яке число виду nT, де $n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0$, також є її періодом.

Остання властивість означає, що кожна періодична функція має безліч періодів.

Наприклад, будь-яке число виду $2\pi n, n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0$, є періодом функцій $y=\sin x$ і $y=\cos x$; будь-яке число виду $\pi n, n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0$, є періодом функцій $y=tg\,x$ і $y=ctg\,x$.

*Теорема 3.*Якщо функція $y=f(x)$періодична і має період T, то функція $y=af(kx+b)$, де a, k, b– постійні ($k\neq 0$), також періодична, причому її період дорівнює $\frac{T}{|k|}$.

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y=af(kx+b)$ можна записати:

$$af(kx+b)=af((kx+b)+T)=af\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

$$af(kx+b)=af((kx+b)-T)=af\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Звідси для будь-якого x з області визначення функції $y=af(kx+b)$виконуються рівності:

$$af\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right)=af(kx+b)=af\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{|k|}$ є періодом функції $y = af(kx+b)$, що треба було довести.

Якщо серед усіх періодів функції f існує найменший додатний період, то його називають головним періодом функції f.

*Теорема 4.*Головним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число 2π; головним періодом функцій $y = tg\, x$ і $y = ctg\, x$ є число π.

Застосовуючи теореми 3 і 4 до функцій $y = \sin(kx+b)$ і $y = \cos(kx+b)$, де $k \neq 0$, отримуємо, що число $\frac{2\pi}{k}$ є періодом,а число $\frac{2\pi}{|k|}$ є головним періодом цих функцій.

Головним періодом функцій $y = tg(kx+b)$, $y = ctg(kx+b)$ де $k \neq 0$, є число $\frac{\pi}{|k|}$.Головним періодом функції $y = \{x\}$ є число 1.

*Теорема 5.*Якщо T – головний період функції то будь-який період функції f має вигляд nT, де $n \in \mathbb{Z}$ і $n \neq 0$.

На рисунку 6 зображено графік деякої періодичної функції f з періодом T, $D(f) = \mathbb{R}$.

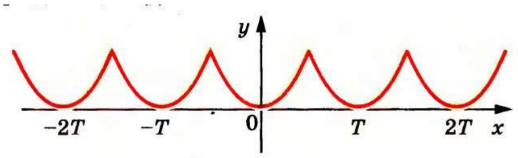


Рис.6.

Очевидно, що фрагменти графіка цієї функції на проміжках $[0;T]$, $[T;2T]$,$[2T;3T]$ і т. д., а також на проміжках $[-T;0]$, $[-2T;-T]$, $[-3T;-2T]$ і т. д. є рівними фігурами, причому будь-яка з цих фігур може бути отримана з будь-якої іншої паралельним перенесенням на вектор з координатами $(nT;0)$, де n– деяке ціле число.

Якщо проміжки$[a;b]$ і $[c;d]$ є такими, що $c = a+Tn$, $d = b+Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, то частини графіка функції f на цих проміжках є рівними фігурами (рис. 7).

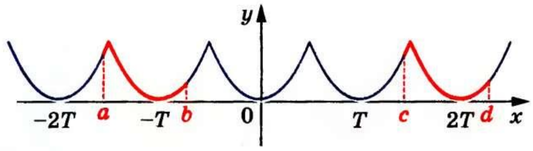


Рис.7.

Розглянемо приклади деяких практичних завдань, які пов'язані з періодичністю функцій і досить часто зустрічаються в дидактичних матеріалах для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Приклад 1. Покажіть, що число $T = \pi$ є періодом функції $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$.

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина значень змінної x, при яких $\cos x = 0$, тобто $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Тоді, якщо $x \in D(f)$, то $(x+\pi) \in D(f)$ і $(x-\pi) \in D(f)$.

Оскільки $E(f) = \{0\}$, то $f(x-\pi) = f(x) = f(x+\pi) = 0.$

Для розв'язання практичних завдань на знаходження періоду функції варто ввести наступний допоміжні терміни.

*Означення 2.*Додатні числа a і b називають сумірними(спільномірними), якщо $\frac{a}{b}$ – раціональне число. Якщо $\frac{a}{b}$ – ірраціональне число, то числа a і b єнесумірними.

Наприклад, числа в парах 3 і 5, $\sqrt{2}$ і $\sqrt{32}$ є сумірними, а числа 1 і $\sqrt{3}$ є несумірними.

*Означення 3.*Число T, яке є як періодом функції f, так і періодом функції g називають спільним періодомфункцій f і g. Наприклад, число $T = 2\pi$ є спільним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = tg\, x$.

*Теорема 6.*Якщо існують період T_f функції f і період T_g функції g такі, що числа T_f і T_g є сумірними, то функції f і g мають спільний період.

Розглянемо приклади.

1. Знайдіть період функції $y = \cos\frac{6x}{5} + tg\frac{6x}{7}$.

Розв'язання. Якщо ми знайдемо спільний період функцій $f(x) = \cos\frac{6x}{5}$ і $g(x) = tg\frac{6x}{7}$ то цим самим знайдемо період даноїфункції.

Скориставшись теоремою 3, запишемо:

$T_f = 2\pi : \frac{6}{5} = \frac{5\pi}{3}$, $T_g = \pi : \frac{6}{7} = \frac{7\pi}{6}$.Перевіримо, чи дані періоди є сумірними : $\frac{T_f}{T_g} = \frac{\frac{5\pi}{3}}{\frac{7\pi}{6}} = \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{6}{7\pi} = \frac{10}{7}$.Згідно з означенням 2 періоди T_f і T_g сумірні, а тому функції f і g мають спільний період T. З відношення $\frac{T_f}{T_g} = \frac{10}{7}$ маємо, що $7T_f = 10T_g$. Згідно з означенням 3 T є періодом як функції f, так і функції g, а це можливо тоді, коли $T = 7T_f = 10T_g$, тобто $T = \frac{35\pi}{3}$.

Відповідь. $\frac{35\pi}{3}$.

2. $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$;

Розв'язання. Знайдемо спільний період функцій $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$ і $g(x)=\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$.

Скориставшись теоремою 3, запишемо: $T_f=2\pi:\frac{1}{2}=4\pi$, $T_g=2\pi:\frac{1}{3}=6\pi$.

Тоді $\frac{T_f}{T_g}=\frac{2}{3}$. Отже, періоди T_f і T_g сумірні, а тому функції f і g мають спільний період T. Згідно з означенням 3 він дорівнює $3T_f$ або $2T_g$, тобто $T=12\pi$.

Відповідь. 12π.

3. $f(x)=tg3x+ctg\left(4x-\frac{\pi}{12}\right)$.

Розв'язання. Знайдемо спільний період функцій $f(x)=tg3x$ і $g(x)=ctg\left(4x-\frac{\pi}{12}\right)$.

Скориставшись теоремою 3, запишемо: $T_f=\pi:3=\frac{\pi}{3}$, $T_g=\pi:4=\frac{\pi}{4}$.

Тоді $\frac{T_f}{T_g}=\frac{4}{3}$. Отже, періоди T_f і T_g сумірні, а тому функції f і g мають спільний період T. Згідно з означенням 3 він дорівнює $4T_f$ або $3T_g$, тобто $T=\pi$.

Відповідь. π.

4. $f(x)=\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Знайдемо спільний період функцій $f(x)=\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$ і $g(x)=tg\frac{x}{2}$.

Скориставшись теоремою 3, запишемо:

$T_f=2\pi:\frac{1}{3}=6\pi$, $T_g=\pi:\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$.

Тоді $\frac{T_f}{T_g}=12$. Отже, періоди T_f і T_g сумірні, а тому функції f і g мають спільний період T. Він дорівнює T_f або $12T_g$, тобто $T=6\pi$.

Відповідь. 6π.

5. $y=\sin\pi x+\left\{3x-\frac{1}{2}\right\}$.

Розв'язання. Знайдемо спільний період функцій $f(x)=\sin\pi x$ і $g(x)=\left\{3x-\frac{1}{2}\right\}$: $T_f=2$, $T_g=\frac{1}{3}$.

Тоді $\frac{T_f}{T_g}=6$. Отже, періоди T_f і T_g сумірні, а тому функції f і g мають спільний період T. Згідно з означенням 3 він дорівнює $T=2$.

Відповідь. 2.

6. $y=\sin\pi x-2\cos\frac{\pi x}{3}$.

Розв'язання. Знайдемо спільний період функцій $f(x)=\sin\pi x$ і $g(x)=-2\cos\frac{\pi x}{3}$: $T_f=2$, $T_g=6$.

Тоді $\frac{T_f}{T_g}=\frac{1}{3}$. Отже, періоди T_f і T_g сумірні, а тому функції f і g мають спільний період T. Згідно з означенням 3 він дорівнює $T=6$.

Відповідь. 6.

7. Знайдіть період функції $y=\sin 2x-\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+4tg\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Розглянемо функції $f(x)=\sin 2x$, $g(x)=-\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, $h(x)=4tg\frac{x}{2}$. Для розв'язання задачі достатньознайти їх спільний період.

Це можна зробити, наприклад, так: спочатку знайти період функції $\varphi(x)=f(x)+g(x)$, а потім знайти спільний період функцій φ і h.

Проте існує більш ефективний метод.

Маємо: $T_f=\pi$, $T_g=\frac{4\pi}{3}$, $T_h=2\pi$.

Запишемо ці періоди в такому вигляді: $T_f=\frac{1}{1}\pi$, $T_g=\frac{4}{3}\pi$, $T_h=\frac{2}{1}\pi$.

Розглянемо число $T=\frac{НСК(1;4;2)}{НСД(1;3;1)}\cdot\pi=4\pi$.

Оскільки $T=4T_f$, $T=3T_g$, $T=2T_h$ то число T є спільнимперіодом функцій f,g,h.

Відповідь: 4π.

8. Знайдіть період функції $y=\sin\frac{5x}{8}+5tg\left(\frac{7x}{11}-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(6x-3\right)$.

Розв'язання. Розглянемо функції $f\left(x\right)=\sin\frac{5x}{8}$, $g\left(x\right)=5tg\left(\frac{7x}{11}-\frac{\pi}{4}\right)$, $h\left(x\right)=-\sin\left(6x-3\right)$.

Маємо: $T_f=\frac{16\pi}{5}$, $T_g=\frac{11\pi}{7}$, $T_h=\frac{\pi}{6}$.

Запишемо ці періоди в такому вигляді: $T_f=\frac{16}{5}\pi$, $T_g=\frac{11}{7}\pi$, $T_h=\frac{1}{6}\pi$.

Розглянемо число $T=\frac{НСК\left(16;11;1\right)}{НСД\left(5;7;6\right)}\cdot\pi=176\pi$.

Число T є спільнимперіодом функцій f,g,h.

Відповідь: 176π.

Доцільно зауважити, що алгоритм знаходження спільного періоду трьох функцій, запропонований у розв'язанні даного прикладу поширюється на будь-яку скінченну кількість функцій $f_1,f_2,...,f_k$, періодияких можна відповідно подати у вигляді

$\frac{m_1}{n_1}\cdot t,\frac{m_2}{n_2}\cdot t,...,\frac{m_k}{n_k}\cdot t$, де $m_1,m_2,...,m_k$, $n_1,n_2,...,n_k$ – натуральні числа, $t\neq 0$.

Література

1. Бевз Г.П. Математика 10 клас: підруч. для загальноосвітніх навч. закладів / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз – К.: «Генеза», 2010. – 300с.
2. Істер О.С. Дидактичні матеріали з алгебри. 10 клас: Вправи. Самостійні роботи. Тематичні контрольні роботи. Завдання для корекції знань / О.С.Істер.–Кам'янець-Подільський: Абетка, 2004. – 228 с.
3. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики/А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 415 с.: іл.
4. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загально-освіт. навчальн. закладів : академ. рівень / Є.П. Нелін. –Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.
5. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2–ге вид., допов. і переробл / З.І.Слєпкань– К.: Вища шк. – 2006. – 582с.: іл.
6. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10–11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 1998 . – 608с .

Благодір Наталя Василівна
студентка 4 курсу,напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ПАРАМЕТРА В КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

Розв’язати рівняння, яке містить параметр, знайти значення параметра, при яких корінь рівняння задовольняє деяким умовам… З подібним класом задач учні зустрічаються досить часто. Особливо під час підготовки до державного екзамену з математики, до зовнішнього незалежного оцінювання. Саме такі задачі викликають у більшості учнів певні труднощі. Це не випадково, адже шкільною програмою з математики не передбачається глибокого системного вивчення завдань, що містять параметри. У навчальній програмі з алгебри для класів з поглибленим вивченням математики (8-9 класи) при вивчені тем «Раціональні рівняння», «Нерівності», «Квадратні рівняння» розглядаються такі важливі і складні поняття, як параметр, рівнянняз параметрами, нерівності з параметрами.

Переглядаючи шкільні підручники алгебри для загальноосвітньої школи можна помітити, що завдання із параметрами практично є в кожному підручнику майже в кожному параграфі, хоча самого пояснення поняття параметр, пояснень щодо розв’язання таких вправ немає.

У підручнику Янченко Г.М. «Алгебра 7» при вивченні теми «Рівняння» представлені завдання в яких розглядаються найпростіші лінійні рівняння, де параметр є вільним членом рівняння і його необхідно досліджувати на належність кореня до цілих чисел з параметром такого типу. Наприклад:знайдіть таке число a, щоб коренем рівняння $2x+a=-1$ було число 1. У цьому ж підручнику в розділі «Лінійна функція» не вводячи поняття параметр пропонуються вправи у яких з'ясовується розташування графіка функції залежно від коефіцієнта (фактично параметра).У темі «Рівняння із двома змінними» зустрічаються завдання такого типу: знайдіть усі значення a, для яких одним із розв’язків рівняння $2(5a+1)^2x-5(2a-1)^2y=7$ є пара чисел $(2;5)$. Завдання з параметром запропоновані і в темі «Графік лінійного рівняння із двома змінними», а саме знайдіть значення коефіцієнта a в рівнянні $ax+3y=4$, коли відомо, що графік рівняння проходить через точку $(1;2)$. Побудуйте графік рівняння. Також зустрічаються завдання з параметром у темі «Розв’язування систем лінійних рівнянь»: для яких значень коефіцієнтів a та b розв’язком системи рівнянь $\begin{cases}5x-ay=10;\\ bx+2y=4\end{cases}$ є пара чисел $(2;-1)$; для яких значень коефіцієнта a система рівнянь $\begin{cases}4x-y=9;\\ 6x+ay=4\end{cases}$ не має розв’язку.

У підручнику авторів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.«Алгебра 8» завдання з параметром зустрічаються у розділі «Раціональні вирази», «Квадратні рівняння».Наприклад: при яких значеннях a рівняння

$(a-2)x^2+(2a-1)x+a^2-4=0$ є 1) лінійним; 2) зведене квадратне; при якому значенні a рівняння має єдиний корінь $3x^2-ax+12=0$.

У підручнику «Алгебра 9» авторівМерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.завдання із параметрами пропонуються при вивчені тем «Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною»,«Системи лінійних нерівностей з однією змінною»,«Квадратична функція її графік і властивості». Зокрема, при яких значеннях a вираз $6a+1$ набуває від'ємного значення; для кожного значення a розв'яжіть нерівність: $a^2>1$;при яких значеннях a функція $y=x^2+6x+a$ не має нулів; при яких значеннях a найменший цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x \geq 6; \\ x > a \end{cases}$ є число 9, тощо.

У підручнику «Алгебра 8» для поглибленого вивчення математики авторів Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.завдань із параметрами досить багато і вони є в добірці задач практично до кожної теми.У параграфі «Раціональні рівняння» вперше формується поняття «параметр». Достатня кількість завдань з параметром у підручнику цих авторів«Алгебра 9» для поглибленого вивчення математики.

Така кількість вправ із параметрами у шкільних підручниках зрозуміла, адже відомо, яку важливу роль вони відіграють у розвитку розумових здібностей учнів: кмітливості, вмінь міркувати, робити правильні висновки тощо. У завданнях для державної підсумкової атестації з математики для 9 та 11 класів містяться вправи із параметром, як правило це рівняння або нерівності із параметром. Також у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання щороку є кілька завдань із параметрами. Отже, уміння розв'язувати вправи із параметрами необхідні не тільки учням, які планують пов'язувати свою професійну діяльність із математикою, а й тим, хто планує складати державну підсумкову атестацію з математики, зовнішнє незалежне оцінювання з математики.

Мета статті – ознайомити з одним із можливих підходів до вивчення поняття параметра у звичайних класах загальноосвітніх шкіл.

Оскільки, серед вправ із параметрами найчастіше зустрічаються рівняння з параметрами, тому доцільно пояснювати, що таке параметр на прикладі лінійного рівняння.

У формі бесіди, ставимо запитання до учнів, коригуючи в разі необхідності їхні відповіді.

Які рівняння називають лінійними? Очікувана відповідь: рівняння виду $ax=b$, де a іb – деякі числа, а x – невідоме, називається лінійним рівнянням з одним невідомим.

Як називаються числа a іb в лінійному рівнянні? Очікувана відповідь: числа a іb називають числовими коефіцієнтами.

Повідомляємо учням, що літери a іb в лінійному рівнянні називають також параметрами. Параметри a іb розглядаються як величини, числові значення яких фіксовані, але невідомі.

Параметр (від грецького (parametreo) – вимірює що-небудь, порівнюючи з чим-небудь іншим) – стала величина, яка в даних умовах не змінює свого значення. Наприклад, у рівнянні кола $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ величини *a, b і R* є параметрами кола; вони визначають положення кола на площині і його радіус і для даного кола мають стале значення. Рівняння з параметром є фактично сімейством рівнянь, що розглядаються при фіксованому значенні параметра.Дослідження рівнянь з параметром це важка і одночасно цікава задача. Головне навчитись «бачити» на які підмножини потрібно розділити область визначення параметра, щоб на кожній із них властивості рівняння зберігались.

Скільки коренів може мати лінійне рівняння? Очікувана відповідь:

якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x=\frac{b}{a}$;

якщо $a=0$, а $b \neq 0$, то рівняння коренів не має;

якщо $a=0$ і $b=0$, то коренем рівняння є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

Отже, для лінійного рівняння $ax=b$таким розподілом області визначення параметра *a* є умови, коли $a=0$ і $a \neq 0$.

На відміну від рівнянь з двома змінними $f(x;a)=0$, де потрібно знайти всі пари чисел *(x;a)*, які задовольняють умову цього рівняння, рівняння $f(x;a)=0$з параметром *a* вимагає вказати ті значення параметра *a*, при яких це рівняння має розв'язки (відносно невідомої *x*), і для кожного такого значення вказати (відносно *a*) множину розв'язків цього рівняння.

Вивчення багатьох фізичних процесів, геометричних залежностей приводять до задач, які містять параметри. При цьому виникає необхідність дослідження процесу залежно від значень параметра. Тому розглядають не тільки рівняння, а й нерівності, системи рівнянь і нерівностей з параметрами, функції, які містять параметри.

Під задачами з параметрами будемо розуміти задачі, в яких умова, хід розв'язку і форма результату залежать від величин, чисельні значення яких не задані конкретно, але повинні вважатися відомими. До задач із параметрами ми також відносимо задачі, в яких параметри присутні або формально, або вводяться з тих чи інших міркувань.

Після пояснення варто навести приклади рівнянь із параметром, звертаючи увагу учнів, що параметри можуть позначатися будь-якими літерами, якими не позначене невідоме. Лінійне рівняння з параметром необов'язково має вигляд $ax=b$. Наприклад:

$(a-3)x=a-3$; $nx=x+n^2$; $2x+k=-1$.

Далі пропонуємо колективно розв'язати рівняння:

1. Розв'яжіть рівняння $ax=a$ з параметром a.

Розв'язання

Розглянемо два випадки:

1) $a \neq 0$.Тоді: $ax=a$, $x=1$ (поділили обидві частини рівняння на *a*).
2) $a=0$.Тоді: $ax=a$; $0x=0$; коренем рівняння є будь-яке число.

Відповідь. Якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число.

2. Розв’язати рівняння $ax = 1$.

Розв’язання

Розглянемо два випадки коли $a \neq 0$ і коли $a = 0$.

При $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$. Однак при $a = 0$ дане рівняння не має розв’язків.

Відповідь. Немає розв’язків , якщо $a = 0$; $x = \frac{1}{a}$, якщо $a \neq 0$.

3. Розв’яжіть рівняння $(a-3)x = a-3$.

Розв’язання.

При $a = 3$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$. У цьому випадку його коренем є будь-яке число.

При $a \neq 3$маємо, що $a-3 \neq 0$. Тоді $x = \frac{a-3}{a-3}$, тобто $x = 1$.

Відповідь. Якщо $a = 3$, то x - будь-яке число;якщо $a \neq 3$, то $x = 1$.

Для кращого засвоєння процесу розв’язування лінійних рівнянь, які містять параметри, можна запропонувати одному, чи в разі потреби кільком учням по черзі відтворити всю схему дослідження і розв’язання рівняння. Далі можна розв’язати кілька рівнянь, поступово ускладнюючи їх, що надасть змогу сприяти як засвоєнню самого процесу дослідження, так і розвитку розумової діяльності учнів, виробленню певних умінь і навичок розв’язування рівнянь, які містять параметри.

Література

1. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / А. Г.Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – К.: «Гімназія». – 2008. – С.253.
2. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 клас. Підручник для учнів 9 класу / А. Г.Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - К.: «Гімназія». – 2009. – С.317.
3. Янченко Г. М. Алгебра 7 клас. Підручник для учнів 7 класу / Г. М.Янченко. - Тернопіль: Підручники і посібники. – 2007.– С.240.
4. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 клас. Підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики / А. Г.Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: «Гімназія». – 2008. – С.368.
5. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики / А. Г.Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. - Х.: «Гімназія». – 2009.– С.384.
6. Сучков В.М. Методична розробка п’яти уроків з теми «Рівняння з параметрами, що зводяться до лінійних. / В.М.Сучков. // Математика в школі. – 2002. - №3.- С.39-44.

Бойко Вікторія Петрівна
студентка 3 курсу,напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ІРРАЦІОНАЛЬНОГО ЧИСЛА В КУРСІ АЛГЕБРИ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

У курсі алгебри 7-9 завершується формування поняття дійсного числа. До відомих учням числових множин долучається множина ірраціональних чисел. Зокрема, у 8 класі в межах вивчення теми «Квадратні корені. Дійсні числа» учні розглядають раціональні числа; ірраціональні числа; дійсні числа; числові множини; етапи розвитку числа. Найскладнішим для сприйняття учнів є поняття ірраціонального числа.

Метою статті є розкриття технології введення поняття ірраціонального числа. Як правило, введення поняття передбачає формулювання означення поняття, аналіз прикладів об'єктів, що належать даному поняттю, виявлення суттєвих і несуттєвих властивостей поняття та розгляд вправ на підведення під поняття та виведення наслідків. Вважаємо доцільним, доповнити цей перелік історичними відомостями про ірраціональні числа.

Перед введенням поняття ірраціонального числа можна розповісти учням про розширення множини натуральних чисел до множини раціональних чисел. У процесі бесіди зручно користуватися різними схемами, що ілюструють зв'язок між числовими множинами (рис. 1) та таблицею:

Множина	*Причина розширення множини*	*Множина, що приєднується*	*Розширена множина*
Натуральні числа	Віднімання рівних чисел	Нуль	Цілі невід'ємні числа
Цілі невід'ємні числа	Віднімання від меншого більше число	Цілі від'ємні числа	Цілі числа
Цілі числа	Ділення націло не завжди можливе	Дробові числа	Раціональні числа
Раціональні числа	Добування квадратного кореня із будь-якого додатного числа	Ірраціональні числа	Дійсні числа

Рис. 1.

Майже у всіх шкільних підручниках означення ірраціонального числа формулюється однаково: після тверджень, що кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного дробу та кожний нескінченний десятковий періодичний дріб є записом деякого раціонального числа, показують на різноманітних прикладах, що існують числа які є не раціональними. Їх називають ірраціональними – значить не раціональні (лат.ir-відповідає заперечувальній частці не). Ірраціональні числа можуть бути подані у вигляді нескінченних періодичних десяткових дробів.

Після формулювання означення поняття ірраціональних чисел, доцільно розглянути приклади. У більшості шкільних підручників для прикладу ірраціонального числа розглядається квадрат, сторона якого дорівнює одиничному відрізку(рис.2). Нехай довжина діагоналі AC квадрата ABCD дорівнює x. На цій діагоналі будується квадрат ACEF. Площа квадрата ABCD дорівнює 1, площа трикутника ACD - $\frac{1}{2}$, а площа квадрата ACEF - $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. Також площа квадрата ACEF дорівнює x^2, отже, x^2=2. Одержали, що довжина x діагоналі AC має бути додатним числом, квадрат якого дорівнює 2. Однак, серед раціональних чисел немає числа, квадрат якого дорівнює 2. Отже, число x, яке визначає довжину діагоналі квадрата із стороною 1 не є раціональним числом. (Рис.1.)

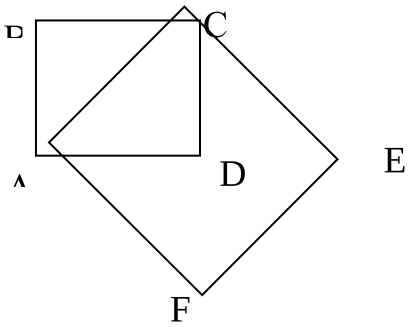


Рис.2.

У підручнику колективу авторів А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський та інші «Алгебра 8», для прикладу ірраціонального числа розв’язують графічно рівняння x^2=2(рис.3). Оскільки, 2>0, то рівняння має 2 корені: $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$. Проте не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2, тобто числа $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$ не є раціональними. Їх називають ірраціональними.

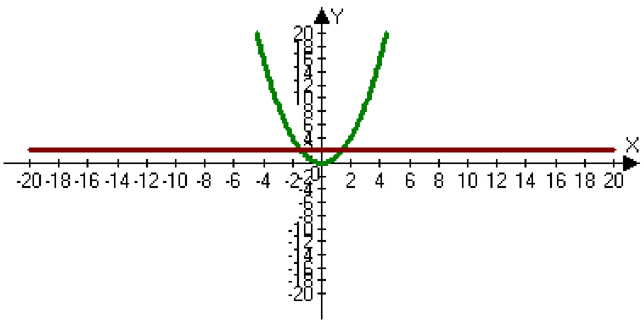


Рис.3.

Важливо звернути увагу учнів, що ірраціональні числа виникають не тільки в результаті добування квадратних коренів. Їх можна конструювати, будуючи нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Наприклад, число 1,1112131415161718192021222З… (після коми записуються послідовно натуральні числа починаючи з 11) є ірраціональним. Також число $\pi \approx 3{,}14159265358979338462643383\ldots$ є ірраціональним числом, яке виражає відношення довжини кола до його діаметра.

Для свідомого засвоєння учнями поняття ірраціонального числа можна запропонувати такі запитання:

- Уявіть, що на координатній прямій позначено дві довільні точки A і B з раціональними координатами a і b. Скільки на відрізку AB існує точок з раціональними координатами? (Очікувана відповідь) Безліч.
- А точок з ірраціональними координатами?

Значно більше, ніж з раціональними! Множини ірраціональних і раціональних чисел утворюють множину дійсних чисел. Кожному дійсному числу відповідає точка на координатній прямій.

Для виявлення суттєвих і несуттєвих властивостей ірраціональних чисел слід розглянути такі вправи:

1)Які твердження є правильними?

А) $\sqrt{3}$ - ірраціональне число;
Б) $\sqrt{225}$- дійсне число;
В) $\sqrt{7}$- раціональне число;
Г) 0,(16)- ірраціональне число;
Д) 2 – ціле число;
Е) 2 - натуральне число;
Ж) 2 – дійсне число;
З) $\sqrt{8}$ - дійсне число.

2) Запишіть в таблицю числа:
$\sqrt{3}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{7}$, 0,050505…..;
0,12345678….(після коми записуються послідовні натуральні числа);
0,123456789234…..;
0,(17), π, 8, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{9}$, -$\frac{23}{7}$.

Раціональні числа	Ірраціональні числа

5)Подані числа розташуйте у порядку зростання:

А) $\sqrt{8}, \sqrt{64}, \sqrt{5}, \sqrt{3}$;
Б) 4, $\sqrt{3}$, 1, 8, 6 , $\sqrt{16}$;
В) 6, $\sqrt{56}$, 3,8 , $\sqrt{7}$;
Г) 8, -8, $\sqrt{3}$,$\sqrt{1}$;
Д) 16, 0, $\sqrt{9}$,- $\sqrt{12}$;
Е) -1, 14, $\sqrt{18}$, $\sqrt{25}$.

Ірраціональні числа виникли пізніше від раціональних і їх довго не визнавали за числа як такі, називали то «несумірні», то «невиразними», то «супротивними» щодо розуму.

Розглядаючи ірраціональні числа, як числа нового виду, математики СтародавньоїЇндії та араби першими перенесли правила дій над раціональними числами на дії з ірраціональними. Так, Бхаскара позбувався ірраціональність у знаменнику, помножаючи чисельник і знаменник на той самий ірраціональний множник.

Термін «ірраціональний» у математичному розумінні вперше застосований у XIV столітті англійський математик Т. Брадвардін (1325). До нього ірраціональні числа називали «безголосими», «глухими». Декарт (1637) показав, що ірраціональні числа, як і раціональні, зображуються точками на координатній площині. Л. Ейлер, Й. Ламберт та інші встановили, що нескінченний періодичний дріб – завжди раціональне число. Тому ірраціональне число є нескінченним неперіодичним дробом. Аж до другої половини XIX століття загальної теорії ірраціональних чисел не було розроблено.Доведення ірраціональності чисел e таπ належить німецькому математику Й. Ламберту.

Вивчення тем «Числові множини. Етапи розвитку числа»можна організувати за активної участі учнів, якщо запропонувати їм підготувати відповідні реферати або проекти. Для реалізації такого підходу слід наприкінці першої чверті оголосити теми, а згодом визначити учнів, які бажають підготувати одну з названих тем.

Література

7. Бевз Г.П. Алгебра. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: «Зодіак-ЕКО». – 2008. - 255с.
8. Біляніна О. Я. Алгебра. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / О.Я. Біляніна, Н.Л.Кінашук, І.М.Черевко. - К.: «Ґенеза». – 2008. – 302с.
9. Кравчук В. Р. Алгебра. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / В.Р. Кравчук, М.В.Підручна, Г.М. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники. – 2009. – 254с.
10. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / А. Г.Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – К.: «Гімназія». – 2008. – 253с.

Войцехівська Валентина Віталіївна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ПРОЕКТІВ ДЛЯ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ У КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Тему «Похідна і її застосування»у шкільному курсі математики, а саме в курсі алгебри і початків аналізу, за новою навчальною програмою розглядають на початку 11-го класу. Дане поняття є важливим не лише в математичному аналізі, а й в інших наукових галузях, а саме в фізиці, економіці, хімії і тощо. Програма з математики для загальноосвітньої школи відводить на вивчення теми "Похідна та її застосування" приблизно 26 годин (в загальноосвітній школі), 46 годин (в ліцеях і гімназіях з поглибленим вивченням математики). Основна задача вчителя полягає в тому, щоб навчити школярів застосовувати похідну для дослідження функцій та розв'язання прикладних задач алгебри та геометрії.

Відомий факт з історії розвитку математичного аналізу, що до відкриття похідної прийшли незалежно один від одного Г.Лейбніц та І.Ньютон. Лейбніц відкрив дане поняття коли розв'язував геометричну задачу про знаходження положення дотичної до кривої у певній точці, а Ньютон – розв'язуючи задачу механіки про визначення миттєвої швидкості.

У вищій школі для підведення студентів до означення даного поняття розглядають обидві задачі, а в шкільному курсі через недостачу часу розглядають лише одну з даних задач. З.І.Слєпкань пропонує при введенні поняття похідної розглядати задачу про миттєву швидкість, аргументуючи, що доцільно розглядати саме цю задачу, оскільки з нею учні до цього знайомляться в курсі фізики і варто буде оформити її розв'язування в термінах і символах математичного аналізу.

На нашу думку, введення поняття похідної таким чином, а саме за допомогою задачі про миттєву швидкість, є доречним і логічним, оскільки таким чином введене поняття опирається на відомі учням поняття, а отже, відбувається систематизація знань і умінь учнів, встановлюються міжпредметні зв'язки.

У своїй праці, яка присвячена методиці навчання математики, Г.П.Бевз пропонує також не розглядати одразу дві задачі, які приводять до поняття похідної. Він твердить, що спочатку потрібно розглянути задачу про дотичну, а на її основі ввести і закріпити поняття похідної, і лише потім розглянути її застосування до фізичних задач [3].

Деякі автори у сучасних підручниках з алгебри і початків аналізу пропонують навпаки спочатку розглядати фізичний зміст похідної, а вже потім, на основі введеного поняття похідної розглядати задачу про дотичну до графіка функції [2]. В більшості шкільних підручників є параграф, в якому дібрані задачі, які приводять до поняття похідної, а саме: задача про миттєву швидкість; задача про дотичну до кривої; задачі з інших галузей. Тобто автори наводять кілька задач, а вчитель уже сам має визначити, яку задачу, на його думку, краще вибрати для введення даного поняття. Таким чином поданий матеріал і в підручниках, які на даний час є основними шкільними підручниками, а саме у підручнику авторського колективу на чолі з А.Г.Мерзляком [1].

Вважаємо за доцільне для введення поняття похідної використати метод проектів, який поєднується з груповим навчанням та передбачає розв’язання певної проблеми.До безперечних переваг методу проектів належить формування навичок безконфліктного спілкування учнів; високий рівень організації, який має забезпечити здатність самостійно здійснювати різні види діяльності. До основи методу проектів покладено розвиток пізнавальних навичок учнів, уміння самостійно конструювати свої знання, орієнтуватися в інформаційному просторі, розвиток креативного мислення. Перевагою є його спрямованість на результат, який одержуємо в процесі розв’язання певної задачі. Метод проектів завжди орієнтований на самостійну роботу учнів – індивідуальну, групову, парну.

Отож, розглянемо поетапно, який вигляд може мати проект з теми: «Похідна і її застосування».

1. *Передпроект*.

На цьому етапі вчитель має заохотити учнів у тому, щоб вони взяли участь у проекті, довести їм, що це цікаво, корисно і вони матимуть від нього певний результат для себе. Також на цьому етапі учні самі можуть висунути ідеї щодо майбутнього проекту. І на основі ідей вчителя та інтересів учнів щодо даної теми визначається кількість підгруп, формулюються теми для підгруп, їх тематика. Учні поділяються на підгрупи, але при цьому учитель має врахувати, що можливості підгруп мають бути рівносильними. Ми пропонуємо для нашої теми проекту поділити учнівський колектив на чотири підгрупи. Одна з підгруп має підготувати матеріал про історію виникнення даного математичного поняття, інші три розв’язати кожна по одній різній задачі з різних галузей, які приводять до виникнення поняття похідної.

2. *Етап планування роботи над проектом*.

Основна мета даного етапу роботи над проектом – одержання загального уявлення про майбутній напрям роботи. Вчитель має повідомити учням скільки часу у них є для роботи над проектом. Очевидно, наш проект буде середньої тривалості, учні отримають завдання за 1-2 тижні до презентації своїх результатів, оскільки виконання даного завдання потребує достатньої кількості часу. Також на даному етапі керівник проекту має конкретизувати діяльність кожної підгрупи, тобто роздати завдання до кожного підпроекту. Вчитель повідомляє, коли мають бути представлені результати проекту, які це мають бути результати – у вигляді виступу, який доповнюватиме комп’ютерна презентація, повідомляє, що тривалість захисту проекту – 5-7 хв. Розглянемо детальніше завдання проекту до даної теми.

Завдання для групи І. Історія виникнення поняття похідної.

До цієї теми учні мають дібрати цікавий матеріал про історію виникнення даного поняття, розповісти про науковців, які працювали над цим питанням,хто ввів відповідні позначення і т.д.

Завдання для групи II. Задача про миттєву швидкість.

До цієї теми учні отримають задачу, яку мають детально розв'язати, визначити основні етапи роз'язку, намагатись пов'язати результат розв'язку з поняттям похідна. Це може бути така задача.

Задача. Нехай точка рухається рівноприскорено з прискоренням a і початковою швидкістю υ_0. Знайти її швидкість у момент часу t [6].

Завдання для групи III. Задача про значення змінного струму, який проходить у провіднику.

Оформити розв'язок аналогічно до попередньої підгрупи.

Задача. Нехай у провіднику за час t через поперечний переріз проходить кількість електрики q, яка з часом змінюється. Зміна задається відповідною функцією $q = q(t)$. Знайти значення сили струму, що проходить у провіднику в момент часу t [6].

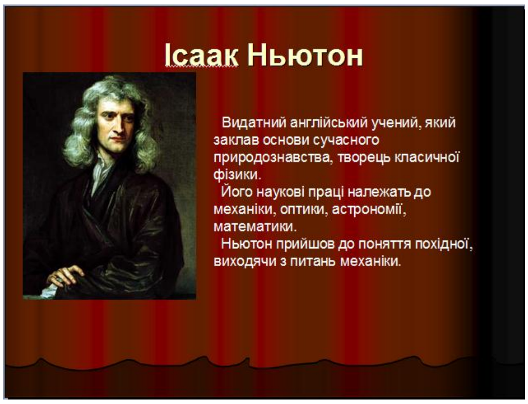
Завдання для групи VI. Задача про дотичну до кривої.
Завдання подібне до двох попередніх підгруп.
Задача.Провести дотичну до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;\, y_0)$ [6].

3. *Аналітичний етап* - робота над проектом. На цьому етапі учні підшуковують літературу, опрацьовують її, виконують певні дослідження, консультуються з вчителем, який коригує діяльність груп і окремих учнів.
4. *Етап узагальнення*. Учні узагальнюють свої дослідження, визначають головне, готують виступ і презентацію.
5. *Презентація одержаних результатів,* яка буде реалізована на уроці.

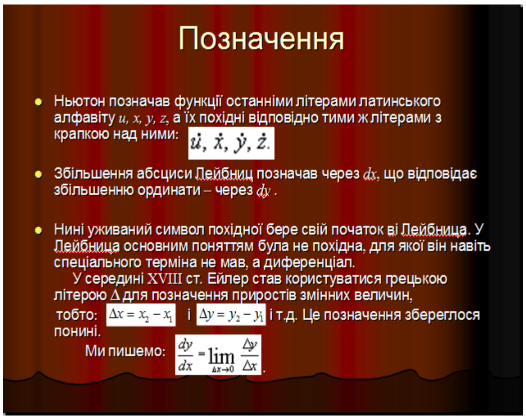
Тема першої підгрупи: «Історія виникнення поняття похідної». Важливість розгляду історії виникнення даного поняття полягає у тому, що учні можуть побачити, що необхідність вивчення даного поняття з'явилася ще з давніх часів і була проблемою дослідження багатьох відомих математиків, таких як Архімед, Евклід, Аполлоній, Торрічеллі, Роберваль, Барроу, Ферма.Але до кінця розв'язати цю проблему змогли лише Ньютон і Лейбніц. Тому при висвітлені історичних відомостей варто приділити значну увагу цим двом вченим.

Розглянемо який вигляд можуть мати основні слайди презентації до виступу цієї підгрупи.

Слайд 1.



Слайд 2.



Слайд 3.

Виступ наступних трьох груп стосується задач, які підводять до поняття похідна.

Розглянемо, яким буде розв’язок задачі про миттєву швидкість.

Спочатку потрібно згадати, що залежність шляху від часу в рівноприскореному русі виражається за формулою:

$$s = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2} \quad s = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

1) Далі надаємо t приросту Δt.
2) Знаходимо приріст шляху:

$$\Delta s = \upsilon_0 \left(t + \Delta t\right) + \frac{a(t + \Delta t)^2}{2} - (\upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}).$$

Після спрощення отримуємо вираз:

$$\Delta s = \Delta t(\upsilon_0 + at + \frac{a\Delta t}{2}) .$$

3) Знаходимо середню швидкість як відношення приросту функції s до приросту аргументу t:

$$\upsilon_c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \upsilon_0 + at + \frac{a\Delta t}{2}.$$

4) Переходимо в останній рівності до границі, коли $\Delta t \to 0$, і на основі цього виводимо відому формулу: $\upsilon = \upsilon_0 + at$.

Після їхнього виступу вчитель має узагальнити способи розв'язання задач, які, очевидно, матимуть однакову схему, і скласти за допомогою учнів алгоритм знаходження похідної, а в результаті цього і ввести означення похідної.Узагальнення розв'язку задач вчитель може подати у вигляді наступного алгоритму знаходження похідної.

Нехай функція $y=f(x)$ задана на деякому проміжку $(a;b)$ і x_0 – точка, яка належить цьому проміжку. Виконуємо ті чотири кроки, що й для розв'язування задач, які були розглянуті на занятті:

1) надамо значенню x_0 довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб число $x_0+\Delta x$ належало проміжку $(a;b)$;

2) обчислимо в точці x_0 приріст функції:

$$\Delta y=\Delta f\left(x_0\right)=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right);$$

3) складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x};$$

4) знайдемо границю цього відношення за $\Delta x\to 0$, тобто:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}.$$

Якщо така границя існує, то її називають похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y' [5].

За допомогою такого алгоритму учні можуть знаходити похідні для будь-яких найпростіших функцій. Для закріплення отриманого алгоритму варто розв'язати з учнями наступну добірку вправ.

Завдання1. Знайдіть похідну функції $f(x)=kx+b$ у точці x_0.

Розв'язання даного завдання варто виконувати за допомогою введеного раніше алгоритму.

1) Незалежній змінній x надаємо приросту Δx.

2) Знайдемо приріст функції:

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=k(x_0+\Delta x)+b-kx_0-b=kx_0+k\Delta x-kx_0=k\Delta x.$$

3) Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{k\Delta x}{\Delta x}=k.$$

4) Знаходимо границю: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}k=k$ або $(kx+b)'=k$.

Відповідь: k.

З прикладу можна зробити висновок, що похідна лінійної функції є постійна величина, яка дорівнює кутовому коефіцієнту прямої. Якщо в формулі $(kx+b)'=k$ покласти $k=0, b=C$, де C — довільна постійна, то одержимо, що $C'=0$, тобто похідна сталої величини дорівнює нулю.

Завдання 2. За допомогою отриманої формули $(kx+b)'=k$, знайдіть похідні функції:

а) $f(x) = 3x + 4$; б) $f(x) = -6x - 1$;

в) $f(x) = 10$; г)$f(x) = 5x$.

Відповідь: а) 3; б) 6; в) 0; г) 5.

Завдання 3. Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

а) $f(x) = x^2$; б)$f(x) = 2x^2 + x$;

в) $f(x) = x^2 +2x - 6$.

*Завдання 4.*Довести, що дотичною до параболи $y = x^2$ у точці $O(0;0)$ є вісь абсцис.

Завдання 5. Нехай точка рухається так, що закон її руху виражено формулою $s = t^3 - 5t^2 + t + 2$. Визначити: 1) середню швидкість точки за інтервал часу від t_1 = 5 с до t_2 = 10 с; 2) швидкість точки в середині і в кінці цього інтервалу.

Завдання 6. Нехай у момент часу t через поперечний переріз провідника проходить кількість електрики $q = \sqrt{2+t}$. Знайти силу струму в момент часу t = 2 с.

На нашу думку, за допомогою методу проектів можна не лише зацікавити учнів вивченням не простої, але дуже важливої одиниці алгебри – похідної, а й розвивати їхню творчість, вміння співпрацювати з однокласниками, самостійність, вміння розв’язувати проблеми, узагальнювати засвоєний матеріал. Також, якщо при введенні поняття використати такий підхід, то при цьому можна розглянути кілька задач з різних галузей науки, які приводять до поняття похідної. Це вдається зробити за рахунок попередньої самостійної позакласної роботи учнів під керівництвом вчителя. Такий підхід безперечно сприятиме кращому засвоєнню матеріалу учнями.

Література

1. Мерзляк А.Г. Алгебра 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А.Г.Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2011.
2. Афанасьєва О.М. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: Пробний підручник. / О.М.Афанасьєва, Я.С.Бродський та ін. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2004.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник. / Г.П.Бевз – К.: Вища школа, 1989. – с. 258-259.
4. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии; Учеб пособие. / Г.К.Селевко - М.: Народное образование, 1998. – 256 с.
5. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник. / З.І.Слєпкань – К.: Вища шк., 2006.
6. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук - К.: Зодіак-ЕКО, 2001.

Врублевський-Ткаченко Віктор Андрійович
студент магістратури, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРАКТИВНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ «МІКРОФОН» ПРИ ВВЕДЕННІ ПОНЯТТЯ ЛОГАРИФМА

Інтерактивні технології навчання стимулюють пізнавальну діяльність і самостійність учнів. Інтерактивна модель навчання своєю метою ставить організацію комфортних умов навчання, при яких всі учні активно взаємодіють між собою. При такій моделі творчість вчителя й учня безмежна. Важливо тільки вміло направити її для досягнення поставлених навчальних цілей. Ця модель передбачає достатньо часте спілкування в системі учень-вчитель та наявність творчих (часто домашніх) завдань як обов'язкових.[1]

Суть інтерактивного навчання полягає в тому, що навчальний процес залучає всіх учасників до процесу пізнання, формування висновків, створення певного результату, де кожен робить індивідуальний внесок, обмінюється знаннями, ідеями, способами діяльності. Відбувається цей процес в атмосфері доброзичливості та взаємопідтримки. Це дозволяє не тільки отримати нові знання, а й розвиває пізнавальну діяльність, переводить її в більш високі форми кооперації та співробітництва.

Інтерактивне навчання дозволяє розв'язати одразу кілька завдань: розвиває комунікативні вміння й навички, допомагає встановленню емоційних контактів між учасниками процесу, забезпечує виховне завдання, оскільки змушує працювати в команді, прислухатися до думки кожного. Використання інтерактиву знімає нервове напруження, дає можливість змінювати форми діяльності, переключати увагу на основні питання.

Традиційній системі організації навчально-виховного процесу притаманні переважання вербальних методів навчання і виховання, недооцінка значення спілкування школярів для розв'язування типових задач і завдань на уроках математики, відсутність цікавих для учнів форм та методів організації навчальної діяльності тощо. Тому нагальною потребою сучасної системи освіти при викладанні математики - є впровадження нових форм та методів навчання і виховання, що забезпечують розвиток особистості кожного школяра.

Розв'язанню цієї проблеми сприяє впровадження інтерактивних технологій навчання на уроках математики. Саме вони ефективніше, ніж інші педагогічні технології, сприяють інтелектуальному, соціальному й духовному розвитку школяра, готовність жити й працювати в гуманному, демократичному суспільстві.

З метою розвитку особистості учня у практичній роботі використовуються інтерактивні методи у навчально-виховній діяльності. Ці методи набули поширення в практиці американської школи наприкінці XX ст. Дослідження, проведені Національним тренінговим центром США показують, що інтерактивне навчання дозволяє різко збільшити процент засвоєння матеріалу, оскільки впливає не лише на свідомість, а й на його почуття.

Сутність інтерактивних методів полягає в тому, що навчальний процес відбувається за умови постійної активної взаємодії учнів. Це – співнавчання, взаємонавчання (колективне, групове, навчання в співпраці), де учень і вчитель є рівноправними, рівнозначними суб'єктами навчання. На своїх уроках намагаюся бути організатором процесу навчання. Організація інтерактивного навчання передбачає моделювання життєвих ситуацій, спільне розв'язання проблем. Воно ефективно сприяє формуванню навичок і вмінь, виробленню цінностей, створенню атмосфери співробітництва, взаємодії.

Під час інтерактивного навчання учні вчаться бути демократичними, спілкуватися з іншими людьми, критично мислити, приймати продумані рішення, виховуються почуття толерантності.

Інтерактивне навчання суттєво впливає на свідомість і почуття особистості з метою виховання компетентного й відповідального учня який є вільною і водночас законослухняною, високоморальною, соціально та політично активною особистістю, повноправним членом шкільного колективу. Воно сприяє формуванню в учнів громадських поглядів, почуттів та переконань, належної поведінки, єдності слова і діла.

Інтерактивні вправи на уроках математики зорієнтовані на:

- розвиток незалежності мислення школярів, певної самостійності думок та спонукають учнів до висловлення своєї думки, стимулюють вироблення творчого ставлення до будь-яких висновків, правил тощо. Деякі з інтерактивних вправ (наприклад, "Робота в парах", "Робота в групах", "Карусель", "Пошук інформації" та інші) спрямовані на самостійне осмислення матеріалу, допомагають замислитися ("Чи справді це так?"), дослідити факти, проаналізувати алгоритм розв'язків, розуміти їхню суть, перевірити і себе і свого товариша, знайти помилку;
- розвиток опору до навіювання думок, зразків поведінки, вимог інших та спонукають учнів до відстоювання власної думки, створюють ситуацію дискусії, зіткнення думок. Застосування вправ "Аналіз ситуації", "Вирішення проблем", вчать дітей протистояти тиску більшості, відстоювати свою думку, виявити помилку у судженнях, відповідях, вказати за неї і довести. До цього спонукають завдання, де вчитель спеціально допускає помилки. Коли в завданнях наявна певна проблемна ситуація, то розв'язання їх в умовах інтерактивних технологій активно стимулює діяльність мислення, спрямовану на подолання протиріччя, непорозумінь. Через зіткнення поглядів учні осягають суть, причини дій, вчинків;
- вироблення критичного ставлення до себе, уміння бачити свої помилки та адекватно ставитися до них; сприяють розвитку таких умінь, як бачити позитивне і негативне не тільки в діях товаришів, а й у власних; порівнювати себе з іншими й ретельно себе оцінювати. Ці вправи сприяють самопізнанню особистості і на цій основі взаєморозумінню вчителів і учнів та розумінню школярами вимог і критичних зауважень учителя. А розуміння власних дій є необхідним для формування дисциплінованої поведінки. Завдяки правильному, адекватному усвідомленню не лише позитивного, а й негативного

у власній поведінці, діях, навчанні виникає критичне ставлення до себе, що конче потрібне насамперед для сприймання вимог інших;

- розвиток пошукової спрямованості мислення, прагнення до знаходження кращих варіантів вирішення навчальних завдань та передбачають вправи, які ставлять дітей у реальну ситуацію пошуку. Інколи вони пропонують нестандартні виходи із ситуацій, які ми, дорослі, часто відкидаємо як нереальні, неможливі. Такий категорійний підхід до ідей дитини гальмує в неї бажання ділитися власними ідеями, підриває віру у свої можливості. У процесі інтерактивних вправ "Розумовий штурм", "Коло ідей", "Вирішення проблем", "Незакінчені речення" приймаються всі думки дітей як реальні, так і вигадані. Вправа "Пошук інформації" вчить школярів самостійно працювати з додатковою літературою, дає можливість віднайти факт, який може заперечувати те, що раніше приймалося як незаперечне. Отже, це дає можливість для розвитку розумового скепсису щодо існуючих правил, висновків, думок;
- інтерактивні вправи спрямовані і на розвиток уміння знаходити спільні рішення з однокласниками; на підвищення інтересу школярів до вивченого матеріалу.[2]

Учень і вчитель є рівноправними суб'єктами навчання. Організація інтерактивного навчання припускає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор, загальне рішення питань на підставі аналізу обставин і ситуації. Зрозуміло, що структура інтерактивного уроку буде відрізняться від структури звичайного уроку, це також вимагає професіоналізму і досвіду викладача. Тому в структуру уроку включаються тільки елементи інтерактивної моделі навчання – інтерактивні технології, тобто включаються конкретні прийоми й методи, які дозволяють зробити урок незвичайним і більше насиченим і цікавим. Хоча можна проводити і повністю інтерактивні уроки.

У педагогіці розрізняють кілька моделей навчання:

1) пасивна - учень виступає в ролі об'єкта навчання (слухає й дивиться)

2) активна - учень виступає суб'єктом навчання (самостійна робота, творчі завдання)

3) інтерактивна - inter (взаємний), act (діяти). Процес навчання здійснюється в умовах постійної, активної взаємодії всіх учнів.

Інтерактивні технології навчання - це така організація процесу навчання, у якому учню неможливо не приймати участь – в колективному, взаємодоповнюючому, заснованому на взаємодії всіх його учасників процесу навчального пізнання.[1]

У своїй практичній роботі у Вінницькому коледжі національного університету харчових технологій іноді практикую використання мікрофону як засобу для інтерактивного навчання. Проілюструємо це на прикладі заняття з введення поняття логарифма.

План заняття №26

Предмет ***МАТЕМАТИКА***

Тема заняття ***Логарифми та їх властивості***

Вид заняття *лекція*

Мета заняття

Навчальна: *дати поняття логарифма з довільною основою. Оволодіти знаннями і вміннями використовувати основну логарифмічну тотожність; вивчення поняття логарифмування та потенціювання; формули переходу від однієї основи до іншої в процесі розв'язування задач.*

Виховна: *розвивати продуктивне мислення студентів при виводі формул і розв'язуванні задач; формувати навики сприйняття і активного запам'ятовування нової інформації, що є важливою рисою швидкого і правильного проведення обчислень.*

Розвиваюча: *розвивати здатність аналізувати формули, робити висновки з отриманих результатів; розвивати інтелектуальні здібності, вміння переносити знання в нові ситуації, приймати рішення та самостійно працювати з математичною та науковою літературою.*

Міжпредметні зв'язки: *фізика, інформатика, історія.*

Методичне та матеріальне забезпечення заняття: *план заняття, блокноти з формулами, добірка практичних завдань.*

Основні знання та вміння: *знати основні означення та формули цієї теми, вміти спрощувати та обчислювати вирази, що степені (цілим, раціональним, дійсним показником).*

Література:[3]

Хід заняття.*(80хв)*

1. Організаційний момент *перевірка присутності студентів, готовність до заняття, наявність домашнього завдання (5хв)*

2. Актуалізація опорних знань. Мотивація пізнавальної діяльності*Загальний опис застосування логарифмів для спрощеного проведення обчислень в арифметиці. Вказати на практичну важливість теми як в практичній діяльності людини так і при вивченні подальших тем. (5хв)*

На даному етапі використовується технологія «Мікрофон». На дошці записуються запитання до групи.

1. Як називається вираз a^n?
2. Що таке степінь з натуральним показником?
3. Що таке степінь з цілим показником?
4. Що таке степінь з раціональним показником?
5. Що таке степінь з ірраціональним показником?
6. Що таке степінь з дійсним показником?
7. Що називають коренем *n*-го степеня?
8. Що називають арифметичним коренем?
9. Як називається число a у виразі a^n?
10. Як називається число n у виразі a^n?
11. Чому буде дорівнювати $a^r \cdot a^s$?
12. Чому буде дорівнювати $a^r : a^s$?

13.Чому буде дорівнювати a^{-r}?

14.Чому буде дорівнювати $(a^r)^s$?

15.Яка функція називається показниковою?

16.Якою може бути основа показниковою функції?

17.Коли показникові функція зростає, а коли спадає?

18.Якого значення набуває x, якщо $2^x = 8$?

19.Якого значення набуває x, якщо $3^x = -1$?

20.Якого значення набуває x, якщо $2^x = 7$?

В ролі мікрофона може виступати ручка, маркер і т.д. Учні відповідають по черзі лише на одне питання і висловлюються у мікрофон.

При відповіді на останнє питання, студенти висувають свої міркування. Але всі вони не приносять бажаного результату. Постає проблема, як же розв'язати рівняння $2^x = 7$?

Багато вчених, розв'язуючи показникові рівняння, стикалися з такою проблемою. Саме для розв'язання показникових рівнянь було введено поняття «логарифм».

3. Вивчення нового матеріалу: *(50хв)*

3.1.Тема заняття: ***Логарифми та їх властивості***

3.2.Питання, які будуть вивчатися:

1) Означення логарифма.

2) Натуральний та десятковий логарифми.

3) Властивості логарифмів

4) Розв'язування прикладів.

3.3.Методи, які використовуються: *репродуктивний, частинно-пошуковий, групова та індивідуальна робота*

Отже, темою нашого заняття є «Логарифми та їх властивості»

Нехай ми маємо рівняння виду $a^x = b$, $a>0$, $a \neq 1$.

Логарифмом додатного числа $b\,(b>0)$ за основою a ($a>0$, $a \neq 1$) називається показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб отримати число b. Позначається $\log_a b$.

Отже розв'язком рівняння $a^x = b$ буде $x = \log_a b$.

Приклади.

$\log_2 8 = 3$, $2^3 = 8$.

$\log_4 4 = 1$, $4^1 = 4$.

$\log_7 1 = 0$, $7^0 = 1$.

$\log_2(-4) = ?$ Розв'язків немає.

Але для того, щоб обчислювати більш складні логарифми, нам потрібно розглянути властивості логарифмів.

Розглянемо рівняння $a^x = b$ і $x = \log_a b$. Якщо підставимо xу рівняння, то отримаємо $a^{\log_a b} = b$. Цю рівність називають основною логарифмічною тотожністю.

Властивості логарифмів.

1) $\log_a 1 = 0$ ($a>0$, $a \neq 1$)

2) $\log_a a=1 (a>0, a\neq 1)$
3) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y (a>0, a\neq 1, x>0, y>0)$
4) $\log_a(x:y)=\log_a x-\log_a y (a>0, a\neq 1, x>0, y>0)$
5) $\log_a x^p=p\log_a x (a>0, a\neq 1, x>0)$

Властивості логарифмів з різними основами

1) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0, c>0, c\neq 1$
2) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a},\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0, b\neq 1$
3) $\log_a b = \log_{a^p} b^p,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0$
4) $\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ p\neq 0$
5) $\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q}\log_a b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0, q\neq 0$

Десятковим логарифмом називають такий логарифм, основа якого дорівнює 10. $\log_{10} b = \lg b$.

Натуральним логарифмом називають такий логарифм, основа якого дорівнює числу e. $\log_e b = \ln b$.

4. Самостійна робота студентів: *розв'язування прикладів*

1. Обчислити:

$\log_{12}2+\log_{12}6$; $\log_6 4=\log_6 9$; $2\log_3 6-(\log_3 2+\log_3 18)$

2. Подати логарифм як логарифм за основою 5

$\log_4 5$; $\log_{11} 7$; $\log_{25} 3$.

5. Узагальнення та систематизація вивченого матеріалу: *повторити основні означення та формули (5хв)*

1) Що ми вивчали на сьогоднішньому занятті?
2) Що таке логарифм?
3) Який вигляд має основна логарифмічна тотожність?
4) Що таке десятковий логарифм?
5) Що таке натуральний логарифм?

6. Підсумкова частина заняття: *наголосити на готовності студентів до заняття, відзначити активних, найкращих студентів, виставлення оцінок (3хв)*

7. Повідомлення домашнього завдання. [3] стр.249-252 *(2хв)*

Література

1. http://ekonomschool.ucoz.ru/publ/19-1-0-67
2. http://osvita.ua/school/lessons_summary/edu_technology/24922
3. Афанасьєва. «Математика». Посібник для студентів технікумів.– К.: Вища школа, 2001.

Вусатюк Світлана Олександрівна
студентка 4 курсу,напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ В ШКОЛІ

Згідно діючої програми графік функції вивчається в 7 класі в першому півріччі. У підручнику авторів Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. «Алгебра 7» [2] для того, щоб підвести учнів до поняття графіка функції розглядають функцію, значення якої подані у таблиці. Пари чисел, які записані у стовпчику, є координатами (x;y) точок координатної площини. Якщо ці точки з'єднати плавною лінією, то утворюється графік функції. Після чого подається таке означення: *«Графіком функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції f»* [2, С.169].

У підручнику Кравчук В.Р. «Алгебра 7» [3] аналогічно розповідається про графік функції, але як такого означення немає, подається так: *«Графік функції утворюють точки координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції»* [3, С.124]. За даним графіком пояснюються деякі властивості функції, розповідається про функцію як математичну модель реальних процесів. Це добре показує залежність величин, наприклад, залежність температури води від часу. Кажуть, що функція, яка описує реальний процес зміни температури води, є математичною моделлю даного процесу.

Для закріплення матеріалу автори підручника пропонують систему вправ, яка включає усні вправи та вправи трьох рівнів складності на побудову графіка функції, належність точок до даного графіка та задачі на залежність величин. Наприклад, знайти на якій висоті летів літак, скільки часу літак набирав висоту. У вправах в третьому рівні потрібно побудувати графік функції, в якій аргумент міститься під знаком модуля. Вправи поділені за рівнями складності від простих завдань до складних. Це дає можливість учневі побачити свій рівень знань, а вчителю допомагає здійснювати диференційний підхід до учнів.

Аналогічно вводиться поняття графіка функції у підручнику Бевз Г.П. «Алгебра 7» [4]. А саме: *«Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції»* [4, С.189]. Система вправ містить такі завдання: заповнити таблицю значень функції, побудувати графіки функцій, перевірити належність точок графіку.

У підручнику О.С.Істер «Алгебра 7» [5] також розглядається приклад, що має підвести учнів до поняття графіка функції. Зразу після нього подається означення: *«Графіком функції називається фігура, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції»* [5, С.136]. Потім після чого подаються кілька розв'язаних прикладів, в яких пояснюють певні властивості графіка функції. У даному підручнику добре підібрана система різноманітних вправ. Наприклад, є завдання на побудову графіків функцій; знаходження нулів функції; належність точок графіку; знаходження значення функції при відомих значеннях аргументу; знаходження залежності різних явищ, процесів тощо.

З опису введення математичних понять у різних шкільних підручниках бачимо, що у всіх них використовується конкретно-індуктивний метод. Таким чином, розглядаючи підібрані приклади, підводять до поняття.

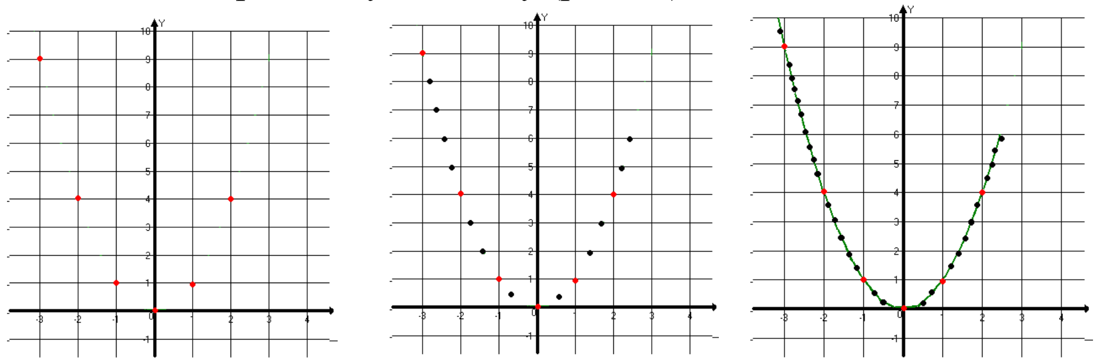
Пропонуємо також вводити поняття графіка функції конкретно-індуктивним методом. На нашу думку, краще спочатку розглянути конкретну функцію, задану аналітично, скласти таблицю значень функції та побудувати за допомогою таблиці графік. Наприклад, розглянемо функцію $y = x^2$ на проміжку [-3;2]. Складемо таблицю значень цієї функції з кроком 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y						

Щоб її заповнити потрібно у дану функцію замість x підставити числа із таблиці, тоді ми знайдемо відповідні значення y на даному проміжку.
Отже, отримаємо

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	0	1	4

Нанесемо точки на координатну площину (рис. 1а)



а) б) в)

Рис.1

Зменшимо крок і бачимо, що точки густішають (рис. 2б), якщо ми знову зменшимо крок і плавною лінією з'єднаємо точки, то отримаємо графік даної функції (рис. 2в)

Після цього формулюємо означення графіка функції: *«Графіком функції y=f(x) називається множина усіх тих і тільки тих точок площини з координатами (x;y), де перша координата x – це значення незалежної змінної з області визначення функції, а друга координата y – це відповідне значення функції f в точці x».*

Після цього побудуємо графік функції $y = 2x + 5$ на проміжку $-3 \le x \le 3$. Так само складемо таблицю значень цієї функції з кроком 1.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Заповнимо, підставивши замість x числа з таблиці у вираз, який задає дану функцію. Отримаємо.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	1	3	5	7	9	11

Нанесемо точки на координатну площину, бачимо, що вони знаходяться на одній прямій, з'єднаємо їх і отримаємо такий графік даної функції (рис. 2).

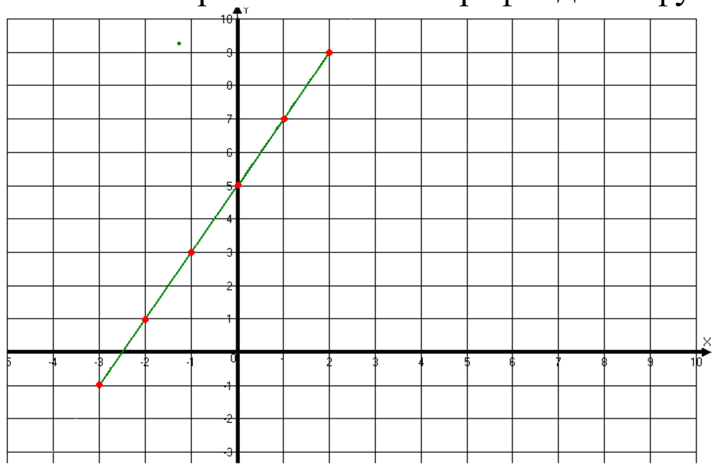


Рис.2

Як бачимо, графіком функції $y = 2x + 5$ на проміжку $-3 \le x \le 3$ є відрізок.

Взагалі графіки функції можуть бути різними лініями. Хоча не кожна лінія на площині є графіком функції. Давайте визначимо, за яких умов деяка лінія на координатній площині буде графіком функції.

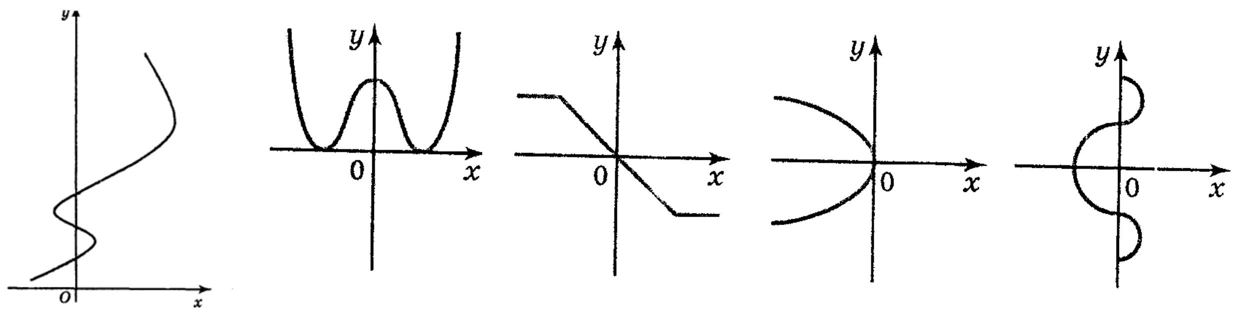


Рис. 3

а) б) в) г) д)

Для того, щоб визначити, які з ліній на рис. 3 є графіком функції, пригадаємо означення функції. А саме, залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає единe значення y.

Чи є серед цих ліній такі, які не задовольняють означення функції? Чому? Отже, згідно означення, графіком деякої функції є лінії зображені на рис. 3 б) і в), а лінії, зображені на рисунках а), г) і д) - ні, тому що, наприклад на рис. 3 а) значенню $x = 0$ відповідають три різних значення y.

Фігура на координатній площині може бути графіком деякої числової функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 - деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ - відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ - координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 - відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

З останнього випливає, що для того, щоб визначити, чи належить графіку функції деяка точка, не потрібно будувати графік функції. Для цього достатньо перевірити, чи задовольняють координати точки вираз, за допомогою якого задана функція. Наприклад, для того, щоб з'ясувати чи належать точки $\grave{A}(-1;-6)$ та $\hat{A}(2;-3)$ графіку функції $y = \frac{6}{x}$ підставимо відповідні координати точок: для точки $\grave{A}(-1;-6)$ отримаємо $-6 = \frac{6}{-1}$ - правильна числова рівність, для точки $\hat{A}(2;-3)$ - $-3 = \frac{6}{2}$ - неправильна числова рівність. Отже, точка $\grave{A}$ належить графіку функції, а точка $\hat{A}$ не належить графіку функції $y = \frac{6}{x}$.

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу (з області визначення) вказати відповідне значення функції. Для прикладу знайдемо значення функції, заданої графіком на рис. 4, якщо $x = -1{,}5$. Для цього шукаємо на осі абсцис $x = -1{,}5$, на графіку функції знаходимо точку з такою абсцисою та визначаємо її ординату. Вона дорівнює 1. Тобто значення функції при $x = -1{,}5$ дорівнює 1. Як бачимо, користуючись графіком функції, можна скласти таблицю її значень. Отже, графік задає функцію. Графічний спосіб задання функції зручний своєю наочністю та широко використовується не лише в математиці. Наприклад, кардіограма – це графічний спосіб опису роботи серця, а сейсмограма - графічний спосіб опису коливань ґрунту в залежності від часу. Дивлячись на графік функції, можна «читати» її властивості. Наприклад, одразу можна сказати, при яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких від'ємні чи дорівнюють нулю, якого найбільшого, чи найменшого значення набуває функція, тощо. Графік функції $y = x^2$, що зображений на рис. 1, дає нам можливість визначити зокрема такі властивості:

1. Область визначення функції – усі значення *x,* що задовольняють нерівність $-3 \le x \le 2$.
2. Область значень функції утворюють усі значення *y,* що задовольняють нерівність $0 \le y \le 9$.
3. Найбільше значення функції дорівнює 9 (при $x = -3$).
4. Найменше значення функції дорівнює 0 (при $x = 0$).
5. Значення функції дорівнює нулю, якщо $x = 0$.
6. Функція набуває додатних значень, якщо $-3 < x \le 2$, від'ємних значень – не має.

Для закріплення матеріалу пропонуємо систему вправ.

1. Чи належать графіку функції $y = x^2 + 2$ точки:

а) А(0;2) в) С(-2;6)

б) В(-1;1) г) Д(-3;-7) ?

2. Графік функції $y = 7x$ проходить через точку, абсциса якої дорівнює 4. Чому дорівнює ордината точки?

3.Графік функції $y = -2x$ проходить через точку, ордината якої дорівнює 10. Чому дорівнює абсциса точки?

4.Користуючись графіком функції (рис. 4) заповнити таблицю

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-0,5	0	1	2	3
y									

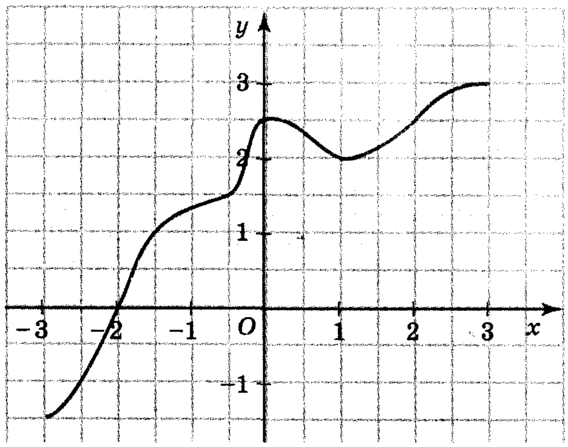


Рис. 4

5. Функція задана графіком (рис.4).

а) Складіть таблицю значень функції з кроком 1.

б) Знайти значення функції, якщо *x=-2, x=0, x=1.*

в) Знайти значення аргументу, якому відповідає значення функції *y=2, y=2,5, y=-1,5.*

г) Яка область значень та область визначення функції?

д) Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції?

е) Для яких значень *x* функція набуває додатних значень, від'ємних значень?

6. Побудувати графік функції, заданою формулою $y = 5 - x$ на $-1 \le x \le 7$.

7. Побудувати графік функції, заданою формулою $y = 1 - x^2$ на $-2 \le x \le 2$.

8. Яка з фігур, зображених на рис.5, може бути графіком функції?

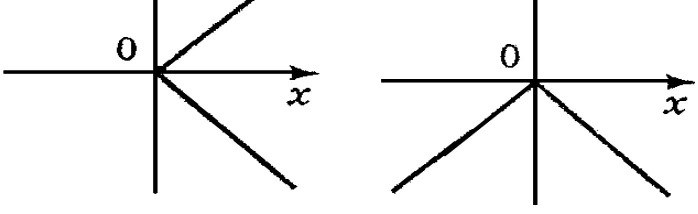


Рис.5

а) б)

9.Чи може ламана *ABC* бути графіком деякої функції, якщо:

а) A(-4;-1); B(1;2); C(2;4);

б) A(-4;-1); B(1;2); C(1;3).

10.За заданим графіком зміни температури повітря впродовж доби (рис.6) знайти:

1) Якою була температура повітря в 0 год; о 2 год; о 9 год; о 12 год; о 18 год?

2) О котрій годині температура повітря була -6°; -2°; 1°; 3°?

3) Якою була найнижча температура і о котрій годині?

4) Якою була найвища температура і о котрій годині?

5) Протягом якого часу температура підвищувалась?

6) Протягом якого часу температура знижувалась?

7) Протягом якого часу температура повітря була нижча від нуля?

8) Протягом якого часу температура повітря була вища від нуля?

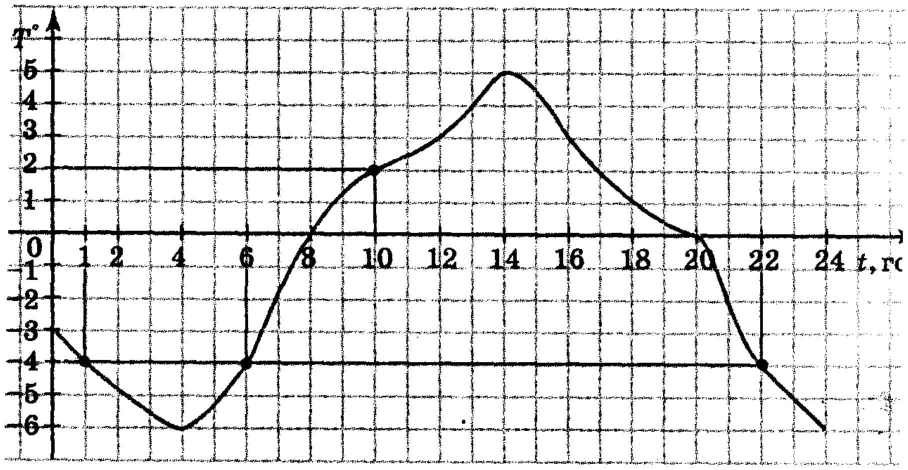


Рис.6

Згідно програмних вимог до вивчення даної теми учні мають розуміти та вміти формулювати означення графіка функції, вміти будувати його, читати властивості функцій за її графіком, наводити приклади функціональних залежностей. Вважаємо, що запропонована технологія введення поняття графіка функції сприятиме виконанню вимог програми з математики, розвитку логічного мислення і алгоритмічної культури школярів.

Література

1.Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. /З.І.Слєпкань.- К.: Зодіак-ЕКО, 2000. - 512 с.

2.Мерзляк А.Г. Алгебра 7: Підручник для 7-го класу. / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. -Х.: Гімназія, 2007. - 288 с.

3.Кравчук В.Р. Алгебра: Підручник для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Янченко Г., Кравчук В.Р. - Т.: Підручники і посібники, 2009. - 224 с.

4.Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Бевз Г.П., Бевз В.Г. - К.: Зодіак-ЕКО, 2007. - 304 с.:іл.

5.Істер О.С. Алгебра: Підручник для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. - К.: Освіта, 2007. - 223 с.

Гнатюк Ірина Іванівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДО ПИТАННЯ ВИВЧЕННЯ ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ

Степінь, як поняття, вперше вводиться в 6 класі, але більш поглиблено вивчається в 7, 8 класі. На даний час надруковано дуже багато різних підручників з математики для усіх класів, але і в них по-різному подається означення степеня.

Отже, (в старих підручниках [2]), ***степінь - це добуток кількох рівних множників:***

$$a \times \ldots \times a = a^n$$

(в нових підручниках [1]), ***степенем числа n , більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює а.***

$$a \cdot \ldots \cdot a = a^n$$

Подібно до того, як множення на ціле число відповідає багатократному <u>додаванню</u>:

$$a \times a = a + \ldots + a$$

<u>Основні означення</u>

1. Якщо $n \in N$,n>1, то $a \cdot \ldots \cdot a = a^n$, де а — довільне число.
2. $a^1 = a$, де а - довільне число.
3. $a^{0=1}$, для а ≠0 не має змісту.
4. $n \in N$, $a \neq 0$.
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $n \in N$, $m \in Z$, $a > 0$.

Піднести число 2 до третього степеня – означає перемножити три двійки, тобто $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Число яке підносять до степеня – основа степеня, число яке показує до якого степеня підноситься основа – показник степеня.

Першим степенем числа домовились вважати саме це число: a^1– те саме число, що й ***а***. Показник 1 не прийнято писати. Другий степінь називають інакше ***квадратом***, третій степінь — ***кубом***.

2. Задачі, які приводять до степеневої функції.

<u>Задача 1</u>.

Висота звука визначається його частотою. Вухо людини здатне сприймати звуки з частотою від 16 до 20 000гц. Відомо, що частота ноти «ля» першої октави – 440гц. Ця частота перевіряється по камертону, і по ній йде налагодження піаніно.

Знайти частоти інших нот октави, якщо наступна від попередньої відрізняються в $\sqrt[12]{2}\,\textit{разів}$.

Розв'язування.

Частоти інших нот пов'язані співвідношенням $b_k = \sqrt[12]{2} \cdot b_{k-1}$.

$\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$.

Частота ноти «до» $b_1 = \frac{440}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^5} = 440 \cdot 2^{\frac{5}{12}}$.

Частота ноти «ре» $b_2 = \frac{440}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^4} = 440 \cdot 2^{-\frac{4}{12}}$.

Частота ноти «мі» $b_3 = \frac{440}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^3} = 440 \cdot 2^{-\frac{3}{12}}$.

Частота ноти «фа» $b_4 = \frac{440}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^2} = 440 \cdot 2^{-\frac{2}{12}}$.

Частота ноти «соль» $b_5 = \frac{440}{\left(\sqrt[12]{2}\right)} = 440 \cdot 2^{-\frac{1}{12}}$.

Частота ноти «ля» $b_6 = 440$.

Частота ноти «сі» $b_7 = 440 \cdot 2^{\frac{1}{12}}$.

Частота ноти «до» $b_8 = 440 \cdot 2^{\frac{2}{12}}$.

Мета розв'язування не отримати частоти нот, а зрозуміти механізм обчислення за допомогою степеня з дробовим показником.

Нам відомі формули, які містять степені, наприклад:

- $t = 20 + \frac{80}{2^{0,1\tau}}$ - температура чайника, який стане в момент τ.
- $R_2 = R_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{3}{2}}$ - відстань плани до Сонця

Знак степеня з натуральним показником

1. Якщо основа степеня *a=0,* то ,$a^n = 0$,а *n=0* для будь-якого натурального значення *n.*

2. Якщо $a>0$, то $a^n > 0$ для будь-якого натурального значення n.

3. Якщо $a<0$ і n — число парне, то $a^n > 0$. Якщо $a<0$ і n — число непарне, то $a^n < 0$

Властивості степеня

1.При множенні степенів з однаковими основами залишають ту саму основу, а показники степенів додають: $a^n \times a^m = a^{m+n}$ для будь-якого числа ,а й довільних натуральних чисел *m і n.*

2. При діленні степенів з однаковими основами залишають ту саму основу, а від показника діленого віднімають показник дільника: $a^n \div a^m = a^{m-n}$ для будь-якого числа a й довільних натуральних чисел m *і* n таких, що $m>n$

3. Щоб піднести до степеня добуток, досить піднести до цього степеня кожний множник і результати перемножити: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ для будь-яких чисел a, b і довільного натурального числа n.

4. Щоб піднести до степеня частку, треба піднести до цього степеня ділене і дільник, а потім поділити степінь діленого на степінь дільника:
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$для будь-яких чисел *a і b(b≠0)* і довільного натурального числаn.

5. При піднесені числа в якійсь степені до іншої степені показники перемножуються.$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6. При піднесенні будь-якого числа в степінь з показником 0 одержуємо 1, так$3^0 = 1$

7. При піднесенні числа в степінь з невід'ємним цілим показником одержуємо величину, зворотну цьому числу з додатнім степенем.

8. При піднесенні числа в дробову степінь знаменних цього дробу є степінь кореня з числа, а чисельник є показником степеня числа. Так,

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (2)^2 = 4$$

Розширення про поняття степеня. До цих пір ми розглядали степінь тільки з натуральним показником; але дії зі степеня можуть призводити також до від'ємних, нулевих і дробових показників. Всі ці показники степенів вимагають додаткового визначення.

Степінь з від'ємним показником. Степінь деякого числа з від'ємним (цілим) показником визначається ,як одиниця, поділена на степінь того ж числа з показником, рівним абсолютної велечини від'ємного показника:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Тепер формула : $a^n \div a^m = a^{m-n}$-nможе бути використана не тільки при m, більшому, ніж *n*, а й при *m*, меншому, ніж *n*.Якщо ми хочемо, щоб формула : $a^n \div a^m = a^{m-n}$була справедлива при *m* = *n*, нам необхідно визначення нулевого степеня.

Отже, поняття степінь з кожним роком все раніше вводять у шкільний курс алгебри і ось чому потрібно зрозуміло пояснити суть самого поняття «степеня», а для цього самому досить добре орієнтуватись у даному матеріалі. І потрібно найбільш якісно володіти даним матеріалом, щоб донести до дітей, тому що степінь є важливою темою в ЗНО і досконале володіння нею – високі результати і світле майбутнє на яке заслуговують усі діти і не компетентність учителів у даному матеріалі не повинна ставати у них на шляху.

Література

1. Бевз Г.П. Алгебра. [Пробний підручник для 7-9 класу] / 3-тє видання.-Київ:Освіта,2006 р., 302с.

2. Макаричев Ю.М., Миндюк Н.Г., Монахова В.М., Муравін К.С.Алгебра. [для середньої школи] / за редакцією С.А.Теляковсього. –Москва «Просвіта», 1988р.239с.

3. Бевз Г.П, Бевз В.Г.Алгебра. / [Підручник для 7 класу середньозагальних навчальних закладів] / К.:Зодіак-ЕКО.2007.-304с.

4. Істер О.С. Алгебра. [Підручник для 8 класу] / Київ:Освіта.-2008р.

5. Янченко В., Кравчук Г. Математика / [Підручник для 6-го класу середньої школи.].-Тернопіль:Підручники і посібники,2006р.-280с.

Грозян Юлія Василівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ МНОГОЧЛЕНА В УЧНІВ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Одним з основних понять сучасного шкільного курсу алгебри є поняття многочлена. Це поняття пройшло довгий історичний шлях свого розвитку у математиці. Його історичними коренями є рівняння першого і другого степеня, які розв'язувалися у древньому Вавилоні ще 2 тисячі років до нашої ери. Пізніше ці рівняння були описані у VII-ій та VIII-ій книгах з математики стародавнього Китаю. Загалом, до середини XIX століття, основним змістом алгебри було розв'язування рівнянь різних степенів та їх систем. Суттєвим для розвитку теорії многочленів стали три важливих події у світі математики,пов'язані з іменами Вієт, Безу та Гауса.

Французький математик Ф.Вієт встановив співвідношення між коренями та коефіцієнтами алгебраїчного рівняння. Це твердження ввійшло в математику як теорема Вієта.

Головною пристрастю Вієта була математика [1]. Він глибоко вивчив твори класиків Архімеда і Діофанта, найближчих попередників Кардано, Бомбеллі, Стевіна та інших. Вієта вони не лише захоплювали, в них він бачив велику ваду, яка полягала у важкості розуміння через словесну символіку. Майже всі дії і знаки записувалися словами, не було навіть натяку на ті зручні, майже автоматичні правила, якими ми зараз користуємось. Неможна було записувати і, отже, вивчати в загальному вигляді алгебраїчні рівняння або якісь алгебраїчні вирази. Кожний вид рівняння з числовими коефіцієнтами розв'язувався за особливим правилом. Так, наприклад у Кардано розглядалося 66 видів алгебраїчних рівнянь. Тому необхідно було довести, що існують такі загальні дії над усіма числами, які від самих чисел не залежать. Вієт та його послідовники встановили, що не має значення, чи буде розглянуте число кількістю предметів або довжиною відрізка. Головне, що над цими числами можна виконувати алгебраїчні дії і в результаті знову отримати числа такого самого роду. Отже, їх можна позначати якимись абстрактними знаками. Вієт це й зробив. Він зробив принципово нове відкриття, ввівши своє буквене обчислення. Правда, в самого Вієта алгебраїчні символи були ще мало схожі на наші. Зі знаків дій він використовував “+” і “-”, знак радикалу і горизонтальну риску для ділення. Добуток позначав словом “in”. Вієт першим став використовувати дужки. Правда, в нього мали вигляд не дужок, а риски над многочленом. У той же час багато знаків, які були введені до нього, він не використовував. Так, квадрат, куб і т. д. позначав словами або першими буквами слів. Основу свого підходу Вієт називав видовою логістикою. Наслідуючи приклад стародавніх, він чітко розмежував числа, величини та відношення, зібравши їх у деяку систему “видів”. У цю систему входили змінні, їх корені, квадрати, куби і т.д. Для цих видів Вієт дав спеціальну символіку, позначивши їх прописними буквами латинського алфавіту. Для невідомих величин застосовувалися голосні букви, для змінних – приголосні. Вієт показав, що, оперуючи з символами, можна отримати результат, який пристосований до будь-яких величин, тобто розв'язати задачу в загальному вигляді. Це поклало початок корінній зміні у розвитку алгебри: стало можливим буквене обчислення. Не випадково, що за це Вієта називають «батьком» алгебри, основоположником буквеної символіки.

У кінці XVIII ст. французький математик Е.Безу сформулював і довів теорему про ділення многочленів з остачею.

У 1799 р. німецький математик К.Гаус довів теорему, яка довгий час називалася «основною теоремою алгебри», а тепер носить назву «основної теореми алгебри многочленів».

У сучасній математиці многочленам належить значна роль. Так результати моделювання різних процесів засобами математики та комп'ютерної техніки часто приводять до рівнянь, розв'язування яких безпосередньо пов'язане з теорією многочленів.

Розглянемо детальніше, як же відбувається формування поняття многочлена у шкільній математиці. Пропедевтикою поняття многочлена є поняття буквеного виразу, з яким учні починають знайомитися ще в п'ятому класі. Вивчаючи поняття числового і буквеного виразу (вирази, рівняння) пропонується таке означення: «Записи, до яких входять числа і букви, сполучені знаками дій, називаються виразами. Якщо до виразу входять лише числа, то його називають числовим, а вираз, що містить хоча б одну букву, – буквеним». У 5-му класі вивчають буквені вирази над множинами натуральних чисел та дробових чисел [3]. У 6-му класі вивчають звичайні дроби, раціональні числа і дії над ними [5]. У 7-му класі вводиться поняття лінійного рівняння з однією змінною, вивчають цілі вирази, до яких входять такі підтеми: цілі вирази, одночлени, многочлен. Отже, щоб перейти до вивчення многочленів у шкільному курсі математики спочатку розглядають тему «Одночлени». Дається означення одночлена, його стандартний вигляд. Потім узагальнюючи матеріал, повідомляється, що сума кількох одночленів називається многочленом. Наприклад, $x+3$, c^2-5c+6. Під час вивчення поняття многочлена у школі пропонуються такі теми: стандартний вигляд многочлена, додавання і віднімання многочленів, множення одночлена на многочлен, множення многочлена на многочлен, розкладання многочлена на множники винесенням спільного множника за дужки, розкладання многочлена на множники способом групування, формули скороченого множення [4].

Пропонуємо такий план-конспект першого уроку по формуванню поняття многочлена.

Тема уроку: «Многочлен і його стандартний вигляд».

Мета: актуалізувати знання учнів, необхідні для сприйняття нового матеріалу, підвести до самостійного визначення ними поняття многочлена, алгоритму додавання і віднімання многочленів, множення одночлена на многочлен; множення многочлена на многочлен; розвивати логічне мислення, вміння робити узагальнення і висновки; виховувати акуратність та точність записів.

Тип уроку: засвоєння нових знань та вмінь.

Обладнання: роздаткові матеріали, таблиця для усного рахунку, картки із завданнями.

Хід уроку:

1) Організаційний момент.

Вітання з учнями, перевірка готовності до уроку, виконання домашнього завдання.

2) Актуалізація опорних знань.

Вч. Що називається одночленом?

Оч.від. Одночленом називаються прості вирази – числа, змінні, їхдобуток.

Вч. Що значить записати одночлен у стандартному вигляді?

Оч.від. Звести одночлен до вигляду, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці, і степені різних змінних.

3) Мотивація навчальної діяльності.

Ми маємо одночлени, з якими можна виконувати різні операції. На сьогоднішньому уроці ми дізнаємося, як буде називатися вираз, коли ми додамо декілька одночленів.

4) Повідомлення теми і мети уроку.

Тема сьогоднішнього уроку: «Многочлен і його стандартний вигляд»

5) Пояснення нового матеріалу[2].

Означення. Многочленом називається сума кількох одночленів.

Наприклад: $2x-5$, $x+3$, c^2-5c+6.

Вчитель вказує степінь кожного з даних многочленів і пропонує учням дати означення степеня многочлена.

Означення. Степенем многочлена стандартного вигляду називається найбільший із степенів одночленів, які входять до цього многочлена.

Наприклад: $2x$ має перший степінь, 5 має нульовий степінь, $x+3$ має перший степінь, c^2-5c+6 має другий степінь.

Записати многочлен в стандартному вигляді – це значить записати його у вигляді суми одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних.

Означення. Члени многочленна, які відрізняються тільки коефіцієнтами, або зовсім не відрізняються, називаються подібними.

Наприклад: $3a^2+2x-5a-3x+6a+4=3a^2+a+x+4$;

$x^2+x^4-5+x^3+2x^2-x=x^4+x^3+3x^2-x-5$;

$5x^3-3x\cdot x^4-2x^3-4x^5=5x^3-3x^5-3x^3-4x^5=-7x^5+3x^3$.

Означення. Щоб додати многочлени, треба записати їх у виді суми і звести подібні доданки.

Наприклад: $(2ac-c^2-5)+(2c^2+ac)=2ac-c^2-5+2c^2+ac=c^2+ac-5$.

Означення. Щоб відняти многочлени, треба записати їх у виді різниці, потім розкрити дужки і звести подібні доданки.

Наприклад: $(x^2-5x+6)-(2x^2-3x-3x+6)=x^2-5x+6-2x^2+3x-6=-x^2-2x$.

Означення. Щоб помножити одночлен на многочлен, треба цей одночлен помножити на кожний член многочленна і отримані добутки додати.

Наприклад: $(a^2+3a-2)\cdot 2a=2a^3+6a^2-4a$.

Означення. Щоб помножити многочлен на многочлен, треба кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого многочлена і отримані добутки додати.

Наприклад: $(a^2+a-2)(a+3)=a^3+3a^2+a^2+3a-2a-6=a^3+4a^2+a-6$.

6) Первинне застосування знань

Вправа 1

Назвіть подібні члени многочлена:

а) $4a-3-a+1{,}5$;

б) $4ax+4x+4y$;

в) $3n^2+4n-2n^2+n-1$;

г) a^2+ab+b^2+ba.

Вправа 2

Подайте многочлен у стандартному вигляді:

а) $4a+3+a-2$; б) $2aba+3$; в) $x+y+2x-y$.

Вправа 3

Замість зірочок вписати одночлен так, щоб вийшла тотожність:

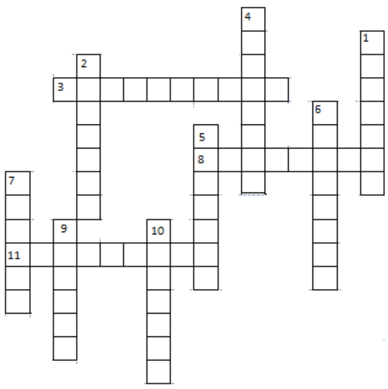
а) $-4x^2\cdot(*-*)=2x^3+12x^4$; б) $(-x^2+*)\cdot(-6x)=*+42x^5$.

7) Узагальнення і систематизація вивченого матеріалу.

Сьогодні на уроці ми з вами сформували поняття многочлена, суми та добутку многочленів.А тепер спробуємо з вами розгадати такийкросворд.

По вертикалі:

1. Добуток, що складається з однакових множників. (степінь)



2. Який степінь одночлена $7a^3b^4c$. (восьмий)

4. Рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою. (рівняння)

5. Складові многочлена, що відрізняються тільки коефіцієнтами. (подібні)

6. Дія множення. Навпаки. (ділення)

7.Який степінь многочлена $2a^6+a-1-3a^4+a^7$? (сьомий)

9.Число, при підстановці якого в рівняння, виходить правильна рівність. (корінь)

10.Розділ математики. (алгебра)

По горизонталі:

3.Числовий множник, що стоїть перед буквеним виразом. (коефіцієнт)

8. Добуток чисел, змінних і ступенів змінних. (одночлен)

11.Сума одночленів. (многочлен)

8) Повідомлення домашнього завдання.

ст.67 № 342, №346, №348(а, г)[4].

При подальшому вивченні теми «Многочлени» слід мати на увазі, що в учнів виникають проблеми в ході виконання перетворень винесення спільного множника за дужки – виділення спільного множника в записі многочлена. Тому спочатку слід розглянути завдання типу: «Подайте різними способами степінь у вигляді добутку степенів: а) x^6; б) z^{12}».Після цього розв’язуються вправи на

виділення спільного множника в многочленах з однією змінною за розподільним законом множення: $9y^5-3y^2=3y^2\cdot 3y^3-3y^2=3y^2(3y^3-1)$. Потім виконується винесення спільного множника за дужки в многочленах довільного вигляду: $5x^2z^4+3x^4z^2-2x^2z^3=5x^2z^2z^2+3x^2x^2z^2-2x^2z^2z=x^2z^2(5z^2+3x^2-2z)$. Під час вивчення теми про групування многочленів, обов'язково потрібно показати, що групування можна виконувати кількома способами, але результат буде той самий. Наприклад: подайте у вигляді добутку:
$x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+x+1=(x+1)(x^2+1)$, або ж іншим способом:
$x^3+x^2+x+1=x^3+x+x^2+1=x(x^2+1)+x^2+1=(x^2+1)(x+1)$. На початку наступного уроку можна запропонувати такі завдання для актуалізації опорних знань: встановити, яку дію виконали в прикладі і за яким правилом [6, 4].

$(r-x)(w-y)=rw-ry-xw+xy$	Множення многочлена на многочлен
$5a(6x-y)=30ax-5ay$	Множення одночлена на многочлен
$9x\cdot 6xy^4=54x^2y^4$	Множення одночлена на одночлен
$cb^3\cdot 3aa^4\cdot 5=15a^5b^3c$	Зведення одночлена до стандартного вигляду
$x^9x^{14}=x^{23}$	Множення степенів
$(k^{17})^2a=k^{34}a$	Піднесення степеня до степеня
$3k-7k+15k-3k=8k$	Зведення подібних доданків
$3a-(7b-3c+5d)=3a-7b+3c-5d$	Розкриття дужок, перед якими стоїть знак мінус
$9x^2-18a=9(x^2-2a)$	Винесення спільного множника за дужки

Вважаємо, що такий урок та наші зауваження дозволять учням добре засвоїти поняття многочлена та дії додавання і множення многочленів.

Література

1. Wikipedia, Франсуа Вієт
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: Підручник для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К. : Зодіак-ЕКО, 2007. – 304 с.
3. Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Маланюк М.П. Математика: Підручник для 5 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – С.104-107
4. Кравчук В.Р., Янченко Г.М. Алгебра: Підручник для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. – К. : Підручники і посібники, 2007. – 224 с.
5. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Харків. : Гімназія, 2008. – 287 с.
6. Шверненко І.Е. Розкладання многочленів на множники (7 клас, 21 година)// Математика в школах України. 2005. – С. 31-57

Дерепащук Людмила Михайлівна, Мельничук Вікторія Миколаївна
студентки 1 курсу, напрям підготовки «Математика»

ТЕХНОЛОГІЇ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ РІВНЯННЯ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Постановка проблеми.Розв’язування рівнянь — одна з найбільш важливих тем при навчанні математики. Розв’язуючи рівняння, учні застосовують математичні поняття, набуті раніше уміння і навички, ознайомлюються з новими закономірностями. У процесі розв’язування рівнянь в учнів формується особливий стиль мислення.

Мета даної статті. Обґрунтувати ефективні педагогічні умови засвоєння поняття «рівняння» у курсі алгебри основної школи.

Виклад основного матеріалу. Рівняння - це рівність, яка містить невідомі, позначені буквами. Невідомі в рівнянні називають змінними (змінна - variable). Змінні найчастіше позначають буквами x,y,z, хоч можна позначити їх і іншими буквами.

При вивченні пропедевтичного курсу математики в 5-6 класах, крім сформованості обчислювальних навичок учнів, одне із основних завдань вчителя – формування умінь розв’язувати рівняння, які згодом у 7 класі будуть названі лінійними.

Важливо мати на увазі, що впродовж 5-6 класів аж до теми «Властивості рівнянь» учні розв’язують рівняння на основі залежностей між компонентами дій, тобто правил як знайти невідомий доданок, невідоме зменшуване і т. д.

При вивченні різних числових множин різні числа виступають відомими елементами дій.

При вивченні останньої теми 6-го класу, а саме «Властивості рівнянь», вперше в курсі математики формується уявлення учнів про інші способи розв’язування рівнянь, які ґрунтуються на властивостях рівнянь.

Розглядаючи різні шкільні підручники для 6-го класу, легко помітити різні підходи до вивчення властивостей рівнянь. Зокрема, автори підручників пропонують різні списки властивостей. Очевидно, всі властивості можуть бути зведені до двох основних, а решта властивостей є наслідками з них.

У «Довіднику з математики» Г.П.Бевза вказане таке означення поняття «рівняння»: «Якщо обидві частини рівності з однією або кількома змінними мають однакову числову величину не при всяких числових значеннях цих змінних, то дана рівність називається рівнянням». Таке трактування поняття «рівняння» досить невдале. Бо, по-перше, щоб з’ясувати, чи при всіх числових значеннях букв обидві частини рівності мають однакові числові значення, чи тільки при деяких, треба розв’язати рівняння. А до розв’язування взагалі було б незрозуміло, з якою рівністю ми маємо справу: рівнянням чи тотожністю. По-друге, при такому означенні треба було б стверджувати, що та сама рівність у одній області значень є рівнянням, а в іншій — тотожністю.

Часто додержуються функціонального трактування: «Рівняння з одним невідомим є рівність двох функцій $f_1(x) = f_2(x)$, які розглядаються у спільній області їх визначення». Це означення також невдале. Адже відомо, що функцію можна задавати не лише аналітично, а й графічно, у вигляді таблиць та іншими способами. Тоді як розуміти слова «рівність двох функцій»? Можна було б уточнити це твердження: «Рівність двох функцій, заданих аналітично».

Щоб краще зрозуміти, що таке рівняння, спочатку уточнимо, що спільного між поняттями «рівняння» і «тотожність», і чим вони відрізняються. Тотожність не є різновидом рівняння. Справді, якщо поняття A є видом поняття B, то A повинно мати всі властивості B (наприклад, квадрат є окремий вид прямокутника, тому він має всі властивості прямокутника). А тотожність не має властивостей рівняння. Навпаки, ці два поняття розглядають у різних планах:

1) тотожність доводять, а рівняння розв'язують;

2) тотожності бувають правильні і неправильні, а для рівнянь такі терміни не вживають, рівняння бувають рівносильні і нерівносильні;

3) для тотожностей справджується транзитивна властивість (на спільній області визначення виразів A, B, C з тотожностей $A=B$ і $B=C$ неодмінно випливає $A=C$), а для рівнянь така властивість не справджується. Тому доведення тотожностей записують ланцюжком, а розв'язуючи рівняння, ланцюжків рівностей не пишуть.

Як бачимо, є багато підстав не вважати тотожність окремим видом рівняння. Це два різні поняття, хоч та сама рівність може виражати і тотожність, і рівняння, залежно від того, якими словами вона супроводжується.

У школі поняття рівняння вводять досить рано, в 5 класі, і розглядати тут подібні нюанси не можна, досить обмежитись таким означенням: «Рівність, яка містить невідоме число, називається рівнянням».

Розв'язувати рівняння можна, ґрунтуючись на різних теоретичних основах. У методичній літературі докладно висвітлено такі способи розв'язування простіших рівнянь:

1) на основі залежностей між компонентами і результатами дій;
2) за властивостями рівностей;
3) за теоремами про рівносильність рівнянь;
4) графічний спосіб.

Найпростіші рівняння учні розв'язують в початкових класах. Вже в 3 класі вони розв'язують рівняння на зразок:

$$x+8=13;\ x-9=14;$$
$$18-x=12;\ x\cdot 6=42;\ 32:x=4.$$

У 4 класі розв'язують такі рівняння:

$$17+x=50-30;$$
$$(16+x)-34=10.$$

Тут вони або підбирають корені, або використовують залежності між компонентами і результатами дій.

Лінія рівнянь у 5-6 класах розширюється у зв'язку з тим, що в 6 класі учні розв'язують лінійні рівняння не лише на основі залежності результатів арифметичних дій від компонентів, а й ознайомлюються з властивістю рівняння щодо можливості додавання до обох його частин однакового виразу і наслідком з цієї властивості, який дає можливість переносити вирази з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком. Таким чином, розширюється множина рівнянь, які учні можуть розв'язати (невідоме може бути в обох частинах рівняння), і види задач, які розв'язують за допомогою рівнянь.

У курсі алгебри 7-9 класів учні розв'язують рівняння, використовуючи тотожні перетворення цілих і дробових виразів.

У 7 класі учні вивчають означення лінійного рівняння. На завершення курсу алгебри 7 класу вводиться поняття про лінійне рівняння з двома невідомими, його графік, учні знайомляться з поняттям системи лінійних рівнянь з двома невідомими і трьома способами їх розв'язування: графічним, способом підстановки і способом додавання, розв'язують текстові задачі за допомогою системи рівнянь.

У 8 класі учні вивчають квадратні рівняння та способи їх розв'язування, розв'язують дробово-раціональні рівняння, які зводяться до квадратних, і відповідні текстові задачі.

Висновок. Серед основних педагогічних умов засвоєння поняття «рівняння» у процесі навчання алгебри у середній школі можна виокремити:

1) чітке обґрунтування вчителем спільних та відмінних рис між поняттями «рівняння» і «тотожність»;
2) формування в учнів чіткого розуміння способів розв'язування найпростіших рівнянь;
3) досягнення засвоєння учнями комбінування різних способів для розв'язування рівнянь;
4) творчий підбір різнопланового матеріалу для вивчення даного поняття.

Література

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. – 3-тє вид., перероб. і допов. / Г. П. Бевз, — К. : Вища шк., 1989. — 367 с. : іл.

2. Грушко Н. А. Лінійні рівняння з однією змінною. Цикл уроків з алгебри. 7 клас / Н. А. Грушко// Математика в школах України. – 2009. – Серпень (№22-24). – с. 71-80.

3. Ситнікова Г. О. Раціональні рівняння. Розв'язування дробово-раціональних рівнянь. Урок алгебри у 8 класі / Г. О. Ситнікова // Математика в школах України. – 2009. – Жовтень (№30). – с. 10-12.

4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник / З.І. Слєпкань. – К.: Вища школа, 2006 – 582 с.: іл.

Єригіна Олена Миколаївна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ПРИКЛАДНИЙ АСПЕКТ У ФОРМУВАННІ В УЧНІВ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ ПОНЯТТЯ ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ

На сьогоднішній день спостерігається тенденція більш широкого проникнення математики в різні галузі наук, здавалося б, далеких від математики: біологію, хімію, економіку, соціологію, медицину. Розширилися прикладні можливості й в індустріальній, інформаційних сферах. Тому викладання математики в школі повинно носити прикладний характер. Задачам прикладного характеру приділяється значна увага методистів та вчителів-практиків[1-6].

Прикладна спрямованість навчання математики передбачає орієнтацію його змісту й методів на тісний зв'язок із життям, основами інших наук, на підготовку школярів до використання математичних знань у майбутній професійній діяльності.

Розв’язуючи на уроках математики задачі прикладного характеру (економічні, екологічні, фізичні, хімічні,біологічні), ми тим самим показуємо важливість математики для науки та повсякденного життя. Це сприяє появі інтересу до вивчення математики.

Такі міжпредметні зв’язки обумовлюють:

- поглиблене та розширене сприйняття учнями фактів;
- ефективне формування наукових понять;
- свідоме засвоєння теорії, що вивчає кожна дисципліна природничого циклу;
- формування цілісної картини природи.

Прикладними задачами в математиці називають ті, умови яких містять нематематичні поняття.Такі задачі можуть сформувати або привести до нового математичного поняття.

Прикладні задачі виконують [2]:

- освітню функцію, тому, що їх використання спрямоване на формування у школярів системи знань, умінь та навичок на різних етапах навчання;
- розвиваючу функцію, тому, що робота з ними розвиває вміння осмислювати зміст понять, застосовувати здобуті знання на практиці, аналізувати результати, розширювати кругозір, робити відповідні узагальнення, порівняння, висновки;
- виховну функцію, тому, що економічне, екологічне виховання, міжпредметні зв’язки на уроках математики можуть здійснюватися насамперед через ці задачі.

Ми вважаємо, що доцільно використовувати задачі прикладного характеру для введення нових понять в математиці. Застосування цього методу дозволяє учням зрозуміти важливість нового поняття, підвести до його вивчення. Також важливим аспектом введення нового поняття є найперші задачі, які привели до виникнення понять. Тоді учні можуть зрозуміти звідки, за яких умов та по якій причині з'явилися нові терміни [2].

Прикладні задачі природничого характеру, як один з типів навчальних задач, повинні сприяти підготовці до вивчення теоретичних питань курсу. Прикладні задачі можна поділити на типи за різними ознаками. Пропонуємо звернути особливу увагу на такі:

а) задачі, які передують вивченню нових математичних фактів та сприяють концентрації уваги учнів на ідеях, поняттях, методах;

б) задачі які забезпечують мотивацію навчання при введенні нових понять і методів;

в) задачі, які створюють проблемну ситуацію з метою формування в учнів нових знань.

Розглянемо прикладні задачі, які використовуються на такому етапі уроку як введення нових понять, а саме поняття функції.

У школі змістовна лінія «Функції» починає вивчатися у 7 класі, тобто вводиться саме поняття «функція», а також супутні поняття «область визначення функції», «область значення функції», «графік функції» та види функцій. Після цього учні вивчають лінійну функцію, її графік та властивості. У 8 класі вивчається функція y=$\sqrt{x}$, її графік і властивості. У 9 класі вивчається квадратична функція. Тут вивчається властивості функції: нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції, найпростіші перетворення графіків функцій.Функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, її графік і властивості. У 10 класі першою темою програми стоїть «Функції». Тут учень повинен засвоїти числові функції, область визначення і множина значень, способи задання функцій, графік функції, монотонність, парність і непарність функцій, неперервність функцій. У 11 класі вивчаються логарифмічна та показникові функції та їх властивості.

На нашу думку, на початку вивчення теми «Функція» у кожному класі доцільно розпочати з практичних задач, які привели до тих функцій, які будуть розглядатися. На перший погляд може здаватися, що історизм у викладанні математики та її прикладна спрямованість не пов'язані. Але якщо врахувати, що більшість понять класичної математики, які потрапили до шкільного курсу, зобов'язані своїм виникненням практичним потребам людини, то цей зв'язок стає очевидним. Звернення до конкретних фактів з історії розвитку математики розкриває практичний зміст математичних понять, пробуджує пізнавальний інтерес учнів до математики [1,6].Розглянемо задачі, які приводять до поняття показникової функції.

План-конспект уроку з математики.

Тема: Показникова функція.

Мета:Ввести поняття показникової функції за допомогою прикладних задач, повторити поняття функції та властивості функцій.

Розвивати логічне мислення та просторову уяву, творчий підхід до розв'язування задач, вміння порівнювати, аналізувати, робити висновки.

Виховувати науковий світогляд учнів; уважність, працелюбність, охайність.

Тип уроку: засвоєння нових знань, вмінь та навичок.

Обладнання: плакат з властивостями степенів, мультимедійний проектор, комп'ютер.

ХІД УРОКУ

I. Організаційний момент.

II. Актуалізація опорних знань.

Застосовується інтерактивна технологія «Мікрофон». Вчитель у ролі кореспондента бере інтерв'ю в учнів. Пригадування теоретичного матеріалу.

Питання:

1. Що називається функцією?
2. Що таке область визначення функції, область значень?
3. Які ще властивості функції, ви пам'ятаєте?
4. Яка функція називається лінійною?
5. Яка функція називається квадратичною?
6. Пригадати властивості степенів? (використати плакат з властивостями)

III. Мотивація навчальної діяльності.

Слово вчителю. Ви знаєте ще в давні часи коли люди ще не вміли рахувати, вони вже знали, що; чим більше оленів вдасться вбити на полюванні, тим довше плем'я буде позбавлене голоду; чим довше горить вогнище, тим тепліше буде в печері. Поступово, з розвитком скотарства і землеробства, кількість відомих людям залежностей збільшувалося. Люди знали, що урожай збільшується при збільшенні площі поля, настриг вовни – при збільшенні стада овець, а чим більше людей занятих в будівництві оселі, тим менша частина роботи приходиться на долю кожного з них.

Визначення ваги, вимірювання довжини і об'ємів та інші аналогічні дії поставили кожній величині у відповідність число – міру цієї величини при даній одиниці виміру. Купцям потрібно було знати залежність міри від вибраної одиниці виміру [6].

В повсякденному житті рідко приходилося мати справу з більш складними співвідношеннями. Але кількість різноманітних залежностей, з якими доводилося мати справу писарям весь час збільшувалося (писарі вираховували податки, які надходили, визначали запас їжі, який потрібний війську в похід, кількість цеглин, які необхідні для побудови замку і т.д.). Щоб навчати писарів, були написані книги, які містили рішення типових задач. Це все приводить нас до поняття функції. Але ще не всі види функцій ми знаємо. Тож сьогодні поговоримо про таку функцію, як показникова.

IV. Повідомлення теми і мети уроку.

Записують у зошит тему «Показникова функція».

V. Пояснення нового матеріалу.

Розпочнемо з життєвих задач. Розглядаємо задачу запропоновану у [5].

У пробірку потрапив один мікроб, який відразу почав розмножуватися шляхом ділення навпіл через кожну годину. Скільки мікробів буде у пробірці через добу?

Розв'язуючи цю задачу учні визначають, що через добу їх стане $2^{24} = 16777216$ мікробів. Якщо ж розглянути x годин, то у пробірці буде $2\,2 \cdot 2 \cdot 2 ... \cdot 2 = 2^x$ мікробів. Тобто ми приходимо до функції $y = 2^x$.

Також, відомо, що розмноження більшості бактерій відбувається за такою залежністю: $N = N_0 e^{rt}$, де N - кількість бактерій у момент часу t, N_0 - початкова кількість бактерій, r - константа швидкості розмноження бактерій, що визначається експериментально. Такого типу функції у математиці називають показниковими.

Наступна задача. Одна рослина кульбаби (кореневище) займає площу наближено 10 см^{2}і дає за рік 100 летючих насінин. Скільки квадратних кілометрів площі покриють всі нащадки однієї особини кульбаби через 6 років за умови, що вона розмножується без перешкод у геометричній прогресії. Відомо, що площа Вінницької області складає 26500 кв. км. Чи вистачить цим рослинам на сьомий рік місця на поверхні Вінницької області?

Розв'язання. Нехай$S_0 = 10 см^2$ – початкова площа, яку займає одна рослина кульбаби. Тоді $S_1, S_2, ..., S_n$ – площі , які покриють нащадки однієї кульбаби через $1, 2, ..., n$ років відповідно за умови, що рослинарозмножується без перешкод у геометричній прогресії. При цьому $S_1 = S_0 \cdot 10^2, S_2 = S_1 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^4, S_3 = S_2 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^6, ..., S_{n-1} \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^{2n}.$

Отже, $S_6 = 10 \cdot 10^{12} = 10^{13} \, (см^2)$

Оскільки площа поверхні Вінницької області складає $265 \cdot 10^2 км^2 = 265 \cdot 10^{12} см^2$ то на сьомий рік на поверхні Вінницької області місця для цих рослин не вистачить, тому що $S_7 = 10^{15} \; см^2$.

Відповідь. За згаданих умов на сьомий рік на поверхні Вінницької області для кульбаби не вистачить місця. Розглянута задача фактично приводить до поняття показникової функції $S(n) = S_0 \cdot 10^{2n}$.

Розглянемо ще одну задачу: За оцінкою лісника,запас деревини на одній ділянці лісу складає 10000 кубометрів. Скільки деревини буде на цій ділянці через 10 років за умови, що середній річний приріст складатиме 2,5 %?

В даній задачі мова йде про дослідження біологічного процесу, внаслідокякого буде одержана залежність, що є прикладом показникової функції. Задачу такого типу корисно розглядати в класах хіміко-біологічного, екологічного профілю перед введенням означення цієї функції.

Слід запропонувати учням такий алгоритм дослідження:

1) Позначте початковий запас деревини на ділянці лісу через D_0 , а D_n – запас деревини на ділянці лісу через n років. Яким буде запас деревини через рік? Виразіть D_1 через D_0 .

2) Чому буде дорівнювати запас деревини на ділянці через два роки? Виразіть D_2 через D_1, та D_2 через D_0.

3) Дайте відповідь на аналогічне питання для $n = 3$.

4) Виразіть D_n через D_{n-1} Виразіть D_n як функцію від D_0 і n.

5) Підставте в останню формулу значення D_0 з умови задачі. Яку залежність ви одержали?

Провівши дослідження за наведеним алгоритмом, учні одержать функцію $D(n) = 10000 \cdot 1{,}025^n$, яка є залежністю запасу деревини D на ділянці лісу (в кубометрах) від числа минулих років n.

Одержана функція є математичною моделлю даного процесу. Отже, визначивши її значення $D(10) = 10000 \cdot 1{,}025^{10} = 12800(м^3)$ дістають відповідь на запитання.

Тепер формулюємо загальне означення показникової функції, розглядаємо її властивості та графік.

VI. Формування вмінь та навичок учнів.

Пропонуємо учням розв'язати вправи з підручника[7], № 1, 3, 6, 7, 8.

VII. Домашнє завдання[7], П.29, № 2, 4, 9.

VIII. Підсумок уроку.

Сьогодні на уроці ми розв'язували задачі прикладного характеру. Впевнена, що ви зрозуміли необхідність вивчення загальних властивостей показникової функції.

Розгляд таких задач на уроці буде сприяти досягненню поставленої мети.

Література

1. Котловська О. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики// Математика. – №3 - 2008.
2. Козар Т.М. Використання математичних моделей під час розв'язання прикладних задач// Математика в школах України. – №7- 2007.
3. Л.О.Соколенко. Система прикладних задач природничого характеру як засіб формування евристичної діяльності учнів// Дидактика математики: проблеми і дослідження. - №32 – 2009.
4. Л.О. Соколенко. Математичне моделювання біологічних, хімічних, медичних процесів і явищ у класах природничого профілю// Дидактика математики: проблеми і дослідження. - №25 – 2006.
5. Л.О. Соколенко. Про необхідність створення системи прикладних задач природничого характеру для профільного навчання математики// Дидактика математики: проблеми і дослідження. - №2. – 2005.
6. Н. Виленкин. Как возникло и развивалось понятие функции// Квант. - №7 -1977.
7. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу. Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – 2-ге вид., виправ. і доп. – Х.:Світ дитинства, 2006.

Калашнікова Євгенія Ігорівна,
студентка Малої академії наук України,
математико-економічного відділення

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ: КОШІ, КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО, ГЕЛЬДЕРА, БЕРНУЛЛІ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

У даній статті проводиться введення базових ірраціональних нерівностей, які часто використовуються для доведення більш складних нерівностей на доведення та для розв'язування деяких олімпіадних задач.

Нерівність, яка містить змінну (змінні) під знаком радикала, або піднесення змінної (змінних) в раціональну степінь, яка не є цілим числом будемо називати *ірраціональною нерівністю* відносно цих змінних.

Довести ірраціональну нерівність означає — шляхом правильних логічних міркувань встановити істинність висловлення, яке залежить від змінних нерівності, і задає її умову.

Нерівність Коші є ключовою при доведенні нерівностей визначених в темі статті, тому розпочнемо саме з неї.

Нерівність Коші

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \tag{1}$$

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. Доведемо, що нерівність справедлива для $n = 2$, тобто для довільних невід'ємних чисел a_1, a_2 справедлива нерівність:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 \cdot a_2},$$

Розглянемо різницю:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 \cdot a_2} \geqslant 0,$$

перетворимо вираз у лівій частині нерівності, маємо:

$$\frac{a_1 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} + a_2}{2} \geqslant 0,$$

$$\frac{a_1 - 2\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} + a_2}{2} \geqslant 0,$$

$$\frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geqslant 0.$$

Остання нерівність є очевидною. Отже маємо базу для доведення нерівності за допомогою принципу повної математичної індукції.

Припустимо, що нерівність Коші, а саме (1) виконується не лише для двох членів, а ще для деякого фіксованого числа k елементів, тобто:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}.$$

Доведемо, що нерівність справедлива і для $n = k + 1$, тобто виконується нерівність:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geqslant \sqrt[k+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1}}; \qquad (2)$$

Введемо такі позначення:

$$A = \sqrt[k+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1}},$$

$$a = \sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}.$$

Піднесемо першу рівність до степеня $k+1$, другу до степеня k, матимемо:

$$A^{k+1} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot a_{k+1},$$

$$a^k = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k.$$

Поділимо першу рівність на другу, отримаємо:

$$\frac{A^{k+1}}{a^k} = a_{k+1}.$$

Приступимо безпосередньо до доведення нерівності (2). Візьмемо ліву її частину і почнемо її перетворення, користуючись припущенням нерівність Коші справедлива для $n = k$, і беручи до уваги те, що всі $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k, k+1)$, дістанемо:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{\left(\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}\right) \cdot k + \frac{A^{k+1}}{a^k}}{k+1},$$

$$\frac{\left(\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}\right) \cdot k + \frac{A^{k+1}}{a^k}}{k+1} \geqslant \frac{ak + \frac{A^{k+1}}{a^k}}{k+1},$$

$$\frac{ak + \frac{A^{k+1}}{a^k}}{k+1} = \frac{\frac{a^{k+1}k+A^{k+1}}{a^k}}{k+1},$$

$$\frac{\frac{a^{k+1}k+A^{k+1}}{a^k}}{k+1} = \frac{a^{k+1}k + A^{k+1}}{(k+1)a^k},$$

додамо до останнього виразу A і $-A$, та зробимо наступні перетворення $A + \dfrac{a^{k+1}k + A^{k+1}}{(k+1)a^k} - A = A + \dfrac{a^{k+1}k + A^{k+1} - A(k+1)a^k}{(k+1)a^k} =$

$$= A + \frac{a^{k+1}k + A^{k+1} - ka^k \cdot A - a^k A}{(k+1)a^k} = A + \frac{ka^k(a-A) - A(a^k - A^k)}{(k+1)a^k} =$$

$$= A + \frac{ka^k(a-A) - A(a-A)(a^{k-1} + a^{k-2}A + ... + A^{k-1})}{(k+1)a^k} =$$

$$= A + \frac{(a-A)(ka^k - A(a^{k-1} + a^{k-2}A + ... + A^{k-1}))}{(k+1)a^k} =$$

$$= A + \frac{(a-A)(a^{k-1}(a-A) + a^{k-2}(a^2 - A^2) + ... + (a^k - A^k))}{(k+1)a^k} =$$

$$= A + \frac{(a-A)(a-A)(a^{k-1} + a^{k-2}(a+A) + ... + (a^{k-1} + ... + A^{k-1}))}{(k+1)a^k} =$$

$$= A + \frac{(a-A)^2(a^{k-1} + a^{k-2}(a+A) + ... + (a^{k-1} + ... + A^{k-1}))}{(k+1)a^k} \geqslant A =$$

$= \sqrt[k+1]{a_1 \cdot ... \cdot a_k \cdot a_{k+1}}$

Отже $\dfrac{a_1 + ... + a_k + a_{k+1}}{k+1} \geqslant \sqrt[k+1]{a_1 \cdot ... \cdot a_k \cdot a_{k+1}}$, тобто нерівність доведено. Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $a_1 = ... = a_n$ ■

Нерівність Коші-Буняковського.

$$\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2} \geqslant a_1b_1 + ... + a_nb_n \qquad (3)$$

Доведення. Очевидним є факт. Якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c, де $a > 0$ при всіх значеннях x набуває невід'ємних значень, то його дискримінант недодатній.

Розглянемо очевидну нерівність $(a_1x-b_1)^2+...+(a_nx-b_n)^2 \geqslant 0$. Піднесемо до квадрату двочлени: $a_1^2x^2-2a_1b_1x+b_1^2+...+a_n^2x^2-2a_nb_nx+b_n^2 \geqslant 0$, перегрупуємо і винесемо за дужки:

$$(a_1^2 + ... + a_n^2)x^2 - 2x(a_1b_1 + ... + a_nb_n) + (b_1^2 + ... + b_n^2) \geqslant 0.$$

З останньої нерівності бачимо, що її ліва частина є квадратний тричлен з додатним старшим коефіцієнтом. Оскільки значення даного квадратного тричлена додатне за будь-яких x, то дискримінант (D) такого квадратного тричлена менше за 0. Тоді:

$$D = 4(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \leqslant 0.$$

$$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2), \text{ або}$$

$$(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2, \text{ звідки:}$$

$$\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2} \geqslant a_1b_1 + ... + a_nb_n,$$

що і треба було довести ■

Нерівність Гельдера

$$\sqrt[m]{a_{11}^m + ... + a_{1n}^m} \cdot \sqrt[m]{a_{21}^m + ... + a_{2n}^m} \cdot ... \cdot \sqrt[m]{a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m} \geqslant$$
$$\geqslant a_{11} \cdot ... \cdot a_{m1} + a_{12} \cdot ... \cdot a_{m2} + ... + a_{1n} \cdot ... \cdot a_{mn} \tag{4}$$

де a_{ij} j-тий елемент i-го набору.

Доведення.

Спочатку доведемо допоміжну нерівність.

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \tag{5}$$

Використаємо (3) нерівність Коші-Буняковського. Запишемо її для $b = 1$, отримаємо:

$$\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{\underbrace{1^2 + ... + 1^2}_{n}} \geqslant a_1 \cdot 1 + ... + a_n \cdot 1.$$

Далі, $\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{n} \geqslant a_1 + ... + a_n$. Поділимо обидві частини нерівності на n, нерівність не порушиться, оскільки $n \in \mathbb{N}$, маємо:

$$\frac{\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{a_1 + ... + a_n}{n},$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + ... + a_n}{n},$$

що і потрібно було довести.

Приступимо безпосередньо до доведення нерівності Гельдера. Розглянемо суму: $\frac{a_{11}^m}{a_{11}^m + ... + a_{1n}^m} + ... + \frac{a_{1n}^m}{a_{11}^m + ... + a_{1n}^m} + \frac{a_{21}^m}{a_{21}^m + ... + a_{2n}^m} + ... + \frac{a_{2n}^m}{a_{21}^m + ... + a_{2n}^m} +$ $+ ... + \frac{a_{m1}^m}{a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m} + ... + \frac{a_{mn}^m}{a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m} = 1 + 1 + ... + 1 = 1 \cdot m = m.$

Тобто:

$$m = \frac{a_{11}^m}{a_{11}^m + ... + a_{1n}^m} + ... + \frac{a_{1n}^m}{a_{11}^m + ... + a_{1n}^m} + \frac{a_{21}^m}{a_{21}^m + ... + a_{2n}^m} + ... + \frac{a_{2n}^m}{a_{21}^m + ... + a_{2n}^m} +$$
$$+ ... + \frac{a_{m1}^m}{a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m} + ... + \frac{a_{mn}^m}{a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m} = \frac{a_{11}^m}{a_{11}^m + ... + a_{1n}^m} + \frac{a_{21}^m}{a_{21}^m + ... + a_{2n}^m} +$$
$$+ ... + \frac{a_{m1}^m}{a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m} + ... + \frac{a_{1n}^m}{a_{11}^m + ... + a_{1n}^m} + \frac{a_{2n}^m}{a_{21}^m + ... + a_{2n}^m} + ... + \frac{a_{mn}^m}{a_{m1}^m + ... + a_{mn}^m}.$$

Використовуючи допоміжну нерівність, див. (5), маємо:

$$\frac{a_{11}^m}{a_{11}^m+\ldots+a_{1n}^m}+\frac{a_{21}^m}{a_{21}^m+\ldots+a_{2n}^m}+\ldots+\frac{a_{m1}^m}{a_{m1}^m+\ldots+a_{mn}^m}+\ldots+\frac{a_{1n}^m}{a_{11}^m+\ldots+a_{1n}^m}+$$
$$+\frac{a_{2n}^m}{a_{21}^m+\ldots+a_{2n}^m}+\ldots+\frac{a_{mn}^m}{a_{m1}^m+\ldots+a_{mn}^m}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{ma_{11}^m\cdot a_{21}^m\cdot\ldots\cdot a_{m1}^m}{\sqrt[m]{a_{11}^m+\ldots+a_{1n}^m}\cdot\sqrt[m]{a_{21}^m+\ldots+a_{2n}^m}\cdot\ldots\cdot\sqrt[m]{a_{m1}^m+\ldots+a_{mn}^m}}+\ldots+$$
$$+\frac{ma_{1n}^m\cdot a_{2n}^m\cdot\ldots\cdot a_{mn}^m}{\sqrt[m]{a_{11}^m+\ldots+a_{1n}^m}\cdot\sqrt[m]{a_{21}^m+\ldots+a_{2n}^m}\cdot\ldots\cdot\sqrt[m]{a_{m1}^m+\ldots+a_{mn}^m}}=$$
$$=\frac{m(a_{11}^m\cdot a_{21}^m\cdot\ldots\cdot a_{m1}^m+\ldots+a_{1n}^m\cdot a_{2n}^m\cdot\ldots\cdot a_{mn}^m)}{\sqrt[m]{a_{11}^m+\ldots+a_{1n}^m}\cdot\sqrt[m]{a_{21}^m+\ldots+a_{2n}^m}\cdot\ldots\cdot\sqrt[m]{a_{m1}^m+\ldots+a_{mn}^m}}.$$

Отже:

$$m\geqslant\frac{m(a_{11}^m\cdot a_{21}^m\cdot\ldots\cdot a_{m1}^m+\ldots+a_{1n}^m+a_{2n}^m\cdot\ldots\cdot a_{mn}^m)}{\sqrt[m]{a_{11}^m+\ldots+a_{1n}^m}\cdot\sqrt[m]{a_{21}^m+\ldots+a_{2n}^m}\cdot\ldots\cdot\sqrt[m]{a_{m1}^m+\ldots+a_{mn}^m}}.$$

Поділимо обидві частини нерівності на m, отримаємо:

$$1\geqslant\frac{a_{11}^m\cdot a_{21}^m\cdot\ldots\cdot a_{m1}^m+\ldots+a_{1n}^m+a_{2n}^m\cdot\ldots\cdot a_{mn}^m}{\sqrt[m]{a_{11}^m+\ldots+a_{1n}^m}\cdot\sqrt[m]{a_{21}^m+\ldots+a_{2n}^m}\cdot\ldots\cdot\sqrt[m]{a_{m1}^m+\ldots+a_{mn}^m}};$$

$$\sqrt[m]{a_{11}^m+\ldots+a_{1n}^m}\cdot\sqrt[m]{a_{21}^m+\ldots+a_{2n}^m}\cdot\ldots\cdot\sqrt[m]{a_{m1}^m+\ldots+a_{mn}^m}\geqslant$$
$$\geqslant a_{11}^m\cdot a_{21}^m\cdot\ldots\cdot a_{m1}^m+\ldots+a_{1n}^m+a_{2n}^m\cdot\ldots\cdot a_{mn}^m,$$

що і потрібно було довести ■

Нерівність Бернуллі

$$\boxed{\sqrt[n]{1+nx}\leqslant 1+x;\ x\geqslant 0, n\in\mathbb{N}}\qquad(6)$$

Доведення. Розглянемо вираз $(1+x)^n$. Розкриємо дужки, використовуючи формулу розкладу Бінома Ньютона [2, ст. 207], отримаємо: $(1+x)^n = = C_n^0 1^n x^0 + C_n^1 1^{n-1}x^1 + C_n^2 1^{n-2}x^2+\ldots+C_n^n 1^0 x^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2+\ldots+C_n^n x^n = = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$. Отже маємо $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$. Оскільки $x\geqslant 0$, і $n\in\mathbb{N}$, то вираз $C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n\geqslant 0$, а це означає, що $(1+x)^n\geqslant 1+C_n^1x$, тобто $(1+x)^n\geqslant 1+nx$, або $1+nx\leqslant(1+x)^n$, звідки $\sqrt[n]{1+nx}\leqslant 1+x$, що і треба було довести ■

Література

1. В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов. М.: Просвещение, 1991. 352 с.

2. М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. Алгебра і початки аналізу: підручник для 11 кл. заг. навч. закл. К.: Зодіак-ЕКО, 2002. 384 с.

Калюжко Наталія Миколаївна
студентка 4 курсу,напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ ТА ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Кожна наука і кожний предмет оперує певним колом властивих їм понять. Поняття - це форма мислення, в якій відображаються загальні істотні і відмінні властивості певних предметів або явищ дійсності. Термін поняття звичайно вживають для позначення розумового образу певного класу об’єктів, процесів об’єктивної реальності. У курсі «Алгебри та початків аналізу» важливим поняттям є поняття похідної функції. Згідно з діючими програмами дана тема вивчається в 11 класі. На сьогоднішній день автори шкільних підручників розглядають різні підходи щодо вивчення цього поняття.

У підручнику Бевз Г.П. і Бевз В.Г. «Алгебра і початки аналізу» вперше поняття похідної з’являється у розділі «Похідна та її застосування». Перший параграф даного розділу присвячений властивостям функції. Тут чітко і зрозуміло показується, які функції є парними, непарними, періодичними і неперіодичними, зростаючими та спадними. Після параграфа слідує добірка вправ на визначення парності, періодичності функції, проміжків зростання та спадання. В наступному параграфі вводиться поняття границі функції та границі функції в точці, а також неперервності функції. В цьому параграфі розглядається приріст аргументу і приріст функції. Далі розглядається дотична до графіка функції в точці. Опираючись на попередні параграфи і здобуті раніше знання, похідну визначають як кутовий коефіцієнт, або тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції в точці до осі абсцис. Тобто автори зробили наголос саме на геометричній задачі, що призводить до поняття похідної, а не на фізичній, що б показала зміну функції. Розглядаючи поняття похідної детальніше визначають похідну як границю відношення приросту функції до приросту аргументу і вводять позначення $f'(x_0)$. Подаються також приклади обчислення похідної для деяких функцій.

У підручнику «Алгебра і початки аналізу» 11 клас, автором якого є Нелін Є.П., поняття похідної вводиться в розділі «Границя і неперервність функції. Похідна та її застосування». Спочатку в даному розділі, на відміну від попереднього підручника, вводиться поняття границі функції, границі функції в точці та неперервність функції в точці, а також властивості границі функції. Після цього вводиться поняття приросту аргументу і приросту функції. В підручнику акцентується значною мірою увага на задачах фізичного змісту, а не лише геометричного змісту, які і призводять до введення поняття похідної. Для кращого сприйняття в підручнику наводяться чіткі і зрозумілі кольорові рисунки. Після цих задач вводиться означення похідної як границі відношення приросту функції до приросту аргументу. Однією з переваг підручника є те, що в ньому вибудувана чітка схема-алгоритм знаходження похідної функції:

«1.Знайти приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, який відповідає приросту аргументу Δх.

2. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. З'ясувати до якої границі прямує відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при Δх→0. Це і буде похідна [3, С. 22]».

У підручнику «Алгебра та початки аналізу » 11 клас авторів А.Г.Мерзляк, Д.А.Номіровський, В.Б.Полонський, М.С.Якір, який найчастіше застосовується в школі, поняття похідної вводиться в розділі «Похідна та її застосування». Для цього в розділі спочатку, на відміну від інших підручників, чітко і зрозуміло вводиться поняття границі числової послідовності та границі функції в точці, ілюструється відповідними малюнками. До поняття похідної в даному підручнику призводить задача про миттєву швидкість і задача про дотичну до графіка функції в точці. В наступному параграфі, опираючись на попередні факти, вводиться означення похідної як границі відношення приросту функції до приросту аргументу. Як і в підручнику «Алгебра і початки аналізу» 11 клас, автором якого є Нелін Є.П., подається чітка схема для обчислення похідної. Окрім того, автори наголошують на фізичному і геометричному змісті похідної функції. До кожного параграфа надається добірка завдань, поділених за рівнями складності.

Усі основні поняття диференціального числення природно вводити як узагальнення результатів розв'язання деяких прикладних задач. Це одразу виділяє головний прикладний зміст поняття, робить його більш природним та доступним для сприймання. Дуже важливо, щоб отримані знання учні могли застосувати до характеристики реальних процесів, для введення нових, більш змістовних понять природничих та технічних наук (миттєвої сили струму, питомої теплоємності, лінійної густини тощо). При формуванні поняття похідної слід виробляти розуміння того, що похідна моделює не тільки швидкість механічного руху, але й швидкість зміни багатьох процесів. В основі системи вправ на формування навичок диференціювання повинні лежати функції, що описують реальні залежності величин.

Проаналізувавши різні підходи, ми пропонуємо таку схему введення поняття похідної функції:

1. введення границі числової послідовності;
2. введення поняття границі функції в точці та неперервної функції в точці;
3. поняття приросту функції та приросту аргументу;
4. задачі, що призводять до введення поняття похідної:

1) задача про миттєву швидкість; 2) задача про дотичну функції в точці.

5. введення поняття похідної функції.

Зазвичай завжди виникає питання: «Як правильно і зрозуміло подати і довести до відома дітей інформацію?»Для кращого розуміння учнями матеріалу, виклад його повинен бути цікавим та наочним. Тому під час пояснення нового матеріалу велика роль надається комп'ютерним та інноваційним технологіям. Застосування на уроці проектору, інтерактивної дошки для презентації теми, завдань для актуалізації опорних знань та для закріплення вивченого, кросворду, рисунків, основних моментів теми, яка вивчається, дає можливість зробити урок більш інформативним, яскравим та цікавим для учнів.

Розглянемо фрагмент уроку введення поняття похідної. Відповідно до запропонованої схеми на попередніх уроках були введенні поняття границі числової послідовності, границі функції в точці, неперервності функції в точці, приріст аргументу і приріст функції. Знання із цих тем необхідні для введення нашого поняття, тому потрібно вибрати завданнядля актуалізації опорних знань, які б містили саме цей матеріал. Наприклад, для початку усні вправи на повторення таких означень, як границі функції в точці, неперервної функції в точці, приросту аргументу і приросту функції. Варто розглянути задачу на знаходження приросту функції та приросту аргументу, а також на знаходження границі функції в точці, тому що ці знання будуть необхідні в процесі вивчення теми.

Актуалізацію знань учнів проведемо у формі гри у футбол, а саме серії пенальті. Для цього поділимо клас на дві команди. М’яч буде у тієї команди, якій будуть задаватися задачі. Краще по черзі давати можливість відповісти кожній команді, щоб решта не нудьгувала і зосередити увагу учнів на завданнях. Результати голів варто записувати на дошці. Для такої гри рекомендуємо таку добірку вправ:

1. Чи є функція неперервною в кожній точці даного проміжку:

1) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2, (-\infty; +\infty)$; 2) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}, [-5; +\infty)$

2. Знайдіть: 1) $\lim\limits_{x \to 3}(x^3 + 2x - 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 9}{x - 5}$.

3. Знайдіть помилку: 1) $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 + 2x + 2) = 5$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x}$ - не існує.

4. Для функції $y = 2x$ знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргументу Δx у точці x_0, а також відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо:

1) x_0 =2, Δx =3; 2) x_0 =5, Δx =4; 3) x_0 =0,4, Δx =0,1; 4) x_0 =1,2, Δx =0,3.

Повторити відповідний теоретичний матеріал пропонуємо в процесі розгадування такого кросворду:

1. Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку I, то її називають … на проміжку I.

2.У тому випадку, коли значення x задовольняє нерівність $|x - a| < \delta$, кажуть, що точка x розташована в δ-… точки a.

3. Переміщення тіла по деякій території з часом є…

4. $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називається приростом…

5. … - це пряма, з якою практично зливається графік функції в деякому околі точки x_0.

6.Знак lim (читають: «ліміт») — скорочений запис латинського limes (лімес), що в перекладі означає «…».

7. $\Delta x = x - x_0$ називається приростом …

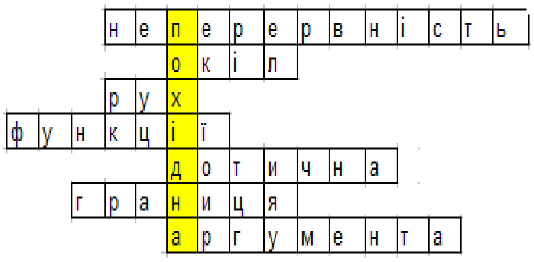


Рис.1

Після розгадування кросворду звертаємо увагу учнів на зашифроване слово – похідна. Це нове поняття і є темою уроку.

Розпочнемо виклад матеріалу з задачі на обчислення миттєвої швидкості. Нехай координата x точки в момент часу t дорівнює $x(t)$. Як і в курсі фізики, будемо вважати, що рух відбувається неперервно (як це ми спостерігаємо в реальному житті). Спробуємо за відомою залежністю $x(t)$ визначити швидкість, з якою рухається точка в момент часу t_0 (так звану миттєву швидкість). Розглянемо відрізок часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$. Визначимо середню швидкість на відрізку $[t_0; t_0 + \Delta t]$ як відношення пройденого шляху до тривалості руху:

$$Vсередня = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Для того, щоб визначити миттєву швидкість руху точки в момент часу t_0, візьмемо відрізок часу довжиною Δt, обчислимо середнюшвидкість на цьому відрізку та почнемо зменшувати відрізок Δt до нуля (тобто зменшувати відрізок $[t_0; t]$ і наближати t до t_0). Ми помітимо, що значення середньої швидкості при наближенні Δt до нуля буде наближатися до деякого числа, яке вважаютьзначенням швидкості в момент часу t_0. Іншими словами, миттєвою швидкістю в момент часу t_0 називають границю відношення $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, якщо $\Delta t \to 0$ (рис.2).

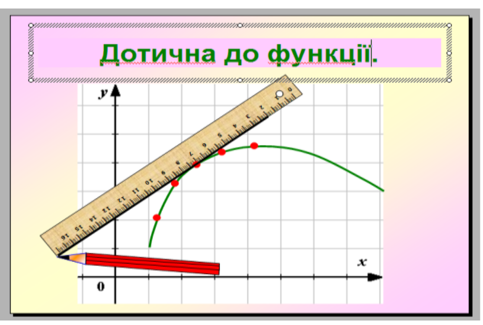
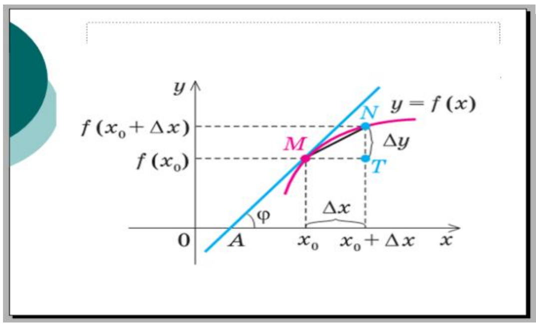


Рис.2 Рис.3

Розглянемо далі дотичну до графіка функції**.** Наочне уявлення про дотичну докривої можна отримати, виготовивши на уроці разом із учнями криву з цупкого матеріалу (наприклад, із дроту) і прикладаючи до кривої лінійку у вибраній точці. Якщо ми зобразимо криву на папері, а потім будемо вирізати фігуру, обмежену цією кривою, то ножиці теж будуть напрямлені по дотичній до кривої. Це можна показати на слайді (рис. 3).

Спробуємо наочне уявлення про дотичну виразити точніше. Нехай задано деяку криву і точку M на ній.



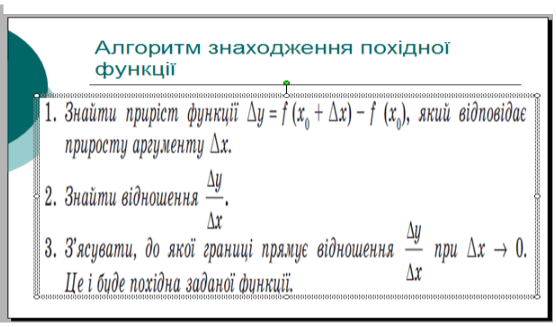


Рис.4 Рис.5

Візьмемо на цій кривій іншу точку N і проведемо пряму через точки M і N. Таку пряму зазвичай називають січною. Почнемо наближати точку N до точки M. Положення січної MN буде змінюватися, але при наближенні точки N до точки M почне стабілізуватися. Для учнів потрібно наголосити, що дотичною до кривої в даній точці M називають граничне положення січної MN.Для того, щоб записати це означення за допомогою формул, будемо вважати, що крива — це графік функції $y = f(x)$, а точка M на графіку задана координатами $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$.Дотичною є деяка пряма, яка проходить через точку M. Щоб побудувати цю пряму, достатньо знати кут φ нахилу дотичної до осі Ox. Нехай точка N (через яку проходить січна MN) має абсцису $x_0 + \Delta x$. Якщо точка N, рухаючись по графіку функції $y = f(x)$, наближається до точки M (це буде при $\Delta x \to 0$), то величина кута NMT наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox (рис.4). Оскільки $tg < MNT = \dfrac{NT}{MT} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $\Delta x \to 0$ значення $tg < NMT$ наближається до $tg\varphi$, тобто $tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Фактично ми прийшли до задачі, яку розглядали при знаходженнімиттєвої швидкості: тут потрібно знайти границю відношення виразу виду $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (де $y = f(x)$ − задана функція) при $\Delta x \to 0$. Одержане таким чином число називають похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0.

Тепер на основі задач введемо означення похідної:

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають $f'(x_0)$ (або $y'(x_0)$) і читають: «еф штрих у точці x». Функцію $f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають диференційовною в цій точці. Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що ця функція диференційовна на цьомупроміжку.

Для глибшого усвідомлення учнями означення похідної доцільно відразу з'ясувати її механічний і геометричний зміст. Механічний зміст похідної випливає з розглянутої задачі про миттєву швидкість. Учні самі здатні зробити висновок, що миттєва швидкість нерівномірного рухуце похідна від координати x точки по часу t, тобто $Vмит. = x'(t)$.

Геометричний зміст похідної випливає із задачі про дотичну до кривої в певній точці: похідна в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту і тангенсу кута нахилу дотичної до графіка кривої з додатнім напрямом осі x у точці з абсцисою x_0. Тобто це можна записати так: $k = tg\varphi = y'(x)$.

Після введення поняття варто сформулювати разом з учнями на основі розглянутих прикладів алгоритм знаходження похідної для довільної функції (рис.5) та знайти похідні окремих функцій за допомогою отриманого алгоритму.

Наприклад, обчислити похідну функції $y = x^2$ (тобто $f(x) = x^2$) у загальному вигляді та за певних значень аргументу x.

Розв'язання.

1) Знайдемо приріст функції $y = x^2$, який відповідає приросту аргументу Δx: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.

2) Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$

3) При $\Delta x \to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$. Це означає, що $y'(x_0) = 2x_0$. Тоді похідна функції $y = x^2$ у довільній точці x дорівнює $y'(x) = 2x.$ Отже, $(x^2)' = 2x$.

Після цього пропонуємо усно обчислити за отриманою формулою значення похідної функції $y = x^2$ в точці x_0, якщо:

1) x_0 =3, 2) x_0 =-2,5, 3) x_0 =5, 4) x_0 =7.

З метою закріплення означення й алгоритму відшукання похідної за означенням (послідовним виконанням трьох кроків) пропонуємо таку добірку вправ:

1. Знайти похідну функції $y = c$ (де c — стала).
2. Використовуючи алгоритм знаходження похідної функції, знайти, чому дорівнює похідна функції:
   1) $y = kx + C$ в точках $x = 2$ та $x = 4$;
   2) $y = \frac{1}{x}$ в точках $x = 1$ та $x = 4$.

3. Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайти $f'(1)$, $f'(25)$, $f'(x)$.

4.Закон руху матеріальної точки по прямій задано формулою $x=x(t)$, де x — координата точки в момент часу t. Знайдіть:

а) середню швидкість руху точки на відрізку [2; 4];

б) миттєву швидкість руху точки при t=2, якщо:

1) $x(t)=3t+4$; 2) $x(t)=x^2-x+3$.

5.Знайдіть, чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в точці $x_0=2$, якщо:

1) $y=2x^2$; 2) $y=24x-x^2+7$.

6. Доведіть, що 1) $(x^3)'=3x^2$, 2) $(x^4)'=4x^3$.

Вважаємо, що розглянута технологія введення поняття похідної сприятиме гарному засвоєнню матеріалу учнями, розумінню ними фізичного та геометричного змісту похідної, розвитку навичок учнів розв’язувати відповідні задачі, в тому числі прикладного змісту.

На більшості уроків учні намагаються запам’ятати те, що чують. Використовуючи на уроках інноваційні технології, ми розвиваємо в учнів зорову пам'ять та уяву. Тому під час таких уроків діти краще засвоюють матеріал. Учні на уроці розуміють, думають, аналізують, що є дуже важливим під час навчального процесу. Впродовж всього уроку за допомогою таких технологій навчання ми зосереджуємо увагу учнів на матеріалі. Використовуючи такі засоби навчання ми збуджуємо в учнів цікавість. Адже лише тоді, коли працює інтерес до теми , відповідно і зосереджується увага на потрібних моментах. Запропонований нами урок дає можливість яскраво провести пояснення, чітко і зрозуміло донести до свідомості дітей матеріал.

Література

1. Бевз Г.П. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. /Бевз Г.П. —К.: Освіта, 2005. – 255 с.

2. МерзлякА.Г. Алгебра 11клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: академ. і профільний рівень. / МерзлякА.Г., НоміровськийД.А., ПолонськийВ.Б., ЯкірМ.С. МерзлякА.Г., НоміровськийД.А., ПолонськийВ.Б., ЯкірМ.С.- Х: Гімназія, 2011. − 431с. : іл..

3. Нелін Є. П. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Х. : Гімназія, 2011. — 448 с. : іл.

4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник - 2-ге вид., допов. і переробл. / Слєпкань З.І. – К. : Вища школа., 2006. − 582 с. : іл.

5. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник. − 3-тє вид., перероб. і допов. /Бевз Г.П. − К. : Вища шк., 1989. − 367с. : іл.

Макух Ірина Станіславівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДО ПИТАННЯ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

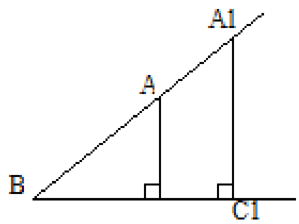
Поняття тригонометричних функцій вводиться у 8 класі в курсі геометрії і в 10 класі в курсі алгебри і початків аналізу.

Досить складним для учня з математичної, а особливо психологічної точки зору є перехід від поняття синуса (косинуса, тангенса, котангенса) кута (як геометричної фігури) до поняття тригонометричних функційчерез координати точок одиничного кола. Проаналізуємо запропоновані у діючих підручниках підходи до означення тригонометричних функцій.

У 8 класі розглядаються поняття *синуса, косинус ітангенса*гострого кута прямокутного трикутника.

Автор в підручнику [4] , використовуючи метод проблемного викладу, ставить проблему і сам її розв'язує, демонструючи шляхпошукової діяльності.

Якщо в прямокутному трикутнику кут дорівнює 30°, то, знаючи гіпотенузу *с,* неважко визначити катети: один з них дорівнює половині гіпотенузи, а другий легко знаходиться за теоремою Піфагора. А як, знаючи гіпотенузу, знайти катети, якщо гострий кут прямокутного трикутника дорівнює, наприклад, 25°? Для цього треба скористатися поняттям синуса чи косинуса цього кута.



Мал.1

Ви вже знаєте, що два прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного дорівнює гострому куту другого трикутника. Зокрема, яким би не був гострий кут *B,* відповідні сторони трикутників *ABC* іA_1BC_1, зображених на малюнку 1, пропорційні:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{A1C1}{A1B},\ \frac{BC}{AB}=\frac{BC1}{BA1},\ \frac{AC}{BC}=\frac{A1C1}{BC1}$$

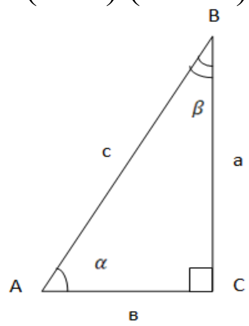
Отже, якщо два прямокутні трикутники мають рівні гострі кути, то відношення їх відповідних сторін залежить тільки від міри цих кутів і не залежить від довжин сторін. У математиці такі відношення відіграють важливу роль, і в усьому світі їх називають однаково: *синус, косинус; тангенс.*

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи ($\sin\alpha$).

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи ($\cos\alpha$).

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого ($\mathbf{tg}\,\alpha$).

Розглянемо довільний прямокутний трикутник. Домовимося позначати його прямий кут літерою С, гострі кути — літерами *А, В,* протилежні їм сторони — відповідними малими літерами *с, а,* *b,* а міри гострих кутів — грецькими літерами α (альфа) і β (бета) (мал. 2).



Мал.2

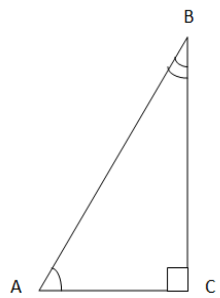
Для трикутника з такими сторонами і кутами сформульовані вище означення можна записати у вигляді рівностей

$sin\,\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$. (1)

Це — *співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.*

Знаючи одну сторону прямокутного трикутника і його гострий кут, за допомогою цих формул можна визначити дві інші сторони трикутника.

У підручнику [1] автор використовує абстрактно-дедуктивний метод. Він вводить основні поняття і пояснює їх.



Мал.3

На малюнку 3 зображено прямокутний трикутник ABC *(кут С* = 90°). Катет *ВС* називають **протилежним** куту А, а катет *АС* — **прилеглим** до цього кута.

Означення: **С и н у с о м гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета догіпотенузи.**

Синус кута А позначають так: $\sin A$(читають: «синус *А»).* Для гострих кутів *А і В* прямокутного трикутника *АВС* маємо:

$\sin A = \frac{BC}{AB}, \sin B = \frac{AC}{AB}.$

Якщо гострий кут одного прямокутноготрикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні.

Дійсно, ці прямокутні трикутники є подібними за першою ознакою. Тому відношення катета до гіпотенузи одного трикутника дорівнює відношеннювідповідногокатета до гіпотенузи другого трикутника.

Синус кута залежить тільки від величини цього кута.

Означення: **Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катетдо гіпотенузи.**

Косинус кута A позначають так: $\cos A$ (читають: «косинус **A»).**

Означення. **Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.**

Тангенс кута A позначають так: $\mathrm{tg}\,A$(читають; «тангенс A»).

Для гострих кутів *A і B* прямокутного трикутника *ABC* (мал. 3) маємо:

$\cos \mathrm{A} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$, $\cos \mathrm{B} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$,$\mathrm{tg}\, \mathrm{A} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$, $\mathrm{tg}\, \mathrm{B} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$.

Міркуючи аналогічно, можна дійти такого висновку:

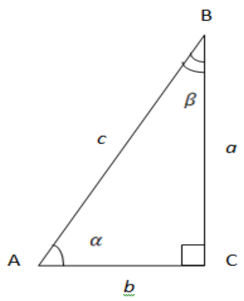
косинус і тангенс кута залежать тільки від величини цього кута.

Узагалі, кожному гострому куту а відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса) цього кута. Тому залежність значень синусів (косинусів, тангенсів) гострих кутів від величин цих кутів є функціональною. Функцію, яка відповідає цій залежності, називають ***тригонометричною***.

Запишемо: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\, \alpha$.

Отже,$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

У 10 класі поняття тригонометричних функцій вводять через координати точок одиничного кола.



Мал. 4

Автор в підручнику [2] формує нові знання на основі вже відомих означень *синуса*, *косинуса*, *тангенса* і *котангенса, і* пов’язує їх з координатами точок одиничного кола.

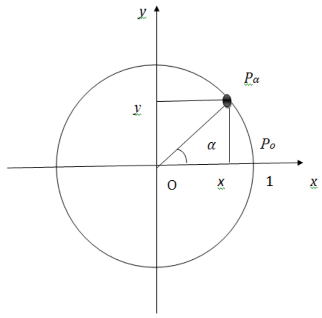
З курсу геометрії вам відомі означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику. Нагадаємо їх(мал. 4).

Синусом гострого кута αвпрямокутному трикутнику називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута α в прямокутному трикутнику називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута α в прямокутному трикутнику називають відношенняпротилежного катета до прилеглого.

Котангенсом гострого кута α в прямокутному трикутнику називають відношення прилеглого катета до протилежного.



Мал. 5

У курсі геометрії було обґрунтовано, що синус та косинус гострот кута залежать тільки від величини кута і не залежать від довжин сторін трикутника та його розташування, тобто синус і косинус (а отже, і тангенс, і котангенс) є функціями величини кута, які називають *тригонометричними функціями.*

Також у курсі геометрії з використанням кола з центром у початку координат було введено означення тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180°. Але ці означення можна використати для знаходження тригонометричних функцій довільних кутів. Нагадаємо їх (але тепер будемо розглядати довільні кути).

Візьмемо коло радіуса*R*із центром у початку координат. Позначимо точку кола на додатній півосі абсцис через $P\alpha$(мал. 5). Потрібні нам кути будемо утворювати поворотом радіуса OP_0навколо точки *O.* Нехай у результаті повороту на кут α навколо точки *O* радіус OP_0займе положення $OP\alpha$(кажуть, що при повороті на кут α радіус OP_0переходить у радіус $OP\alpha$, а точка P_0переходить у точку $P\alpha$). Нагадаємо, що при а > 0 радіус OP_0повертають проти годинникової стрілки,а приа < 0 — занею.

Нехай точка $P\alpha$ має координати *(x; y).* Тоді:

синусом кута а називається відношення ординати точки $P\alpha$ *(x; y)*кола до його радіуса:

$$sin\,\alpha = \frac{y}{R}$$

косинусомкута а називаєтьсявідношення абсциси точки $P\alpha$ *(x; y)* кола до його радіуса:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}$$

тангенсом кута а називається відношення ординати точки $P\alpha$*(x; y)* кола до її абсциси (при$x \neq 0$):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

котангенсом кута а називається відношення абсциси точки $P\alpha$ *(x; y)* кола до її ординати(при$y \neq 0$):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Як і для тригонометричних функцій гострих кутів, значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$,$\operatorname{tg}\alpha$,$\operatorname{ctg}\alpha$ залежать тільки від міри кута а і не залежать від R. Зручно вибрати *R*= 1, що дозволить дещо спростити наведені означення тригономе-тричних функцій.

Коло радіуса 1 з центром у початку координат будемо називати *одиничним колом.*

Нехай при повороті на кут α точка $P_0(1; 0)$ переходить у точку $P\alpha$ *(x; y)* (тобто при повороті на кут а радіус OP_0 переходить у радіус $OP\alpha$) (мал. 5).

Синусом кута α **називається ордината точки** $P\alpha$ ***(x; y)*** **одиничного кола:**

$\sin\alpha = y$.

Косинусом кута α **називається абсциса точки** $P\alpha$ ***(x; y)*** **одиничного кола:**

$\cos\alpha = x$.

Тангенсом кута α **називається відношення ординати точки** $P\alpha$ ***(x; y)*** **одиничного кола до її абсциси** ($\cos\alpha \neq 0$)**:**

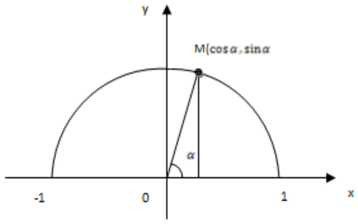
$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенсомкута α **називається відношення абсциси точки** $P\alpha$ ***(x; y)*** **одиничного кола до її ординати** ($\sin\alpha \neq 0$)**:**

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Тут (підручник [3]) автор, пояснюючи нові поняття, проводить аналогію з тим, що нас оточує, що сприяє кращому розумінню.

У житті ми часто стикаємося з процесами, які відбуваються з певною періодичністю. Скажімо, на зміну зимі приходить весна, на зміну весні — літо, на зміну літу — осінь, на зміну осені — зима, знову весна, і все повторюється з року в рік. Так само змінюються ранок, день, вечір і ніч. Періодичні процеси відбуваються в багатьох механізмах (рух поршня, маятника) і в живих організмах (пульсація серця, дихання).

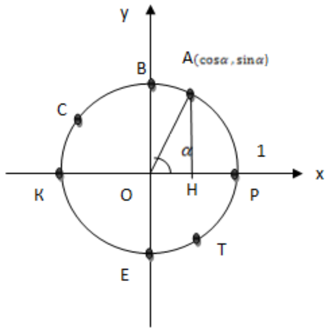


Мал. 7

Мати справу з процесами, які *періодично повторюються,* доводиться багатьом фахівцям. Моделювати такі процеси найзручніше за допомогою синуса, косинуса, тангенса і котангенса. Дещо про ці функції ви вже знаєте з уроків геометрії.

Синус (косинус) гострого або тупого кута α — це ордината (абсциса) точки одиничного півкола, яка відповідає куту α(мал. 7).

Зверніть увагу: в геометрії розглядають за умови, що α — кут трикутника або опуклого многокутника, тобто коли $0° < \alpha < 180°$. Досліджуючи ж періодичні процеси, під α розуміють кут повороту (обертання). А він може бути і як завгодно великим, і від'ємним. Повороти в напрямі руху годинникової стрілки домовилися вважати від'ємними, а в протилежному напрямі – додатними.



Мал. 8

.

Одному, двом, трьом, ..., *n* обертам відповідають кути 360°, 720°,1080°, ..., 360° • *n*.

Уведемо поняття синуса, косинуса, тангенса і котангенса будь-якого кута. Зробимо це за допомогою *одиничного кола.*

Якщо центром кола є початок координат, а його радіус дорівнює 1, то таке коло називають *одиничним колом.*

Нехай на координатній площині дано одиничне коло і його початковий радіус *OP* (мал. 8). Кажуть, що точка А одиничного кола відповідає куту α , якщо кут *POA* = α. Зображені на малюнку 8 точки *P, A, B, C,* K, *E,T*відповідають кутам 0°, 60°, 90°, 135°, 180°, 270°, 300° (у межах від 0° до 360°).

Синусом кута α називається ордината точки одиничного кола, яка відповідає куту α .

Косинусом кута α називається абсциса точки одиничного кола, яка відповідає куту α (мал. 8).

Тангенсом кута α називається відношення синуса кута α до його косинуса.

Котангенсом кута α називається відношення косинуса кута α до його синуса.

Як бачимо, є багато різних способів введення поняття тригонометричних функцій, що дає змогу краще зрозуміти дані поняття.

Література

1. Бевз Г.П. Геометрія 8 кл. [для середніх загальноосвітніх закладів] / Г.П. Бевз, Н.С. Владімірова. – К.:Вежа,2008. – 256 с.
2. Бевз Г.П.Математика 10 кл. [для загальноосвітніх навчальних закладів: рівень стандарту] /Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Генеза, 2010. -272 с.
3. Нелін Є.П. , Алгебра і початки аналізу 10 кл. [для загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень] / Нелін Є.П. – Харків: Гімназія, 2010. – 116с.
4. Мерзляк А.Г. Геометрія. [для середніх загальноосвітніх закладів] / Мерзляк А.Г.,Полонський В.Б.,Якір М.С. – Харків: Гімназія, 2008.

Олексієнко Віталіна Олександрівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДО ПИТАННЯ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ МОДУЛЯ ЧИСЛА

Поняття модуля числа є одним з основних понять елементарної математики. Осмислене володіння модулем дозволяє учням сприймати алгебру і геометрію, як єдине ціле. "Відстань між точками" дозволяє "методу координат" геометричний матеріал викласти без єдиного креслення, використовуючи тільки числа і операції алгебри.

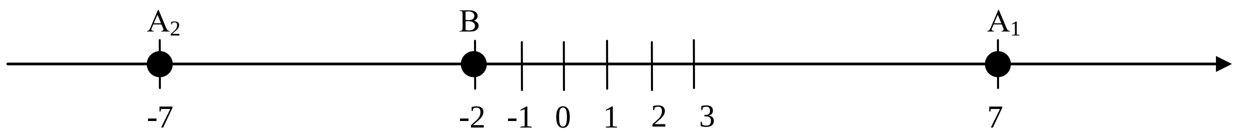
Істотною характеристикою числа є поняття його абсолютної величини (модуля). За програмою в обов'язковий курс 6 класу включена тема «Модуль числа». Поурочне планування передбачає на вивчення цієї теми 2 години, не дивлячись на те, що цей об'єкт в програмі 8 класу зустрічається досить часто.

У шкільних підручниках поняття модуля числа вводиться різними способами. Так, наприклад, у підручнику [3] використовується конкретно-індуктивний метод, аналізуються конкретні приклади, серед яких повинні бути об’єкти, що належать даному поняттю, так і ті, що не належать йому. Перед учнями ставиться проблема, яку вони повинні розв’язати.

Наприклад, про точку А відомо, що вона розташована на координатній прямій і віддалена від початку відліку на 7 одиничних відрізків. Яке число зображує точка А?

Відповісти на це питання однозначно не можна. Адже така властивість притаманна одразу двом точкам $A_1(7)$ і $A_2(-7)$.

Кажуть, що точки $A_1(7)$ і $A_2(-7)$ рівновіддалені від початку відліку на 7 одиничних відрізків, а числа 7 і -7 мають однакові ***модулі***, що дорівнюють 7.



Модулем числа х називають відстань від початку відліку до точки, яка зображує це число на координатній прямій.

Модуль числа x позначають так: $|x|$. Тепер можна записати: $|7| = 7, |-7| = 7$. З рисунку видно,що це дійсно так.

На підставі цього прикладу можна зробити такий висновок: ***модуль додатного числа дорівнює цьому числу, модуль від’ємного числа дорівнює числу, яке протилежне даному.***

Природно вважати, що $|0| = 0$. Адже точка О(0) віддалена від точки О на 0 одиничних відрізків.

$|x| = x$, якщо x – невід’ємне число;

$|x| = -x$, якщо x – від’ємне число

Отже, звідси випливає, що ***модуль числа набуває тільки невід'ємних значень.***

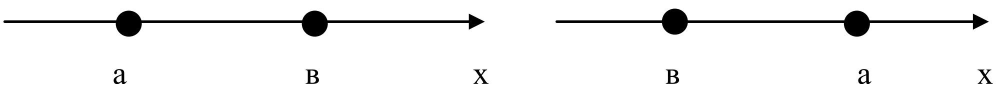
Очевидно, що ***модулі протилежних чисел рівні***, тобто $|x| = |-x|$.

У підручнику [1] автори використовують абстрактно-дедуктивний метод. Формулюють означення поняття, вводять термін, а потім розглядають приклади об'єктів, які належать даному поняттю.

У підручниках російських авторів це поняття вводиться по-різному. Так у підручнику Математика Г. В. Дорофєєва це поняття подається, як число «без знаку». А, наприклад, А. Ерднієв у своєму підручнику означає модуль, як довжину вектора.

У 8-му класі ми вже можемо обґрунтувати ***геометричний зміст модуля дійсного числа.***

Розглянемо множину R дійсних чисел і її геометричну модель –числову пряму. Позначимо на прямій дві точки *a* і *b* (*a,b* дійсні числа), позначимо через *ρ(a,b)* відстань між точками *a* і *b*. Ця відстань дорівнює *b-a*, якщо *b>a*, якщо *a>b*, вона дорівнює *a-b*, а якщо *a=b* то відстань рівна нулеві.

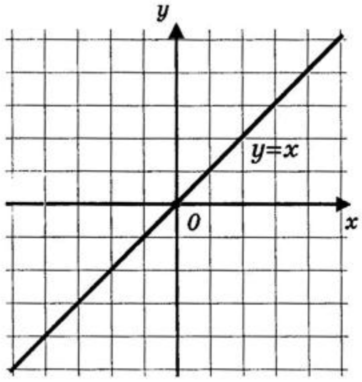


Всі три випадки виражаються формулою: $\boldsymbol{\rho(a,b)=|a-b|}$.

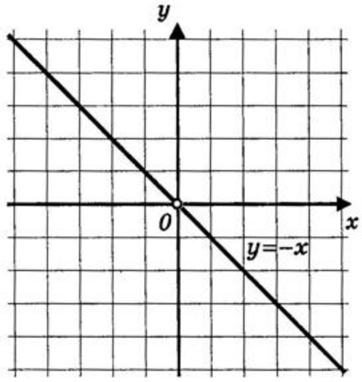
Функція $y=|x|$

Для будь-якого дійсного числа х можна обчислити $|x|$, тобто можна говорити про функцію $y=|x|$. Скориставшись співвідношенням $|x| = \begin{cases} x, \ \textit{якщо} \quad x \ge 0; \\ -x, \ \textit{якщо} \quad x \le 0. \end{cases}$ можна записати: $|y| = \begin{cases} x, \ \textit{якщо} \ x \ge 0; \\ -x, \ \textit{якщо} \ x \le 0. \end{cases}$

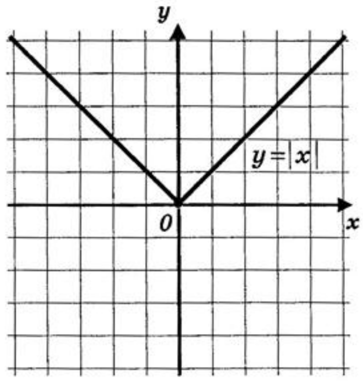
Побудову графіка будемо здійснювати "частинами". Спочатку будуємо пряму *y=x* і виділимо її частину на промені [0,+∞) (мал.1). потім будуємо пряму *y=-x* і виділимо частину на (-∞,0) (мал.2). тепер обидві частини зобразимо в одній системі координат –це і є графік функції $y=|x|$ (мал.3).

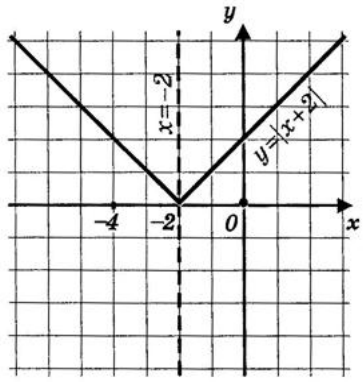


Мал.1



Мал.2





Мал.3 Мал.4

Приклад 1. Побудувати графік функції $y=|x+2|$.

Розв'язування.

Графік цієї функції отримується з графіка функції $y=|x|$ зміщенням останнього на дві одиниці масштабу вліво (мал.4).

Тотожність $\sqrt{a^2}=|a|$

Ми знаємо, що якщо $a\geq0$, то $\sqrt{a^2}=a$. А якщо $a\leq0$? Написати $\sqrt{a^2}=a$ не можна, бо $a<0$ і буде $\sqrt{a^2}<0$, а це неправильно бо значення квадратного кореня невід'ємне. З'ясуємо чому рівний вираз $\sqrt{a^2}$ при $a<0$.

За означенням квадратного кореня у результаті повинно вийти таке число, яке по-перше, додатне, і по-друге, при піднесенні до квадрату повинно дорівнювати підкореневому виразу, тобто a^2. Таким числом буде a, якщо:

1) $a>0$,

2) $(-a)^2=a^2$.

Отже, $\sqrt{a^2}=|a|$

$$\begin{cases} a, \ якщо \ a\geq 0; \\ -a, \ якщо \ a\leq 0. \end{cases}$$

Структура отримана в правій частині рівність співпадає із співвідношенням $|x|=\begin{cases} x, \ якщо \ x\geq 0; \\ -x, \ якщо \ x\leq 0. \end{cases}$

Отже, $\sqrt{a^2}$ і $|a|$ - одне і теж. Цим ми довели важливу тотожність:

$\sqrt{a^2}=|a|$.В ролі *a*може бути будь-який числовий або алгебраїчний вираз. Покажемо це на практиці.

Приклад 2. Спростити вираз, якщо:

а) a-1>0;

б) a-1<0.

Розв'язання

Як ми тільки що встановили, справедлива тотожність

$\sqrt{(a-1)^2}=|a-1|$.

а) Якщо *a-1>0,* то $|a-1| = a-1$. Таким чином, в даному випадку отримуємо $\sqrt{(a-1)^2} = a-1$

б) Якщо *a-1<0,* то $|a-1| = -(a-1) = 1-a$. Отже, в даному випадку маємо $\sqrt{(a-1)^2} = 1-a$.

Приклад 3. Спростити вираз $\frac{1}{2a}\sqrt{32a^2}$, якщо *a<0.*

Розв'язання

Маємо $\frac{1}{2a}\sqrt{32a^2} = \frac{\sqrt{32}\sqrt{a^2}}{2a} = \frac{4\sqrt{2}|a|}{2a} = \frac{2\sqrt{2}|a|}{a}$.

Так, як за умовою *a<0*, то $|a| = -a$. В результаті отримуємо $\frac{2\sqrt{2}|a|}{a} = \frac{2\sqrt{2}(-a)}{a} = -2\sqrt{2}.$

Відповідь: $-2\sqrt{2}$.

Теми, пов'язані з модулем, є складними для сприйняття учнів. Але завдання з абсолютною величиною часто зустрічаються на математичних олімпіадах, вступних іспитах, ЗНО. Це поняття широко застосовується не лише в різних розділах шкільного курсу, але і в курсі вищої математики. Наприклад, у математичному аналізі, поняття абсолютної величини числа міститься в означеннях таких основних понять, як границя, обмеження функції та ін. В теорії наближених обчислень використовується поняття абсолютної похибки. У механіці та геометрії вивчаються поняття вектору, однією з характеристик якого служить його довжина (модуль вектора), тобто його абсолютна величина.Саме це зумовлює важливість вивчення поняття модуль числа, а, отже, вчителю потрібно якнайвдаліше вибирати спосіб введення цього поняття, для того щоб учні краще зрозуміли його і засвоїли.

Література

1.Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра: Підруч. для 7 кл. [для середніх загальноосвітніх закладів] / Бевз Г. П., Бевз В. Г. — К.: Зодіак-ЕКО, 2007. — 304 с.

2. Возняк Г.М., Литвиненко Г.М. Математика. 6 клас.[для середніх загальноосвітніх закладів]/Возняк Г.М., Литвиненко Г.М. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. — 296 с.

3. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Математика: Підручник для 5-го класу.[для середніх загальноосвітніх закладів]/Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.— Х.: Гімназія, 2005.— 288 с.

4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики:[підручник для студ. мат. спец. пед. навч. Закл]/ З.І. Слєпкань. - К. : Зодіак-ЕКО, 2000. - 512 с.: іл. - Бібліогр.: с. 493-503.

Риженко Олена Віталіївна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ВІДСОТКА В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 5 КЛАСУ

Відсотки - це одна з найважливіших та одночасно найскладніших тем шкільної математики. Розуміння відсотків і вміння здійснювати відсоткові розрахунки необхідні кожній людині в повсякденному житті. Прикладне значення цієї теми дуже велике і зачіпає фінансову, економічну, демографічну та інші сфери нашого життя. Зокрема відсотки мають широке практичне застосування у різних галузях: хімія (визначається відсотковий склад розчинів, сполук), фізика (визначається відсоток коефіцієнту тертя, коефіцієнту корисної дії), біологія (відсоток вологи, схожості), виробництво (відсоток замовлень, виконання плану), банківська справа, економічні розрахунки тощо.

Відповідно до діючої навчальної програми з математики вивчення відсотків і розв'язування задач на відсотки передбачено в основному в курсі математики 5-6 класів, а в наступних класах даній темі відведено незначну частину навчального часу. Зокрема, в 5 класі передбачені такі теми для вивчення: відсотки; знаходження відсотків від даного числа; знаходження числа за його відсотками. У 6 класі – відсоткове відношення двох чисел; відсоткові розрахунки; задачі економічного змісту. У 9 класі – відсоткові розрахунки; формула складних відсотків.

У методиці виділяють як правило два підходи до вивчення даної теми. Розгляд відсотків ведеться як окрема тема, без посилання на дроби. Розв'язування задач на знаходження відсотків від числа та числа за його відсотками здійснюється двома діями. Вивчення дробів ведеться окремою темою, не пов'язаною із відсотками. Або, задачі на відсотки вивчаються як окремий вид задач на дроби. Відсотки подають як нову форму запису десяткового дробу і задачі на відсотки зводяться до аналогічних задач на дроби.

Над дослідженням даної теми працювали такі методисти: Бевз Г. П.,Дубинчук О. С., Загоруйко Ю. А., Левітас Г. Г., Лук'янова С. М., Слєпкань З. І., Сухіна Л.Т. та інші.

Мета статті – показати як можна ввести поняття відсотка у 5 класі.Як правило при введенні нового поняття використовують один із методів: конкретно-індуктивний або абстрактно-дедуктивний. У більшості шкільних підручників введення поняття відсотка відбувається абстрактно-дедуктивним методом. Відсоток означається так: відсоток – це одна сота частина величини або числа. Позначається символом «%» і означає соту долю.Також деякі автори пропонують інше означення: відсоток – це дріб із знаменником 100. Відповідно $n\% = \frac{n}{100}$.

Точнішим і доступнішим для сприйняття учнями є перше означення відсотка. Приклади варто наводити не тільки на числах, можна показати використання відсотків на предметах, величинах. Наприклад:

$\frac{1}{100}$ = 0,01= 1%; $\frac{10}{100}$ = 0,1= 10%; $\frac{40}{100}$ = 0,4= 40%; $\frac{100}{100}$ = 1= 100%.

Після розгляду прикладів не варто поспішати приступати до розв'язування завдань на знаходження відсотка від деякої величини. Потрібно дати учням можливість звикнути до введеного поняття, засвоїти нову термінологію. Через систему вправ підручника учні вчаться вживати новий термін, здійснювати «переклад» завдань з мови часток і дробів на мову відсотків і навпаки. Наприклад, 0,3 = 0,30 = $\frac{30}{100}$ = 30%; 23% = $\frac{23}{100}$ = 0,23.

Важким для сприйняття учнів є те, що всій величині відповідає 100%. Тут слід навести багато прикладів із практики.

1) На полі бігає сто зайців. Але через деякий час 2 з них побігли в ліс. 100 зайців – це 100%. Отже, $\frac{2}{100}$ = 2% зайців побігло у ліс; на полі залишилось 98% зайців від усієї кількості.

2) 46 см становить 46% метра, бо 1м = 100см – 100%.

3) Нехай ми маємо квадрат 10×10 см. 11 клітинок зафарбованих. Скільки відсотків квадрата зафарбовано (Рис. 1)?

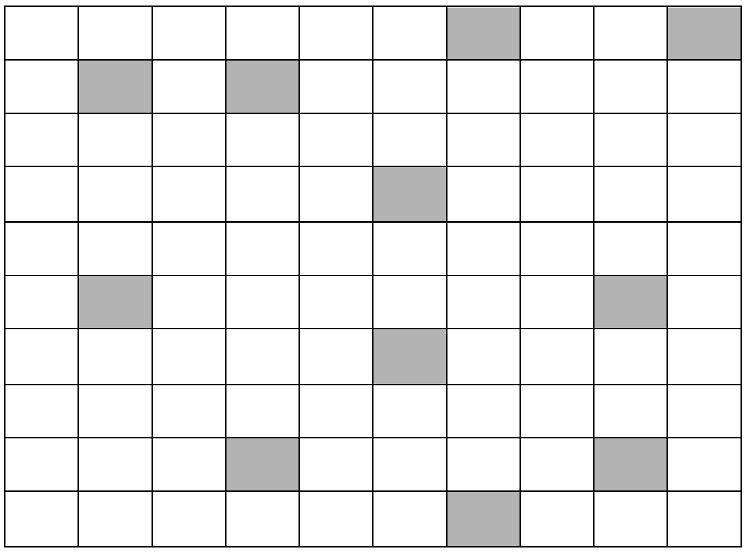


Рис. 1.

Оскільки 100 клітинок становить 100%, то кількість зафарбованих клітинок становить $\frac{11}{100}$ = 11%.

Варто показати учням зв'язок між найпростішими значеннями відсотків і відповідними дробами:

ціле – 100%, половина – 50%, чверть – 25%, п'ята частина – 20%, три чверті – 75%, дві п'ятих – 40% (Рис. 2).

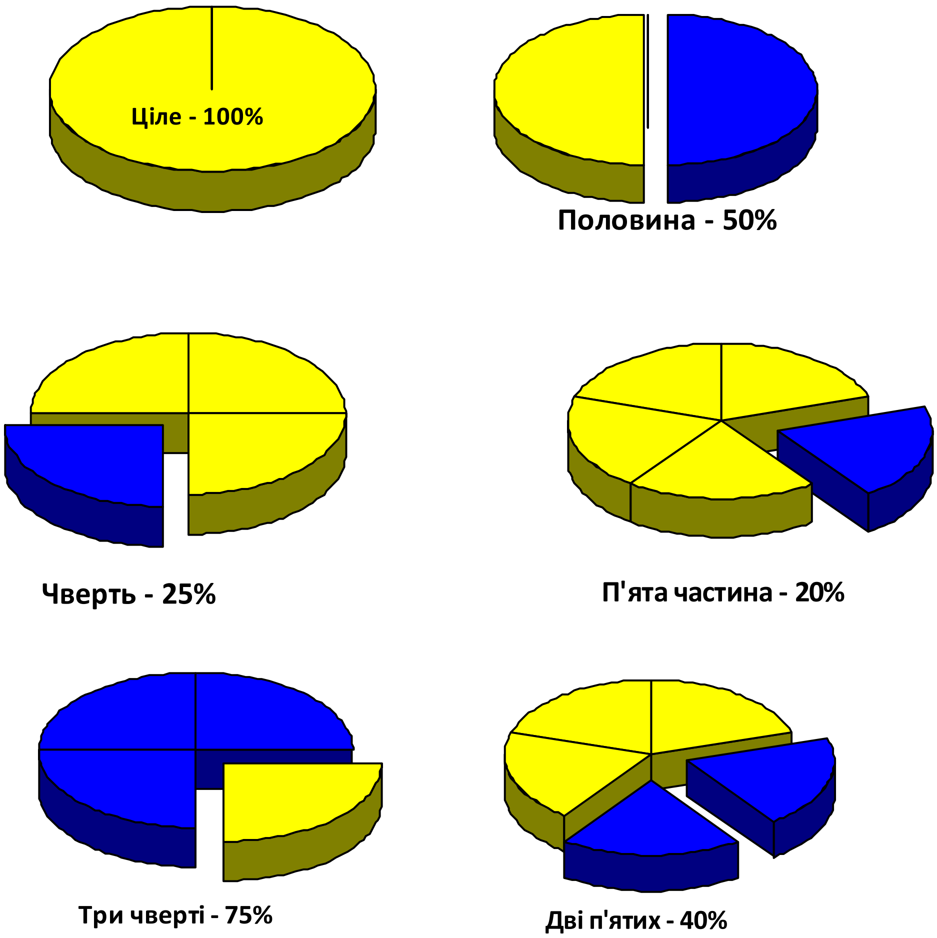


Рис. 2.

Учні також мають зрозуміти, що збільшити що-небудь на 100%, означає збільшити у двічі, а зменшити у двічі – це те саме, що зменшити його на 50%.

У процесі розгляду найпростіших вправ на відсотки, учень повинен зрозуміти:

1) Якщо потрібно обчислити n% від різних чисел, то будуть різні результати;
2) Якщо число a збільшити на число b, а потім отримане число зменшити на b, то знову матимемо a; але якщо число a збільшити на n%, а потім отримане число зменшити на n%, то отримаємо число, яке не дорівнює a.

Для засвоєння цих тверджень слід розглянути такі вправи:

1) Знайти 10% від 1 м, 1 км, 200 грн, 500 кг.
2) Число 100 збільшити на 5% (10%, 25, 50%);
3) Число 100 зменшити на 5% (10%, 25%, 50%);
4) Число 100 збільшити на 5% (10%, 25, 50%); отриманий результат зменшити на 5% (10%, 25%, 50%);
5) Число 100 зменшити на 5% (10%, 25, 50%); отриманий результат збільшити на 5% (10%, 25%, 50%);
6) Число 300 збільшити на 5% (10%, 25, 50%); число 300 зменшити на 5% (10%, 25%, 50%);

7) Число 250 збільшити на 5% (10%, 25%, 50%); отриманий результат зменшити на 5% (10%, 25%, 50%);
8) Число 250 зменшити на 5% (10%, 25%, 50%); отриманий результат збільшити на 5% (10%, 25%, 50%).

Для більш цікавішого подання даної теми варто навести деякі факти з історії виникнення відсотків.

Слово «відсоток» походить від латинського *pro centum, що* буквально означає «за сотню» або «зі ста». Знак «%» походить, як вважають, від італійського слова *cento (сто),* яке в процентних розрахунках часто писалося скорочено *cto.* Існує й інша версія виникнення цього знака. Передбачається, що цей знак виник у результаті безглуздої помилки, вчиненої складачем. У 1685 році в Парижі була опублікована книга – керівництво по комерційній арифметиці, де помилково складач замість *cto* ввів %.

Ідея подання частин цілого в одних і тих самих частках застосовувалася ще в стародавньому Вавилоні, де були поширені шістдесяткові дроби, тобто шістдесяті частини чисел. В Індії відсотки (проценти) були відомі ще в V столітті.

Досить довго під відсотком розуміли прибуток і збиток на кожні 100 карбованців і застосовували їх лише при грошових розрахунках. Вперше опублікував таблиці для розрахунку відсотків в 1584 році Симон Стевін – інженер з міста Брюгге (Нідерланди).Потім область їх застосування розширилася, відсотки почали зустрічатись в господарських і фінансових розрахунках, статистиці, науці і техніці.

Отже, введення відсотка потрібно проводити поступово, від простішого до складнішого. При навчанні розв’язування задач на відсотки, учень оволодіває різними способами міркування, збагачуючи свій розвиток за допомогою методів і прийомів. Слід широко використовувати малюнки, схеми, які допоможуть краще розібратися в задачі і побачити шлях розв’язання.

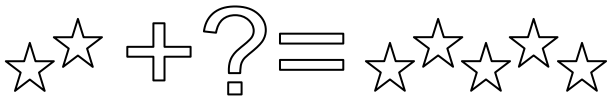
Література

1. Бевз Г. П. Математика. Підручник для учнів 5 класу/ Г. П. Бевз, В.Г.Бевз. – К.: «Зодіак-ЕКО». – 2006. – 352с.
2. Воєвода А. Л. Зацікавити математикою: методичні матеріали для підвищення інтересу до математики на уроках в школі. – Вінниця, СамІздат, 2010. – 176 с.
3. Кравчук В. Р. Математика. 5 клас. Підручник для учнів 5 класу/ В. Р. Кравчук, М. В Підручна, Г М. Янченко. – Тернопіль: Підручники і посібники. – 2010. – 280с.
4. Мерзляк А. Г. Математика. 5 клас. Підручник для учнів 5 класу/ А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: «Гімназія». – 2009. – 288с.
5. Місюра Т.В. Математика: Пробний підручник для 5 класу середніх загальноосвітніх шкіл/ Т.В.Місюра, І. Т. Зарецька, М.В.Владимирова.– К.: Форум, 2001. – 256 с.

Роговська Марія Анатоліївна,
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

МЕТОДИКА ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ РІВНЯННЯ

Уперше учні на пропедевтичному рівні зустрічаються з рівняннями ще в початковій школі. Однак не називають ці вирази рівняннями. В цих виразах потрібно встановити рівність, наприклад:



Пропедевтичне вивчення рівняння передбачено уже в початкових класах. У 3 і 4 класах букви використовуються у вправах, пов'язаних з порівнянням виразів, знаходженням їх числових значень, розв'язуванням рівнянь на основі залежностей між компонентами і результатами дій.[1]

Велике місце відводиться складанню і розв'язуванню рівнянь у курсі математики в 5 – 6 класах. Уже в першій темі «Натуральні числа» поряд із систематизацією відомостей про натуральні числа починається робота над формуванням в учнів поняття рівняння.

Раніше введення рівнянь дає можливість по-новому навчити розв'язувати текстові задачі. На досить переконливих прикладах розкривається перевага алгебраїчного способу розв'язування задач перед арифметичним.

У курсі алгебри 7 рекомендується розв'язувати з учнями рівняння протягом усього року. У 7 класі вводиться спеціальна тема «Рівняння і система рівнянь», при вивченні якої підсумовуються і систематизуються основні поняття, пов'язані з вивченням рівнянь.

Достатня кількість годин відводиться для вивчення квадратних рівнянь у 8 класі.Програма рекомендує розглянути приклади квадратних рівнянь, які розв'язуються розкладанням на множники і нескладні приклади лінійних систем, використовуючи при цьому графічні ілюстрації.

Найпростіші види ірраціональних рівнянь програма рекомендує розглянути при вивченні тем «Степінь з раціональним показником», «Показникова і логарифмічна функції» у 10 класі.[2]

У зв'язку з вивченням рівнянь і нерівностей програма рекомендує ознайомити учнів з загальними логічними поняттями висловлення і предиката із використанням елементарних логічних символів слідування ($\Rightarrow$) і рівносильності($\Leftrightarrow$).

Відомі учням з 5 класу операції об'єднання і перерізу множин використовують при вивченні рівнянь і систем рівнянь.

Вивчення систем рівнянь з певним обґрунтуванням дається в заключній темі 9 класу «Система рівнянь і нерівностей»[3].

Вказується на необхідність широко використовувати геометричну інтерпретацію системи лінійних рівнянь з двома і трьома невідомими; це дасть можливість без викладок обґрунтувати класифікацію можливих типів множини розв'язків такої системи.

Програма рекомендує продовжувати практику розв’язування рівнянь і їх систем при вивченні всіх тем курсу, зокрема при вивченні похідної та тригонометричних функцій.

Як бачимо, перші відомості про рівняння даються в початкових класах, а систематичне вивчення їх розпочинається уже з 7 класу. Це є позитивним моментом, бо учні раніше оволодівають методом розв’язування рівнянь[5].

Означення рівняння в шкільному курсі алгебри.

В педагогічній літературі ми зустрічаємо два підходи до трактування змісту поняття рівняння.

1. Рівняння розглядають як рівність, яка справедлива лише при деяких значеннях букв, що входять до неї;
2. Рівняння розглядають, як будь-яку рівність, в якій одне або кілька чисел, виражених буквами, вважаються невідомими, а значення останніх букв (коли вони є) вважаються відомими.

Недоліком першого трактування є те, що з об’єму поняття рівняння виключаються ті рівняння, які зовсім не мають розв’язків, і ті, які мають нескінченну множину розв’язків.

Друге означення ототожнює рівняння з рівністю, що містить букви. В цьому випадку тотожність вважається окремим випадком рівняння. Наприклад, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ є рівняння. За цим означенням виходить, що рівняння, які не мають розв’язків, також вважаються рівняннями, наприклад, рівність $2x = 2x + 5$.

Автори сучасних підручників здебільшого дотримуються функціонального трактування рівняння, при якому до класу рівнянь відносять такі рівності, як :

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
2. tg x=$\frac{\sin x}{\cos x}$;
3. $\frac{x}{x} = 1$;
4. lg (x+1)=$\sqrt{-x^2}$;
5. lg x=lg(-x) і т.д.

Отже, при такому трактуванні тотожність розглядається як окремий випадок рівняння.

В об’єм поняття рівняння входять і рівняння, які не мають розв’язків, наприклад, рівність sinx=2 є рівняння.

Формування поняття рівняння, тотожності в учнів здійснюється в процесі розв’язування рівнянь у зв’язку з аналізом виконаних перетворень і формуванням поняття рівносильності рівнянь.[4]

Формування в учнів поняття рівносильності рівнянь.

Певні уявлення про рівносильність рівнянь учні дістали у 9-річній школі.

В старших класах потрібно уточнити це поняття, підвести під нього певну теоретичну базу.

Спочатку з учнями розглядають рівняння з одним невідомим.

Треба дати учням таке означення рівносильності рівнянь: $\varphi_1 = f_1$ (1) називається рівносильним рівнянню $\varphi_2 = f_2$ (2), якщо кожен корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і, навпаки, кожен корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1).

Два рівняння, які в даній області чисел не мають коренів, треба, згідно з означенням, вважати рівносильними. Множини їх розв'язків (порожні множини) збігаються.

Якщо множини коренів рівняння $\varphi_1 = f_1$ і $\varphi_2 = f_2$ не збігаються, то такі рівняння не будуть рівносильними.

Учням наводять приклади рівносильних і нерівносильних рівнянь. Рівняння $x^2 - 4 = 0$ і $x^2 - 1 = 0$ рівносильні. Рівняння $2x + 1 = x + 3$ і $2x + 1 + \frac{1}{x-2} = x + 3 + \frac{1}{x-2}$ нерівносильні, бо перше рівняння має корінь $x = 2$, а друге – при $x = 2$ втрачає смисл.

Учням можна запропонувати визначити, чи рівносильні такі рівняння:

1. $\frac{x-4}{x-5} = \frac{6-x}{x-5}$ і $x - 4 = 6 - x$ (нерівносильні);
2. $x - 2 + \frac{1}{x^2+1} = 2 - x + \frac{1}{x^2+1}$ і $x - 2 = 2 - x$ (рівносильні).

Доцільно дати учням геометричну інтерпретацію рівносильності двох рівнянь: їх графіки перетнуться з віссю Ox в одних і тих же точках. Наприклад, рівносильність рівнянь $x^2 - 1 = 0$ і $2x^2 - 2 = 0$ графічно ілюструється так: графіки функцій у=$x^2 - 1$ і у=$2x^2 - 2$ перетинаються з віссю абсцис в одних і тих же точках $M_1(-1;0)$ і $M_2(1;0)$ числа $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ є одночасно коренями як першого, так і другого рівняння.

Поняття рівносильності має властивості

1. рефлексивності (кожне рівняння рівносильне самому собі);
2. симетричності (якщо рівняння $\varphi_1 = f_1$ рівносильне рівнянню $\varphi_2 = f_2$, то і рівняння $\varphi_2 = f_2$ рівносильне рівнянню $\varphi_1 = f_1$;
3. транзитивності (якщо рівняння $\varphi_1 = f_1$ рівносильне рівнянню $\varphi_2 = f_2$, а рівняння $\varphi_2 = f_2$ рівносильне рівнянню $\varphi_3 = f_3$, то рівняння $\varphi_1 = f_1$ рівносильне рівнянню $\varphi_3 = f_3$).

Пояснюємо учням, що поняття рівносильності рівнянь є відносним. Два рівняння можуть бути рівносильними в одній області, а в іншій області – нерівносильними. Наприклад, рівняння $(x-3)(x^2+1) = 0$ і $(x-3)(x^2+5) = 0$ рівносильні в області дійсних чисел, нерівносильні в області комплексних чисел.

Спірним у методиці є питання про рівносильність рівнянь, які відрізняються кратністю коренів, наприклад, рівняння

$$(x-3)(x-1)=0, \qquad (1)$$
$$(x-3)(x-1)^2=0. \qquad (2)$$

Одні автори відносять їх до рівносильних рівнянь, а інші вважають їх нерівносильними, бо множиною коренів рівняння (1) є$\{3;1\}$, а множиною коренів другого рівняння є $\{3;1;1\}$.

З поняттям рівносильності рівнянь учні частково ознайомилися у 7 класі. Цілковите засвоєння цього поняття можливе в старших класах, коли буде розглянуто теоретичні положення, пов'язані з поняттям рівносильності рівнянь.

Розглянуті дві теореми про рівносильність рівнянь були недостатньо обґрунтовані. До них треба повернутися, розглянути їх на основі і розібрати з учнями додаткові теоретичні положення про рівносильність рівнянь.

Теорема 1.

Якщо функція F(x) визначена при всіх допустимих значеннях невідомого $x \in X$, то рівняння $f(x)=\varphi(x)$ і $f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x)$ рівносильні.

У старших класах це доведення дають в загальному вигляді, поділяючи його на дві частини. Спочатку припускають, що $x=a$ є коренем рівняння $f(x)=\varphi(x)$, тоді $f(a)=\varphi(a)$ є тотожність. Оскільки $F(a)$ існує, то , додавши до тотожності $f(a)=\varphi(a)$ число $F(a)$, дістанемо тотожність $f(a)+F(a)=\varphi(a)+F(a)$, з якої видно, що $x=a$ є коренем рівняння $f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x)$.

Далі припускаємо, що $x=b$ - довільний корінь рівняння $f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x)$.

Тоді маємо тотожність $f(b)+F(b)=\varphi(b)+F(b)$.

Віднявши від обох частин рівняння $f(b)+F(b)=\varphi(b)+F(b)$ число $F(b)$, дістанемо тотожність $f(b)=\varphi(b)$, звідки видно, що $x=b$ є коренем рівняння $f(x)=\varphi(x)$.

Отже, кожний корінь рівняння $f(x)=\varphi(x)$ є коренем рівняння $f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x)$, і навпаки, кожний корінь рівняння $f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x)$ є коренем рівняння $f(x)=\varphi(x)$, тому рівняння $f(x)=\varphi(x)$ і $f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x)$ рівносильні.

Отже, коли $F(x)$ має смисл при всіх допустимих значеннях початкового рівняння $f(x)=\varphi(x)$ (1), то до обох його частин можна додати вираз $F(x)$; при цьому нове рівняння буде рівносильне початковому.

Теорема 2.

Якщо функція $F(x)$ визначена для всіх допустимих значень $x \in X$ і ні при жодному допустимому значенні x не перетворюється в нуль, то рівняння $f(x)=\varphi(x)$ і $F(x)\cdot f(x)=F(x)\cdot\varphi(x)$ рівносильні.

Доведення.

Припускаємо, що $x=a$- довільний корінь рівняння $f(x)=\varphi(x)$. Тоді $f(a)=\varphi(a)$. Обидві частини тотожності $f(a)=\varphi(a)$ помножимо на число $F(a)$. Тоді дістанемо тотожність $F(a)\times f(a)=F(a)\times\varphi(a)$, звідки виходить, що $x=a$ є коренем рівняння $F(x)\times f(x)=F(x)\times\varphi(x)$.

Якщо тепер припустити, що $x=b$ довільний корінь рівняння $f(x)=\varphi(x)$, тоді рівність $F(b)\times f(b)=F(b)\times\varphi(b)$, де $F(b)\neq 0$, $F(a)\times f(a)=F(a)\times\varphi(a)$ буде вірною. Помножимо обидві частини вірної рівності $F(a)\times f(a)=F(a)\times\varphi(a)$ на число $\frac{1}{F(b)}$; тоді дістанемо $f(b)=\varphi(b)$ - знову вірну рівність.

Отже, рівняння $f(x)=\varphi(x)$ і $F(x)\times f(x)=F(x)\times\varphi(x)$ рівносильні.

На підставі цієї теореми роблять висновки: якщо обидві частини рівняння помножити (або поділити) на будь-яке число, відмінне від нуля, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Наслідок.

Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, при цьому дістанемо рівняння рівносильне даному.

Якщо не вимагати, щоб функція $F(x)$ мала смисл при всіх значеннях x, то при множенні рівняння $f(x)=\varphi(x)$ на $F(x)$ можна дістати рівняння, нерівносильне даному.

Треба підкреслити, що розглянуті дві теореми про рівносильність рівнянь виражають достатні, але не необхідні умови, тобто, коли ці умови не виконуються, то не можна твердити, що рівняння нерівносильні.

Дві теореми про рівносильність рівнянь дають можливість кожне алгебраїчне рівняння $R_1(x)=R_2(x)$, де $R_1(x), R_2(x)$ алгебраїчні дроби, привести до виду: $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, де $f(x),\varphi(x)$ - многочлени від x.

На основі теореми 2 учні приходять до висновку, що рівняння $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, де $f(x),\varphi(x)$- многочлени від x, рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} f(x)=0 \\ \varphi(x)\neq 0 \end{cases}$;

Міркуємо з учнями так. Щоб дріб $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ дорівнював нулю, необхідно і достатньо, щоб чисельник цього дробу дорівнював нулю, а знаменник був відмінний від нуля. На цьому ґрунтується спосіб розв'язання дробово-раціонального рівняння.Розглянемо з учнями приклад.

Поглиблене вивчення поняття рівносильності рівняння здійснюється при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

Нагадаємо учням поняття ірраціонального рівняння з одним невідомим. Це рівняння, одна або обидві частини якого є вирази ірраціональні по відношенню до деякого невідомого x.

Звертаємо увагу учнів на те, що в елементарній алгебрі ірраціональні рівняння розв'язуються при умові, що під значенням кожного радикала парного степеня, що входить у рівняння, ми будемо розуміти його арифметичне значення.

Знаходимо область допустимих значень невідомого ірраціонального рівняння. Наприклад, область допустимих значень невідомого рівняння $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}=1$ визначається з такої системи

$\begin{cases} x-3\geq 0, \\ x+2\geq 0, \end{cases}$ звідки $x\geq 3$.

Теорема 3.

Якщо обидві частини рівняння $f(x)=\varphi(x)$ (1) піднесемо до квадрата, то коренями знайденого рівняння $f^2(x)=\varphi^2(x)$ (2) будуть усі корені початкового рівняння $f(x)=\varphi(x)$ і спряженого з ним рівняння $f(x)=-\varphi(x)$. (3)

Доведення.

Рівняння $f^2(x)=\varphi^2(x)$ рівносильне рівнянню $f^2(x)-\varphi^2(x)=0$ або рівнянню $(f(x)-\varphi(x))(f(x)+\varphi(x))=0$ (4). Розв'язання цього рівняння зводиться до розв'язання рівнянь: $f(x)-\varphi(x)=0$ (а) і $f(x)+\varphi(x)=0$ (б). Корені цих двох рівнянь є одночасно коренями рівняння $(f(x)-\varphi(x))(f(x)+\varphi(x))=0$. Рівняння (4) не може мати інших коренів. Оскільки рівняння (а) і (б) рівносильні відповідно до рівняння (1) і (3), а рівняння (2) рівносильне (4), то робимо висновок, що рівняння (2) задовольняється як розв'язками рівняння $f(x)=\varphi(x)$, так і розв'язками рівняння $f(x)=-\varphi(x)$.

Приклад.

Маємо рівняння $\sqrt{3-2x}=x$. Піднесемо ліву і праву частини його до квадрата $3-2x=x^2$.

Це рівняння можна замінити рівносильним йому рівнянням $(\sqrt{3-2x}-x)(\sqrt{3-2x+x)}=0$. Воно розкладається на два рівняння $\sqrt{3-2x}-x=0$ і $\sqrt{3-2x}+x=0$, з яких перше рівносильне даному $\sqrt{3-2x}=x$, а друге – рівнянню $\sqrt{3-2x}=-x$, спряженому з даним. Розв'язуючи дане рівняння, дістанемо $x_1=1, x_2=-3$. Корінь $x_1=1$ задовольняє дане рівняння, корінь $x_2=-3$задовольняє спряжене рівняння $\sqrt{3-2x}=-x$.

Після розв'язання відповідних прикладів учні роблять висновок: якщо рівняння $f(x)=-\varphi(x)$, спряжене з даним $f(x)=\varphi(x)$, не має коренів, то рівняння $f^2(x)=\varphi^2(x)$, знайдене з $f(x)=\varphi(x)$ шляхом піднесення до квадрата, рівносильне даному $f(x)=\varphi(x)$.

Наголосимо учням, що теорему 3 можна узагальнити так. Коли n натуральне число, то в області дійсних чисел рівняння $(f(x))^{2n}=(\varphi(x)^{2n}$ рівносильне сукупності рівнянь $f(x)=\varphi(x)$ і $f(x)=-\varphi(x)$.

Для n непарного в області дійсних чисел, має місце така теорема $(f(x))^{2n-1}=(\varphi(x))^{2n-1}$ рівносильне рівнянню $f(x)=\varphi(x)$.

Далі розширення знань про рівносильність рівнянь пов'язане з застосуванням методу розкладання на множники.[2]

Література

1. .Уравнения в школьном курсе математики. /Бекаревич А.Н. – Минск: Народная асвета,1968.
2. Формування математичних понять у процесі викладання алгебри і початків аналізу/ Гельфанд М. Б.- К.:Рад.школа, 1976.
3. Навчаємося розв'язувати рівняння та нерівності; навч.-метод. посібник/ Сільвестрова І.А. - К.:Вид група – основа, 2005.- 271 с.

4. Основні поняття сучасної алгебри. Посібник для самоосвіти вчителів/ Бородін О.І., 1983.-112 с.
5. .Беседы о преподавании математики [сост.,ред. и вступит.статья] Дубнов Я.С. 5-25.

Сачок Віталій Миколайович
студент освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»,
напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ОБЕРНЕНОЇ ФУНКЦІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

Поняття оберненої функції є одним з найважливіших в курсі алгебри старшої школи. Дане поняття широко використовується при розв'язувані різних задач. Зокрема, в завданнях ЗНО зустрічаються вправи, розв'язання яких передбачає чітке розуміння цього поняття.

Наприклад:

1. Укажіть функцію, яка є оберненою до функції $y=\sqrt{x}+1$ на проміжку [0;+∞).

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$	$y=-\sqrt{x}-1$	$y=x^2-1$	$y=(x-1)^2$	$y=\frac{1}{\sqrt{x}}-1$

2. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $arcsinx=\frac{\pi}{3}$?

А	Б	В	Г	Д
$\left(0;\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4};1\right)$	$\left(1;\frac{5}{4}\right)$

3. Виберіть НАЙБІЛЬШЕ число.

А	Б	В	Г	Д
$arccos1$	$arctg2$	$arcsin1$	$arcctg2$	1,2

4. Обчисліть $sin^2\left(arctg\frac{1}{3}\right)+cos^2\left(arctg\frac{1}{3}\right)$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	1

5. Знайдіть добуток коренів рівняння $\arccos(x^2-8x+2)=\frac{\pi}{3}$. У разі необхідності використайте наближені рівності: $\pi\approx3{,}14$, $\sqrt{2}\approx1{,}4$, $\sqrt{3}\approx1{,}7$.[2]

Однак дане поняття є важким для сприймання, засвоєння і усвідомлення учнями.

Відповідно до навчальної програми (академічний рівень) з математики для 10-11 класів поняття оберненої функції зустрічається в першому семестрі 10 класу при вивченні розділу «Функції, рівняння та нерівності». При вивченні даної теми учні мають засвоїти зміст понять «оборотна функція» та «обернена функція». Мають знати і вміти використовувати алгоритм знаходження формули функції, оберненої до даної, та знати властивості графіків взаємообернених функцій. Поняття оберненої функції також зустрічається ще в другому семестрі 10 класу при вивченні розділу «Тригонометричні рівняння і нерівності», в якій вводяться поняття обернених тригонометричних функцій $y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx$. При вивчені теми «Показникова та логарифмічна функції» автори деяких підручників використовують поняття взаємообернених функцій на певному проміжку.[4]

Мета статті – показати один із способів введення поняття оберненої функції в старшій школі.

У сучасній школі введення нових понять найчастіше вводиться абстрактно-дедуктивним або конкретно-індуктивним методами. Вважаємо, що поняття оберненої функції доцільно здійснювати конкретно-індуктивним методом, тому що учням буде легше зрозуміти дану тему на прикладах, а потім уже зробити висновки і узагальнення. [1]

Урок на тему «Поняття оберненої функції» доцільно розпочати наступним чином. На уроках математики ви неодноразово розв'язували задачу: обчислити значення функції $y = f(x)$ при даному значенні x_0 аргументу. Іноді, потрібно розв'язати і обернену задачу: обчислити значення аргументу x, при якому функція $y = f(x)$ набуває даного значення y_0.

Під час розв'язування оберненої задачі виникають такі питання:

- Скільки таких значень існує?
- При яких умовах задача має єдиний розв'язок?

Розглянемо приклади:

Приклад 1. Нехай дано функцію у = $2x$ + 1. Для того щоб знайти значення аргументу x, при яких функція дорівнює y_0, треба розв'язати рівняння

$y_0 = 2x + 1$;

$2x = y_0 - 1$; $x = \frac{y_0 - 1}{2}$

Розв'язавши його, отримуємо, що для будь-якого y_0 рівняння $y_0 = 2x + 1$ має корінь, і притому тільки один.

Приклад 2. Побудуємо графік функції $y = -\frac{1}{x}$.

Для того щоб знайти значення аргументу x, при яких функція дорівнює y_0, треба розв'язати рівняння

$y_0 = -\frac{1}{x}$; $x = -\frac{1}{y_0}$

Розв'язавши його, отримуємо, що для будь-якого y_0 рівняння $y_0 = -\frac{1}{x}$ має корінь, і притому тільки один.

Приклад 3. Для функції $y = x^2$рівняння $y_0 = x^2$ при y_0> 0 маєдва корені: $x_1 = -\sqrt{y_0}$ і $x_2 = \sqrt{y_0}$.

Після розгляду попередніх вправ варто звернути увагу учнів, що функцію, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення, називають оборотною. Таким чином, функція y = $2x$ + 1 — оборотна, а функція y = x^2(визначена на всій числовій осі) не є оборотною.

Сформулюємо алгоритм побудови оберненої функції:

1. З'ясовуємо, чи має рівняння $y = f(x)$ єдиний корінь відносно змінної x.
2. З рівності $y = f(x)$ виражаємо x через y.

3. В одержаній формулі ввести традиційні позначення.[3]

Із прикладу 1 залежність $x = \frac{y_0-1}{2}$ виражає x як деяку функцію від y. Аргумент цієї функції позначений літерою y, а значення функції — літерою x. Перейшовши до звичних позначень (аргумент - x, функція - y), матимемо таку функцію: $y = \frac{x-1}{2}$, яка буде оберненою до функції $y = 2x + 1$.

В одній системі координат побудуємо графіки відповідно функцій $y = 2x + 1$ і $y = \frac{x-1}{2}$*(рис 1)*. Помічаємо, що для функції $y = -\frac{1}{x}$ обернена функція має такий самий вигляд *(рис 2)*. А функція $y = x^2$, де $x \in (-\infty; +\infty)$ не має оберненої.

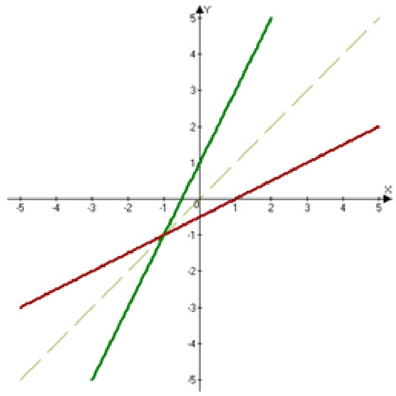


Рис 1

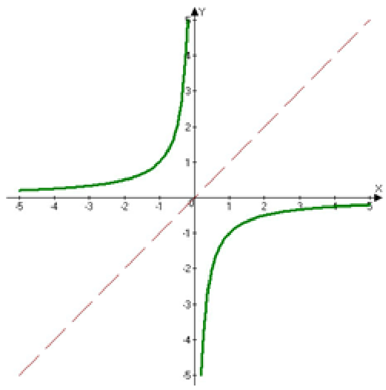


Рис 2

Далі потрібно звернути увагу учнів на те як розташовані графіки даної функції та відповідно оберненої до неї. Графіки даної функції і оберненої до неї функції симетрично відображаються відносно прямої *y=x(рис. 1,2).*

В результаті спостережень, учні під керівництвом вчителя можуть сформулювати основні властивості обернених функцій.

Властивості:

1. Область визначення функції дорівнює множині значень відповідної їй оберненої функції, а множина значень функції дорівнює відповідно області визначення оберненої функції.
2. Графіки прямої і оберненої функції симетричні відносно прямої *y=x.*
3. Якщо функція *f(x)* зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо *f(x)* зростає, і спадає, якщо *f(x)* спадає.[3]

На закріплення нового матеріалу пропонується розв'язування наступних вправ:

1. визначити, чи існують обернені функції до даних;
2. за графіком функції визначити обернену функцію до заданої;
3. знайти обернену функцію до даної;
4. для даної функції вказати область визначення і множину значень оберненої функції;
5. для заданої функції побудувати графік оберненої.

- Які з вказаних функцій мають обернені?

1. $y = 6x - 90$;
2. $y = 9x^2$;
3. $y = 13\sqrt{x}$;
4. $y = \frac{(x^2-9)}{(x-3)}$.

- На *рис 3,4* зображено графіки деяких функцій. Зобразити графіки обернених функцій.

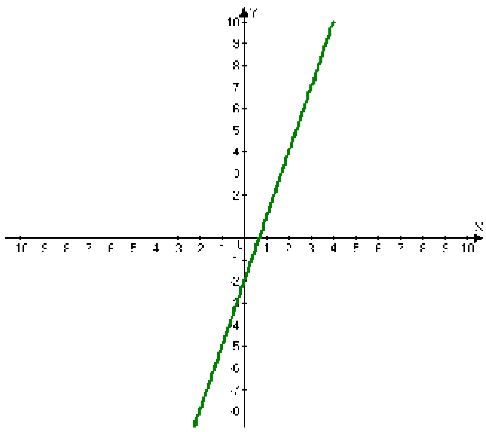


Рис 3

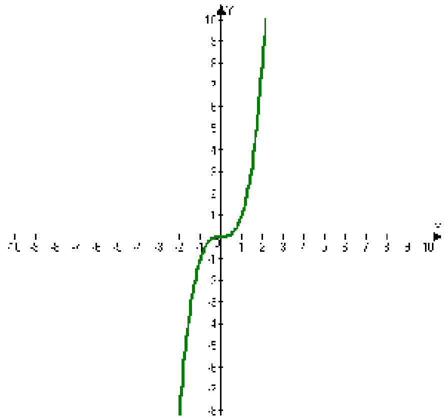


Рис 4

- Знайти обернену функцію:

а) $y = -3x - 6$

б) $y = \sqrt{x}$

Розв'язання

а) Виразимо x через y: $y = -3x - 6$, $3x = -y - 6$, $x = \frac{-y-6}{3}$. Отже,функція $y = \frac{-x-6}{3}$ є оберненою до функції $y = -3x - 6$.

Область визначення і множина значень оберненої функції$y = \frac{-x-6}{3}$ — множина дійсних чисел: $D(y) = R$, $E(y) = R$.

б) Виразимо x через y, ураховуючи, що $x \geq 0, y \geq 0$: $y = \sqrt{x}$, $y^2 = x$. Отже, функцією, оберненою до функції $y = \sqrt{x}$, є функція $y^2 = x$, $x \geq 0$.

Область визначення оберненої функції - $D(y) = [0; +\infty)$, множина значень — $E(y) = [0; +\infty)$.

- Дано функції

$$y = 9x^2;$$
$$y = 13\sqrt{x};$$

$y = \frac{(x^2-9)}{(x-3)}$.

Вказати область визначення і множину значень обернених до них функцій.

- Побудувати графік оберненої функції

1. $y = \mathrm{x} - 2$
2. $y = \frac{1}{4}x^2$

1) Розв'язання:

Побудуємо графік функції $y = \mathrm{x} - 2$.

Для того щоб побудувати графік оберненої функції, достатньо побудований графік функції $y = \mathrm{x} - 2$ і відобразити симетрично відносно прямої *y=x (рис 5).*

2) Розв'язання:

Для того щоб побудувати графік оберненої функції, достатньо побудований графік функції $y = \frac{1}{4}x^2$, ураховуючи, що $x \leq 0, y \geq 0$ і відобразити симетрично відносно прямої *y=x* (рис 4).

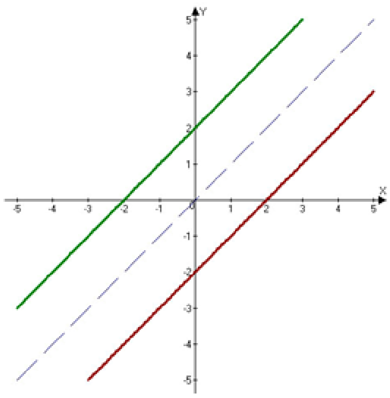


Рис 5

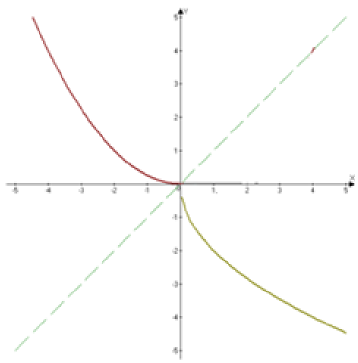


Рис 6

Література

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк.., 2006. – 582 с.
2. Захарійченко Ю. Якісна тематична підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання з математики: поради зацікавленим/Ю. Захарійченко, О. Школьний // Математика в школі – 2011. - № 3.-С.3-12.
3. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень/ Є. П. Нелін. – Х.:Гімназія, 2010. – 416 с.
4. Математика: навчальна прграма для учнів 10-12 класів загальноосвітніх навчальних закладів: академічний рівень// Математика. – 2010. - №17. – С.3-8.

Скічко Ольга Олександрівна
студентка магістратури, напрям підготовки “Математика”

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ОЗНАК ПОДІЛЬНОСТІ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

Системи числення – це способи запису чисел у вигляді, який є зручним для читання і виконання арифметичних дій над ними.

Помітили, що наші пращури намагалися предмети зображати точками, рисочками чи насічками і групувати їх по 3, 4, 5 або по 7. Таке групування полегшувало здійснювати обчислення. Але частіше за все рахували на пальцях, і тому предмети стали групувати по 5 або по 10. Надалі десяток десятків отримав особливу назву (у нашій мові – *сотня*), десяток сотень – свою назву – *тисяча*, і т.д. Для зручності запису такі особливі числа почали позначати спеціальними значками.

Якщо при підрахункові отримували 2 сотні 7 десятків і ще 4 предмети, то при записі двічі повторювали знак для сотні, сім разів – знак для десятків і чотири рази – знак для одиниці. Знаки для одиниць, десятків і сотень були не схожими один на одного. При такому записі знаки можна було розташовувати у будь-якому порядку, і від такого запису значення записаного числа на змінювалося. Оскільки в такому записі положення знака не відігравало ролі, то подібні системи числення стали називати *непозиційними*. Непозиційними були системи числення у древніх єгиптян, греків та римлян. Такі системи були зручними для виконання арифметичних дій – додавання і віднімання, та були зовсім незручними для множення і ділення. У древніх вавілонян система числення спочатку була непозиційною, але потім вони навчилися читати і розуміти інформацію, яка була вміщеною в порядок запису символів, і перейшли до *позиційної* системи числення. При цьому, на відміну від системи числення, що використовуємо ми, в якій значення цифри змінюється в 10 разів при переміщенні на одне сусіднє місце (таку систему називають *десятковою*), у вавілонян, при переміщенні знака відбувалася його зміна в 60 разів (таку систему числення називають *шестидесятирічною*). Довгий час у вавілонській системі числення не було *нуля*, тобто знаку для пропущеного розряду. Але з часом, для складання математичних і астрономічних таблиць, виникла необхідність у такому знакові. А от індійські математики, які багато чого запозичали у вавілонських, застосовували лише десяткову систему числення. Використовуючи вавілонський метод позначення символів (тепер їх називають *цифрами*), вони створили в *VI* ст. спосіб запису, який використовував лише 9 цифр. При цьому замість нуля залишали порожнє місце, а пізніше ставили крапку або маленький кружечок. В *IX* ст. з’явився особливий знак для нуля. З часом, переваги такого способу запису чисел став зрозумілим усім. Були розроблені правила виконання арифметичних операцій над числами в *десятковійсистемічислення*, які не вимагали використання спеціальних глиняних дошок, що називалися *абаками*, і цей спосіб запису чисел розповсюдився у всьому світі.

Подільність натуральних чисел – найважливіша і найдоступніша складова теорії чисел. Поняття ознак подільності натуральних чисел вводиться ще в *6* класі. До подільності натуральних чисел доводиться неодноразово повертатись учням і в старших класах. Наприклад, ознаки подільності часто використовують для ілюстрації необхідних і достатніх умов. Під час опрацювання розділу "Многочлени" учні розв'язують достатню кількість задач на подільність чисел, наприклад: довести, що сума трьох послідовних цілих чисел кратна 3; що сума чисел *abc*, *bca* і *cab* завжди ділиться на *11* і на *97* тощо. Основний результат в цій статті дає наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* q *– ціле число, більше* 1. *Для будь-якого цілого* $n \geq 1$ *існує єдиний впорядкований набір цілих чисел* $\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$, *для якого* $0 \leq a_i < q$, $i = 0,1,...,k$, $a_k \neq 0$, *що*

$$n = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + ... + a_1 q + a_0. \qquad (1)$$

Доведення. Для існування такого впорядкованого набору цілих чисел ми не однократно застосуємо алгоритм ділення з остачею на число q:

$$n = qq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < q$$
$$q_1 = qq_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < q$$
$$... \qquad ...$$
$$q_{k-1} = qq_k + r_k, \quad 0 \leq r_k < q$$

де q_k – останній, відмінний від нуля, дільник у цьому алгоритмі.

Нехай

$$q_0 = n,\ a_0 = q_0 - qq_1,\ a_1 = q_1 - qq_2, \dots,\ a_{k-1} = q_{k-1} - qq_k,\ a_k = q_k.$$

Тоді

$$a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + ... + a_1 q + a_0 =$$
$$= q_k q^k + \left(q_{k-1} - qq_k\right) q^{k-1} + ... + \left(q_1 - qq_2\right) q + \left(q_0 - qq_1\right) =$$
$$= q_k q^k - q_k q^k + q_{k-1} q^{k-1} - q_{k-1} q^{k-1} + ... + q_2 q^2 - q_2 q^2 + q_1 q - q_1 q + q_0 = q_0 = n.$$

Для доведення єдності існуючого впорядкованого набору цілих чисел, припустимо, що існує ще один впорядкований набір цілих чисел $\overline{b_l b_{l-1} ... b_1 b_0}$, для якого

$$n = b_l q^l + b_{l-1} q^{l-1} + ... + b_1 q + b_0.$$

Якщо $l \neq k$, наприклад $l > k$, тоді $n \geq b_l q^l \geq q^l \geq q^{k+1}$. Але з іншого боку

$$n = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + a_1 q + a_0 \leq (q-1)\left(q^k + q^{k-1} + ... + q + 1\right) = q^{k+1} - 1 < q^{k+1}.$$

Одержали суперечність. Отже, $l = k$. Тоді

$$a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + ... + a_1 q + a_0 = b_k q^k + b_{k-1} q^{k-1} + ... + b_1 q + b_0.$$

Звідси випливає, що $|a_0 - b_0| \vdots q$. Оскільки $0 \leq a_0 < q$ і $0 \leq b_0 < q$, то $0 \leq |a_0 - b_0| < q$, а враховуючи подільність $|a_0 - b_0| \vdots q$, одержуємо, що $|a_0 - b_0| = 0$, тобто $a_0 = b_0$. Тому

$$a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + ... + a_1 q = b_k q^k + b_{k-1} q^{k-1} + ... + b_1 q,$$

а після скорочення на $q > 1$, одержимо:

$$a_k q^{k-1} + a_{k-1} q^{k-2} + ... + a_2 q + a_1 = b_k q^{k-1} + b_{k-1} q^{k-2} + ... + b_2 q + b_1 .$$

Далі, застосовуючи попередні міркування, одержуємо, що $|a_1 - b_1| \vdots q$, тобто $a_1 = b_1$. Продовжуючи такі міркування далі, ми одержимо, що $a_2 = b_2$, …, $a_k = b_k$, тобто впорядкований набір цілих чисел $\overline{b_l b_{l-1} ... b_1 b_0}$ співпаде із набором $\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$, що суперечить припущенню. Теорему доведено.

Співвідношення (1) називають *представленнямнатурального числа* n *в системі числення з основою* q і позначають так:

$$n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}_{(q)} .$$

Ознаки подільності чисел в десятковій системі числення

Звичайне подання натуральних чисел здійснюється в системі числення з основою $q = 10$. При цьому маємо, що

$$n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 ,$$

де $0 \le a_i \le 9$, $i = 0,1,...,k$, $a_k \ne 0$.

Розглянемо низку тверджень про подільність натуральних чисел на задане натуральне число. Їх називають ознаками подільності натуральних чисел.

Теорема 2. *Будь-яке натуральне число конгруентне зі своєю останньою цифрою за модулем а)* 10*, б)* 2*, в)* 5.

Доведення. Нехай $\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$ – десятковий запис натурального числа n, тоді $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1} \cdot 10 + a_0$. Тому, $n \equiv a_0 \pmod{10}$, а також $n \equiv a_0 \pmod{2}$ і $n \equiv a_0 \pmod{5}$, бо 2 і 5 – взаємно прості дільники числа 10.

Теорема 3. *Для будь-якого натурального числа, десятковий запис якого має вигляд* $\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$*, справджуються наступні конгруенції:*

$$\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4} \ \text{ та } \ \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{25}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} = \overline{a_k a_{k-1} ... a_3 a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0} .$$

Оскільки 4 і 25 – взаємно прості дільники числа 100, то правильними будуть такі конгруенції

$$\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4} \text{ та } \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{25},$$

що і треба було довести.

Теорема 4. *Натуральне число ділиться на* 2^n *(на* 5^n*) тоді і тільки тоді, коли число, що утворене останніми* n *цифрами його десяткового запису, буде ділитися на* 2^n *(на* 5^n*).*

Сподіваємося, що ніші читачі самостійно доведуть справедливість цієї ознаки подільності.

Теорема 5. *Для будь-якого натурального числа, десятковий запис якого має вигляд* $\overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}$*, справджуються наступні конгруенції:*

$$\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} \equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 \pmod 3$$

та

$$\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} \equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 \pmod 9.$$

Доведення. Маємо

$$\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Оскільки $10 \equiv 1 \pmod 3$, то $10^i \equiv 1 \pmod 3$, $i = 0, 1, ..., k-1, k$. Тому

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0 \pmod 3.$$

Для 9 міркування аналогічні.

Теорема 6. *Для будь-якого натурального числа, десятковий запис якого має вигляд* $\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0}$, *справджуються наступна конгруенція:*

$$\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + ... + (-1)^k a_k \pmod{11}.$$

Доведення. Маємо

$$\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Оскільки $10 \equiv -1 \pmod{11}$, то $10^i \equiv (-1)^i \pmod{11}$, $i = 0, 1, ..., k-1, k$. Тому

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_0 - a_1 + ... + (-1)^k a_k \pmod{11}.$$

Що ж стосується ознаки подільності на 7 чи 13, то можна запропонувати такі твердження.

Теорема 7. *Для будь-якого натурального числа, десятковий запис якого має вигляд* $\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0}$, *справджуються наступна конгруенція:*

$$\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} \equiv \overline{a_k a_{k-1}...a_1} - 2a_0 \pmod 7.$$

Доведення. Маємо

$$\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} = 10\left(\overline{a_k a_{k-1}...a_1} - 2a_0\right) + 21a_0.$$

Оскільки $21 \vdots 7$, а 10 і 7 – взаємно прості, то

$$\overline{a_k a_{k-1}...a_1 a_0} \equiv \overline{a_k a_{k-1}...a_1} - 2a_0 \pmod 7.$$

Теорема 8. *Для будь-якого шестицифрового числа* $\overline{abcdef}$ *справджуються наступні конгруенції:*

$$\overline{abcdef} \equiv \overline{abc} - \overline{def} \pmod 7 \text{ та } \overline{abcdef} \equiv \overline{abc} - \overline{def} \pmod{13}.$$

Доведення. Скористаємося тим, що 1001 ділиться на 7 і на 13. Тоді

$$\overline{abcdef} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{def} = 1001 \cdot \overline{abc} - \left(\overline{abc} - \overline{def}\right) \equiv \overline{abc} - \overline{def} \pmod 7,$$

що і треба було довести. Для 13 доведення аналогічне.

Теорема 9. *Число ділиться на* 7 *(на* 13*) тоді і тільки тоді, коли на* 7 *(на* 13*) ділиться знакозмінна сума трицифрових чисел, на які розбивається дане число справа наліво.*

Доведення. Якщо кількість цифр заданого числа не кратна 3, то дописавши попереду нього необхідну кількість нулів, ми його не змінимо, але одержимо потрібне. Тоді, наприклад для числа $\overline{a_8 a_7 ... a_1 a_0}$, матимемо:

$$\overline{a_8a_7...a_1a_0} = \overline{a_8a_7a_6}\cdot 10^6 + \overline{a_5a_4a_3}\cdot 10^3 + \overline{a_2a_1a_0}.$$

Оскільки $10^3 \equiv -1(\bmod 7)$, то $10^6 \equiv 1(\bmod 7)$. Тому,

$$\overline{a_8a_7a_6}\cdot 10^6 + \overline{a_5a_4a_3}\cdot 10^3 + \overline{a_2a_1a_0} \equiv \overline{a_8a_7a_6} - \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_2a_1a_0}(\bmod 7).$$

Для числа 13 доведення аналогічне.

Теорема 10. *Число ділиться на* 37 *тоді і тільки тоді, коли на* 37 *ділиться сума трицифрових чисел, на які розбивається дане число справа наліво.*

Доведення. Аналогічно до попередньої теореми, матимемо:

$$\overline{a_8a_7...a_1a_0} = \overline{a_8a_7a_6}\cdot 10^6 + \overline{a_5a_4a_3}\cdot 10^3 + \overline{a_2a_1a_0}.$$

Оскільки $10^3 \equiv 1(\bmod 37)$, тоді $10^6 \equiv 1(\bmod 37)$. Тому,

$$\overline{a_8a_7a_6}\cdot 10^6 + \overline{a_5a_4a_3}\cdot 10^3 + \overline{a_2a_1a_0} \equiv \overline{a_8a_7a_6} + \overline{a_5a_4a_3} + \overline{a_2a_1a_0}(\bmod 37),$$

що і треба було довести.

Сума цифр натуральних чисел

Нехай $n = \overline{a_ka_{k-1}...a_1a_0}$ – натуральне число, тоді через $S(n)$ позначатимемо суму його цифр, тобто

$$S(n) = a_k + a_{k-1} + ... + a_1 + a_0.$$

Теорема 11. *Нехай* $S(n)$ *сума цифр десяткового запису натурального числа* n*, тоді різниця* $n - S(n)$ *ділиться на* 9.

Теорема 12. *Для будь-яких натуральних* a *і* b *виконується нерівність:*

$$S(a+b) \le S(a) + S(b).$$

Таку властивість для суми цифр натуральних чисел називають *напівадитивність*.

Доведення. Нехай $a = \overline{a_ka_{k-1}...a_1a_0}$, $b = \overline{b_mb_{m-1}...b_1b_0}$, а $a+b = \overline{c_sc_{s-1}c_1c_0}$. Для доведення вказаної нерівності ми вибираємо найменше t таке, щоб $a_i + b_i < 10$ для всіх $0 \le i < t$, а $a_t + b_t \ge 10$. Це означає, що $c_0 = a_0 + b_0$, $c_1 = a_1 + b_1$, …, $c_{t-1} = a_{t-1} + b_{t-1}$, $c_t = a_t + b_t - 10$, а $c_{t+1} \le a_{t+1} + b_{t+1} + 1$. Тому,

$$c_0 + c_1 + ... + c_t + c_{t+1} \le (a_0 + a_1 + ... + a_t + a_{t+1}) + (b_0 + b_1 + ... + b_t + b_{t+1}) - 9 \le$$
$$\le (a_0 + a_1 + ... + a_t + a_{t+1}) + (b_0 + b_1 + ... + b_t + b_{t+1}).$$

Аналогічно продовжуючи далі цей процес, для цифр, що мають номери, більші за $t+1$, ми завершимо доведення цієї теореми.

Зауваження. Застосувавши індукцію, можна довести таку нерівність:

$$S(a_1 + a_2 + ... + a_n) \le S(a_1) + S(a_2) + ... + S(a_n),$$

де a_1, a_2, …, a_n – довільні натуральні числа.

Теорема 13. *Для будь-яких натуральних* a *і* b *виконується нерівність:*

$$S(a\cdot b) \le \min\{a\cdot S(b); b\cdot S(a)\}.$$

Доведення. В силу симетрії, достатньо довести таку нерівність

$$S(a\cdot b) \le a\cdot S(b).$$

Для цього достатньо застосувати декілька разів властивість про напівадитивність. Дійсно,

$$S(2\cdot b)=S(b+b)\le S(b)+S(b)=2\cdot S(b),$$

тобто

$$S(2\cdot b)\le 2\cdot S(b).$$

Для a натуральних доданків, кожен із яких дорівнює b, одержимо, що

$$S(a\cdot b)=S\left(\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\ \text{разів}}\right)\le \underbrace{S(b)+S(b)+\ldots+S(b)}_{a\ \text{разів}}=a\cdot S(b),$$

тобто

$$S(a\cdot b)\le a\cdot S(b),$$

що і треба було довести.

Теорема 14.. *Для будь-яких натуральних a і b виконується нерівність:*

$$S(a\cdot b)\le S(a)\cdot S(b).$$

Таку властивість для суми цифр натуральних чисел називають *напівмультиплікативність*.

Доведення. Для доведення цієї властивості скористаємося останніми двома теоремами. Нехай $b=\overline{b_n b_{n-1}\ldots b_1 b_0}$, де $b_n\ne 0$, b_{n-1}, …, b_1, b_0 – цифри десяткової системи числення. Тоді $b=\sum_{i=0}^{n} b_i 10^i$, причому одержуємо:

$$S(ab)=S\left(a\sum_{i=0}^{n} b_i 10^i\right)=S\left(\sum_{i=0}^{n} ab_i 10^i\right)\le \sum_{i=0}^{n} S\left(ab_i 10^i\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n} S(ab_i)\le \sum_{i=0}^{n} b_i S(a)=S(a)\sum_{i=0}^{n} b_i=S(a)S(b),$$

що і треба було довести.

Література

1. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики: Навч. посібник. — 2-ге вид., доп. — К.: Либідь, 1993. — 344 с.
2. Г.П.Бевз, В.Г.Бевз Математика 6 класс. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. — К.: Генеза, 2006. — 310 с.
3. Гусак Г. М., Капуцкая Д. А. Математика для подготовительных отделений вузов: Справ. пособие / Под ред. А. А. Гусака. — Мн.: Высш. шк., 1989. — 495 с.
4. Маслай Г. С., Шоголева Л. О. Рівняння та системи рівнянь з параметрами: Математика. № 21—22 (81—82), Червень 2000.
5. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі з теорії чисел. Практикум із розв’язування. — К.: Шк. світ, 2011. — 128 с.

Стецюк Олеся Вікторівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ НАЙБІЛЬШОГО СПІЛЬНОГО ДІЛЬНИКА І НАЙМЕНШОГО СПІЛЬНОГО КРАТНОГО НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ АЛГЕБРИ

Вивчення математики в основній школі має забезпечити базову математичну підготовку учнів, що спрямована на їх загальний розвиток, формування математичної грамотності та є достатньою для реалізації обраного шляху подальшого здобуття освіти.

Основу курсу математики 5 – 6 класів складає розвиток поняття числа та формування міцних обчислювальних і графічних навичок. Учні цих класів мають навчитися розрізняти різні види раціональних чисел, додавати, віднімати, множити і ділити їх, знати назви компонентів і результатів дій, а також мати уявлення про найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне натуральних чисел.

- ***Ділення з остачею двох цілих чисел.***

Нехай задані два цілих числа a і b, причому $b \neq 0$. Тоді існує єдина пара цілих чисел q і r, де $r \in \{0, 1, ..., |b| - 1\}$, які *називають відповідно часткою і остачею від ділення числа a на число b*, для яких виконується рівність

$$a = bq + r.$$

При цьому, якщо $r = 0$, то говорять, що число a *ділиться на* число b, або що число a *кратне* числу b, або що число b є *дільником* числа a, і позначають $a \vdots b$ чи $b | a$.

Доведемо справедливість цього твердження. Нехай для визначеності $b > 0$. Виберемо ціле число q так, щоб виконувалася така подвійна нерівність

$$q \le \frac{a}{b} < q + 1.$$

Тоді $bq \le a < bq + b$, тобто $a = bq + r$, де $0 \le r < b$. Існування пари чисел (q, r) доведено. Далі, припустимо, що існує ще одна пара цілих чисел (q_1, r_1) така, що $a = bq_1 + r_1$, причому $0 \le r_1 < b$. Тоді виконується така рівність

$$bq + r = bq_1 + r_1.$$

Звідки

$$q_1 - q = \frac{r - r_1}{b}.$$

Так як $0 \le r < b$ і $0 \le r_1 < b$, то $-b < r - r_1 < b$, тобто $-1 < \frac{r - r_1}{b} < 1$, $-1 < q_1 - q < 1$. Оскільки $q_1 - q$ – ціле число, то із останньої нерівності випливає, що $q_1 - q = 0$, тобто $q_1 = q$, а тому і $r_1 = r$, що суперечить припущенню про те, що пари чисел (q, r) і (q_1, r_1) – різні. Твердження доведено.

- ***Найбільший спільний дільник***

Для кожного цілого числа n, відмінного від 0, позначимо через D_n множину усіх натуральних дільників числа n. Зрозуміло, що множина D_n не є порожньою і вона скінчена.

Для двох цілих чисел a і b найбільший елемент множини $D_a \cap D_b$ називають *найбільшим спільним дільником* чисел a та b і позначають його через $НСД(a,b)$ або просто (a,b).

Таким чином, *найбільшим спільним дільником* двох цілих чисел називають таке найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне із цих цілих чисел.

Довільне ціле число, що ділить одночасно цілі числа a, b,…, l називається їх *спільним дільником.* Найбільший елемент множини $D_a \cap D_b \cap ... \cap D_l$ називається *найбільшим спільним дільником* цих чисел і позначається символом $НСД(a,b,...,l)$ або просто $(a,b,...,l)$.

Таким чином, *найбільшим спільним дільником* декількох цілих чисел, серед яких хоча б одне не дорівнює нулю, називають таке найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне із цих цілих чисел.

Якщо $(a,b,...,l)=1$, то числа a, b, …, l називаються *взаємно простими.* Якщо кожне з чисел взаємно просте з кожним іншим із них, то числа a, b, …, l називаються *попарно взаємно простими.* Очевидно, числа попарно взаємно прості є взаємно простими. У випадку двох чисел поняття «попарно взаємно прості» і «взаємно прості» співпадають.

Приклади. Числа 6, 10 і 15 мають $(6,10,15)=1$, тобто вони – *взаємнопрості*. А числа 8, 13 і 21 мають $(8,13)=(8,21)=(13,21)=1$, тобто вони *попарновзаємнопрості*.

Далі розглядатимемо спільний дільник двох цілих чисел, а усі позначення малими латинськими літерами будуть позначеннями цілих чисел.

Теорема 1. *Якщо a кратне b, то сукупність спільних дільників чисел a та b співпадає із сукупністю дільників одного числа b, тобто $(a,b)=b$.*

Доведення. Дійсно, довільний спільний дільник чисел a та b є дільником одного числа b. І, навпаки, оскільки a кратне b, то, приймаючи до уваги означення кратності чисел, довільний дільник числа b є також дільником a, тобто є спільним дільником чисел b та a. Таким чином, сукупність спільних дільників чисел a та b співпадає із сукупністю спільних дільників одного b. А так як найбільший дільник числа b є саме число b, то $(a,b)=b$.

Теорема 2. *Якщо $a=bq+c$, то сукупність спільних дільників чисел a та b співпадає з сукупністю спільних дільників чисел b та c, тобто $(a,b)=(b,c)$.*

Доведення. Дійсно, написана рівність показує, що довільний спільний дільник чисел a та b ділить також і c, а тому, є спільним дільником чисел b і c. Навпаки, та ж рівність показує, що довільний дільник чисел b та c ділить a, а тому, є спільним дільником чисел a та b. Таким чином, спільний дільник чисел a та b є спільним дільником чисел b та c. А тому, те ж саме, буде правильним і для найбільших спільних дільників, тобто $(a,b)=(b,c)$.

- ***Найменше спільне кратне***

Для кожного цілого додатного числа n через K_n позначимо множину чисел $\{n,2n,3n,...,kn,...\}$. Її називають *множиною усіх цілих додатних чисел, кратних* n. Зрозуміло, що на відміну множини D_n, множина K_n – нескінченна і містить найменший елемент, це число n.

Для цілих додатних a і b найменший елемент множини $K_a \bigcap K_b$ називають *найменшим спільним кратним* двох чисел a та b і позначають через $НСК(a,b)$ або просто через $[a,b]$.

Таким чином, *найменшим спільним кратним* двох цілих додатних чисел називають таке найменше натуральне число, яке ділиться на кожне із цих цілих чисел.

Довільне ціле число, що ділиться одночасно на цілі додатні числа a, b,…, l називається їх *спільним кратним.* Найменший елемент множини $K_a \bigcap K_b \bigcap ... \bigcap K_l$ називається *найменшим спільним кратним* цих чисел і позначається символом $НСК(a,b,...,l)$ або просто $[a,b,...,l]$.

Таким чином, *найменшим спільним кратним* декількох цілих додатних чисел, називають таке найменше натуральне число, яке ділиться на кожне із цих цілих чисел.

Далі ми будемо розглядати тільки спільні кратні двох цілих додатних чисел.

Нехай $(a,b)=d$, тоді $a=da_1, b=db_1$ і $(a_1,b_1)=1$. Нехай M – довільне спільне кратне чисел a та b. Так як M кратне a, то $M=ak$, де k – ціле додатне число. Але M кратне і b. Тому $\frac{M}{b}=\frac{ak}{b}=\frac{a_1k}{b_1}$ повинно бути цілим і k повинно ділитись на b_1. Тому, $k=b_1t$, де t – ціле додатне число. Отже, для M одержимо формулу

$$M=\frac{ab}{d}t. \qquad (1)$$

Навпаки, очевидно, що M, в формулі (1) при довільному цілому додатному t, буде кратним числам a та b, і, тому, формула (1) дає загальний вигляд всіх кратних чисел a та b. Найменше додатне з цих спільних кратних, тобто найменше спільне кратне, одержимо при $t=1$. Воно буде дорівнювати

$$m=\frac{ab}{d}. \qquad (2)$$

Тепер формулу (1) можна переписати так:

$$M=mt. \qquad (3)$$

З формул (3) та (2) випливає справедливість наступних теорем.

Теорема 3. *Сукупність спільних кратних двох чисел співпадає з сукупністю кратних їх спільного найменшого кратного.*

Теорема 4. *Найменше спільне кратне двох чисел рівне їх добутку, поділеному на їх найбільший спільний дільник, тобто.*

$$[a,d]=\frac{ab}{(a,b)}. \qquad (4)$$

- ***Алгоритм Евкліда***

Для знаходження найбільшого спільного дільника, а також для доведення його найважливіших властивостей застосовують *алгоритм Евкліда*. Він полягає у наступному. Нехай a та b – додатні цілі числа і $a>b$. Виконаємо наступні ділення з остачею. Вони дають нам наступний ряд рівностей:

$$\begin{array}{ll}
a=bq_1+r_2, & 0<r_2<b, \\
b=r_2q_2+r_3, & 0<r_3<r_2, \\
r_2=r_3q_3+r_4, & 0<r_4<r_3, \\
\ldots & \ldots \\
r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n, & 0<r_n<r_{n-1}, \\
r_{n-1}=r_nq_n, &
\end{array} \qquad (5)$$

Цей процес закінчується тоді, як тільки ми одержуємо, що $r_{n+1}=0$. Це є неминучим, оскільки ряд $b,r_2,r_3,...$ – як спадний ряд цілих додатних чисел, не може містити більше, ніж b додатних членів.

Розглядаючи рівності (5), ідучи згори донизу, впевнюємося (враховуючи вище сказане), що спільні дільники чисел a та b однакові з спільними дільниками чисел b та r_2, далі ці дільники однакові із спільними дільниками чисел r_2 і r_3, чисел r_3 і $r_4,\ldots$, чисел r_{n-1} і r_n, і нарешті, співпадають з дільниками одного числа r_n, яке є останньою ненульовою остачею в алгоритмі Евкліда. Одночасно з цим маємо:

$$(a,b)=(b,r_2)=(r_2,r_3)=...=(r_{n-1},r_n)=r_n.$$

Звідси випливає справедливість наступних теорем.

Теорема 5. *Сукупність спільних дільників чисел a та b співпадає із сукупністю дільників їх найбільшого спільного дільника.*

Теорема 6. *Цей найбільший спільний дільник дорівнює останній ненульовій остачі в алгоритмі Евкліда.*

Далі розглянемо теореми, які допомагатимуть нам у розв’язанні олімпіад них задач з теорії чисел.

Теорема 7. *Якщо* m *– довільне додатне ціле число, то*

$$(am,bm)=(a,b)m.$$

Доведення. Дійсно, помноживши рівності (4) на m, одержимо нові правильні співвідношення, де замість $a,b,r_2,...,r_n$ будуть стояти $am,bm,r_2m,...,r_nm$. Тому,

$$(am,bm)=r_nm=(a,b)m.$$

Теорема 8. *Якщо* δ *– довільний спільний дільник чисел* a *та* b*, то*

$$\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)=\frac{(a,b)}{\delta}$$

і

$$\left(\frac{a}{(a,b)},\frac{b}{(a,b)}\right)=1,$$

тобто частки від ділення двох чисел на їх найбільший спільний дільник взаємно прості.

Доведення. Використовуючи попереднє співвідношення, одержимо:

$$(a,b)=\left(\frac{a}{\delta}\delta,\frac{b}{\delta}\delta\right)=\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)\delta.$$

Звідки знаходимо, що

$$\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)=\frac{(a,b)}{\delta}.$$

Теорема 9. *Якщо* $(a,b)=1$*, то* $(ac,b)=(c,b)$.

Доведення. Дійсно, (ac,b) ділить ac та bc, тому, за теоремою 2.5 він ділить і (ac,bc), а враховуючи теорему 2.6, приходимо до висновку, що він дорівнює c. Але (ac,b) ділить і b, тому він ділить і (c,b). Навпаки (c,b) ділить ac і b, тому він ділить і (ac,b). Таким чином, (ac,b) і (c,b) взаємно ділять один одного. Отже, вони рівні між собою.

Теорема 10. *Якщо* $(a,b)=1$ *і* ac *ділиться на* b*, то* c *ділиться на* b.

Доведення. Дійсно, за теоремою 2.1, з того, що ac ділиться на b, маємо $(ac,b)=b$, а за теоремою 2.9, маємо $b=(c,b)$. Далі, застосувавши теорему 2.1, ми доведемо подільність c на b.

Теорема 11. *Якщо кожне* $a_1,a_2,...,a_m$ *взаємно просте з кожним* $b_1,b_2,...,b_n$*, то і добуток* $a_1a_2...a_m$ *взаємно простий з добутком* $b_1b_2...b_n$.

Доведення. Дійсно, за теоремою 2.9, маємо:

$$(a_1a_2a_3...a_m,b_k)=(a_2a_3...a_m,b_k)=(a_3...a_m,b_k)=...=(a_m,b_k)=1,$$

де $k=1,2,...,n$.

Далі, позначивши $a_1a_2a_3...a_m = A$ і $b_1b_2...b_n = B$, аналогічно знаходимо:

$$(B,A) = (b_1b_2b_3...b_n, A) = (b_2b_3...b_n, A) = (b_3...b_n, A) = ... = (b_n, A) = 1.$$

Теорема 12. *Для натуральних чисел a і b існують такі цілі числа x і y, що $ax + by = (a,b)$.*

Доведення. Згідно із алгоритмом Евкліда, маємо

$$(a,b) = r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_{n-1} = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-2})q_{n-1} =$$
$$= (-q_{n-1})r_{n-3} + (1 + q_{n-1}q_{n-2})r_{n-2} = (-q_{n-1})r_{n-3} + (1 + q_{n-1}q_{n-2})(r_{n-4} - r_{n-3}q_{n-3}) =$$
$$= (1 - q_{n-1}q_{n-2})r_{n-4} + (-q_{n-1} - q_{n-3} - q_{n-1}q_{n-2}q_{n-3})r_{n-3} = ... = yb + xa,$$

де x, y – деякі цілі числа. Теорему доведено.

Теорема 13. *Якщо $a = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ і $b = p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k}$, де p_1, ..., p_k – різні прості числа, $\alpha_i, \beta_i > 0$, $\alpha_i + \beta_i \geq 1$, $i = 1,...,k$, тоді*

$$(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}...p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$$

і

$$[a,b] = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}...p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}.$$

Справедливість цієї теореми випливає безпосередньо із означень найбільшого спільного дільника та формули (4). Її зміст говорить про те, що для того, щоб знайти $НСД$ і $УСК$, достатньо виписати розклад чисел на прості множники і взяти їх «перетин» (тобто кожний простий множник береться в меншій із степенів) і «об’єднання» (відповідно, в більшій). Однак у випадку великих чисел зручніше використовувати алгоритм Евкліда.

Література

1. *Бевз Г. П., Бевз В. Г.* Математика 6 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закл. – К.: Генеза, 2006. – 303 с. іл.
2. *Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.* Математика: підруч. для 6 кл.. – Х.: Гімназія, 2006. – 304 с.
3. *Янченко Г. М., Кравчук В. Р.* Математика: підруч. для 6 кл.. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. – 271 с.
4. *Ясінський В.* А. Олімпіадні задачі з теорії чисел. Практикум із розв’язування. – К.: Шк. світ, 2011. – 128 с.

Танань Діана Юріївна
студентка 2 курсу,напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ ПІДХОДИ ДО ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Сучасній людині для успішної професійної діяльності необхідна серйозна загальноосвітня підготовка, яка обов'язково включає в себе знання математики. Визначений інтеграл є одним із основних понять математики, який широко використовується в різних галузях науки, техніки та в економічних дослідженнях. Разом з тим, це поняття є достатньо складним, вивчається в 11 класі і існують різні підходи до того, як слід його вводити. Ця стаття присвячена аналізу цих підходів.

Першими прикладами використання методів інтегрального числення вважаються дослідження давньогрецьких вчених Евдока Кнідського (IV ст. до н.е.) та Архімеда з Сіракуз (III ст. до н.е.) по визначенню площ, об'ємів і центрів мас. Дуже важливим для становлення інтегрального числення було вдосконалення Архімедом ідеї Демокріта про розбиття плоских фігур на елементарні полоси, що «заповнюють» фігури, і тіла на шари. Таких елементарних частин могло бути нескінченна множина або скінченне число. Цими діями Архімед передував ідеям Кеплера і Кавальєрі у визначенні числових характеристик різних геометричних об'єктів. У Кавальєрі навіть деякі вирази співпадають з тими, які вживав Архімед: обидва говорили про всі лінії, що заповнюють плоску фігуру, і про всі плоскі перетини, що заповнюють об'єм. Метод інтегральних сум розроблений Архімедом і застосований до обчислення площ і об'ємів в його творах «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях».[2]

Визначений інтеграл та ідеї інтегрального числення виявилися надзвичайно плідними в їх застосуванні для розв'язування цілого ряду задач.
Визначений інтеграл існував більше 2000 років без застосування через складність обчислення інтегральних сум. Своє широке застосування він отримав лише в кінці XVIII ст., коли Ньютон та Лейбніц відкрили його тісний взаємозв'язок з невизначеним інтегралом. Відкриття Ньютона і Лейбніца зробило переворот в математиці. Якщо раніше вона була доступна лише вузькому кругу фахівців, які вирішували кожне окреме завдання придуманими ними методами, то після створення алгоритму інтегрального числення, застосовного до широкого круга завдань, математика стала інструментом в руках людей, що займаються різними дослідженнями, але що не володіють достатньо глибокими математичними знаннями.

Перше означення інтеграла як границі інтегральних сум, яке й дотепер є загально прийнятим, дав у 1821 р. О.Л. Коші. Подальший розвиток поняття інтеграла (кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та ін.) від функції загальної будови пов'язують з іменемами Рімана, Лебега та Рісса.У загальних рисах побудову інтегрального числення було завершено у працях І.Ньютона (1643-1727) та Г .В.Лейбніца (1646-1716) до кінця 17 століття. До поняття інтеграла привела потреба розв'язування задач геометрії , фізики та багатьох практичних задач. Є різні підходи введення інтегрального числення. [2]

Пропонується до розгляду два різні методи введення поняття визначеного інтеграла в школі. Постановка проблеми полягає у аналізі цих методів та їх порівнянні. Розглянемо їх детальніше.

Історично поняття визначеного інтегралу виникло у зв'язку з обчисленням площ фігур, обмежених кривими, зокрема у зв'язку з обчисленням площі криволінійної трапеції. Введення поняття визначеного інтеграла розпочинається з розв'язування задачі про відшукання площі криволінійної трапеції.

Нагадаємо коротко ідею обчислення площі криволінійної трапеції. Нехай задана плоска фігура, обмежену графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $y=f(x)$, відрізком $[a;b]$ вісі Ox та прямими $x=a$ і $x=b$. Ця фігура дістала назву криволінійної трапеції. Для обчислення її площі розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками x_k, $k=\overline{0,n}$ на елементарні відрізки $[x_k,x_{k+1}]$.Площу кожної із смужок можна обчислювати наближено, замінюючи її або прямокутником, верхня основа якого проходить через точку на кривій і знаходиться не вище за криву, або трапецією , обмеженою зверху хордою, що сполучає кінці відрізку кривої. Очевидно, що при достатньо дрібному розбитті відрізка $[a;b]$ площа ступінчатої фігури дорівнюватиме

$$S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots . f(x_{n-1})\Delta x$$

і буде близькою до площі криволінійної трапеції, таким чином площу криволінійної трапеції можна наближено розрахувати за останньою формулою. Якщо $n\to\infty$, то $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}\to 0,$ оскільки $y=f(x)$ неперервна то східчаста фігура все менш відрізнятиметься від криволінійної трапеції $S_n\approx S$. А площа криволінійної трапеції буде все менше відрізнятися від S_n. Тому за площу криволінійної трапеції, за означенням, природно взяти границю площі східчастої фігури.

Після цього складається загальна схема методу обчислення площі криволінійної трапеції.

1. Розглядають неперервну функцію $y=f(x)$, невід'ємну на відрізку $[a;b]$.

2. Відрізок $[a;b]$ розбивають на n рівних частин точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

3.Довжина кожного з відрізка дорівнює $[x_{k-1},x_k]$ дорівнює $\Delta x=\dfrac{b-a}{2}$,Утворюють добутки $f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots . f(x_{n-1})\Delta x$, і знаходять їх суму $S_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots . f(x_{n-1})\Delta x$.

4.Обчислюють $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ і називають визначеним інтегралом функції $f(x)$, позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Вказаний підхід пропонується в багатьох підручниках для 11 класу, зокрема в [4,5]. При цьому розглядаються і інші задачі, що розв'язуються в подібний спосіб, наприклад задача про масу неоднорідного стержня, а також задача про переміщення точки [4].

Після такого означення фактично одразу доводиться формула Ньютона–Лейбніца, з допомогою якої і розв'язуються задачі на знаходження площ криволінійних трапецій. Таким чином, вказаний підхід до введення поняття визначеного інтеграла носить переважно теоретичний характер і не підкріплений фактично ніякими задачами, на яких учні могли б його закріпити. При цьому використовується фактично такий самий підхід, який використовується при введенні поняття похідної: перед введенням поняття похідної спочатку розглядаються задачі про дотичну та миттєву швидкість, потім формулюється означення похідної функції в точці, яке носить суто теоретичний характер, потім доводяться правила диференціювання.

Інший підхід до означення визначеного інтеграла пропонується в підручниках [1,3]. Введенню поняття визначеного інтеграла також передує задача про обчислення площі криволінійної трапеції. Але при цьому доводиться таке твердження: «Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, прямими $y=0$, $x=a$ та $x=b$ $(a<b)$, можна обчислити за формулою $S=F(b)-F(a)$, де F – будь-яка первісна функції f на відрізку $[a;b]$». Ідея доведення цього твердження полягає в наступному. Розглядається функція $y=S(x)$, $x\in[a;b]$, яка визначається в такий спосіб: $S(a)=0$; якщо $x_0\in(a;b]$, то $S(x_0)$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції f, прямими $y=0$, $x=a$, $x=x_0$. Доводиться (в підручнику [1] на достатньо формальному рівні, а в підручнику [3] строго), що ця функція є первісною до функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Після цього вводиться таке означення визначеного інтеграла:

Нехай F – первісна функції $f(x)$ на деякому проміжку I, числа a, b, де $a<b$, належать заданому проміжку. Різницю $F(a)-F(b)$ називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. Тут F – довільна первісна функції $f(x)$ на проміжку I. Останню рівність називають формулою Ньютона–Лейбніца. Також обґрунтовується, що значення функції $F(b)-F(a)$ не залежить від того яку саме первісну функції $f(x)$ обрано. Справді, кожну іншу первісну $G(x)$ можна подати у вигляді $F(x)+C$ і тоді

$$G(b)-G(a)=\big(F(b)+C\big)-\big(F(a)+C\big)=F(b)-F(a).$$

При доведенні основної теореми встановлено, що функція $y = S(x)$ є первісною неперервної на відрізку функції $f(x)$, яка набуває на даному відрізку лише невід'ємні значення. В підручнику [3] звернуто особливу увагу на те, що це твердження ілюструє той факт, що кожна неперервна на відрізку функція має первісну на цьому відрізку. У свою чергу це означає, що для кожної неперервної на відрізку $[a;b]$ функції існує визначений інтеграл.

Після цього формулюється алгоритм обчислення визначеного інтеграла: для обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона – Лейбніца потрібно:

1) знайти будь – яку первісну F функції f на відрізку $[a;b]$;
2) обчислити значення первісної F у точках $x=b$ та $x=a$,
3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

Вказаний підхід має очевидну перевагу: він одразу вказує основний метод обчислення визначеного інтегралу – з допомогою формули Ньютона–Лейбніца. В підручнику [1] зазначається, що «інтеграли можна обчислювати і з допомогою інтегральних сум. Такий спосіб вимагає громіздких обчислень. Його застосовують лише у тих випадках, коли не вдається знайти первісну функції $f(x)$, і для обчислень зазвичай використовують ЕОМ, складаючи спеціальні програми. Якщо ж первісна відома, то інтеграл можна обчислити точно, використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца» [1].

Отже, розглянувши два підходи до введення визначеного інтеграла можна зробити висновок, що кожний із них має свою специфіку та складність, але порівнюючи ці методи хочеться зауважити, що більш простішим для сприймання, є означення визначеного інтеграла з допомогою прямої формули Ньютона–Лейбніца.

Література

1. Алгебра и начала анализа : учеб. Для 10–11 кл. общеобр. Учреждений / Ш. А. Алимов, Ю.А. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 15-е изд. – М. : Просвещение, 2007. – 384 с.
2. В. А. Никифоровский, Путь к интегралу. — М.: "Наука", 1985. — 192 с.
3. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 11 кл. з поглибл. вивч. математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2011.– Ч.2.– 272 с.
4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10–11 кл. : Учеб. для общеобр. учреждений. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2001. – 335 с.
5. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : Підручник для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К. : Зодіак –ЕКО, 2006. – 384 с.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ ПЛАНІМЕТРІЇ

Анісімова Вікторія Леонідівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ТЕХНОЛОГІЯ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ КУТА ТА ЙОГО ВЕЛИЧИНИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

На сучасному етапі розвитку загальноосвітньої школи головні її завдання полягають у тому, щоб дати учням глибокі знання основних наук, удосконалювати їх діалектико-матеріалістичний світогляд, розвивати творчі здібності і трудові навички, прищеплювати бажання і вміння самостійно здобувати і поглиблювати свої знання. Вирішення цих завдань потребує всілякої активності їх навчальної діяльності, осмисленого вивчення матеріалу.[1]

Специфікою введення геометричних понять є особливість людського організму в потребі уявлення тих фігур або величин, що ми розглядаємо. І першочерговим завданням вчителя є правильне формування уявлень про певне поняття. Особливо уважно слід ставитись до введення нового матеріалу. Учень має чітко розуміти та уявляти про що йде мова. Тому необхідно подавати нову інформацію у зрозумілій для учнів формі та враховувати їхні вікові особливості.[6]

Всім відомо, що у молодших школярів переважає образне, предметне мислення. Тому під час першого ознайомлення з кутом його можна зробити на сприятливому для них рівні, наприклад, з двох паличок і шматочка пластиліну. Палички будуть в даному випадку виступати сторонами кута, а шматок пластиліну представити як вершину цього кута. Ввівши таке поняття як кут, одночасно можна розглядати декілька кутів та порівнювати їх, накладаючи один на одний.

Важливо також правильно сформувати уявлення учнів про величину кута, щоб діти не вважали, що більшим вийшов кут у якого були довші палички, тобто сторони певного кута. Зумовлене це тим, що в учнів ще не сформоване поняття променя, і ми користуємося тільки моделлю цього поняття. А моделлю променя є відрізок, який за потреби можна як завгодно далеко продовжити з одного з його кінців.[7]

Моделлю кута можуть також служити дві планки, скріплені цвяшком: розсуваючи і зсуваючи планки, діставатимемо кути різної величини; стрілки годинника; гострі частини ножиць. Варто запропонувати дітям продовжити асоціативний ряд, тобто навести приклади речей з побуту, які б могли слугувати як геометричні фігури зображення кута. У цьому випадку, учні молодшої школи виявлять не аби яку активність та креативність. Це можуть бути найрізноманітніші приклади з життя, такі як: відкритий дзьоб лелеки, клешні рака і гілочки дерев, головне, щоб вони розуміли, що лінії, які утворюють кут мають бути прямими.[7]

На наступному етапі вивчення кутів можна пов'язувати з вивченням многокутників. У свідомості дитини кут уже не буде уявлятися як відірваний кут многокутника, а учень розумітиме, що його утворюють два промені, яким належать сторони многокутника, що виходять з однієї вершини.

Важливо звернути увагу на те, як діти показують кут. Робити це потрібно віялоподібним рухом указки від однієї сторони кута до іншої, встановивши один її кінець у вершині кута.

Ще однією важливою проблемою, з якою стикаються вчителі – це формування у школярів уявлення про величину кута.[7]

Також в якості продовження вивчення поняття кута та його величини учням молодших класів середньої школи слід створити ситуацію ознайомлення їх з прямим кутом. Для цього варто розглянути його утворення на практичних конкретних ситуаціях, наприклад, у процесі перегинання листка паперу. Кожному учневі треба дати аркуш паперу довільної форми. Потім під керівництвом учителя діти складають аркуші вдвічі, притискують лінії згину. Після цього перегинають ще раз, стежачи за тим, щоб частини утвореної раніше лінії перегину сумістилися. Таким чином, на лініях перегину, у дітей утвориться прямий кут. Якщо папір розгорнути, вони побачать, що дві лінії перегину ділять аркуш на чотири частини. Утворилось чотири прямі кути, які мають спільну вершину.[3]

За допомогою паперової моделі прямого кута, учні відшукують прямі і непрямі кути на предметах з навколишнього оточення і на косинці, який потім використовують для порівняння кутів: чи є він прямим, чи більшим, або меншим від прямого. Зручніше при цьому користуватися косинцем з прозорої пластмаси.

Закріпити навички вимірювання кутів можна за допомогою різноманітних вправ.

Більшу увагу потрібно приділяти вимірюванню кутів за допомогою шаблона. Його модель можна виготовити з двох смужок цупкого паперу, скріпивши їх дротиками так, щоб вони розсувались і зсувались. За допомогою шаблона діти наочно впевнюються, що величина кута залежить не від довжини його сторін, а від їх взаємне положення сторін одна відносно іншої.[3]

При вивченні величин кутів у середній школі можна використовувати наступну схему:

- загальний огляд кутів;
- кути із загальною вершиною;
- градусний вимір кутів. [5]

У навчальній літературі кут визначається по різному [5,4]:

1. Кут є фігура, утворена двома променями, що виходять із загальної точки (Рис.1).

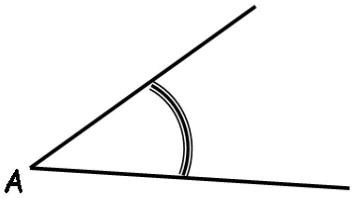


Рис.1. Кут A

2. Кут є частина площини, обмежена між двома променями, що виходять із загальної точки (Рис.2).

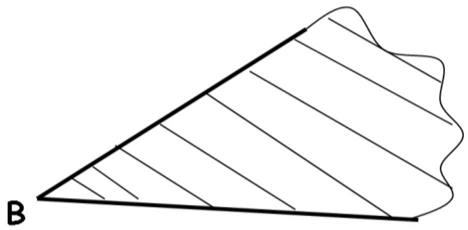


Рис. 2. Кут B

3. Кут є сукупність променів, що виходять із загальної точки і перетинають даний відрізок. (Рис.3)

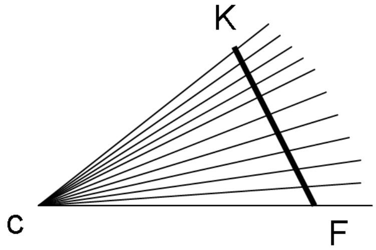


Рис.3. Кут C, утворений на відрізку KF

4. Кутом називається «частина пучка променів, обмежена двома променями (того ж пучка), подібно до того як відрізок є частина прямої лінії, обмежена двома точками (Рис.4).

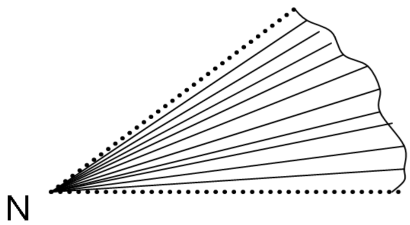


Рис.4. Кут N

5. Кутом називається сукупність точки і двох променів, що виходять з цієї точки.Під точками кута ми розуміємо його вершину і всі крапки його сторін (Рис.5).

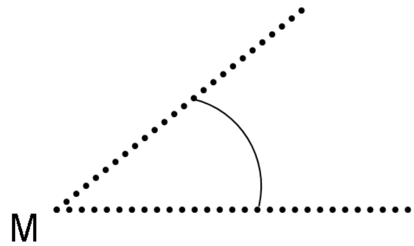


Рис.5 Кут M

У шкільній практиці зазвичай вживаються перше чи друге означення (по суті вони є не визначеннями, а описами).

При цьому треба зауважити, що якщо використовується перше означення кута, то вводиться ще й поняття внутрішньої області кута.

У подальшому шкільному курсі елементарної математики поняття кута розширюється (у тригонометрії - кут як міра обертання, в стереометрії - кут між двома перехресними прямими, кут між прямою і площиною, двогранний кут і т. д.), причому поняття «невизначеною частини площині» у явному вигляді вже не фігурує.Тому першим означенням слід надати особливу перевагу.[4]

Означення та вимірювання кутів у середній школі доповнюється такими діями з величинами кутів як [2]:

- порівняння;
- додавання та віднімання величин кутів;
- множення кута на ціле число
- поділ кута на цілі частини.

З поняттями прямого і розгорнутого кута учні ознайомлюються на пропедевтичному курсі геометрії, тобто у молодших класах(методи ознайомлення з ними були розглянуті раніше).

Знаючи, що всі розгорнуті кути рівні між собою, і всі прямі кути рівні між собою, можна повідомити учням про те, що розгорнутий і прямий кути мають постійні величини (як і метр і кілограм, які теж мають постійну величину).Звідси, природно прийняти за одиницю вимірювання кутів кут, наприклад прямий кут, який має постійну величину.

Слід чітко роз'яснити для учнів, що величина кута - це додатна величина, чисельне значення якої має такі властивості:

1. Рівні кути мають рівні градусні міри;
2. Якщо кут розбивається на частини, градусні міри яких відомі, то градусна міра всього кута дорівнює сумі градусних мір цих кутів.
3. Менший кут має меншу градусну міру, а більший кут має більшу градусну міру.

При проведенні уроків з теми «Величини кутів» матеріал має закріплюватися на гарно підібраній добірці прикладів.Бажано проводити самостійні роботи як навчального, так і контролюючого характеру по кожному з досліджуваних випадків.[5]

При проведенні занять на математичному гуртку чи у класі з поглибленим вивченням математики можна розповісти учням про поняття «величини кута» у більш поглибленій формі. Ось орієнтовний уривок з пояснення вчителя:

«Традиційно кути вимірюють у градусах, мінутах і секундах. При цьому розгорнутий кут ділиться на 180 градусів, кожен із градусів ділиться на 60 мінут, кожна з мінут на 60 секунд. Градуси позначаються значком °, наприклад, 37°, мінути штрихами, а секунди подвійними штрихами.

У міжнародній системі одиниць СІ використовується інший спосіб вираження величини кута, при якому кут - безрозмірна величина. Цей спосіб вимірювання базується на означенні радіана. При цьому величина кута за означенням дорівнює відношенню довжини дуги кола з центром у вершині кута і будь-яким радіусом до радіуса. Це відношення не залежить від вибору радіуса. Кут величиною 1 радіан визначається як такий, при якому відношення довжини дуги до радіуса дорівнює одиниці, тобто довжина дуги дорівнює радіусу. Безрозмірні величини кутів зручно використовувати у тригонометрії.

Кут можна розглядати як фігуру, утворену обертанням променя, починаючи з певного початкового положення. Тоді, в залежності від напрямку обертання, величина кута може приймати як додатні, так і від'ємні значення(Рис.6а,6б)

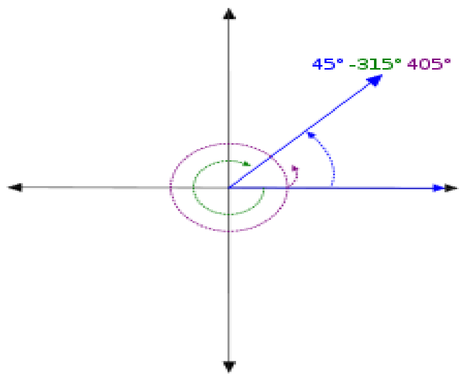


Рис.6а.Величина кута, у залежності від напрямку обертання

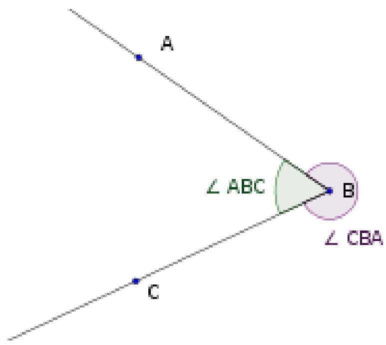


Рис.6б. Величина кута, у залежності від напрямку обертання

За домовленістю вважається, що при обертанні променя проти годинникової стрілки величина кута збільшується від нуля до додатних значень. При обертанні за годинниковою стрілкою величина кута зменшується, приймаючи від'ємні значення.»

Література

1. Мішин В.І.Методика викладання математики в середній школі.-М.:Просвітництво.1987
2. Богомолов С.А.Геометрія.-М.: Учпедгіз.1949.
3. Давидів А.Ю.Елементарна геометрія .- М.: 35 Дуленова.1915.
4. Кисельов А.П.Геометрія ч. 1.Планіметрія.-М.: Учпедгиз.1938.
5. Перепелкин Д.І.Курс елементарної геометрії.-М.: Гостехіздат.1948
6. Програми середньої загальноосвітньої школи 1 – 4 класи. – К. : Освіта, 2001.– 285 с.
7. Бескін Н.М. Методика геометрії .- М.: Учпедгиз. 1947.

Баранова Ольга Олександрівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ПРО ФОРМУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Постановка проблеми. Екстремальні задачі – задачі на максимум і мінімум – у всі часи привертали увагу вчених. Зі спроб розв'язати ту чи іншу екстримальну задачу виникали і розвивались нові теорії, а іноді і напрями математики.

В чому причина такої зацікавленості? По-перше, серед задач на максимум і мінімум багато задач, які цікаво розв'язувати. Але багато екстримальних задач виникають на практиці. Максимуми і мінімуми постійно присутні в інженерних розрахунках, в архітектурі, економіці… Крім того, екстремальні задачі знаходять застосування в природничих науках: фізиці, хімії, біології. Давно вже було помічено, що оточуючий світ в багато чому влаштований за екстримальними законами. Леонардо Ейлер (1707 – 1783), один із великих математиків, казав: «В світі не відбувається нічого, в чому б не було видно ролі якого-небудь максимуму чи минімуму».

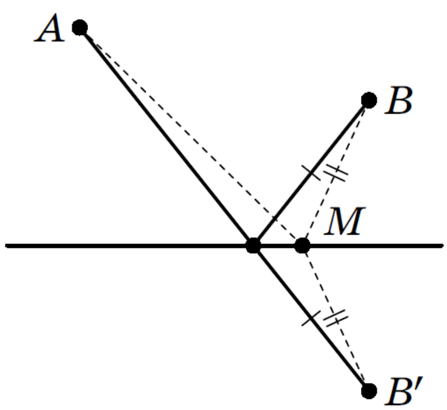
Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основні проблеми введення екстремальних властивостей геометричних фігур в курсі геометрії загальноосвітньої школи, їх ефективне застосування в навчальному процесі викладені в роботах Прасолова В. В., Шклярського Д. О., Ченцова Н. Н., Протасова В. Ю., Ахтершова С., Тихомирова В. М.

Мета даної статті: обґрунтувати введення екстремальних властивостей геометричних фігур у процесі вивчення геометрії у школі.

Виклад основного матеріалу. З екстремальними задачами учні знайомляться в середній школі. Ось, наприклад, найвідоміша з них:

Задача 1. На площині задана пряма l і точки A, B по одну сторону від неї. Знайти на прямій точку M, для якої сума $AM + BM$ найменша.

Розв'язання.



Для початку відобразимо точку B відносно прямої l, отримаємо точку B'. Відрізок BM переходить при симетрії у відрізок $B'M$, відповідно $AM + BM = AM + B'M$. Згідно нерівності трикутника, сума $AM + B'M$ приймає найменше значення, коли точка M лежить на відрізку AB'. Таким чином, M – точка перетину прямої l з відрізком AB'; для цієї точки сума $AM+BM$ рівна довжині відрізка AB', при іншому виборі точки M ця сума буде більшою за AB'.

Один із американських шкільних підручників з геометрії починається не з понять «точка», «пряма» і не з перших аксіом, а одразу з розгляду цієї задачі. З її допомогою можна пояснити закон відбивання світла «кут падіння рівний куту відбивання», оскільки в однорідному середовищі світло розповсюджується по найкоротшому шляху. Крім того, ця проста задача лежить в основі так званих фокальних властивостей конічних перерізів – еліпса, гіперболи і параболи.

Вважається, що вперше задачі про найкоротший шлях між двома точками по відношенню до прямої, або задача про відбиття світла, була розв’язана давньогрецьким математиком Героном Александрійським в трактаті «Про дзеркала». Через це її інколи називають задачею Герона.

Найпростіші «екстремальні» задачі геометричного змісту вивчаються у курсі геометрії восьмого класу шкіл з поглибленим вивченням математики, у розділі «Геометричні нерівності». На вивчення даного розділу програмою виділено 8 годин, дві з яких – на вивчення екстримальних властивостей геометричних фігур.

При формуванні екстремальних властивостей геометричних фігур спочатку розглядають ввідні задачі. Розглянемо деякі з них.

Задача 2. Серед всіх трикутників з даними сторонами AB і AC знайдіть той, у якого найбільша площа.

Задача 3. В трикутнику ABC знайдіть точку, з якої сторону AB видно під найменшим кутом.

Задача 4. Доведіть, що серед всіх трикутників з даними стороною a і висотою h_a найбільшу величину кута α має рівнобедрений трикутник.

Задача 5. Серед всіх трикутників з даними сторонами AB і AC ($AB<AC$) знайдіть той, у якого радіус описаного кола максимальний.

Задача 6. Діагоналі випуклого чотирикутника рівні d_1 і d_2. Яке найбільше значення може мати його площа?

Вводяться задачі на максимум і мінімум за такими етапами:

- трикутник;
- екстримальні точки трикутника;
- кут;
- чотирикутники;
- багатокутники;
- різні задачі;
- екстримальні властивості правильних багатокутників.

Розглянемо деякі з них.

Задача 7. Доведіть, що серед всіх трикутників з фіксованим кутом α і площею S найменшу довжину сторони BC має рівнобедрений трикутник з основою BC.

Розв’язання.

За теоремою косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) =$$

$$= (b-c)^2 + 4S\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Так як значення другого доданка незмінне, то a мінімальне, якщо $b = c$.

Задача 8. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC обрана точка X; M і N – її проекції на катети AC і BC.

а) При якому положенні точки X довжина відрізка MN буде найменшою?

б) При якому положенні точки X площа чотирикутника $CMXN$ буде найбільшою?

Розв'язання.

а) Так як $CMXN$ – прямокутник, то $MN = CX$. Тому довжина відрізка MN буде найменшою, якщо CX – висота.

б) Нехай $S_{ABC} = S$. Тоді $S_{AMX} = AX^2 \cdot \dfrac{S}{AB^2}$ і $S_{BNX} = BX^2 \cdot \dfrac{S}{AB^2}$. Оскільки $AX^2 + BX^2 \geq \dfrac{AB^2}{2}$ (причому рівність досягається, тільки якщо X – середина відрізка AB), то $S_{CMXN} = S - S_{AMX} - S_{BNX} \leq \dfrac{S}{2}$. Площа чотирикутника $CMXN$ буде найбільшою, якщо X – середина сторони AB.

Задача 9. На одній стороні гострого кута дані точки A і B. Побудуйте на іншій його стороні точку C, з якої відрізок AB видно під найбільшим кутом.

Розв'язання.

Нехай O – вершина даного кута. Точка C є точкою дотику сторони кута з колом, яке проходить через точки A і B, тобто $OC^2 = OA \cdot OB$. Для того, щоб знайти довжину відрізка OC достатньо провести дотичну до будь-якого кола, яке проходить через точки A і B.

Задача 10. Площа трапеції дорівнює 1. Яку найменшу величину може мати найбільша діагональ цієї трапеції.

Розв'язання.

Довжини діагоналей трапеції позначимо через d_1 і d_2, довжини їх проекцій на основу – через p_1 і p_2, довжини основ – через a і b, висоту – через h. Нехай для означеності $d_1 \geq d_2$. Тоді $p_1 \geq p_2$. Очевидно, що $p_1 + p_2 \geq a + b$. Через це $p_1 \geq \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{S}{h} = \dfrac{1}{h}$. Звідси слідує що, $d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \dfrac{1}{h^2} + h^2 \geq 2$, причому рівність досягається, тільки якщо $p_1 = p_2 = h = 1$. При цьому $d_1 = \sqrt{2}$.

Задача 11. Серед всіх багатокутників, вписаних в дане коло, знайдіть той, у якого сума квадратів довжин сторін максимальна.

Розв'язання.

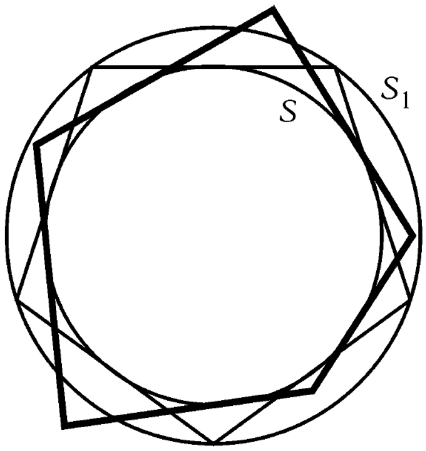
Якщо в трикутнику ABC кут B тупий чи прямий, то за теоремою косинусів $AC^2 \geq AB^2 + BC^2$. Через це, якщо в многокутнику кут при вершині B

не гострий, то, відкинувши вершину B, отримаємо многокутник з неменшою сумою квадратів довжин сторін. Так як у будь-якого n-кутника при $n \geq 3$ є негострий кут, з допомогою такої операції ми приходимо до трикутника. Серед всіх трикутників, вписаних в дане коло, найбільшу суму квадратів довжин сторін має правильний трикутник.

Задача 12. Доведіть, що серед всіх n-кутників, описаних навколо даного кола, найменшу площу має правильний n-кутник.

Розв'язання.

Нехай неправильний n-кутник описаний навколо кола S. Опишемо навколо цього кола правильний n-кутник, а навколо нього опишемо коло S_1. Доведемо, що площа частини неправильного n-кутника, яка знаходиться всередині S_1, більша за площу правильного n-кутника. Всі дотичні до S відтинають від S_1 рівні сегменти. Тому сума площ сегментів, відділених від S_1 сторонами правильного n-кутника, рівна сумі площ сегментів, відділених від S_1 сторонами неправильного n-кутника або їх продовженнями. Але для



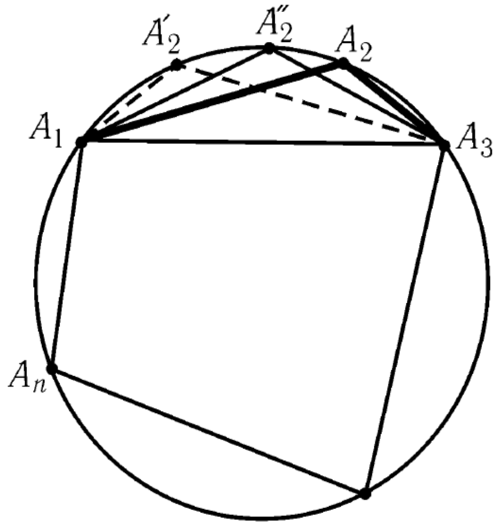
правильного n-кутника ці сегменти не перетинаються (точніше кажучи, не мають спільних внутрішніх точок), а для неправильного n-кутника деякі з них обов'язково перекриваються, через що площа об'єднання цих сегментів для правильного n-кутника більша, ніж для неправильного. Звідси слідує, що площа частини неправильного n-кутника, яка знаходиться всередині кола S_1, більша за площу правильного n-кутника, а площа всього неправильного n-кутника тим паче більша за площу правильного.

Задача 13. Доведіть, що серед всіх n-кутників, вписаних в дане коло, найбільшу площу має правильний n-кутник.

Розв'язання.

Позначимо довжину сторони правильного n-кутника, вписаного в коло, через a_n. Розглянемо довільний неправильний n-кутник, вписаний в це коло. У нього обов'язково знайдеться сторона довжиною меншою a_n. А от сторони з більшою довжиною, ніж a_n, у нього може і не бути, але тоді цей многокутник можна вписати в сегмент, що відсікається стороною правильного n-кутника. Так як при симетрії відносно сторони правильного n-кутника сегмент, що відсікається цією стороною, потрапляє всередину n-кутника, то площа n-

кутника більша за площу сегмента. Тому можна вважати, що у n-кутника, який розглядаємо, є сторона довжиною менше за a_n і сторона більша a_n.



Ми можемо поміняти місцями сусідні сторони n-кутника, тобто замість многокутника $A_1A_2A_3...A_n$ взяти многокутник $A_1A_2'A_3...A_n$, де точка A_2' симетрична точці A_2 відносно серединного перпендикуляра до відрізка A_1A_3. При цьому два многокутники вписані в одне і те ж коло і їх площі рівні. Очевидно, що з допомогою цієї операції можна зробити сусідніми будь-які дві сторони многокутника. Тому будемо вважати, що у n-кутника, який розглядаємо, $A_1A_2 > a_n$ і $A_2A_3 < a_n$. Нехай A_2' – точка, симетрична до точки A_2 відносно серединного перпендикуляра до відрізка A_1A_3. Якщо точка A_2'' лежить на дузі A_2A_2', то різниця кутів при основі A_1A_3 трикутника $A_1A_2''A_3$ менша, ніж у трикутника $A_1A_2A_3$, так як міри кутів $A_1A_3A_2''$ і $A_3A_1A_2''$ знаходяться між мірами кутів $A_1A_3A_2$ і $A_3A_1A_2$. Оскільки $A_1A_2' < a_n$ і $A_1A_2 > a_n$, то на дузі A_2A_2' існує точка A_2'', для якої $A_1A_2'' = a_n$. Площа трикутника $A_1A_2''A_3$ більша за площу трикутника $A_1A_2A_3$. Площа многокутника $A_1A_2''A_3...A_n$ більша за площу вихідного многокутника, і у нього щонайменше на 1 більше сторін, які рівні a_n. Після кінцевого числа кроків ми прийдемо до правильного n-кутника, причому кожен раз площа збільшується. Відповідно, площа будь-якого неправильного n-кутника, вписаного в коло, менша за площу правильного n-кутника, вписаного в те ж коло.

Задача 14. Яку найменшу ширину повинна мати нескінченна смужка паперу, щоб із неї можна було вирізати будь-який трикутник площею 1?

Розв'язання.

Так як площа правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, сторона правильного трикутника площею 1 дорівнює $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, а його висота – $\sqrt[4]{3}$.

Доведемо, що із смужки шириною менше $\sqrt[4]{3}$ не можна вирізати правильний трикутник площею 1. Нехай правильний трикутник ABC лежить всередині смужки шириною менше $\sqrt[4]{3}$. Нехай для означеності проекція вершини B на межу смужки лежить між проекціями вершин A і C. Тоді пряма, проведена через точку B перпендикулярно межі смужки, перетинає відрізок AC в деякій точці M. Висота трикутника ABC не перевищує BM, а BM не більше за ширину смужки, через це висота трикутника ABC менша за $\sqrt[4]{3}$, тобто його площа менша 1.

Залишається довести, що із смужки шириною $\sqrt[4]{3}$ можна вирізати будь-який трикутник площею 1. Доведемо, що у будь-якого трикутника площею 1 є висота, що не перевищує $\sqrt[4]{3}$. Для цього достатньо довести, що у нього є сторона не менша $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Припустимо, що всі сторони трикутника ABC менші за $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Нехай α – найменший кут цього трикутника. Тоді $\alpha \le 60^\circ$ і $S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \sin\alpha}{2} < \left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1$. Отримали протиріччя. Трикутник, у якого висота не перевищує $\sqrt[4]{3}$, можна помістити в смужку шириною $\sqrt[4]{3}$, поклавши сторону, на яку опущена ця висота, на сторону смужки.

Висновки. Основні екстремальні властивості геометричних фігур доцільно вводити на основі життєвих прикладів, зокрема задачі про відбиття світла. Це сприятиме кращому розумінню учнями практичного значення даного матеріалу, а, отже, і якісному засвоєнню нових знань.

Література

1. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учеб. пособие.—5-е изд., испр.и доп.— М. : МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006.— 640 с.
2. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии: брошюра по материалам лекции.— М.: МЦНМО, 2005. — 56 с.
3. Ахтершев С. П. Задачи на максимум и минимум. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 192 с.
4. Шклярський Д. О.,Ченцов М. М. Геометричні нерівності і задачі на максимум і мінімум. – М.: «Наука», 1970.
5. Возняк Г. М. Розв'язування екстремальних задач в курсі геометрії восьмирічної школи. – Львів, 1976. – ст. 20-40.
6. Ізаак Д.Ф. Задачи по геометри на максимум и минимум в X классе// Математика в школе. – 1984. – № 2. – С. 10-15.

Жбанкова Анна Леонідівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Постановка проблеми. У методиці навчання математики важливе значення приділяють введенню математичних понять. Багато вчителів вважають, що процес формування поняття під час уроку має бути спрямований на розуміння інформації шляхом сприймання і осмислення поняття у всіх його проявах і взаємозв'язках. Така системність знань вже на етапі первісного опрацювання виявляється у здатності учня розрізняти суттєві і несуттєві ознаки поняття, бачити можливості для узагальнення й обмеження, виявляти його місце у системі математичних понять.[3]

Також вчителі вважають, що введення математичного поняття повинно сприяти набуттю учнями практичних навичок, тому варто не стільки мотивувати власне поняття чи необхідність його вивчення, скільки забезпечити умови для творчої навчально-пізнавальної праці учнів, стимулювати їх особисту зацікавленість у засвоєнні знань, створювати робочий настрій.

Аналіз останніх досліджень. У методичній літературі питанню введення математичних понять приділяли увагу Бевз Г. П., Гришина Т.А., Слєпкань З.І., Тализіна Н. Ф., Фрідман Л.М. та інші.

Зокрема З.І. Слєпкань чітко виділила основні етапи введення математичних понять конкретно-індуктивним та абстрактно-дедуктивним методами. Введення поняття конкретно-індуктивним методом передбачає: аналізуються конкретні приклади, дібрані вчителем, серед яких повинні бути як об'єкти, що належать даному поняттю, так і ті що не належать йому; вводиться термін; виявляються суттєві властивості поняття; з'ясовуються несуттєві властивості поняття, що формулюються; формулюється означення поняття; розглядаються вправи на підведення під поняття. Введення поняття абстрактно-дедуктивним методом завбачує: формулюється означення поняття; розглядаюся приклади об'єктів, що належать даному поняттю; аналізуючи означення, виявляються суттєві і несуттєві властивості поняття; розглядаються вправи на підведення під поняття та виведення наслідків.[1]

Г.П. Бевз виділив умови для того, щоб означення були правильними і вони повинні задовольняти такі правила: 1) означення повинно бути відповідним означуваному поняттю; 2) означення не повинно містити ще не означених понять; 3) означення не повинні суперечити одне одному; 4) означення по можливості не повинно містити нічого зайвого.[2]

Т. А. Гришина пропонує своє бачення введення геометричних понять, зокрема, нею було виділено 4 кроки введення поняття: 1) номінація поняття – його назва, найменування, зображення на площині, введення нової термінології та символіки; 2) інтерпретація поняття – роз'яснення його змісту: виділення суттєвих ознак, установлення родо-видових зв'язків; 3) екстраполяція поняття – поширення висновків, одержаних на попередньому етапі, на всю сукупність споріднених понять, розкриття цього обсягу; 4) ідентифікація поняття – уподібнення поняття, узагальнення критеріїв його розпізнавання для підведення об'єкта під поняття.[3]

Зрозуміло, що у щоденній підготовці до уроків, не завжди можна виділити всі перераховані етапи. Вважаємо для коректного введення математичного поняття слід виділяти три основні етапи:

- формулювання означення поняття;
- розгляд прикладів об'єктів, що належать даному поняттю;
- виявлення суттєвих та з'ясування несуттєвих властивостей поняття.

У залежності від підготовки учнів, від матеріалу, що вивчається, послідовність цих етапів може змінюватись.

Мета даної статті: ознайомити з одним із можливих способів формування поняття подібні трикутники в курсі геометрії 8 класу.

Виклад основного матеріалу. Відповідно до діючих програм з геометрії поняття подібних трикутників вводиться у 8 класі. Учні повинні засвоїти означення подібних трикутників та їх ознаки, навчитися застосовувати вивчені знання на практиці. Отже, в межах теми «Подібність трикутників» розглядаються такі нові поняття: подібні фігури та подібні трикутники.

Зокрема, у підручнику авторського колективу Мерзляк А.Г. та інші «Геометрія 8» [4] поняття подібних трикутників вводиться таким чином: *два трикутники називаються подібними, якщо у них рівні кути і відповідні сторони пропорційні*.

У підручниках з геометрії для 8 класу авторів Бевз Г.П. та інші [5], Єршов С.В.[6] підхід до введення цих понять практично такий самий: спочатку описується поняття подібних фігур, потім означається поняття подібних трикутників.

У підручнику «Геометрія 8» авторського колективу Бурда М.І., ТарасенковаН.А. [7] на конкретних прикладах двох подібних трикутників означається поняття подібність трикутників. Поняття подібні фігури тут не розглядається.

У підручнику з геометрії для 8 класу Апостолової Г.В.[8] параграф «Подібність трикутників» починається із означення, яке формулюється таким чином: *два трикутники називаються подібними, якщо в них рівні кути, а проти рівних кутів лежать пропорційні сторони.* Хоча означення із підручника [8] є тотожно сформульованим у попередніх авторів, однак доступнішим і кращим для сприйняття учнями вважаємо означення, яке сформульовано у підручниках [4], [5], [6], [7].

При введенні поняття подібних трикутників в курсі планіметрії основної школи спочатку потрібно сформувати в учнів поняття подібних фігур, розібравшись з подібністю у реальному і в повсякденному житті. Наочність полегшує сприйняття математичних понять, сприяє утворенню ясних і точних образів. На рисунках 1 - 4 наведено приклади подібних трикутників, які зустрічаються у нашому житті.

Кафедральний Собор в Сієні Сіднейський оперний театр

Рис.1. Рис.2.

Англійська архітектура Зуби акули

Рис.3. Рис.4.

Далі використаємо малюнок двох подібних трикутників з позначенням рівності кутів (рис.5) і запропонуємо інший запис з використанням буквеної символіки. Таким чином, подібність трикутників означається через рівність кутів пропорційності відповідних сторін. Нехай $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ тоді $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1B_1} = k$. З останньої рівності випливає поняття коефіцієнта подібності.

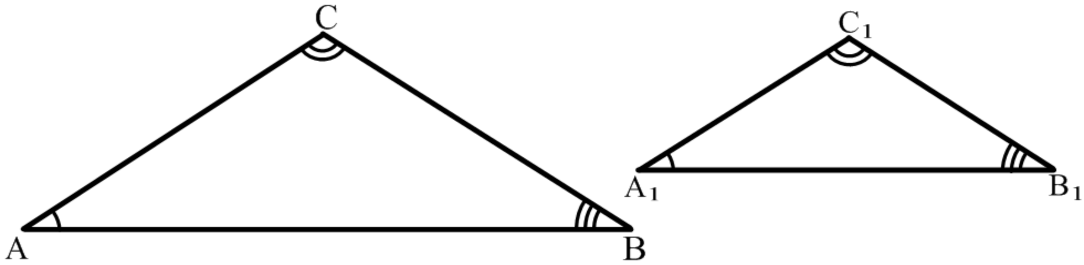


Рис.5.

Потім доцільно сформулювати означення: *два трикутники називаються подібними, якщо у них рівні кути і відповідні сторони пропорційні.*

На уроці, працюючи з учнями, при введенні нового поняття, перш за все потрібно з'ясувати структурні зв'язки означуваного поняття з раніше вивченими. При вивченні подібних трикутників ми знаємо, що у попередніх класах вивчались рівні трикутники і учні добре засвоїли цю тему, їм відомо, що *рівними трикутниками називають трикутники, якщо їх відповідні елементи рівні.* А при введенні терміну подібних трикутників потрібно наголосити на властивостях, які притаманні лише цьому терміну. У нашому випадку увага звертається на те, що кути у трикутників рівні і відповідні сторони пропорційні, а те що трикутники матимуть різні розміри – це лише урізноманітнює загальний вигляд фігури.

Після введення поняття подібності трикутників доцільно навести найпростіші приклади на застосування цього поняття. Закріпити дане означення за допомогою специфічних вправ, використовуючи наочність. Для прикладу можна запропонувати такі завдання:

1) а) Виріжте з паперу чотири рівні трикутники.

б) Один з них залиште без змін, а від інших відріжте частини, що відтинаються середніми лініями, паралельними кожній із сторін (рис.6).

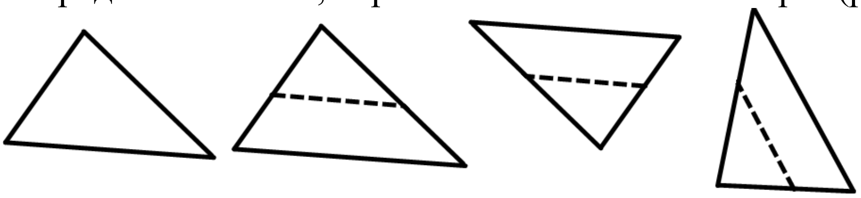


Рис.6.

в) Порівняйте кути трьох отриманих трикутників із кутами першого трикутника. Зробіть висновок.

г) Виміряйте довжини сторін двох утворених трикутників. Порівняйте відношення довжин їх відповідних сторін. Зробіть висновок.

Зрозуміло, що якщо учні виконають це завдання то вони усвідомлять саме означення подібних трикутників. Адже це все вже було перевірено ними на практиці, і дане поняття залишиться в їхній пам’яті на довгий строк.

2) З нижче наведених трикутників виберіть зайвий:

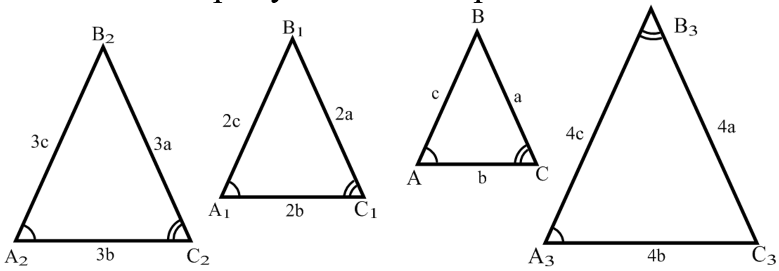


Рис. 7.

3) З наведених нижче трикутників виберіть пари подібних трикутників:

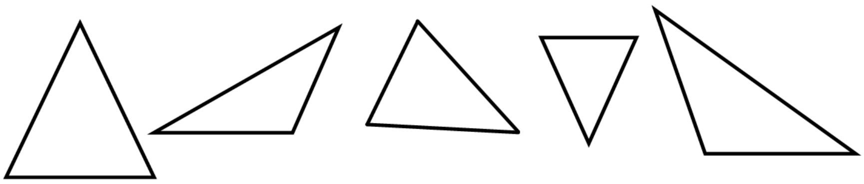


Рис.8.

4) Чи подібні трикутники зображені на рисунку 9? Якщо так, то назвіть їх відповідні кути і відповідні сторони.

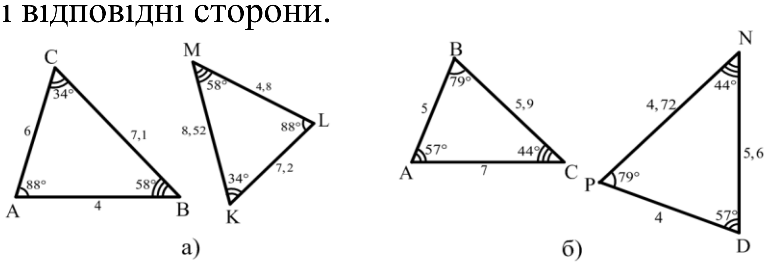


Рис.9.

5) На рисунку 10 зображено подібні трикутники ABC і DEF, рівні кути яких позначено однаковою кількістю дуг. Запишіть пропорційні сторони цих трикутників.

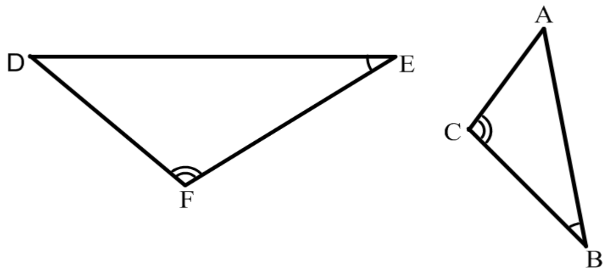


Рис.10.

Правильно виконуючи усні вправи закріплюється вивчений матеріал і виробляються навички розв’язування вправ.

Висновки: отже**,** мипродемонстрували процес формування поняття подібні трикутники в курсі геометрії 8 класу. Слід відмітити, що перш ніж розпочати введення цього поняття, потрібно розглянути поняття подібних фігур. А при поясненні матеріалу, що стосується даної теми доречно звернути увагу на суттєві та несуттєві властивості поняття. Після цього закріпити вивчений матеріал на практиці.

Література

1. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге видання, допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – С.68.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики/ Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – С.327.
3. Гришина Т.О. Повне опрацювання понять на уроці геометрії. / Т.О.Гришина // Математика в школі. – 1999. - №3. – С.23-26.
4. Мерзляк А.Г. Геометрія. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / А.Г.Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – К.: «Гімназія». – 2008. – С.86-87.
5. Бевз Г.П. Геометрія. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / Г.П. Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: «Вежа». – 2008. – С.80-81.
6. Єршова А.П. Геометрія. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / А.П.Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В.Єршов. – К.: «Ранок». – 2008. – С.105.
7. Бурда М.І. Геометрія. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова – К.: «Зодіак-Еко». – 2008. – С.80-81.
8. Апостолова Г.В. Геометрія. 8 клас. Підручник для учнів 8 класу / Г.В.Апостолова. – К.: «Генеза». – 2008. – С.116-117.

Зарудня Тетяна Олександрівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ЦЕНТРА МАС У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Постановка проблеми. У геометрії важливим є поняття центра мас. Декілька простих властивостей центра мас дозволяють розв'язувати різні геометричні задачі. Зокрема, таким шляхом вдається відповісти на питання, чи перетинаються декілька прямих в одній точці, чи належать декілька точок одній прямій (або одній площині) і т. п. Ці міркування є ефективними при доведенні нерівностей і розв'язанні різноманітних задач.

Розповсюдженою є точка зору, що міркування з використанням властивостей центра мас не можуть дати математично строгих розв'язань геометричних задач (хоча можуть бути використані для вгадування правдоподібних відповідей до цих задач). Однак така думка є помилковою. Поняття механіки не тільки слугують цінним евристичним засобом, наділені строгою математичною формою, вони дозволяють отримувати строгі математичні розв'язання задач геометрії і алгебри.

Мета статті: Описати технології введення поняття центра мас у шкільному курсі геометрії.

Виклад основного матеріалу. Відповідно до діючої програми з геометрії (8 клас) для класів з поглибленим вивченням математики, в межах теми «Подібність трикутників» вивчаються чудові точки трикутників, зокрема, і центр мас (центроїд). Проте часу на вивчення цього поняття виділено не достатньо. Доцільно виділити час на вивчення поняття центра мас на факультативних заняттях.

Головною ідеєю процесу формування поняття центра мас є формулювання чисто математичного визначення центра мас і встановлення його основних властивостей, що дозволяє по-новому викласти розв'язання багатьох геометричних задач, причому ці розв'язання проводяться «на мові механіки» і є математично строгими.

Розглянемо наочне введення поняття центра мас.

У фізиці під матеріальною точкою розуміють тіло, розмірами і формою якого можна знехтувати при порівнянні його з відстанями до інших тіл, які розглядаються в задачі. З метою спрощення міркувань таке «мале» тіло розглядають як геометричну точку, тобто вважають, що вся маса тіла зосереджена в одній точці. Якщо в точці A зосереджена маса m, то позначатимемо цю матеріальну точку через mA.

Розглядатимемо дві невеликих кульки, які мають маси m_1 та m_2 і з'єднані жорстким «невагомим» стержнем. На цьому стержні є така точка Z, що коли повісити всю систему в цій точці, то вона буде в рівновазі – ні одна із кульок не «перетягне» іншу. Ця точка Zі є центр мас двох матеріальних точок з масами m_1 та m_2.

Далі доцільно пояснити, що таке ж явище спостерігається і для великої кількості матеріальних точок. Уявимо, що в деякій частині простору (наприклад, всередині деякого куба) знаходиться nкульок з масами m_1, m_2,…, m_n. Розміри кульок вважають малими (порівняно з найменшою відстанню між ними). Інакше кажучи, мова йде про n матеріальних точок

$$m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n. \quad (1)$$

Будемо вважати, що вся область, що розглядається, заповнена речовиною, масою якої можна знехтувати порівняно з масою кожної кульки (пінопласт); ми вважаємо, що цей пінопласт не гнеться, не стискається, не розтягується. Матеріальні точки (1) розташовані на ньому нерухомо.

Можна формувати в учнів уявлення про центр мас іншим способом: кульки, що розглядаються, з’єднані «невагомими» стержнями в одну жостку систему. Якщо вибрати довільну точку одного з стержнів і повісити всю систему на нитці, що закріплена в цій точці, то система, що розглядається, взагалі кажучи, не опиниться в стані рівноваги. Одна частина «перетяне». Але є така чудова точка Z, що коли ми підвісимо всю систему на вертикальній нитці, що прикріплена в точці Z, вважаючи, що один з стержнів проходить через цю точку (рис. 1), а потім як завгодно повернемо систему навколо точки Z, зупинимо і відпустимо, то вона залишиться в рівновазі. Таку точку Z називають центром мас системи матеріальних точок (1).

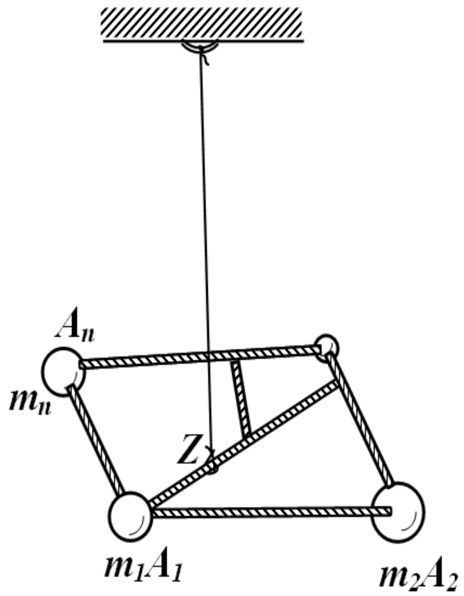


Рис.1

При застосуванні цього поняття до розв’язування геометричних задач використовується наступні властивості центра мас:

1. Будь-яка система, яка складається з скінченного числа матеріальних точок, має центр мас, причому він єдиний [1].

2. Центр мас двох матеріальних точок розташований на відрізку, який з’єднує ці точки; його розташування (рис. 2) визначається архімедовим правилом важеля або, як його ще називають, «золотим правилом механіки»:

добуток маси матеріальної точки на відстані від неї до центра мас однаковий для обох точок, тобто

$$m_1 d_1 = m_2 d_2,$$

де m_1, m_2 - маси матеріальних точок, а d_1, d_2 - відповідні плечі, тобто відстані від матеріальних точок до центра мас [2].

3. Якщо в системі, яка складається з скінченного числа матеріальних точок, зазначити декілька матеріальних точок і маси всіх відмічених точок перенести в їхній центр мас, то від цього положення центра мас всієї системи не зміниться [1].

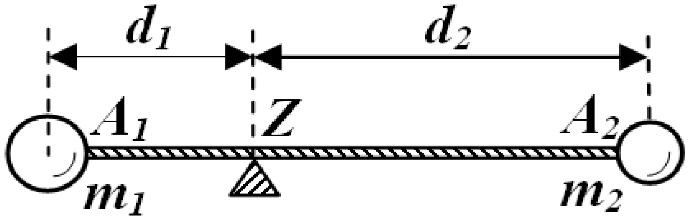


Рис.2

Покажемо, що вказані властивості є засобом доведення теорем і розв'язання геометричних задач.

Приклад 1. Доведемо теорему Архімеда: три медіани трикутника мають спільну точку, і кожна з цих медіан ділиться цією точкою у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини [3].

Розв'язання (запропоноване Архімедом). Нехай ABC (рис. 3) – даний трикутник; AA_1, BB_1, CC_1 - його медіани.

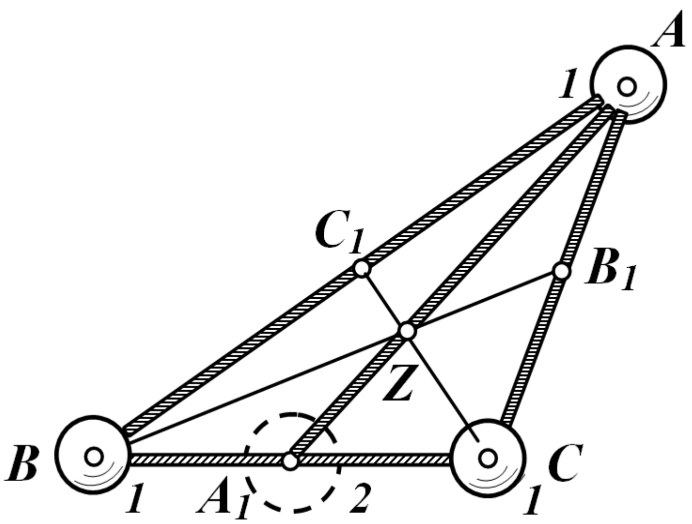


Рис.3

Наділимо вершини A, B, C рівними масами, наприклад, по 1 граму. Отримана система трьох матеріальних точок $1A, 1B$, $1C$ має однозначно визначений центр мас Z (властивість 1). Згідно властивості 3 розташування центра мас не зміниться, якщо маси матеріальних точок $1B$ і $1C$ ми

перенесемо в їхній центр мас, тобто (згідно властивості 2) в точку A_1. Але тоді Z буде центром мас лише двох матеріальних точок $2A$ і $1A$.
Це означає, що $Z \in [AA_1]$. Аналогічно переконаємося, що $Z \in [BB_1]$ і $Z \in [CC_1]$. Таким чином, всі три медіани мають спільну точку Z. Крім того, за правилом важеля (властивість 2) маємо $2|ZA_1| = 1|ZA|$, або $|ZA_1| : |ZA_1| = 2:1$.

Розглянемо математичне введення поняття центра мас.

Для того, щоб за допомогою поняття центра мас отримувати математично коректні розв'язання геометричних задач, неприродним є визначення поняття центра мас за допомогою «підвішування на нитці». І хоча цю фізичну картину можна постійно уявляти, слід пояснити учням математичну суть поняття центра мас за допомогою геометричних термінів. Інакше кажучи, слід провести математизацію описаної вище наочної картини.

Твердження «матеріальна точка mA» буде означати: «Точка *A з відповідним їй числом* m». Число m будемо називати *масою* матеріальної точки mA.

Доцільно провести попередній евристичний огляд для того, щоб на основі трьох властивостей, які були сформульовані, з'ясувати, як може формулюватися математичне визначення центра мас. Для цього спочатку розглянемо дві матеріальні точки m_1A_1 і m_2A_2, і нехай Z - центр мас цих точок (властивість 1). Рівність $m_1d_1 = m_2d_2$ (властивість 2) можна записати у вигляді $m_1\left|\overrightarrow{ZA_1}\right| = m_2\left|\overrightarrow{ZA_2}\right|$(рис. 2), тобто $\left|m_1\overrightarrow{ZA_1}\right| = \left|m_2\overrightarrow{ZA_2}\right|$. Враховуючи, що вектори $\overrightarrow{ZA_1}$ і $\overrightarrow{ZA_2}$ мають протилежні напрямки, звідси отримуємо $m_1\overrightarrow{ZA_1} = -m_2\overrightarrow{ZA_2}$, тобто

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Отже, для того, щоб виконувалися властивості 1 і 2, необхідно, щоб центром мас двох матеріальних точок m_1A_1 і m_2A_2 була така точка Z, для якої справедлива рівність (2).

Нехай тепер дано три матеріальні точки m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3, і нехай Z - центр мас цієї системи матеріальних точок (властивість 1). Позначимо через C центр мас системи двох матеріальних точок m_1A_1 і m_2A_2. Тепер згідно (2) ,

$$m_1\overrightarrow{CA_1} + m_2\overrightarrow{CA_2} = \vec{0}. \qquad (3)$$

Далі, згідно властивості 3, центр мас всієї системи m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3 співпадає з центром мас сукупності двох матеріальних точок $(m_1 + m_2)C$ і m_3A_3, тобто (згідно (2))

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{ZC} + m_3\overrightarrow{ZA_3} = \vec{0}. \qquad (4)$$

Але ми маємо

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{ZC} = m_1\overrightarrow{ZC} + m_2\overrightarrow{ZC} = m_1\left(\overrightarrow{ZA_1} - \overrightarrow{CA_1}\right) + m_2\left(\overrightarrow{ZA_2} - \overrightarrow{CA_2}\right) = m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} -$$
$$-\left(m_1\overrightarrow{CA_1} + m_2\overrightarrow{CA_2}\right) = m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2},$$

І тому рівність (4) приймає вигляд

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + m_3\overrightarrow{ZA_3} = \vec{0}. \qquad (5)$$

Отже, для того, щоб виконувалася властивість 3, необхідно, щоб центром мастрьох матеріальних точок $m_1A_1,\ m_2A_2,\ m_3A_3$ була така точка Z, для якої справедлива рівність (5).

Слід зазначити, що аналогічно можна розглядати випадок чотирьох і більше матеріальних точок. Це видно з рівностей (2) і (5). Отже, на основі здійсненого евристичного огляду означаємо центр мас [1].

Означення. *Центром мас* системи матеріальних точок

$$m_1A_1,\ m_2A_2,\ldots,\ m_nA_n \tag{6}$$

називається точка Z, для якої має місце рівність

$$m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+....+m_n\overrightarrow{ZA_n}=\vec{0}. \tag{7}$$

На основі означення (7) строго доведемо, що для центра мас системи матеріальних точок виконуються властивості 1-3. Таким чином, буде здійснене чисто математичне введення поняття центра мас і обґрунтування його властивостей.

Замість слів «центр мас системи матеріальних точок» (6) говорять також «центр мас $m_1,\ m_2,\ m_3$, розміщених відповідно в точках $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_n$».

Доцільно зазначити, що центр рівних мас, розміщених в вершинах многокутника (многогранника), прийнято називати центроїдом цього многокутника (многогранника). Зокрема, за теоремою Архімеда точка перетину медіан трикутника є його центроїдом.

***Теорема 1**. А) Якщо точка Z є центром мас системи матеріальних точок (6), то при будь-якому виборі в просторі точки О справедлива рівність*

$$OZ=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}+...+m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1+m_2+...+m_n}. \tag{8}$$

Б) Навпаки: якщо хоча б при одному виборі точки О у просторі правильна рівність (8), то точка Z - центр мас системи (6).

Доведення. Розглянемо випадок $n=2$ (при $n>2$ доведення аналогічне).

А) Виберемо довільно точку *О*. Рівність

$$m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}=\vec{0}$$

можна переписати так:

$$m_1\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OZ}\right)+m_2\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OZ}\right)=\vec{0},$$

Звідки й випливає потрібна рівність

$$OZ=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+m_2\overrightarrow{OA_2}}{m_1+m_2}.$$

Проводячи міркування у зворотному порядку, отримуємо твердження Б).

Отже, будь-яка система, яка містить скінченне число матеріальних точок, має однозначно визначений центр мас, тобто справедлива властивість 1.

Аналогічно доводиться, що з визначення центра мас (7) випливає справедливість властивостей 2 та 3.

Теорема 2. *Центр мас двох матеріальних точок належить відрізку, який з'єднує ці точки; його розташування (рис. 2) визначається архімедовим правилом важеля:* $m_1d_1 = m_2d_2$.

Теорема 3. *Нехай в системі (6), яка складається з матеріальних точок, відмічені* k *матеріальних точок* $m_1A_1, ..., m_kA_k$ *і нехай С – центр мас відмічених матеріальних точок. Якщо всю масу відмічених матеріальних точок зосередити в їхньому центрі мас С, то від цього положення центра мас всієї системи не зміниться. Інакше кажучи, система (6) має той же центр мас, що й система матеріальних точок* $(m_1 + ... + m_k)C, m_{k+1}A_{k+1}, ..., m_nA_n$.

Наступні зауваження, пов'язані з теоремою 3, часто дозволяють значно скоротити розв'язання задач.

Зауваження 1. *Нехай* Z *- центр трьох мас, розташованих у вершинах трикутника* ABC. *Тоді пряма* AZ *перетинає сторону* BC *в точці* A', *що є центром тих двох мас, які розміщені в кінцях цієї сторони* BC.

Зауваження 2. *Нехай в вершинах* A, B, C *деякого трикутника розташовані маси* m_1, m_2, m_3; *нехай* B' *- центр мас матеріальних точок* m_1A_1 і m_3C_3, а C' *- центр мас матеріальних точок* m_1A_1 і m_2B_2. *Тоді точка* Z *перетину прямих* BB' *і* CC' *є центр всіх трьох мас, розташованих у вершинах трикутника.*

Теоремами 1-3 завершується введення поняття центра мас та доведення основних його властивостей.

Висновки. Ідея розв'язування геометричних задач з використанням поняття центра мас та його властивостей полягає в тому, що увага концентрується на певних точках – центрах мас системи матеріальних точок, пов'язаних з задачею, що розглядається. З механічних міркувань поява цих точок є природною. Проте з геометричної точки зору доцільність розгляду саме цих точок наперед незрозуміла. Виявляється, що їх використання дозволяє швидко знайти і строго обґрунтувати розв'язання складної геометричної задачі. З метою формування в учнів знань про центр мас та його властивості, вмінь та навичок розв'язувати геометричні задачі, використовуючи набуті знання, доцільно спочатку вводити поняття центра мас, розглядаючи його механічний зміст, а потім – математичний.

Література

1.Балк М. Б.Геометрия масс /М. Б. Балк, В. Г.Болтянский. – МП.: Наука. - 1987. – 160 с. (Библиотечка «Квант»; вип. 61).

2. Никулин А. В. Планиметрия. Геометрия на плоскости / А. В. Никулин, А. Г. Кукуш, Ю. С. Татаренко: учеб. пособ. – Висагинас: Альфа, 1998. – 592 с.

3. Прасолов В. В.Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов:учеб. пособ.—5-е изд., испр.и доп.—М.: МЦНМО: ОАО Московские учебники, 2006. - 640 с.

Кузьменко Мар'яна Дмитрівна, Наконечна Інна Русланівна
студенти 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ КРУГА У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Вимірювання геометричних величин – одна з основних ліній шкільного курсу геометрії, яка знайомить учнів з важливими ідеями, поняттями і методами метричної геометрії. Вимірювання геометричних величин пов'язано з ідеєю аксіоматичного методу, теорією дійсного числа, методами математичного аналізу. Знайомство учнів з різними формулами розширює можливості застосування в шкільному курсі геометрії аналітичного методу. Головна особливість викладу матеріалу в нашій статті – поєднання різних математичних ідей та методів при вивченні поняття «площа круга».

Круг – геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, відстань від яких до даної точки не перевищує заданої. Ця точка – центр круга. Радіус – задана відстань. Нині існує чимало способів для обчислення площі круга.

За класифікацією З.І. Слєпкань [5, ст. 54 – 59] методи введення математичних понять поділяються на:

1) пояснювально-ілюстративний метод;
2) репродуктивний;
3) метод проблемного викладу;
4) частково-пошуковий метод, або евристична бесіда;
5) дослідницький метод.

Розглянемо деякі способи введення поняття «площа круга» та його числові характеристики відповідно до вищезгаданих методів.

Спосіб перший. Використовується в межах пояснювально-ілюстративного методу. Практикується у 6 класі як візуальна підтримка повідомлюваної учням формули для обчислення площі круга.

Палетка (рис. 1) – це прозора пластинка або плівка, яка поділена на квадрати, сторона кожного з них дорівнює 1 см. Площа кожного квадрата 1 см^2.

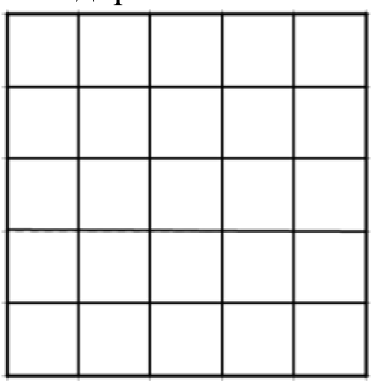


Рис.1

Щоб знайти площу фігури треба на неї накласти палетку, вибрати положення палетки так, щоб її клітинки були максимально повними, і порахувати кількість квадратів палетки, які наклались на дану фігуру.

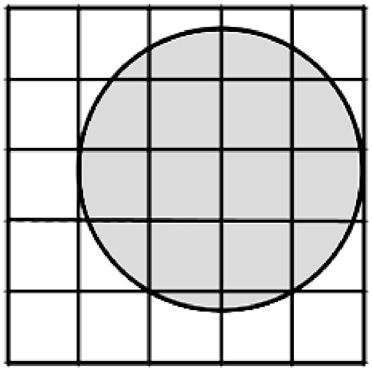


Рис. 2

Для того, щоб обчислити площу круга потрібно:

1) порахувати кількість повних квадратів – n;

2) порахувати кількість неповних квадратів – m;

3) знайти суму $\left(n+\dfrac{m}{2}\right)$.

Для наочності розглянемо приклад.

Приклад.

Знайти площу круга радіусом 2, зображеного на рис. 2.

Розв'язання.

1) кількість повний квадратів $n=6$;

2) кількість неповних квадратів $m=12$;

3) $S=6+6=12$ (см^2) – площа круга.

Відповідь: 12 (см^2).

Спосіб другий. Використовується в межах частково пошукового методу.

Розглянемо круг. Поділимо його на n рівних секторів. Розфарбуємо сектори двома різними кольорами (білий і сірий) через один. Розмістимо ці сектори так, як показано на рисунку 3.

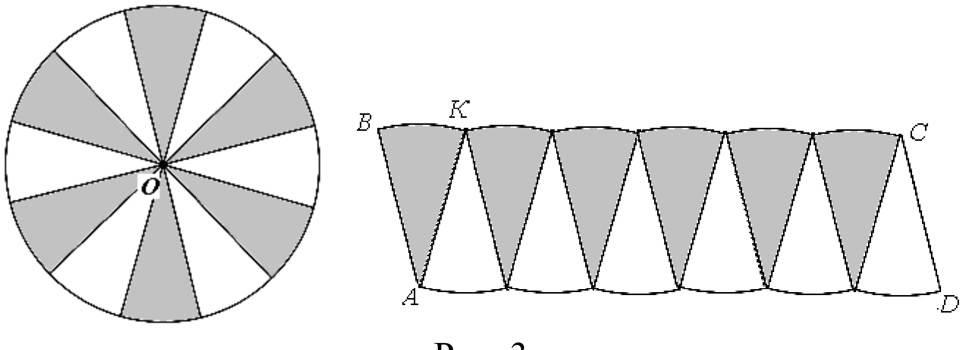


Рис. 3

Площа чотирикутника $ABCD$ буде наближатись до площі прямокутника, а тим самим і до площі круга. Сума довжин сторін BC і AD даного чотирикутника наближається до довжини кола $2\pi R$, а сторона AB буде наближено дорівнювати висоті трикутника ABK, а тим самим радіусу нашого круга R.

Тоді площа чотирикутника $ABCD$ зі збільшенням n дедалі більше наближатиметься до числа $S = AB \cdot BC = R \cdot \pi R^2$.

А отже, площа даного круга дорівнює πR^2.

Спосіб третій. Використовується в межах дослідницького методу.

Розглянемо круг, радіус якого дорівнює R (рис. 4). Опишемо навколо нього правильний n-кутник. Розіб'ємо даний многокутник на n рівних трикутників. Знайдемо площу кожного трикутника, наприклад

$$S_{\vartriangle AOB} = \frac{1}{2} OD \cdot AB = \frac{1}{2} R \cdot AB,$$

$$S_{\vartriangle BOC} = \frac{1}{2} OK \cdot BC = \frac{1}{2} R \cdot BC \text{ і т. д.}$$

Площа багатокутника дорівнює сумі площ таких трикутників:

$$S_{мн.} = S_{\vartriangle AOB} + S_{\vartriangle BOC} + ... = \frac{1}{2} R \cdot AB + \frac{1}{2} R \cdot BC + ... = \frac{1}{2} R \cdot (AB + BC + ...),$$ де $AB + BC + ...$ – периметр багатокутника.

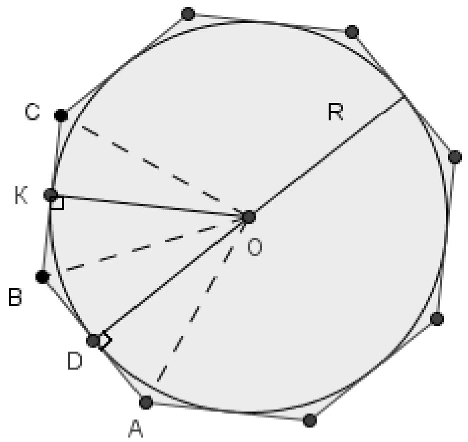


Рис. 4

Зі збільшенням числа сторін багатокутника його периметр дедалі більше наближатиметься до довжини кола $2\pi R$ зверху, а значення його площі – до площі круга. Тоді площа такого багатокутника зі збільшенням n наближатиметься до числа $S = \frac{1}{2} R \cdot 2\pi R = \pi R^2$.

Таке саме значення для площі круга ми отримаємо, якщо в задане коло будемо вписувати правильний багатокутник (рис. 5).

Впишемо в нього правильний n-кутник. Розіб'ємо даний многокутник на n рівних трикутників. Знайдемо площу кожного трикутника, наприклад

$$S_{\vartriangle AOC} = \frac{1}{2} OB \cdot AC = \frac{1}{2} R \cdot AC,$$

$$S_{\vartriangle COM} = \frac{1}{2} OD \cdot CM = \frac{1}{2} R \cdot CM \text{ і т. д.}$$

Площа багатокутника дорівнює сумі площ таких трикутників:

$$S_{мн.} = S_{\vartriangle AOC} + S_{\vartriangle COM} + ... = \frac{1}{2}R \cdot AC + \frac{1}{2}R \cdot CM + ... = \frac{1}{2}R \cdot (AC + CM + ...),$$ де $AC + CM + ...$ – периметр багатокутника.

Зі збільшенням числа сторін багатокутника його периметр дедалі більше наближатиметься до довжини кола $2\pi R$ знизу, а значення його площі – до площі круга. Тоді площа такого багатокутника зі збільшенням n наближатиметься до числа $S = \frac{1}{2}R \cdot 2\pi R = \pi R^2$.

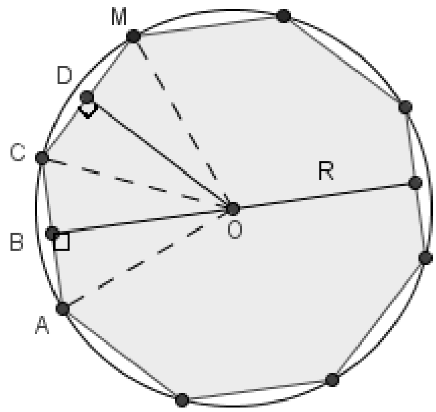


Рис. 5

Маємо: площа описаного багатокутника більша за площу круга і при великих n наближається до значення πR^2; площа вписаного багатокутника менша за площу круга і при великих n наближається до значення πR^2. Тоді площа самого круга дорівнює πR^2 .

Площа круга обчислюється за формулою

$$S = \pi R^2.$$

Способи, описані в даній статті, є основними і, на нашу думку, найбільш ефективними при введенні такого поняття як площа круга в шкільному курсі математики.

Література

1. Геометрія: 9: дворівн. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Г.В. Апостолова. – К.: Генеза, 2009. – 304 с. іл.

2. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак – ЕКО 2009. – 240 с. іл.

3. Геометрія. 9 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов. – Х.: Ранок, 2009. – 256 с. іл.

4. Мерзляк А.Г., Полянський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Х.: Гімназія, 2009. – 272 с. іл.

5. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с. іл.

Окопна Таїса Миколаївна, Опанасенко Наталія Іванівна
студентки 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ

При введенні поняття вектора важливо сформувати в учнів двояке уявлення про даний об'єкт. З одного боку учень повинен уявляти вектор як дещо реальне (наприклад силу), а з іншого боку як дещо абстрактне (наприклад деякий числовий об'єкт).

При формуванні поняття вектора як реального об'єкта доцільно наочними засобами показати учням існування вектора в навколишньому світі та його використання в практичній діяльності людини.

Нижче наведемо приклад введення вектора на основі дії сили до деякого об'єкта.

Нехай маємо площину α. На ній розташуємо деяке тіло T. Попередньо позначимо його початкове положення точкою A.

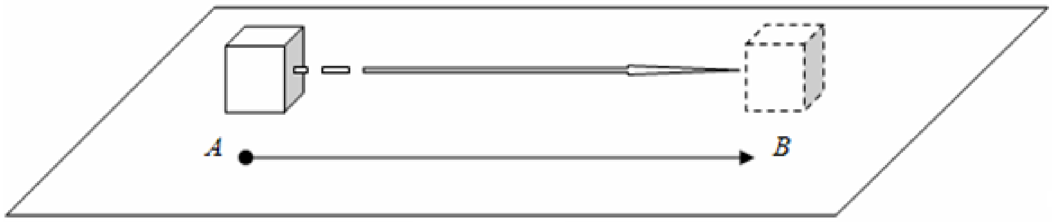


Рис. 1

Почнемо рухати тіло T по площинів певному напрямку. Воно змінить своє положення під дією прикладеної до нього сили. Тут важлива не лише абсолютна величина (числове значення) сили, а й точка прикладання і напрям дії цієї сили. Від цих трьох характеристик залежатиме результат дії сили – кінцеве положення тіла T на площині α (позначимо його точкою B).

У природничих науках величини, які характеризуються числовим значенням і напрямком називають *векторними величинами* або *векторами*. Вектор, що не визначає ніякого напряму і числове значення якого дорівнює нулю називають *нуль-вектором,* фактично це є точка.

Сила є одним із тих багатьох об'єктів реального світу, які задаються вектором.

Рухати тіло T з точки A в точку B можна по кривій або по прямій траєкторії. При криволінійному русі тіла напрям сили, а отже і напрям її вектора, буде постійно змінюватись, а при прямолінійному русі – буде незмінним.

Причиною руху тіла може бути не одна, а декілька сил. Розглянемо рух тіла T під дією двох сил.

Для прикладу прив'яжемо до тіла дві нитки. Почнемо тягнути за першу нитку з силою F_1, а за другу – з силою F_2, у різні сторони. При цьому тіло буде рухатися у напрямку, який не співпадає ані з напрямом сили F_1, ані з напрямом сили F_2. У такому випадку наше тіло T змінить своє положення на площині α. Цей рух буде характеризуватися певним напрямом, переміщенням та силою F, яка є результатом дії сил F_1 і F_2. Отже результуюча двох сил теж вектор.

Для наочності вектори зображають напрямленими відрізками, хоча ці два поняття і не є тотожними.

Відрізок AB називається *напрямленим*, якщо береться до уваги порядок його кінцевих точок. Перша точка A називається його початком, а друга B – кінцем. На такому відрізку задано напрямок – від точки A до точки B.

Вектор позначається $\overrightarrow{AB}$. Стрілка над назвою відрізка заміняє слово «вектор». У напрямлених відрізках суттєво, яка точка є початковою, а яка кінцевою. Тому вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ вважатимемо різними. Вектори можна позначати і малими латинськими буквами: $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Довжиною, або *модулем*, вектора називають відстань між його початком і кінцем, фактично це довжина відрізка, яким зображають вектор. Довжина нуль-вектора дорівнює нулю. Вектор, який має довжину 1 називається *одиничним вектором,* часто його позначають як $\vec{e}$. За означенням, $|\vec{e}|=1$.

Два ненульових вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарність двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Колінеарні вектори, що мають однаковий напрям називаються *співнапрямленими.* Символьно цей факт позначається: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Якщо напрями колінеарних векторів різні, то вони називаються *протилежно напрямленими* і позначаються $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Вектори називаються *рівними*, якщо вони співнапрямлені і мають рівні довжини. Символьно записуємо: $\vec{a} = \vec{b}$ – вектор $\vec{a}$ дорівнює вектору $\vec{b}$. Усі інші вектори будемо називати *нерівними*.

Поняття рівності векторів дозволяє від будь-якої точки площини відкладати вектор, рівний даному.

Якщо два вектори мають рівні модулі, але протилежні напрями, то їх називають *протилежними* векторами.

Оскільки в реальному світі на тіло зазвичай діють декілька різних сил, то для того, щоб пояснити результат їх взаємодії, доцільно ввести операції над векторами.

Добуток вектора на число. Розглянемо приклад руху тіла T по площині α під дією сили F Нехай тіло рухається з певною швидкістю. Збільшимо силу, яка діє на тіло T в k разів. Тіло буде продовжувати рухатися у тому ж напрямку, але збільшить свою швидкість. У даному випадку маємо приклад операції множення вектора на число.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число k називається вектор $\vec{p}$ такий, що задовольняє умови: $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$ і $|\vec{p}| = k \cdot |\vec{a}|$.

Вище ми вже показали, що результуюча кількох сил є вектор. Отже, можна говорити про подання вектора як суми двох або більше векторів.

Сума двох векторів.

На розташоване на площині α тіло T подіємо силою F_1. Початкове положення тіла T позначимо точкою A. Будемо рухати по площині тіло T з точки A у певну точку B, яка буде кінцевим положенням тіла на площині α. Зображенням вектора сили F_1 буде напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$.

Після цього на тіло T подіємо силою F_2 і будемо рухати його з точки B по площині в певну точку C. У цьому випадку точка B є початковим положенням тіла на площині α, точка C – кінцевим. Відповідно зображенням сили F_2 буде напрямлений відрізок $\overrightarrow{BC}$.

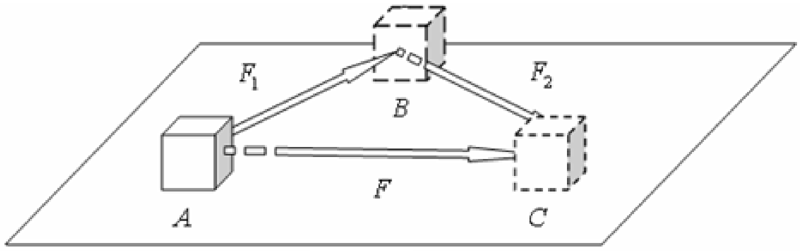


Рис.2

Після послідовної дії на тіло T сил F_1 та F_2 воно знаходиться в точці C.

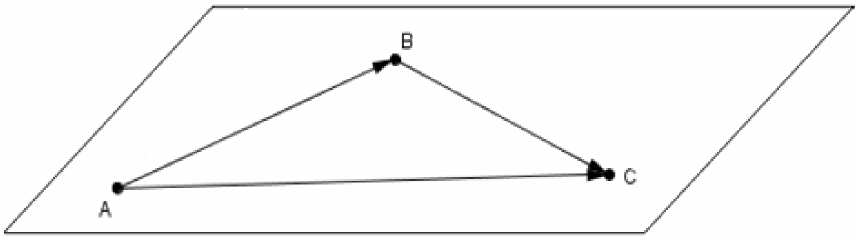


Рис.3

З точки A у точку C тіло T можна перемістити іншим шляхом, а саме, приклавши до нього силу F в напрямку точки C. Зображенням вектора сили F при цьому русі буде вектор $\overrightarrow{AC}$, а сама сила F буде результуючою сил F_1 та F_2. Тоді вектор $\overrightarrow{AC}$ буде сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Фактично такий спосіб відшукання вектора суми зводиться до побудови трикутника. Тому його називають *правилом трикутника*. Означимо правило трикутника для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що лежать на площині α.

Нехай задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Від деякої точки A відкладемо вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім від точки B відкладемо вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ називають *сумою векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і позначають $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

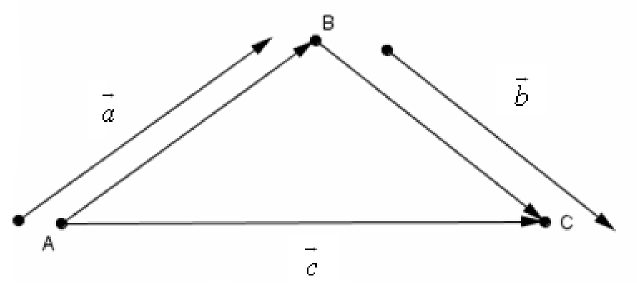


Рис.4

Розглянемо випадок, коли сили F_1 та F_2 діють на розташоване на площині α тіло T не послідовно, а одночасно, і напрямлені під кутом одна до одної. Початкове положення тіла позначимо точкою O.

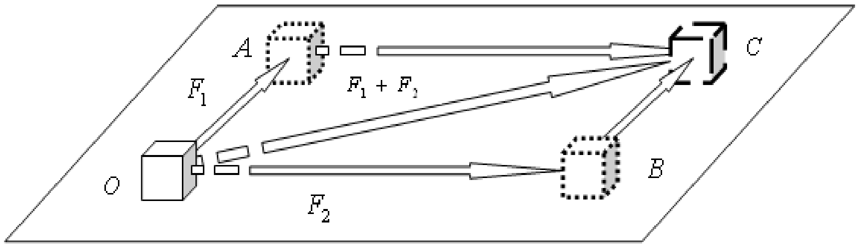


Рис.5

Нехай напрямлений відрізок $\overrightarrow{OA}$ – це зображення вектора сили F_1, а напрямлений відрізок $\overrightarrow{OB}$ – зображення вектора сили F_2. Знайдемо результуючу цих сил за правилом трикутника. Для застосування цього правила потрібно, щоб початок вектора $\overrightarrow{OB}$ співпадав з кінцем вектора $\overrightarrow{OA}$. Відкладемо від точки A вектор $\overrightarrow{AC}$ рівний вектору $\overrightarrow{OB}$. За правилом трикутника, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$, то сума $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

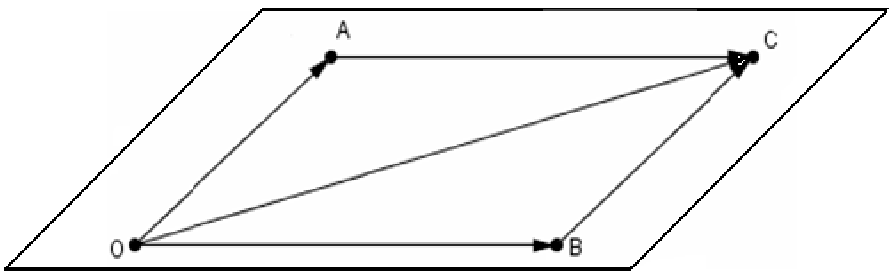


Рис.6

Аналогічно від точки B відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{OA}$. Отримуємо $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$, тоді й $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. Отже напрямлений відрізок $\overrightarrow{OC}$ є зображенням вектора результуючої сил F_1 та F_2. З означення рівності векторів випливає, що $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \parallel \overrightarrow{OC}$. В утвореному чотирикутнику $OACB$ протилежні сторони попарно паралельні, тому він є паралелограмом.

Такий спосіб відшукання вектора суми називають правилом паралелограма. Узагальнимо його для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Нехай задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Від точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Після цього від точки A відкладаємо вектор $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$, а від точки B вектор $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$. Більша діагональ утвореного паралелограма – вектор $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ –

– буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Символьно записують: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

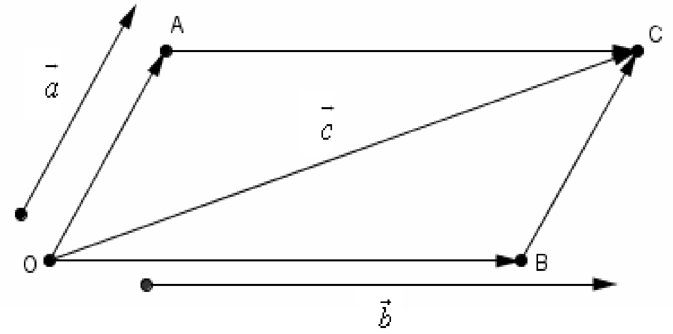


Рис.7

У природі сили можуть не лише взаємодіяти, а й протидіяти одна одній. Тому введемо операцію віднімання векторів.

Нехай маємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Вектор $\vec{d}$ називається різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{b}+\vec{d}$ і позначається $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, де вектор $-\vec{b}$ – вектор, протилежний вектору $\vec{b}$.

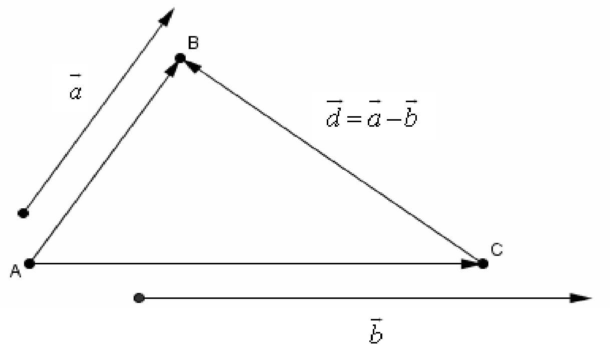


Рис.8

За правилом трикутника $\vec{b}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}$.

За допомогою введеного поняття вектора і операцій над векторамив школі розв’язується багато різноманітних задач, які не мають іншого способу розв’язання. Векторний метод знайшов широке застосування в різних природничих науках. Саме тому вивчення векторів є дуже важливим на сучасному етапі розвитку математики.

Література

1. Нікулін О.В., Кукуш О.Г. Геометрія: Поглиблений курс:7-9 кл.: Навч. посібник. – Київ,1998, – 149-160 ст.

2. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., Геометрія: підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Х.: Гімназія, 2009, 50 – 53 ст.

3. Погорєлов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. Для 7–9 кл. серед. шк. – 4-те видання. – К.: Освіта, 2000, 49-62 ст.

4. Бурда М.І. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл.. – К.: Зодіак – ЕКО, 2009, 121-128 ст.

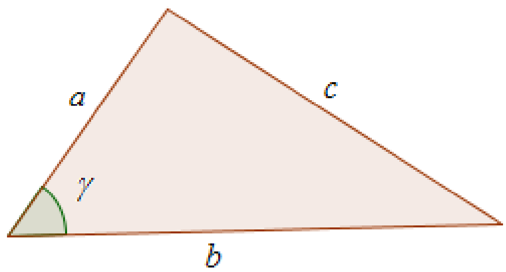
Піроженко Альона Петрівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ КОСИНУСІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Досить часто при розв’язуванні геометричних задач потрібно знаходити за відомими сторонами і кутами трикутника інші його, невідомі елементи. У деяких випадках для розв’язування таких задач використовують теорему косинусів, яка є однією з основних теорем в шкільній планіметрії. Теорема косинусів дозволяє встановити залежність між сторонами і кутами довільного трикутника. Наразі аналізуючи рівень підготовки учнів загальноосвітніх шкіл можна бачити, що не всі учні досконало вміють використовувати теорему при розв’язуванні задач.

Теорема косинусів у шкільній математиці формулюється так: *квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.*

До словесного формулювання доцільним є зображення рисунка і символьний запис даної теореми.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Доведення.

Дано: ABC – трикутник;

Довести: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\alpha$.

Кут α трикутника ABC може бути гострим, тупим або прямим. Розглянемо ці випадки:

1. Всі кути трикутника гострі (рис. 1).

Проведемо висоту CD до сторони AB. Нехай BD і AD проекції сторін BC і AC відповідно на пряму AB, CD – висота.

Розглянемо прямокутний трикутник BDC. Запишемо для нього теорему Піфагора:

$$BC^2 = CD^2 + BD^2. \qquad (1)$$

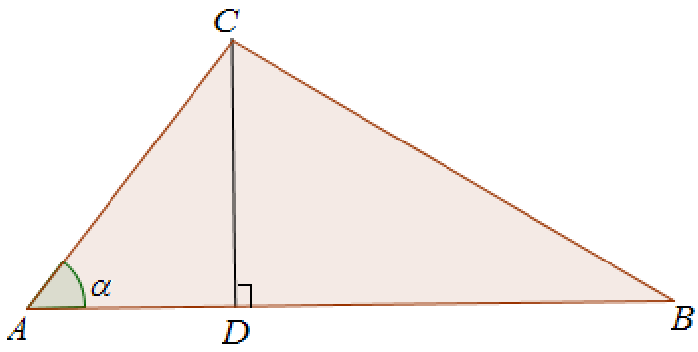


рис.1

З прямокутного трикутника ADC знайдемо CD^2:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2. \qquad (2)$$

Далі, з трикутника ABC: $BD = AB - AD$. Тоді, піднесемо обидві частини даної рівності до квадрату. Це можна зробити, оскільки вони додатні. Маємо:

$$BD^2 = (AB - AD)^2 = AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AD + AD^2 . \qquad (3)$$

Підставимо вирази для CD^2 і BD^2 з (2) і (3) відповідно у рівність (1). Будемо мати:

$$BC^2 = AC^2 - AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AD + AD^2 = AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AD + AB^2. \qquad (4)$$

Розглянемо прямокутний трикутник ADC. З нього маємо: $AD = AC \cdot \cos\alpha$. Підставимо вираз для AD у рівність (4):

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\alpha.$$

Отримали рівність, якою символьно записується теорема косинусів. Отже, для випадку, коли всі кути трикутника гострі, теорему доведено.

2. Кут α – тупий (рис. 2).

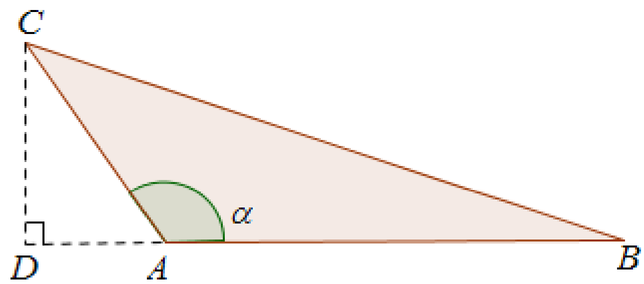


рис.2

Аналогічно до першого випадку проводимо висоту CD і з прямокутного трикутника BDC за теоремою Піфагора знаходимо:

$$BC^2 = CD^2 + BD^2. \qquad (5)$$

Потім з прямокутного трикутника ADC знайдемо CD^2:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2. \qquad (6)$$

Далі, з трикутника BDC: $BD = AB + AD$.

Тоді, піднесемо обидві частини даної рівності до квадрату. Це можна зробити, оскільки вони додатні. Маємо:

$$BD^2 = (AB + AD)^2 = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot AD + AD^2 . \qquad (7)$$

Підставивши вирази для CD^2 і BD^2 з (6) і (7) відповідно у рівність (5), дістанемо:

$$BC^2 = AC^2 - AD^2 + AB^2 + 2 \cdot AB \cdot AD + AD^2 = AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AD + AB^2 . \qquad (8)$$

Розглянемо прямокутний трикутник ADC. З нього маємо:

$$AD = AC \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -AC \cdot \cos\alpha .$$

Підставимо вираз для AD у рівність (8). Маємо:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\alpha .$$

А це і є символьний запис теореми косинусів. Для випадку, коли кут α трикутника тупий, теорему доведено.

3. Кут α – прямий (рис. 3).

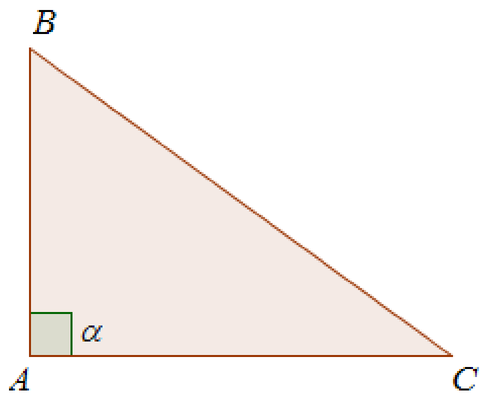


рис.3

Запишемо символьне формулювання теореми косинусів для цього випадку:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha .$$

За умовою трикутник ABC прямокутній, тому $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$. Підставимо значення косинуса кута α в попередню рівність. Будемо мати:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 .$$

А це є символьний запис теореми Піфагора.

Теорему доведено.

Даний спосіб доведення теореми косинусів доцільний у використанні за умов: 1) вчитель хоче повторити з учнями теорему Піфагора;

2) є достатня кількість навчального часу.

За умови недостатньої кількості навчального часу, доцільним є інший спосіб доведення теореми косинусів.

Нехай маємо довільний трикутник, що утворений векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 4). За правилом паралелограма:

$$\vec{c} = \vec{b} + (-\vec{a}), \text{ або ж } \vec{c} = \vec{b} - \vec{a} .$$

Піднесемо обидві частини даної рівності до квадрату, оскільки вони є додатні.

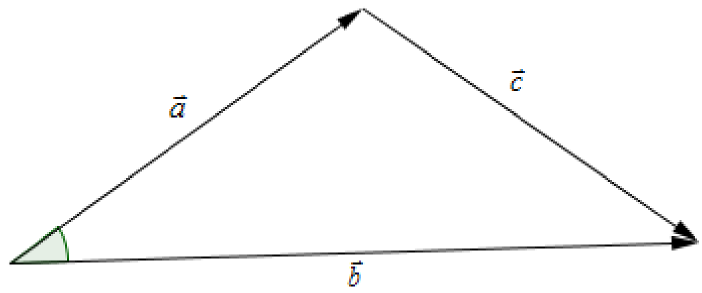


рис.4

Маємо:

$$\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) \text{ або ж } \vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{b}-2\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot a. \tag{9}$$

Запишемо теорему про кут між векторами:

$$\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Для нашого випадку будемо мати: $\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\vec{c}\wedge\vec{c})$. Кут між вектором $\vec{c}$ дорівнює 0, а отже $\cos 0=1$. Звідси маємо:

$$\vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|\cdot|\vec{c}| \text{ або ж } \vec{c}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2.$$

Провівши аналогічні міркування запишемо, що: $\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|^2$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

В рівності (9) маємо ще скалярний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$. Розпишемо його за формулою скалярного добутку векторів:

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{b}\wedge\vec{a}).$$

Підставимо отримані значення для добутків $\vec{c}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}$, $\vec{b}\cdot\vec{b}$ та $\vec{b}\cdot\vec{a}$ у рівність (9). Маємо:

$$|\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{b}\wedge\vec{a}).$$

А це і є символьний запис теореми косинусів у векторній формі.

Література

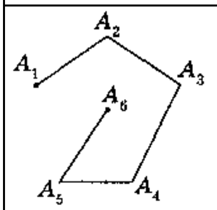
1. М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. Геометрія. Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів – Київ, «Зодіак – Еко», 2009. – 109 с.
2. О.В. Погорєлов. Геометрія. Планіметрія. Підручник для 7 – 9 класів. – Київ, «Освіта», 1998. – 224 с.
3. В.С. Абрамчук, Л.А. Тютюн, Н.М. Шунда. Посібник з шкільного курсу математики. – К.: Техніка, 2008. – 739 с.

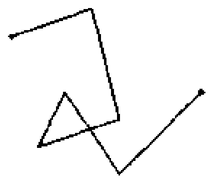
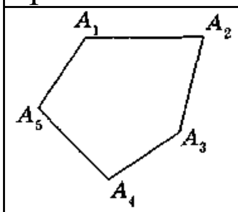
Поліщук Марина Анатоліївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

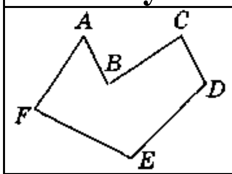
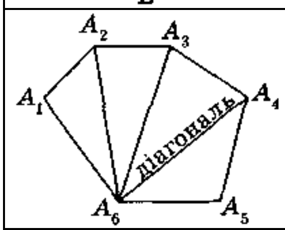
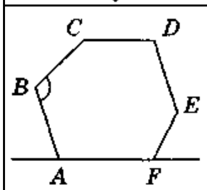
ПРО ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ОПУКЛИХ ТА НЕОПУКЛИХ МНОГОКУТНИКІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ

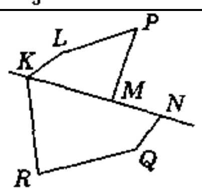
Поняття многокутників пронизує шкільний курс геометрії. Вперше поняття опуклих і неопуклих многокутників вводиться у 8 класі, але в молодших класах проводиться підготовча робота по формуванню поняття многокутники.

У шкільних підручниках поняття многокутника означують через ламану та її елементи. Таблиця 1 характеризує введення означень многокутника та його елементів по ходу уроку. Таблиця 1.

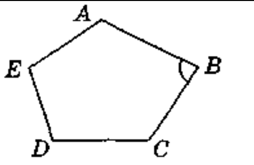
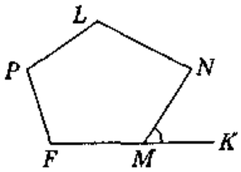
<table>
<tr><td colspan="2">Ламана</td></tr>
<tr><td>

проста

із самоперетином</td><td>Ламаною називається фігура, яка складається з точок A_1, A_2 ... A_n (вершини ламаної), послідовно сполучених відрізками (ланками ламаної)</td></tr>
<tr><td>

замкнена</td><td>Ламана називається простою, якщо вона не має самоперетинів.
Ламана називається замкненою, якщо її кінці збігаються.
Довжиною ламаної називається сума довжин її ланок.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Многокутник</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Многокутником називається проста замкнена ламана, у якій сусідні ланки не лежать на одній прямій.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Діагональ многокутника — відрізок, який сполучає несусідні вершини многокутників.</td></tr>
<tr><td>



опуклий неопуклий</td><td>Опуклим називається многокутник, якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, яка містить його сторону. При цьому сама пряма вважається такою, що належить півплощині.</td></tr>
</table>

 $\angle ABC$— кут опуклого многокутника $ABCDE$	*Кутом (внутрішнім) опуклого многокутника* при даній вершині називається кут між його сторонами, які сходяться в цій вершині.
 	*Зовнішнім кутом опуклого многокутника* при даній вершині називається кут, суміжний із внутрішнім кутом многокутника при цій вершині.

Існує кілька різних (але еквівалентних) визначень опуклого многокутника. Наведемо найбільш відомі та часто вживані з них.

Означення 1. Многокутник називають опуклим, якщо виконано одну з таких умов:

а) він лежить по одну сторону від будь-якої з своїх сторін (тобто продовження сторін багатокутника не перетинають інших його сторін);

б) він є перетином (тобто загальною частиною) кількох півплощин;

в) будь-який відрізок з кінцями в точках, що належать многокутнику, цілком йому належить;

Означення 2. Фігуру називають опуклою, якщо будь-який відрізок з кінцями в точках фігури цілком належить їй.

Теорія краще засвоюється на задачах та прикладах. На цю тему існує багато різноманітних задач різної складності, які допомагають нам вивчати теорію.

Розглянемо деякі з них.

Задача 1. Всередині квадрата $A_1A_2A_3A_4$ лежить опуклий чотирикутник $A_5A_6A_7A_8$ вибрана точка A_9. Доведіть, що із цих дев'яти точок можна вибрати 5 точок, розташованих у вершинах опуклого п'ятикутника.

Доведення

Припустимо, що необхідного опуклого п'ятикутника не існує. Проведемо із точки A_9 промені через точки A_5, A_6, A_7, A_8. Ці промені розбивають площину на 4 кути,кожен з яких менше 180°. Якщо всередині одного з цих кутів лежать дві з точок A_1, A_2, A_3, A_4, то ми негайно отримуємо необхідний п'ятикутник. Тому усередині кожного цих кутів лежить рівно одна із вказаних точок. Але тоді усередині кожного з двох кутів, утворених променями A_9A_5 і A_9A_7, лежать дві з вказаних точок. Розглянувши той з кутів, який менше 180°, знову отримуємо необхідний п'ятикутник.

Задача 2. Опуклий многокутник $A_1 \ldots A_n$ лежить всередині кола S_1, а опуклий многокутник $B_1 \ldots B_m$ - всередині S_2. Доведіть, що якщо ці многокутники перетинаються, то одна із точок $A_1, \ldots, A_n$ лежить всередині S_2 або із точок $B_1, \ldots, B_m$ лежить всередині S_1.

Доведення

Припустимо, що точки $A_1,\ldots,A_n$ лежать поза S_2, а точки $B_1\ldots B_m$, лежать поза S_1. Тоді коло S_1 не може лежати всередині S_2, а коло S_2- всередині S_1. Кола S_1 і S_2 не можуть також бути розміщені один поза одним (чи торкатися зовнішнім виглядом), оскільки інакше многокутники $A_1\ldots A_n$ і $B_1\ldots B_m$ не могли б перетинатись. Таким чином, кола S_1 і S_2 перетинаються. При цьому многокутник $A_1\ldots A_n$ лежить всередині S_1 і поза S_2, а многокутник $B_1\ldots B_m$- всередині S_2 і поза S_1. Таким чином, ці многокутники розташовані по різні сторони від прямої, яка проходить через точки перетину кіл S_1 і S_2. Але тоді вони не можуть перетинатись. Приходимо до суперечності.

Задача 3. Доведіть, що якщо існує фігура $\hat{O}'$, площа якої не менше площі фігури $\hat{O}$, а периметр – менший, то існує фігура того ж периметру, що і $\hat{O}$, але більшої площі.

Доведення

Нехай P і P' - периметри фігур $\hat{O}$ і $\hat{O}'$, S і S'- їх площі. При гомотетії з коефіцієнтом $P/P' > 1$ фігура $\hat{O}'$ переходить у фігуру, периметр якої рівний P, а площа рівна $(P/P')^2 S' > S$.

Задача 4. Доведіть, що площа круга більша площі будь-якої іншої фігури того ж периметру. Іншими словами, якщо площа фігури рівна S, а її периметр рівний P, то $S \le P^2/4\pi$, причому рівність досягається у випадку круга (ізопериметрична нерівність).

Доведення

Для будь-якої не опуклої фігури існує опукло фігура того ж периметру і більшої площі. Тому можна обмежитися опуклими фігурами.

Нехай $\hat{O}$ - опукла фігура, відмінна від круга, *К* – круг. Потрібно довести, що для *К* відношення площі до квадрату периметра більше, ніж для $\hat{O}$. Площа і периметр $\hat{O}$ і *К* можна визначити як межу площ і периметрів описаних навколо $\hat{O}$ і *К* многокутників, всі зовнішні кути яких прямують до нуля. Нехай деякий многокутник описаний навколо *К*. Розглянемо другий многокутник, відповідні сторони якого паралельні сторонам першого, а описаний він навколо $\hat{O}$. Для першого многокутника відношення площі до квадрату периметра більше, ніж для другого. Перейшовши до межі, отримуємо, що відношення площі до квадрату периметра для *К* не менше, ніж для $\hat{O}$.

Якщо фігура $\hat{O}$ периметра 1 відмінна від круга, то її площа не може бути рівною площі круга периметра 1, оскільки тоді існувала б фігура $\hat{O}'$ периметра 1, площа якої була б більше площі $\hat{O}$, тобто більше площі круга периметра 1.

Для розгляду наступних задач введемо нове поняття.

Нехай *М* – опуклий многокутник, l- деяка пряма. Симетризація по Штейнеру многокутника *М* відносно прямої l- це фігура $\hat{O}$, яка отримується наступним чином. Через кожну точку *X* прямої l проведемо пряму *m*, перпендикулярну l. Якщо пряма *m* перетинає многокутник *М* по відрізку довжиною *a*, то побудуємо на *m* відрізок довжиною *a* з серединою в точці *X*. Побудований відрізок утворює фігуру $\hat{O}$.

Задача 5. Доведіть, що симетризація по Штейнеру опуклого многокутника являється опуклим многокутником.

Доведення

Нехай M' - симетризація по Штейнеру опуклого многокутника M відносно прямої l. Потрібно довести, що якщо A і B – точки M', то весь відрізок AB належить M'. Розглянемо два відрізки, по яким перетинають M' прямі, які проходять через точки A і B перпендикулярно l. Ці прямі перетинають M по двох відрізках такої ж довжини. Опукла оболонка цих відрізків являється трапецією, яка лежить в M. при симетризація цієї трапеції отримуємо трапецію, яка лежить в M'. Відрізок AB належить отриманій трапеції, тому він належить M'.

Задача 6. Доведіть, що при симетризація по Штейнеру площа многокутника не змінюється, а його периметр не збільшується.

Доведення

Проведемо через кожну вершину многокутника М пряму, перпендикулярну прямій l. Ці прямі розрізають многокутник на трапеції (деякі із трапецій можуть вироджуватись в трикутники). При симетризація по Штейнеру кожна така трапеція замінюється на рівнобічну трапецію з тими ж основами і тієї ж висотою. Ясно, що при такій заміні площа трапеції не змінюється. Залишається перевірити, що периметр не збільшується. При цьому достатньо розглянути випадок, коли трапеція вироджується в трикутник. Дійсно, якщо $ABCD$ – трапеція з основами AB і CD, де $AB \le CD$, то від неї можна відрізати паралелограм $ABCD'$.

Отже, нехай ABC – трикутник, в якого сторона AB фіксована, а вершина C рухається по прямій m, паралельній AB. Нехай точка B' симетрична точці B відносно прямої m. Тоді $AC + CB = AC + CB' \ge AB'$. Рівність виконується тоді і тільки тоді, коли AC=CB.

Задача 7. Нехай A і B – фіксовані точки, λ і μ - фіксовані числа. Виберемо довільну точку X і задамо точці P рівністю $\overrightarrow{XP} = \lambda\overrightarrow{XA} + \mu\overrightarrow{XB}$. Доведіть, що положення точки P не залежить від вибору точки X тоді і тільки тоді, коли $\lambda + \mu = 1$. Доведіть також, що в цьому випадку точка P лежить на прямій AB.

Для доведення цієї задачі розглянемо Суму Мінковського.

Якщо $\lambda + \mu = 1$, то точку Р будемо позначати $\lambda A + \mu B$.

Нехай M_1 і M_2 - опуклі многокутники, λ_1 і λ_2- додатні числа, сума яких рівна 1. Фігуру $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$, яка складається із усіх точок вигляду $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, де A_1 - точка M_1, а A_2 - точка M_2, називають сумою Мінковського многокутників M_1 і M_2. Суму Мінковського можна розглядати не тільки для опуклих многокутників, а й для довільних фігур.

Аналогічно для додатних чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, сума яких рівна 1, можна розглядати фігуру $\lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_n M_n$. Можна розглядати і фігури $\lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_n M_n$ для $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \ne 1$, але в такому випадку фігура визначена з точністю до паралельного перенесення: при зміні точки X фігура зміщується на деякий вектор.

Доведення

Якщо $\overrightarrow{XP} = \lambda\overrightarrow{XA} + \mu\overrightarrow{XB}$, то $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XP} = (\lambda - 1)\overrightarrow{XA} + \mu\overrightarrow{XB} = (\lambda - 1 + \mu)\overrightarrow{XA} + \mu\overrightarrow{AB}$. Тому вектор $\overrightarrow{AP}$ не залежить від вибору точки X тоді і тільки тоді, коли $\lambda - 1 + \mu = 0$. В такому випадку $\overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB}$, тому точка P лежить на прямій AB.

Задача 8. Доведіть, що опуклий многокутник має центр симетрії тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді суми кількох відрізків.

Доведення

Якщо $I_1,...,I_n$- відрізки, розміщені на площині, а $O_1,...,O_2$ - їх середини, то многокутник $\lambda_1 I_1 + ... + \lambda_n I_n$ симетричний відносно точки $\lambda_1 O_1 + ... + \lambda_n O_n$.

Розглянемо тепер опуклий многокутник $A_1...A_{2n}$ з центром симетрії О. Перенесемо відрізки $A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_{n+1}$ паралельно так, щоб їх середини потрапили в точку О. Збільшимо відрізки в n разів, залишивши їх середини нерухомими. Нехай $I_1,...,I_n$- отримані відрізки. Тоді сума $\frac{1}{n}I_1 + ... + \frac{1}{n}I_n$ початковий многокутник.

Зараз ми розглянемо задачі на неопуклі многокутники.

Задача 9. Доведіть, що сума зовнішніх кутів будь-якого многокутника, прилеглих до менших 180° внутрішнім кутам, не менше 360°.

Доведення

Так як у опуклого n – кутника всі внутрішні кути менше 180° і їх сума рівна $(n-2)\cdot 180^\circ$, то сума зовнішніх кутів рівна 360°, тобто у випадку опуклого многокутника досягається рівність.

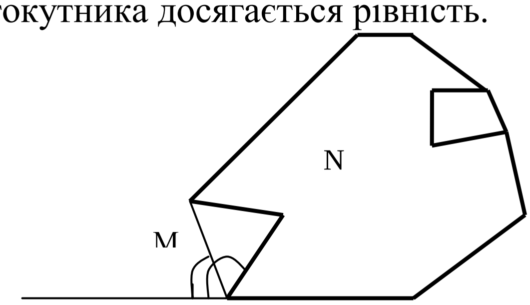


Рис. 1

Нехай тепер *M* – опукла оболонка многокутника *N*. Кожний кут *M* містить менший 180° кут *N*, причому кут *M* може бути тільки більше кута *N*, тобто зовнішній кут *N* не менше зовнішнього кута *M* (рис. 1).

Тому, навіть обмежившись тільки кутами *N*, що примикають до кутів *M*, ми вже отримаємо не менше 360°.

Розглянувши поняття опуклих та неопуклих многокутників, я зрозуміла, що воно є дуже важливим у шкільному курсі геометрії. Існує багато задач, які допомагають краще вивчити це поняття. Ми у цьому переконалися, розглянувши різної важкості задачі.

Література

1. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие.-5-е изд., испр. и доп.- М.: МЦНМО: ОАО «Московкие учебники», 2006.- 640с.

Полянська Катерина Ігорівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ТРАПЕЦІЇ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ

Постановка проблеми. Уперше означення трапеції вводиться в систематичному курсі планіметрії у 8 класі при вивченні теми «Чотирикутники». Як свідчить наш аналіз шкільних підручників з геометрії для 8-го та 9-го класу, надалі в задачах підручників, трапеція хоча і зустрічається, однак не часто.

Аналіз текстів завдань ДПА з математики в 9 класі, та текстів завдань ЗНО свідчить протилежне: трапеція є досить поширеною фігурою в планіметричних задачах спрямованих на виявлення рівня навчальних досягнень учнів з геометрії. Це не дивно, оскільки трапеція є зручною фігурою для комплексної перевірки знань та умінь учнів з усього курсу планіметрії: значна кількість таких задач про трапецію потребує використання знань про трикутники та їх елементи, інші види чотирикутників.

Аналіз останніх досліджень. Окремі аспекти вивчення трапеції в школі висвітлені у роботах Бевза Г.П., Бондар Г, Голишевської О., Кушніра І., Негеля І.Ф., Бурди М.І., Тарасенкової Н.А., Філіповського Г., Сінільника В.Д.

Волошина І. ділиться власним досвідом проведення нестандартного уроку подорожі на тему «Чотирикутники». Карасьова Н. пропонує розробку уроку про трапецію, з елементами класифікації понять.

Буковська О. розглядає питання вивчення трапеції в курсі лекцій та практичних завдань з геометрії у 8 класу з поглибленим вивченням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій про трапецію в шкільному курсі математики показує, що з практичної точки зору, якість розв’язування задач залежить від якості засвоєння учня змісту означення трапеції.

Мета даної статті: виокремити та обґрунтувати оптимальні умови для формування свідомих і глибоких знань учнів про трапецію, як геометричну фігуру, вже на першому уроці вивчення її.

Виклад основного матеріалу. У сучасних підручниках з геометрії для 8 класу спостерігаємо два різних формулювання означення трапеції. Зокрема, у підручнику «Геометрія 8» Бевза Г.П. та Бевз В.Г.:

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні називають трапецією.

У підручниках «Геометрія 8» Мерзляка А.Г., Полонського В.Б., Якіра М.С., Атанасяна Л.С. та Нікуліна А.В., Кукуша А.Г.:

Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Відразу зазначимо, що сам термін «означення» використовується лише у підручнику «Геометрія 8» Мерзляка А.Г, Полонського В.Б., Якіра М.С.

Означення трапеції, сформульоване у підручнику Бевза Г.П. і Бевз В.Г. повністю аналогічне формулюванню, яке було у підручниках геометрії для школи Погорєлова О.В.

У підручнику «Геометрія 8» Апостолової Г.В. у §16. Трапеція, взагалі вивчення трапеції розпочинається з такого першого речення:

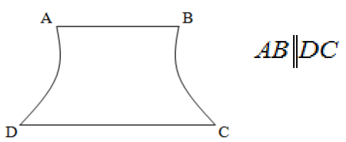
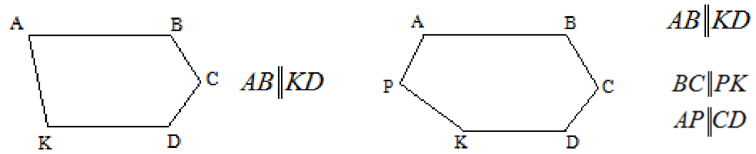
Дві сторони трапеції паралельні за означенням.

У попередніх параграфах цього підручника означення трапеції ми не виявили.

Відомі шкільні підручники геометрії, у яких паралелограм розглядається, як окремий вид трапеції, бо згідно означення трапеції: *трапецією* називають чотирикутник у якого дві сторони паралельні. При такому означенні трапеції паралелограм є *трапецією*, оскільки має пару паралельних прямих і відповідно є окремим її видом. При традиційному, найбільш поширеному підході, трапеція, як окремий вид чотирикутників, вивчається після всіх видів паралелограмів і тому формулювання означення трапеції у вигляді чотирикутника у якого дві сторони паралельні спотворює зміст поняття трапеції. Прикладом у цьому випадку є зображення паралелограма. Також поширеною є помилка учнів, коли неправильно відтворюється родове поняття, наприклад:

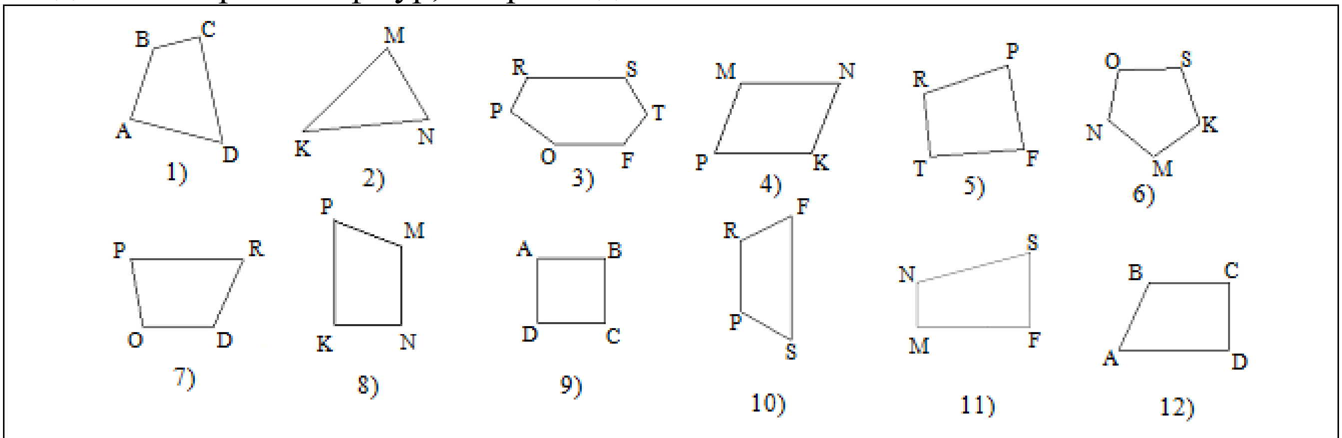
- трапецією називається фігура, у якої тільки дві сторони паралельні,
- трапецією називають многокутник, у якого дві сторони паралельні.

Контрприклади, що вказують на типові помилки учнів найкраще ілюструвати малюнками.

Фігура у якої дві сторони паралельні	Многокутники, у яких є дві паралельні сторони
	

Очевидно, попереджувати окреслені вище типові помилки учнів варто у процесі формування знань про зміст поняття трапеції.

По-перше учні мають відразу навчитися впізнавати трапецію серед інших видів геометричних фігур, наприклад:



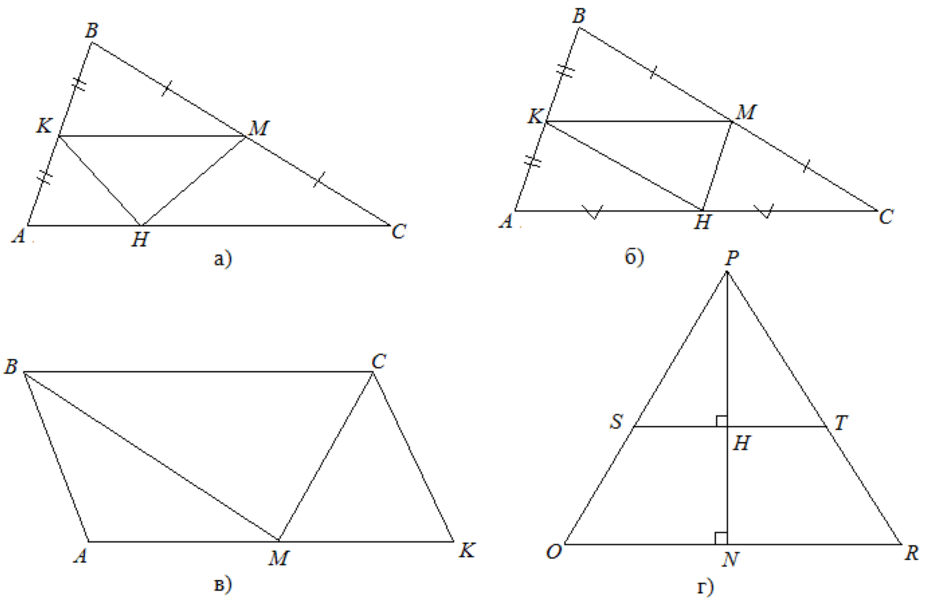
Яка з вказаних фігур є трапецією?

По-друге, можна із вказаною таблицею організувати певну дослідницьку роботу:

1. Вибрати серед наявних фігур чотирикутник.
2. Вибрати серед чотирикутників, фігури, які мають дві паралельні сторони.
3. Вибрати серед вказаних фігур ті чотирикутники, що мають пари попарно паралельних сторін.

Наступним етапом у засвоєнні нового поняття є виокремлення означеного поняття із композицій інших геометричних фігур.

Знайти на вказаних малюнках трапеції:



Очікувані відповіді:

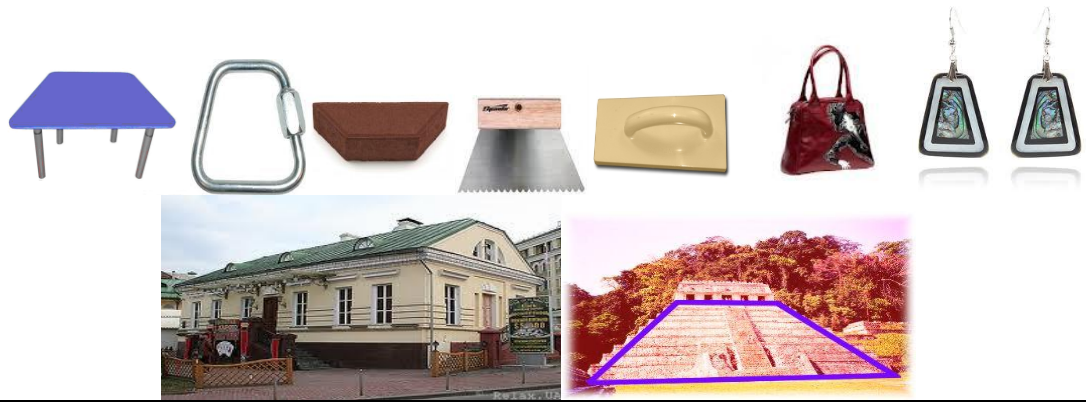
На малюнку а) трапеції: $AKMH$, $KMCH$, $AKMC$;

На малюнку б) трапеції $AKMC$, $KBCH$, $ABMH$;

На малюнку в) трапеції $ABCM$, $BCKM$;

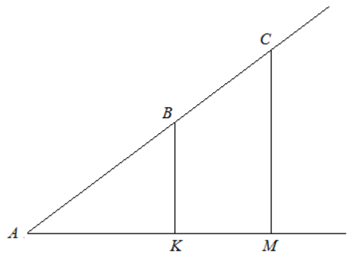
На малюнку г) трапеції $OSTR$, $OSHN$, $THNR$.

Наступним етапом формування знань учнів про трапецію варто запропонувати учням розпізнавати фігури, що є трапеціями, у навколишньому середовищі. Для цього спочатку варто розглянути фото або малюнки окремих реальних речей, наприклад.

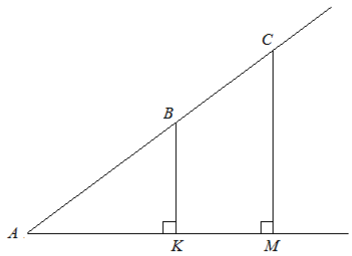


Очевидно учні мають розуміти, що у вище вказаних трапеціях ми вважали паралельними певні прямі або відрізки. При розв’язуванні геометричних задач, щоб розглядати трапецію, потрібно спочатку обґрунтувати чи насправді маємо чотирикутник у якого тільки дві сторони паралельні.

Наприклад



КВСМ можливо трапеція, якщо $BK \| CM$.



KBCM справді трапеція, бо за ознакою паралельних прямих (відповідні кути рівні). $BK \perp AM$, $CM \perp AM$, тому $BK \| CM$.

Висновки. У процесі вивчення математики в школі учням доводиться засвоювати кілька сот понять. Не можна ототожнювати це засвоєння із умінням сформулювати відповідне означення, не розуміючи його суті. Учитель насамперед має дбати не стільки про те, щоб учні запам'ятали означення, скільки про те, щоб вони його зрозуміли. Учень має добре розуміти властивості виучуваного поняття, розуміти зміст використовуваних в означенні інших понять.

Література

1. Карасьова Н. Трапеція: геометрія 8 клас /Н. Карасьова // математика. – 2011. – Лютий (№6). – с. 5-7.
2. Буковська О. Чотирикутники: Курс лекцій та практичних завдань з геометрії 8 клас з поглибленим вивченням математики / О.Буковська , К.Росохата // Математика – 2008.–Серпень (№29-30).– с.11-48; Вересень (№30) – с. 3-8.
3. Негель І.П. Трапеція / І.П. Негель / Математика в школах України. – 2004, №31.
4. Бузницька Л.В. Трапеція. Середня лінія трапеції. Теорема Фалеса / Л.В. Бузницька // Математика в школах України. – 2007, Вересень (№27). – с.16-18.

Рожок Ірина Володимирівна
студентка магістратури, спеціальності «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТЬ АРИФМЕТИЧНОЇ І ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЙ

Термін «послідовність» вже зустрічався учням раніше. Він використовувався, наприклад, в курсі математики шостого класу при вивченні теми «Подільність натуральних чисел». Але розкривається зміст поняття «скінченна послідовність» та «нескінченна послідовність» лише в курсі алгебри дев'ятого класу.

Поняття нескінченної послідовності може бути введено на наступному прикладі.

Поставимо у відповідність кожному натуральному числу обернене йому число: $1 \to 1;\ 2 \to \frac{1}{2};\ 3 \to \frac{1}{3};\ 4 \to \frac{1}{4};\ \ldots;\ n \to \frac{1}{n};\ \ldots$.

Дане співвідношення однозначне, отже, воно є функцією. Позначимо цю функцію буквою φ. Тоді $\varphi(1) = 1;\ \varphi(2) = \frac{1}{2};\ \varphi(3) = \frac{1}{3};\ \ldots;\ \varphi(n) = \frac{1}{n};\ \ldots$.

Областю визначення функції φ є множина N натуральних чисел: $\{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$; множина її значень – множина $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$.

Означення. Функція, задана на множині натуральних чисел, називається нескінченною послідовністю. Значення функції, які відповідають значенням аргументу, що дорівнюють $1, 2, 3$ і т. д., прийнято називати першим, другим, третім і т. д. членами послідовності.

Послідовність прийнято задавати, виписуючи її члени в порядку зростання їх номерів. Так, для послідовності, що розглядається вище, будемо мати: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$. У такому випадку говорять, що «виписана послідовність».

Аналогічно вводиться поняття скінченної послідовності як функції, заданої на множині n перших натуральних чисел. В подальшому ми будемо використовувати просто термін «послідовність», але зі змісту завжди буде зрозуміло, про яку саме послідовність (скінченну чи нескінченну) йде мова.

Зауважимо, що так як терміном «послідовність» ми назвали особливий вид функції, а саме функцію, задану на множині N натуральних чисел (або на множині n перших натуральних чисел), то, перед тим як почати вивчення цієї теми, необхідно переконатися в тому, що учні пам'ятають означення функції, знають, що таке область визначення і множина значень функції. [4]

Освоєнню введених понять сприяє система наступних вправ. Виконуючи такі завдання, учні зустрічаються з прикладами як числових, так і нечислових послідовностей.

1. Складіть декілька варіантів розкладу з чотирьох уроків на один навчальний день для третього класу. Список предметів: фізкультура, українська мова, математика, природознавство. Зауваження: в розклад повинен бути включений кожний з чотирьох предметів.
2. Дано скінченну послідовність $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21$. Яка кількість членів цієї послідовності? Назвіть її перший, п'ятий і шостий члени.
3. Скінченна послідовність а) $0, 2, 4, 6, 8, 10$; б) $10, 20, 30, 10, 20, 30$ є функцією з областю визначення X і множиною значень Y. Випишіть множини X та Y. Запишіть цю ж функцію за допомогою стрілок.

Важливо, щоб учні оволоділи загальноприйнятою для послідовностей символікою. З такою метою пропонують наступні завдання.

1. Нехай (z_n) – нескінченна послідовність, члени якої з непарними номерами дорівнюють -1, а парними – 0. Знайдіть z_1, z_4, z_{100}, z_{253}, z_{2k}, z_{2k+1}.
2. Дано нескінченну послідовність $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$. Назвіть член послідовності, який а) йде за c_{10}, c_k, c_{2k}, б) передує c_{50}, c_{k+1}, c_{k-3},.
3. Випишіть члени нескінченної послідовності (b_n), які розташовані між а) b_{20} і b_{25}, б) b_k і b_{k+7}, в) b_{k-2} і b_{k+3}.

Питання про способи задання послідовності в деякій мірі вже знайомі учням, так як мова йде про способи задання функції, областю визначення якої служить множина натуральних чисел (або деяка її підмножина, що містить всі числа від 1 до n). А основні способи задання функції вже розглядались в курсі алгебри сьомого класу. [2]

У підручниках частіше всього розглядаються приклади послідовностей, що задаються формулою, а також, якщо послідовність скінченна, перерахунком її членів в порядку зростання номерів чи графіком. Основну увагу приділяють способу задання послідовності за допомогою формули, за якою можна знайти будь-який її член. Така формула в підручниках називається формулою n-го члена послідовності. Використовується інколи термін «загальний член послідовності», який з методичної точки зору менш вдалий. Часто при заданні послідовності формулою n-го числа область визначення цієї послідовності не вказується. Потрібно пояснити учням , що в таких випадках мова йде про нескінченну послідовність, визначену на множині натуральних чисел. [4]

Принципово важливо також добитися твердих навиків при розв'язуванні вправ, в яких потрібно вияснити, чи належить те чи інше число деякій послідовності, що задана формулою. Покажемо хід міркувань при розв'язуванні подібних задач на прикладі: Чи є число 361 членом послідовності (b_n), що задана формулою $b_n = n^2 + 2n + 1$?

Число 361 буде членом послідовності (b_n), якщо існує таке натуральне значення змінної n, при якому значення виразу $n^2 + 2n + 1$ дорівнює 361. Розв'язавши квадратне рівняння $n^2 + 2n + 1 = 361$, маємо $n = 18$ або $n = -20$. Таким чином, ми знайшли натуральне число, а саме 18, при якому рівність $n^2 + 2n + 1 = 361$ правильна. Отже, число 361 – 18-й член послідовності.

Корисними з точки зору розвитку учнів є вправи, в яких ставиться задача підбору формули, за якою можна знайти будь-який член деякої скінченної послідовності.

1. Підберіть формулу n-го члена скінченної послідовності а) $3, 6, 9, 12, 15$; б) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$; в) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}, \frac{5\cdot 7}{6\cdot 8}, \frac{7\cdot 9}{8\cdot 10}$.
2. Напишіть формулу, за якою можна знайти будь-який член нескінченної послідовності (y_n), якщо відомо, що всі члени цієї послідовності з непарними номерами дорівнюють 5, а з парними -5.

Важливим пунктом при вивченні даної теми є ознайомлення учнів з новим, специфічним для послідовностей рекурентним способом задання. Ніяких правил для запам'ятовування не потрібно давати, пояснення проводиться на прикладах.

Вирахувавши декілька перших членів послідовності, для яких вказані перший член і рекурентна формула, яка виражає будь-який член послідовності через попередній, учні інтуїтивно зрозуміють, що таким чином можна знайти будь-який член цієї послідовності. Отже, цю послідовність можна вважати заданою.

Корисно повідомити учням, що термін рекурентний виник від латинського слова recurrere, що в перекладі означає повернення. При обрахунку членів послідовності за допомогою рекурентної формули ми ніби постійно повертаємось назад, дивимося, чому дорівнює попередні члени.

Мета таких вправ – підготовити використання в подальшому рекурентного способу задання послідовності для задання арифметичної та геометричної прогресії. З курсу алгебри восьмого класу учням відомі поняття зростаючої, спадної та монотонної функції. Тепер ці поняття пояснюються при застосування до числових послідовностей.

Очевидно, що числова послідовність, в якої більше значення аргументу (більшому номеру) відповідає більше значення функції (більший член), є зростаюча функція. Наприклад, зростаюча функція є скінченна числова послідовність $-10, -5, 0, 5, 10$ і нескінченна числова послідовність $2, 4, 6, \ldots, 2n,$ ... Такі послідовності називаються зростаючими числовими послідовностями.

Арифметична прогресія. Серед послідовностей, заданих рекурентним способом, учні зустрічали і такі, при заданні яких використовувалась формула вигляду $a_{n+1} = a_n + d$, де d – деяке число. При вивченні даної теми учням вже знайомі такі поняття: «формула n-го члена», «монотонна послідовність», «графік послідовності» та ін. Приділити увагу варто характеристичним властивостям як необхідним і достатнім умовам того, що дана послідовність є арифметичною чи геометричною.

Далі перед учнями ставиться наступна проблема. Ми задаємо арифметичну прогресію за допомогою рекурентної формули. Але таке задання в багатьох випадках незручне. Дійсно, для того щоб знайти будь-який член арифметичної прогресії з великим номером (наприклад, a_{1500}), необхідно знати всі попередні члени (в даному випадку їх число дорівнює 1499). Чи можна зменшити цю розрахункову роботу, отримавши з рекурентного співвідношення формулу n -го члена арифметичної прогресії?

Далі слідує нескладний висновок з використанням неповної індукції. В результаті отримуємо, що $a_n = a_1 + d(n-1)$. В подальшому учні познайомляться з доведенням різних тверджень методом математичної індукції і зможуть переконатися в тому, що дана формула правильна для будь якого натурального n. [3]

Наведемо приклади вправ, які потребують деяких додаткових міркувань. При їх виконанні доводиться розв'язувати лінійні рівняння і нерівності, системи рівнянь першого і другого степеня.

1. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (c_n), якщо $c_5 = 27$, $c_{27} = 60$.
2. Напишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії (x_n), в якій $x_1 = 1{,}7$ і $d = 0{,}3$. Знайдіть номер члена , який дорівнює 32. Доведіть, що число $62{,}7$ не є членом цієї прогресії.

При розгляді формули n-го члена арифметичної прогресії встановлюється зв'язок між лінійною функцією та арифметичною прогресією. Вивчення цього питання зручно розпочати, запропонувавши учням побудувати графік якої-небудь арифметичної прогресії, наприклад, прогресії, у якої $y_1 = 2,\ d = 0{,}5$ і $1 \le n \le 8$. Так як послідовність – це функція, яка задана на множині натуральних чисел, то графіком арифметичної прогресії є множина точок з натуральними абсцисами. Очевидно, що точки даного графіка будуть розташовані на одній прямій. Виясним яке рівняння даної прямої.

Запишемо формулу n-го члена арифметичної прогресії (y_n):

$$y_n = 2 + 0{,}5(n-1),\ \ y_n = 0{,}5n + 1{,}5.$$

Ми отримали формулу виду $y = kx + b$, а такою формулою, як відомо, задається лінійна функція. Отже, арифметична прогресія (y_n) є лінійною функцією, задана формулою $y = 0{,}5x + 1{,}5$ на множині перших восьми натуральних чисел. Її графік – множина, яка складається з восьми точок з натуральними абсцисами, розташованих на прямій $y = 0{,}5x + 1{,}5$. Загалом будь-яка арифметична прогресія є лінійною функцією, заданою на множині натуральних чисел.

Справедливе і обернене твердження: лінійна функція, областю визначення якої є множина натуральних чисел, є арифметичною прогресією. Обернене твердження в якості спеціальної теореми не формулюється і не доводиться. Однак в підручниках можуть зустрічатися вправи, в яких показується справедливість оберненої теореми.

Вивчення арифметичної прогресії закінчується виведенням формули суми n перших її членів. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, (1) $S_n = \dfrac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$. (2)

Однак варто мати на увазі, що для розв'язування задач достатньо знати лише формулу (1). Тому можна обмежитись вимогами пам'ятати напам'ять цю основну формулу. При виведенні формули (2) використовується той факт, що в скінченній арифметичній прогресії сума членів, рівновіддалених від кінця, дорівнює сумі першого і останнього членів. В підручниках ця властивість як окрема теорема не формулюється і не доводиться. Її справедливість показана лише для частинних випадків.

Геометрична прогресія. Пояснення матеріалу цієї теми вводиться так само, як і в темі «Арифметична прогресія». Дається визначення геометричної прогресії, вводиться поняття знаменника геометричної прогресії, розглядається характеристична властивість. Далі індуктивним методом показується, що будь-який член геометричної прогресії (b_n) може бути знайдений за формулою $b_n = b_1 q^{n-1}$, де q – знаменник прогресії. Виводиться формула суми n послідовних членів геометричної прогресії: якщо $q \neq 1$, то $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, (3)

якщо $q = 1$, то геометрична прогресія є сталою послідовністю, і $S = nb_1$. Як наслідок із формули (3) отримуємо другу формулу для суми n перших членів геометричної прогресії: якщо $q \neq 1$, то $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Вище ми говорили про зв'язок між арифметичною прогресією та лінійною функцією. Аналогічно можна було б розглядати питання про зв'язок геометричної прогресії і функції $y = ca^x$. Однак учні ще не знайомі з показниковою функцією.

Система вправ даної теми будується в основному аналогічно тому, як це було зроблено для арифметичної прогресії. Наведемо декілька прикладів.

1. В геометричній прогресії (u_n) $u_1 = 256$ і $q = \dfrac{1}{2}$. Знайдіть u_{10}, u_n.
2. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_8 = 384, q = 2$.
3. Після кожного натиску поршня насоса, з посудини виходить 20% повітря. Визначте тиск повітря всередині посудини після шести поштовхів поршня, якщо початковий тиск дорівнював 750 мм рт. ст.

Література

1. Бевз Г. П. Про числові послідовності // Математика. – 2002. – №3. – С. 10-11.
2. Лунгу К. М. Числовые последовательности // Математика в школе. – 2006. – №10. – С. 7-10.
3. Лускина М. Г. Из опыта изучения темы «Прогрессии» // Математика в школе. – 1973. – №1. – С. 31-34.
4. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Муравин К. С., Суворова С. Б. «Арифметическая и геометрическая прогрессии» в курсе алгебры 9 класса // Математика в школе. – 1974. – №4. – С. 5-11.

Савченко Маргарита Валеріївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ТРИКУТНИКА В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ

Постановка проблеми. Математичні поняття відображають в нашій свідомості певні форми і відношення матеріального світу, абстраговані від їх конкретних індивідуальних властивостей. Як стверджують відомі методисти Черкасов Р. С., Столяр А. А., формування понять – складний психологічний процес, який починається з утворення найпростіших форм пізнання, відчуття. Він проходить часто за такою схемою : відчуття - сприймання - уявлення - поняття. На початку формування поняття або на завершальному етапі, в систематичних курсах математики, як правило, формулюється означення поняття.

На думку, відомого українського методиста Слєпкань Зінаїди Іванівни, вводячи означення математичного поняття потрібно враховувати, наскільки відомі і зрозумілі учневі певного віку, ті істотні властивості, які розкривають зміст нового поняття. Психолог Дж. Бронер зазначав, що коли основні поняття подаються у формальному вигляді точних словесних означень, то вони є недоступними для дитини, якщо вона не засвоїла їх спочатку інтуїтивно. Слєпкань З.І. стверджує, що це зауваження стосується введення означення поняття на всіх етапах навчання. Чим абстрактніше поняття, чим складніша логічна структура його означення, тим гостріша потреба в попередньому розгляді поняття на інтуїтивному рівні, у поясненні властивостей, які увійдуть в означення.

Аналіз останніх досліджень. У науково-методичній літературі є значна кількість публікацій щодо вивчення трикутника в школі. Серед таких можна виділити окремі навчальні посібники як, наприклад, праці Кушніра І.. Однак, основна кількість публікацій це - статті фахових журналів “Математика в школі” , “Математика в школах України”, газети “Математика”.

Навіть за період чотирьох останніх років у вказаних фахових виданнях ми віднайшли 25 різних статтей, щодо вивчення теми “Трикутник” в курсі планіметрії. В основному вказані публікації зосереджені на проведенні нетрадиційних уроків математики в школі, на створенні умов для засвоєння властивостей трикутників та їх елементів. Варто, відзначити значну кількість публікацій щодо вивчення трикутників в школі відомого українського вченого-методиста Григорія Петровича Бевза.

Мета даної статті: виокремити та обґрунтувати необхідні умови ефективного засвоєння учнями поняття “трикутник” на уроці планіметрії в 7 класі.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо методичні особливості педагогічних умов формування глибоких і міцних знань учнів 7 класу про трикутники на уроці вивчення означення трикутника. Для початку розглянемо формулювання означення трикутника в різних шкільних підручниках.

У підручнику “ Геометрія 7 ” авторських колективів А. Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір; О.В. Погорєлов; О. Я. Біляніна, Г. І. Білянін, В.О. Швець; М. П. Кельбас; М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова; О. С. Істер.

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки.

У підручнику “ Геометрія 7 ” (2004р.) Г. П. Бевза, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірової поняття “трикутник” вводиться так :

Якщо три точки, що не лежать на одній прямій, сполучити відрізками, матимемо трикутник.

У підручнику “Геометрія 7” (2007р.) Г. П. Бевза, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірової поняття “трикутник” вводиться так :

Трикутник – це замкнена ламана з трьох ланок.

Трикутник – це внутрішня частина площини, обмежена ламаною.

У навчально-методичній літературі зустрічаються, по-перше, різні формулювання означення “трикутника”, по-друге, інші види геометричних фігур, які теж називають трикутником. Зокрема, ми вибрали з проаналізованої літератури такі різні твердження:

- *Три точки* A, B, C*, які не лежать на одній прямій, сполучено відрізками. Утворена фігура обмежує частину площини, яка разом з відрізками* AB, BC, CA *називається трикутником.*
- *Трикутник - три точки, що не лежать на одній прямій, і три відрізки, що їх сполучають.*
- *Трикутник – багатокутник із трьома сторонами. Це фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, та трьох відрізків* AB, BC, AC*, які сполучають попарно ці точки.*
- *Нехай* A, B, C *–три довільні точки, які не лежать на одній прямій. Фігура, яка складається із трьох відрізків* AB, BC, AC *називається трикутником.*
- *Трикутник називають частину площини.*
- *Трикутник – плоска фігура, утворена з’єднанням трьох точок прямими лініями.*

Наш аналіз свідчить, що найчастіше у сучасних підручниках геометрії для школи зустрічається означення виду: *Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки.*

Зрозуміло, що відрізняються вище вказані означення трикутника, зокрема, вибором родового поняття. В одних означеннях родовим поняттям є фігура, в інших означеннях - плоска фігура, а в інших означеннях - многокутник.

Очевидно, якщо за родове поняття обрано - фігуру, яка складається з певних елементів, то маємо каркасну модель трикутника; якщо за родове поняття прийнято плоску фігуру, то точки площини, що знаходяться всередині трикутника, теж належать трикутнику.

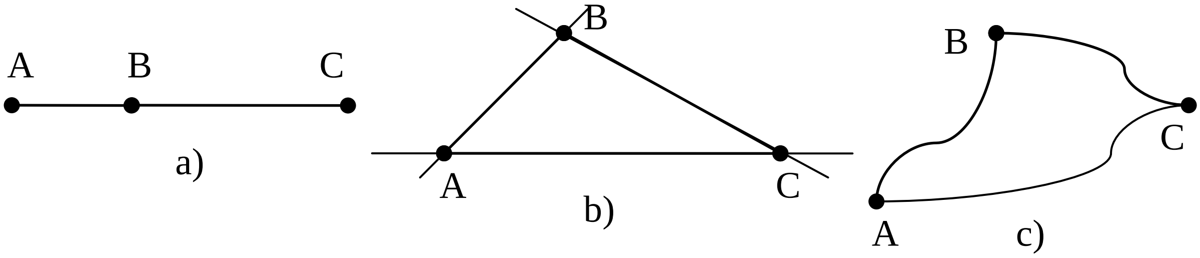
Типовими помилками учнів, на першому етапі засвоєння поняття трикутника, є такі формулювання учнів:

a) трикутником – називається фігура, яка складається з трьох точок і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки.

b) трикутником – називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій і трьох прямих, які попарно сполучають ці три точки.

c) трикутником – називається фігура, яка складається з трьох ліній, що з'єднують три різні точки, які не лежать на одній прямій.

У роботі з типовими помилками учнів, по-перше, варто переконати учнів у неправильності сформульованого твердження, а потім слід коректувати його формулювання. Найкращим прийомом розкриття типових помилок є контр приклади. У нашому випадку варто зобразити учням ілюстрації до сформульованих ними тверджень :



Сьогодні вчитель має дбати про умови оптимізації процесу навчання. Тобто, вчитель математики має шукати і знаходити прийоми та засоби, які за короткий час дозволять досягнути навчальної мети. У нашому випадку, для створення оптимальних умов засвоєння учнями основного змісту поняття трикутника варто використовувати мультимедійні технології навчання. Зокрема, при наявності у класі інтерактивної дошки вчитель може швидко, естетично та якісно, а головне, вчасно запропонувати учням розгляд, наприклад, вказаних контрприкладів до типових помилок. Як свідчить практика навчання, на думку багатьох вчителів, уроки з математики з використанням інтерактивних дошок, не лише відзначались значною економією часу на роз'яснення навчального матеріалу, але й значним поліпшенням якості засвоєння учнями нового навчального матеріалу. Особливо сказане стосується уроків геометрії. Як свідчать спостереження вчителів, активізація пізнавальної діяльності забезпечується методично грамотним використанням інтерактивної дошки на уроці: значно підвищується увага учнів до якісних, можливо рухомих зображень на екрані. Позитивно-емоційне сприйняття учнями, зокрема нових означень понять сприяє якості їх засвоєння і міцності їх запам'ятовування.

У процесі дослідження умов підвищення ефективності засвоєння учнями означення поняття “ трикутник ” , ми здійснили пошук та аналіз фахових публікацій вчителів математики, які діляться власним досвідом формування міцних і свідомих знань учнів.

Зокрема, ми проаналізували три статті вчителів І. Ф. Лебедко, В. А. Музиченко, О. І. Чижової з розробками нестандартних уроків на тему “Трикутник”. У навчальних цілях уроку, зокрема, визначалось: формувати свідоме засвоєння поняття про трикутник. На жаль, основні акценти у вказаних розробках зроблені вчителями на ігрових технологіях, організації певної подорожі у дивний світ геометрії, в активному використанні віршованих текстів, загадок, кросвордів та інших прийомів активізації пізнавальної діяльності учнів.

Наприклад, із розробки уроку Лебедко І. Ф. :

Нарешті ми в країні Тригорії. Якщо на площині Нам взять всього три точки, (Та тільки, щоб були Вони не у рядочку), Відрізками усі з'єднати послідовно – Тоді здобудем ми Трикутник безумовно Поглянь на цю фігуру. У неї всього три – Три сторони, вершини, а отже, й три кути. Це найпростіший многокутник, і зветься він – трикутник. Серед многокутників – Трикутників багато. А як нам їх усіх впізнати? Треба їх класифікувати.

Із розробки уроку Музиченко В. А. :

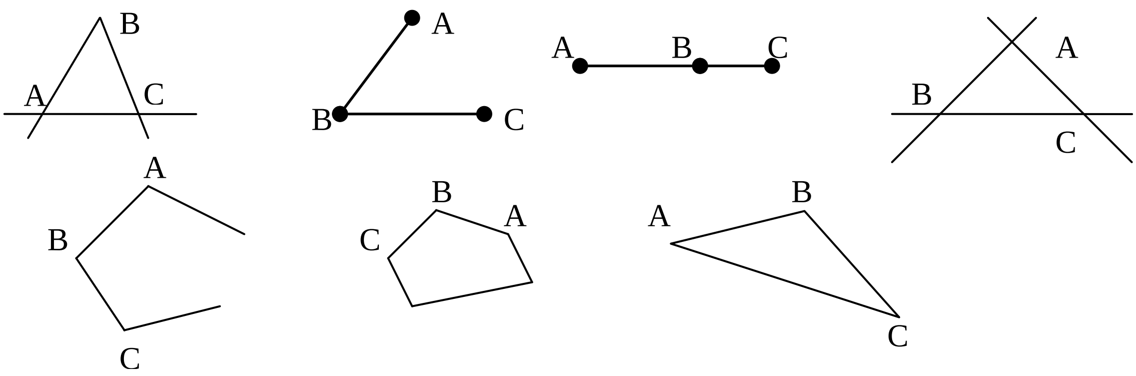
Три точки нарисуємо, Відрізками з'єднаємо.
Фігуру з вами маємо. Її як називаємо? (Трикутник)

Досить цікавими з точки зору нашого методичного пошуку виявились публікації Зорі Л.І. "Математика і народознавство"; Миценко К. А., "Розвиток творчо-критичного мислення учня під час вивчення математики." Панішевої О. "Прийоми запам'ятовування навчального матеріалу ".

Зокрема міркування Зорі Л. І. про можливість пов'язування навчального матеріалу з математики з елементами народознавства спонукало нас до ідеї на уроці вивчення означення трикутника, за допомогою інтерактивної дошки показати учням елементи культурних надбань українського народу. Наприклад, за допомогою інтерактивної дошки, доречним є розгляд українських рушників з їх орнаментами, символами, серед яких як ми самі здивовано помітили: значна кількість трикутників.

Ідеї Миценко К. А. щодо розвитку творчо-критичного мислення учнів під час вивчення математики спонукали нас до розгляду таких вправ на уроці введення поняття "трикутник" :

1. *На вказаних рисунках знайти фігури, які є трикутниками:*



2. *Як можна поєднати поняття:*
   а) точка та трикутник;
   б) відрізок та трикутник;
   в) пряма та трикутник.
3. *Знайти помилку у наведених нижче твердженнях:*
   а) якщо точка лежить на прямій, що містить сторону трикутника, то вона належить трикутнику;
   б) точки, які належать трикутнику, це вершини трикутника;

в) якщо маємо три різні точки, то завжди маємо трикутник з вершинам у цих точках.

Зацікавили нас також міркування Панішевої О. щодо використання на уроках математики різних прийомів запам'ятовування навчального матеріалу.

Усі прийоми запам'ятовування матеріалу можна розділяти на два основних напрями: мнемотехніка (методи, в основі яких лежить вербально-логічне мислення) та ейдетика (методи, які базуються на конкретно-образному мисленні). Вперше таке ділення запропонував радянський психолог А. Р. Лурія. Зараз у педагогіці є багато шанувальників як першого, так і другого напряму.

Використання інтерактивної дошки на уроці вивчення означення трикутника дозволяють активізувати методи запам'ятовування, які базуються на конкретно образному мисленні учнів. Тобто, розгляд якісних, кольорових образів на екрані, сприяє кращому запам'ятовуванню означення трикутника, зокрема, тими учнями в кого добре розвинута зорова пам'ять.

Висновки: таким чином до необхідних умов ефективного засвоєння учнями поняття трикутника на уроці планіметрії в 7 класі відносимо:

- знання типових помилок учнів при засвоєнні нового поняття та створення умов на уроці для їх виправленяя та попередження;

- використання сучасних засобів навчання, зокрема мультимедійних для ущілення часу на уроці та підвищення якості сприйняття нового матеріалу;

- використання вчителями прийомів активізації мислення учнів за допомогою різних видів вправ;

- використання різних засобів збуджуючих пізнавальний інтерес учнів до навчального матеріалу.

Література.

1.Зоря Л. І. Математика і народознавство // Математика в школі. – 2005. - №36.

2.Миценко К. А. Розвиток творчо-критичного мислення учнів під час вивчення математики // Математика в школі. – 2005. - №34.

3.Панішева О. Прийоми запам'ятовування навчального матеріалу // Математика в школі. - 2007. - №8.

4. Чижова О. І. Триткутники // Математика в школах України. – 2005. - №34.

5.Музиченко В. А. Трикутник і його види. Розв'язування задач // Математика в школах України. -2007. - №29.

6.Лебедко І. Ф. Трикутник. Види трикутників // Математика в школах України. -2005. - №30.

7.Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге видання, допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – 582с.

Слободян Вікторія Петрівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТЬ ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ В КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ

Постановка проблеми. Якість знань і умінь учнів основної школи із планіметрії в основному залежить від об'єму і міцності їх знань про геометричні фігури їх елементи і властивості. Серед основних видів геометричних фігур, які вивчаються в шкільному курсі планіметрії, очевидно, трикутник та чотирикутник. Основні види чотирикутників, їх елементи і відповідно властивості, вивчають першою темою у 8 класі. Знання учнів про вписані і описані чотирикутники активно перевіряються під час державної підсумкової атестації з математики в 9 класі та зовнішнього незалежного оцінювання з математики перед вступом у вищий навчальний заклад. Сформованість цих знань, як свідчить аналіз результатів вказаних випробувань, залишає бажати кращого.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Огляд фахових публікацій з 2008 року свідчить, що вісім статтей фахових журналів «Математика в школі» і «Математика в школах України», стосуються безпосередньо вивчення чотирикутника в школі. Перегляд фахових публікацій останнього двадцятиліття, дозволяє виокремити одинадцять статтей, які наведені нами у переліку літератури даної статті. Переважна більшість цих статтей відображає педагогічний досвід вчителів щодо технологій організації пізнавальної діяльності учнів при вивченні теми «Чотирикутники». Лише одна із статтей про властивість вписаних чотирикутників із перпендикулярними діагоналями.

Мета даної статті: обґрунтувати необхідні умови для формування свідомих і міцних знань учнів про вписані і описані чотирикутники у процесі введення цих понять на уроках геометрії в школі.

Виклад основного матеріалу. Поняття вписаного і описаного чотирикутника вводилося традиційно за шкільною програмою в курсі геометрії 9 класу при вивченні вписаних і описаних многокутників. У нових програмах у математики (2005 р.) відповідний матеріал вивчається у курсі геометрії 8 класу при вивчені теми «Чотирикутники». У державних вимогах до рівня загальноосвітньої підготовки учнів зазначено, що учень має формулювати означення і властивості вписаних і описаних чотирикутників; ознаки вписаних і описаних чотирикутників; доведення властивостей і ознак вписаних і описаних чотирикутників. Програма також наголошує, що учень має застосовувати вивчені означення і властивості до розв'язування задач.

При попередньому підході вивчення вписаних і описаних чотирикутників у 9 класі при вивчені теми «Многокутники», означення вписаних і описаних чотирикутників було відсутнє, оскільки сформульовані загальні означення:

- ✓ Якщо всі вершини многокутника лежать на колі, то він називається *вписаним в коло.*

- ✓ Якщо всі сторони многокутника дотикаються до кола, то його називають *описаним навколо кола.*

Знання про вписані і описані чотирикутники випливає з цих означень, як наслідок. Вказаний вище підхід спостерігається в підручниках Погорєлова О.В. «Геометрія 7-9», Бевза Г.П. «Геометрія 7-9», Бурди М.І., Савченко Л.М. «Геометрія 8-9», для шкіл, класів поглибленого навчання математики.

Розглянемо сучасні підручники з геометрії для 8 класу та означення вписаних і описаних чотирикутників у них.

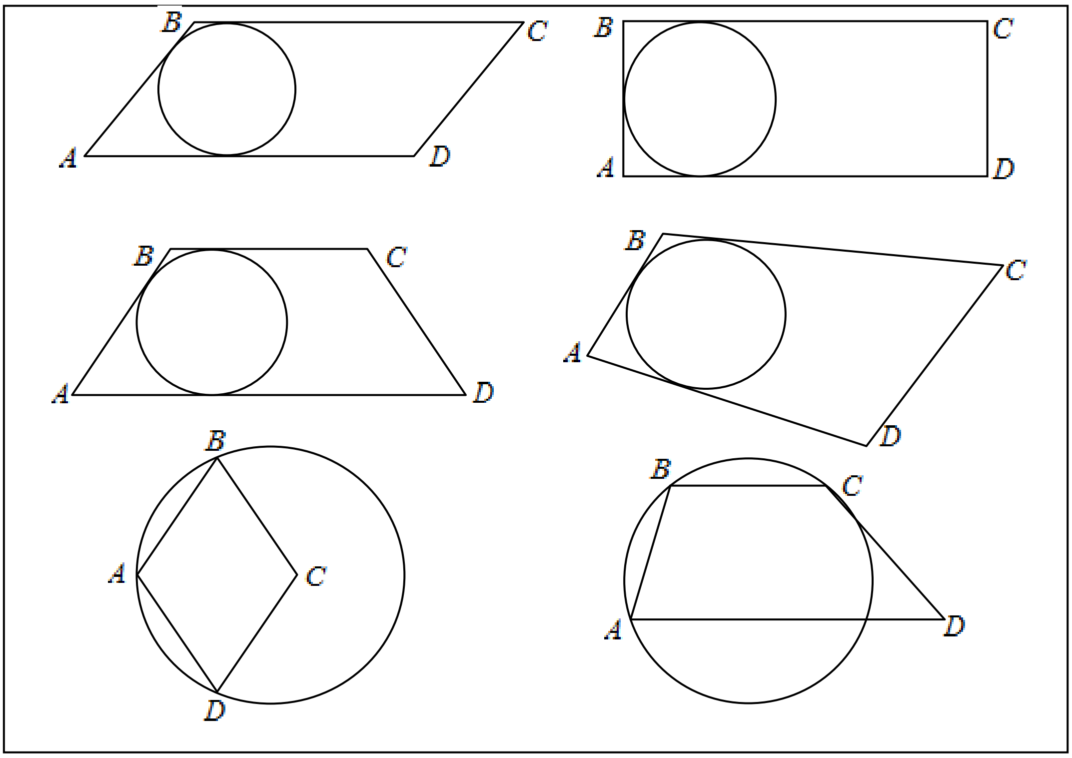
У підручнику «Геометрія 8» Бурди М.І., Тарасенкової Н.А., Бевза Г.П.:

- ✓ Чотирикутник, усі вершини якого лежать на колі, називається *вписаним в коло,* а коло *описаним навколо чотирикутника.*
- ✓ Чотирикутник, усі сторони якого дотикаються до кола називається *описаним навколо кола,* а коло вписаним у цей чотирикутник.

У підручнику «Геометрія 8» Мерзляка А.Г., відповідні означення сформульовані інакше:

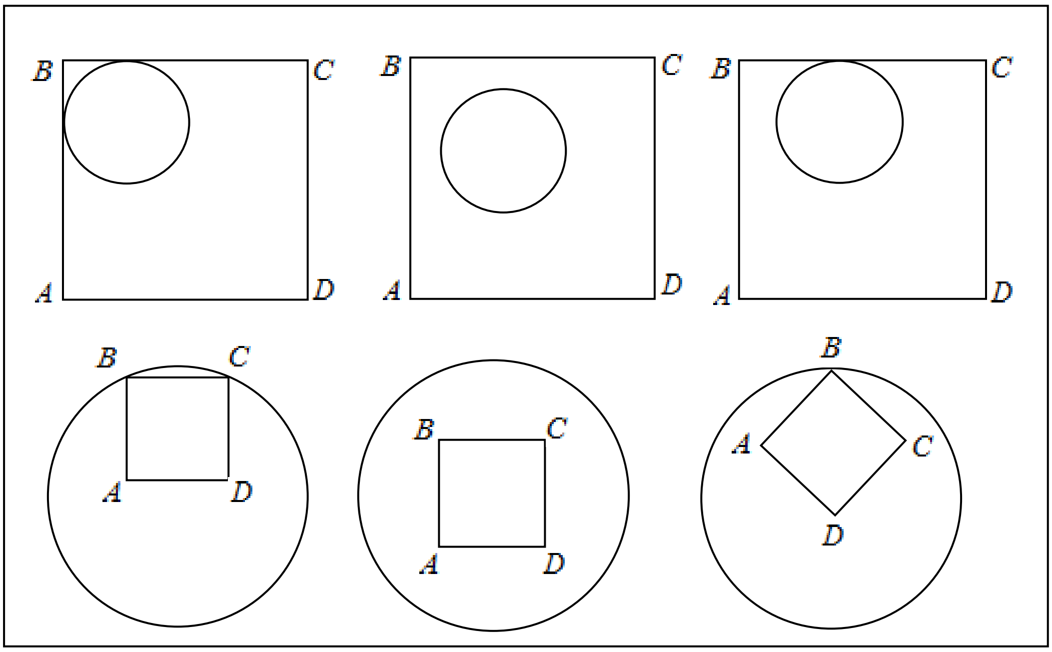
- ✓ Чотирикутник називається *вписаним,* якщо існує коло, якому належать усі його вершини.
- ✓ Чотирикутник називається *описаним*, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його сторін.

До типових помилок учнів щодо розуміння змісту понять вписаний чотирикутник та описаний чотирикутник, в першу чергу, слід віднести поширену помилку, що в будь-який чотирикутник можна вписати коло і навколо будь-якого чотирикутника можна коло описати. Важливо відразу проілюструвати учням приклади чотирикутників для яких це не виконується:



З цієї точки зору більш зручним є означення в підручнику «Геометрія 8» Мерзляка А.Г., оскільки вони підкреслюють існування такого кола.

Найбільш поширеною помилкою учнів при формулюванні означення є пропуск слова «усі», що, очевидно, значно спотворює зміст поняття. З цієї точки зору важливими є вправи на розпізнання означуваного поняття на малюнку з усним коментарем.



На нашу думку, доречною є робота вчителя на виконання усних вправ, які полягають у завершені формулювання твердження:

- Чотирикутник називається вписаним, якщо…
  Очікуване продовження: всі його вершини лежать на колі.
- Навколо трапеції можна описати коло, якщо…
  Очікуване продовження: трапеція рівнобічна, бо у ній сума протилежних кутів дорівнює 180°.
- Якщо всі сторони чотирикутника є дотичними до певного кола, то цей чотирикутник є …
  Очікуване продовження: описаним навколо кола.
- У паралелограм можна вписати коло, якщо…
  Очікуване продовження: паралелограм є ромбом або квадратом.

Наш аналіз свідчить, що типовими на вказаних етапах діагностики знань і вмінь учнів мають бути такі вправи про вписані і описані чотирикутники:

- Чотирикутник вписаний в коло. Сформулюйте цей вислів іншими словами.
  Очікувана відповідь: коло описане навколо чотирикутника.
- Коло вписане в чотирикутник. Сформулюйте цей вислів іншими словами.
  Очікувана відповідь: чотирикутник, описаний навколо кола.
- Чи правильно, що кожний описаний чотирикутник опуклий?
  Очікувана відповідь: правильно.
- Чи правильно, що кожний опуклий чотирикутник є описаний?
  Очікувана відповідь: правильно.

- Наведіть приклад чотирикутника, який є вписаним в коло, але не є описаним навколо кола.

  Очікувана відповідь: прямокутник.
- Наведіть приклад чотирикутника, який є описаним навколо кола, але не є вписаним в коло.

  Очікувана відповідь: ромб, паралелограм.

З метою мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів, варто повідомляти їх, наскільки важливими є отримані знання про вписані і описані чотирикутники під час ДПА з математики в 9 класі та ЗНО з математики після завершення школи.

Висновки. Цілеспрямована робота вчителя з відбору необхідних вправ для попередження типових помилок учнів у сприйняті того чи іншого нового поняття, має стати передумовою для якісного засвоєння нових понять учнями.

Сучасні технології навчання, використання комп'ютерних засобів навчання (проектор, інтерактивна дошка), дозволяють вчителеві розглянути представлені в статі вправи швидко, естетично, якісно, переконливо.

Література

1. Вєрнік Н.М. Чотирикутники та їх властивості. Міні – підручник. 8 клас.//Математика в школах України, №30, 2007
2. Вознесенська Л.М. Чотирикутники, трикутники. Проектна діяльність учнів 6 класів під час вивчення теми. // Математика в школах України, №6, 2006.
3. Дорош Л., Філіповський Г. Паралелограм і зчеплені з них фігури.// Математика в школах України, №14, 2005.
4. Мавло Д. Чотирикутник і коло: декілька красивих теорем. // Математика в школі, №2, 2007.
5. Філіповський Г. Вписаний чотирикутник з перпендикулярними діагоналями. // Математика в школах України, №17, 2003.
6. Ігнатенко Р.А. Чотирикутники та їх властивості. 8 клас. // Математика в школах України, №27, 2005.
7. Москальова С.В. Чотирикутники. Підсумковий урок з геометрії у 8 класі. // Математика в школах України,№30, 2004.
8. Повзло Н.М. Чотирикутники. // Математика в школах України, №30, 2006.
9. Прохорова О.С. Чотирикутники. Задачі на побудову. Інтерактивний урок. // Математика в школах України, №13-14, 2007.
10. Суховертова Л.П. Чотирикутники. Підсумковий урок із застосуванням інтерактивних технологій. // Математика в школах України,№13-14, 2007.
11. Васильцова Г.І. Чотирикутники. Урок – КВВМ. // Математика в школах України,№16-18, 2007

Фірманюк Юлія Віталіївна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТЬ «СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ» ТА «СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ

Постановка проблеми. Поняття симетрії відіграє провідну, хоча й не завжди усвідомлену, роль у сучасній науці, мистецтві, техніці і навколишньому житті. Симетрія пронизує буквально все навколо, захоплюючи, начебто, цілком несподівані області й об'єкти. Тут доречно згадати слова Дж. Ньюмена, що особливо вдало підкреслив всеохоплюючі і всюдисущі прояви симетрії: «Симетрія встановлює забавну та дивовижну спорідненість між предметами, явищами і теоріями, зовні, начебто, нічим не пов'язаними: земним магнетизмом, жіночої вуаллю, поляризованим світлом, природним відбором, теорією груп, інваріантами і перетвореннями, будовою простору, малюнками ваз, квантовою фізикою, скарабеями, пелюстками квітів, картиною рентгенівських променів, розподілом клітин морських їжаків, конфігураціями кристалів, романськими соборами, сніжинками, музикою, теорією відносності...» Але, на нашу думку, вивченню поняття «симетрія» у школі приділяється недостатньо уваги. Вчителі часто «нашвидкуруч» пояснюють тему «Геометричні перетворення». Це спричиняє нерозуміння її практичного значення учнями, тобто спостерігається певна відірваність цієї теми від реального життя, що є недопустимим з точки зору навчальних цілей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основніпроблемивведення понять «симетрія відносно точки» і «симетрія відносно прямої» в курсі планіметрії загальноосвітньої школи, їх ефективне застосування в навчальному процесі викладені в роботах Яковця В.П., Зайченка І.В., Боровика В.Н., Тарасова Л.В. Філіпповського Г., Мурача М.М., Костюк Т.П., Дарагана В.М.

Мета даної статті: обґрунтувати ефективні педагогічні умови засвоєння понять «симетрія відносно точки» та «симетрія відносно прямої» у процесі навчання планіметрії у школі.

Виклад основного матеріалу. Симетрія відносно точки і прямої вивчається у курсі планіметрії 9 класу у темі «Геометричні перетворення». Згідно з навчальною програмою для 9 класів на вивчення цієї теми у загальноосвітніх школах виділяється 10 годин і з них 1-2 на вивчення симетрії, а для класів з поглибленим вивченням математики 20 годин і 3-4 години відповідно на вивчення симетрії.

Загальне означення, яке дає тлумачний словник іншомовних слів:
Симетрія (від грец. συμμετρεῖν — гармонія, розмірність) — розміщення точок або частин предмета на площині чи в просторі, коли одна половина є ніби дзеркальним відображенням другої.

Вартим уваги є математичне означення поняття «симетрія» у Великій Радянській Енциклопедії:
Симетрія (від греч. symmetria - відповідність):

1) *симетрія (у вузькому сенсі), або віддзеркалення (дзеркальне) відносно прямої a на площині, - перетворення площини, при якому кожна точка M переходить в точку M′ таку, що відрізок MM′ перпендикулярний прямій a і ділиться нею навпіл. Пряма a називається віссю;*
2) *симетрія (у широкому сенсі) - властивість геометричної фігури Ф, що характеризує деяку правильність форми Ф, незмінність її при дії рухів і віддзеркалень.*

Розглянемо основні методи введення понять «симетрія відносно точки» та «симетрія відносно прямої» у різних підручниках геометрії. Проведемо екскурс підручниками, що були рекомендовані Міністерством освіти СРСР. Так у підручнику «Геометрия для 6 – 8 классов» Нікітіна Н. Н. поняття «симетрія відносно прямої» пропонується учням у розділі «Трикутники» окремим параграфом, а поняття «симетрія відносно точки» у розділі «Чотирикутники» параграфом під назвою «Центральна симетрія». Автор не пропонує як таких означень понять «симетрія відносно прямої» та «симетрія відносно точки», він означає лише поняття симетричних точок та симетричних фігур відносно прямої чи точки:

1) *дві фігури називаються симетричними відносно деякої прямої, якщо при перегинанні площини креслення по цій прямій вони суміщаються;*
2) *центрально симетричними відносно центра O називаються дві точки, які лежать на одній прямій, що проходить через центр O, на рівних відстанях від центра O. Дві фігури називаються центрально симетричними відносно центра O, якщо при повороті одної із них з них навколо цього центра на 180° вини суміщаються всіма своїми точками.*

Схоже до Нікітіна Н. Н. автори Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. та ін. у своєму підручнику «Геометрия для 7 – 9 классов средней школы» розглядають поняття симетрії відносно точки та симетрія відносно прямої у розділі «Чотирикутники» у параграфі «Прямокутник, ромб, квадрат», але означення не вводять. Означаються лише поняття симетричних точок та симетричних фігур відносно прямої чи точки, але в інший спосіб:

1) *дві точки A і A_1 називаються симетричними відносно прямої a, якщо ця пряма проходить через середину відрізка AA_1 і перпендикулярна до нього. Фігура називається симетричною відносно прямої a, якщо для кожної точки фігури симетрична їй точка відносно прямої a також належить цій фігурі.*
2) *дві точки A і A_1 називаються симетричними відносно точки O, якщо O – середина відрізка AA_1. Фігура називається симетричною відноснь точки O, якщо для кожної точки фігури симетрична їй точка відносно точки O також належить цій фігурі.*

Оригінальність підручника А.Н. Колмогорова «Геометрия для 6 – 8 классов средней школы» полягає у тому, що весь курс геометрії побудований саме на геометричних перетвореннях. Поняття «симетрія відносно точки» і «симетрія відносно прямої» розглядаються автором у розділі «Конгруентність фігур і переміщення» у параграфі «Переміщення». Перед означенням цих понять вводиться означення точок, симетричних відносно точки та прямої. А означення симетрії формулюються наступним чином:

1) *поворот на$180°$ називається центральною симетрією;*
2) *симетрією з віссю p називається відображення площини на себе, при якому кожна точка площини відображається на точку, симетричну відносно прямої p.*

Не порушуючи хронології розглянемо навчальний посібник Нікуліна О.В. та Кукуша О.Г «Геометрія: поглиблений курс: 7 – 9 класи» допущений Міністерством освіти України. У ньому автори вводять поняття симетрії відносно точки і симетрії відносно прямої у розділі «Рухи на площині» у параграфі «Основні види рухів». Тут відповідні означення уже подаються на основі відображень:

1) *нехай O – деяка фіксована точка площини. Сполучимо її з довільною, відмінною від неї точкою A, і відкладемо на промені AO відрізок OA′, що дорівнює відрізку OA. Означимо відображення f так: f(A) = A′, f(O) = O.Це відображення називається симетрією відносно точки O (центральною симетрією);*
2) *проведемо через довільну точку A, яка не лежить на прямій a, перпендикуляр AH і продовжимо його на відрізок HA′, що дорівнює AH. Покладемо f(A) = A′. Для будь-якої точки M прямої a вважатимемо, що f(M) = M. Таку відображення f називається симетрією відносно прямої a (осьовою симетрією).*

Бевз Г.П., Бевз В.Г. та Владімірова Н.Г. у підручнику «Геометрія для 7-9 класів» подають означення симетрії відносно прямої та симетрії відносно точки аналогічно до підручника Колмогорова А. Н.

Розглянемо основні методи введення понять симетрія відносно точки та симетрія відносно прямої у підручниках геометрії для учнів 9 класу рекомендованих МОНМС України. Автори Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. у підручнику «Геометрія для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів» пропонують наступні означення:

1) *кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно прямої l точку X_1. У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1. Таке перетворення фігури F називають осьовою симетрією відносно прямої l;*
2) *кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відповідність симетричну їй відносно точки O точку X_1. Таке перетворення фігури F називають центральною симетрією відносно точки O.*

Вказані означення розглядаються у одному параграфії «Осьова і центральна симетрії. Поворот».

Аналогічно вводять Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. поняття симетрії відносно точки і симетрії відносно прямої у підручнику «Геометрія для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики».

У підручнику Г.В.Апостолової «Геометрія: 9» автор знайомить учнів з поняттям осьова і центральна симетрії на основі двох означень, які підкріплюються демонстраційними малюнками.

1) *осьовою симетрією відносно прямої – осі симетрії – називається перетворення, яке переводить довільну точку А фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, щоб вісь симетрії є серединним перпендикуляром до відрізка AA_1;*
2) *центральною симетрією відносно точки О називається таке геометричне перетворення, яке переводить довільну точку А фігури-прообраз в точку A_1 фігури-образу так, що точки А, О і A_1 лежать на одній прямій і $A_1O = AO$.*

М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова у підручнику «Геометрія 9» вводять поняття симетрії відносно точки і прямої аналогічно до підручників Мерзляка А. Г., Полонського В. Б., Якіра М. С. Істотною відмінністю є лише два правила-рекомендації стосовно побудови точки симетричної відносно іншої точки чи прямої.

Якщо проаналізувати статті сучасних науковців-методистів, які працюють у сфері дослідження питання активізації навчальної діяльності учнів, то можна стверджувати, що поняття симетрії засвоюється учнями відносно важко. Поняття симетрії варто вводити на основі уже відомих образів, які сформувались у школярів протягом життя. При означенні даного поняття варто звернутися до навколишнього середовища, до природи. Саме тут вчитель має допомогти школярам «перевести» мову природи на математичну. І головне, показати, що увесь світ підкоряється математичним законам.

Після розгляду симетрії у природному середовищі, варто розглянути з учнями симетрію у світі, створеному людиною: техніка, архітектура, мистецтво, фізика, хімія і просто речі щоденного вжитку. Коли учні на інтуїтивно-емоційному рівні усвідомили поняття симетрії відносно точки і прямої, варто вводити суто математичні означення, формулювати і доводити властивості.

З метою актуалізації певних знань учнів можна перед вивченням теми «Симетрія відносно точки і прямої» запропонувати всім учням самостійно підібрати інформацію про симетрію навколо нас. Перший урок цієї теми можна провести у вигляді конференції чи семінару, наприклад, на тему «Серенади Симетрії». Наприкінці уроку має відбутися узагальнення всього матеріалу, а, отже, висновок, у якому має прозвучати важливість вивчення математичних понять симетрії для повноцінного сприйняття людської культури та світу загалом.

Протягом всього вивчення теми варто час від часу повертатися до побутових прикладів, щоб не створювати розрив між практичним життям і теорією.

Звісно, саме при такому введенні даного поняття вчитель може стикнутися з низкою проблем:

- недостатня кількість годин, виділених на вивчення даного матеріалу;

- відсутність чи недостатня кількість дидактичних засобів;
- витрата часу на пошук відповідного дидактичного матеріалу.

Вирішення цих проблем та втілення запропонованих ідей можливе шляхом впровадження у навчання мультимедійних засобів. Адже саме за їх допомогою можна продемонструвати учням уривки науково-популярних та документальних фільмів, слайд-шоу тощо.

Так, на сьогодні, у світовій мережі Інтернет можна знайти велику кількість документальних фільмів та роликів про симетрію. Наведемо декілька прикладів таких відео:

- Крах Теории Эволюции - Симметрия
  http://www.youtube.com/watch?v=pGLq-CkeoCE
- Face Symmetry Intro
  http://www.youtube.com/watch?v=mPTP4YWiu18&feature=related
- Симметричные формы
  http://www.youtube.com/watch?v=oFkKXbRhc1U&feature=related
- Symmetry in Nature Research Project
  http://www.youtube.com/watch?v=gufz9YXTITc&feature=related

На рахунок слайд-шоу, то його можна створити самому з допомогою величезної кількості фотоматеріалів:






Також гарним додатком до уроку можуть слугувати різноманітні книги про симетрію, наприклад:

1) Банкер Ф., Йенсен П. Симметрия молекул и спектроскопия/ Ф. Банкер, П. Йенсен. – М.: Научный мир, 2004. – 786 с.
2) Вейль Герман. Симметрия/ Герман Вейль. – М: Наука, 1968. – 324 с.
3) Портер Л.Г. Симметрия — владычица стихов: Очерк начал общей теории поэтических структур / Л.Г. Портер. — М.: Языки славянской культуры, 2003. — 256 с.
4) Сенашель М. Узоры симметрии/ М. Сенфшель. – М.: Наука, 1980. – 268с.
5) Стюарт Иэн. Аксиома и краса. Глобальная история симметрии/ Иэн Стюарт; пер. с англ. А. Семихатова. – М.: Астрель : CORPUS, 2010. – 461 с.
6) Шубников А. В., Копщик В. А. Симметрия в науке и искусстве / А.В.Шубников, В.А. Копщик. – М.: Наука, 1972. – 340 с.

Висновки. Серед основних педагогічних умов засвоєння понять «симетрія відносно точки» та «симетрія відносно прямої» у процесі навчання планіметрії у школі можна виокремити:

- творчий підбір різнопланового матеріалу для вивчення даних понять;
- залучення учнів до самостійної роботи та творчого пошуку;
- використання мультимедійних засобів навчання на уроці;
- проведення нестандартних фрагментів уроків;
- поєднання навчального матеріалу з оточуючим життям.

Література

1. Апостолова Г.В. Геометрія : 9 : дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.В.Апостолова. – К. : Генеза, 2009. – 304 с.
2. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия: Учеб. для 7 – 9 кл. сред. шк. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 1992. – 335 с.
3. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І.Бурда, Н.А.Тарасенкова. - К. : Зодіак-ЕКО, 2009. - 240 с.
4. Колмогоров А. Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия: Учебное пособие для 6 – 8 кл. сред. шк./ под ред. А.Н. Колмогорова. – М. : Просвещение, 1979. – 383 с.
5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики /А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М.С. Якір. — Х.: Гімназія, 2009. — 272 с.
6. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: Підручн. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів /А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М.С. Якір. — Х.: Гімназія, 2009. — 272 с.
7. Никитин Н. Н. Геометрия: Учеб. для 6 - 8 кл / Н. Н. Никитин. – М. : Просвещение, 1971. – 209 с.

Ящук Карина Ігорівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ ПІФАГОРА У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Теорема Піфагора є однією з ключових теорем шкільного курсу математики. Тому доцільність її запам'ятовування учнями та можливість вільного оперування нею не викликає будь-якого сумніву.

На кожному етапі навчання педагогічний результат значною мірою залежить від співвідношення між двома основними факторами – рівнем знань учнів і рівнем складності запропонованих їм завдань. Наразі, аналізуючи сучасний стан математичних знань школярів можна зробити висновок, що значна частина учнів не пам'ятає теореми Піфагора, а ще більша частина не вміє нею оперувати.

На мою думку, основною причиною низького запам'ятовування даної теореми є запам'ятовування учнями її, як факту, тобто учень намагається запам'ятати саме формулювання теореми, не утруднюючи себе знанням її доведення.

Мета даної статті, надати можливість вчителям підібрати доведення теореми Піфагора відповідно до можливостей сприйняття доведення даної теореми учнями. Тобто вона буде корисною при реалізації індивідуального підходу в навчанні та для проведення цікавих уроків, які будуть пробуджувати цікавість і працьовитість, фокусувати увагу та зосередженість учнів.

Отже, теорема Піфагора формулюється так:

У прямокутному трикутнику, квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Розглянемо способи доведення даної теореми:

Алгебраїчне доведення, доцільне під час проведення уроку, на якому використовується проектор.

Побудуємо прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c.

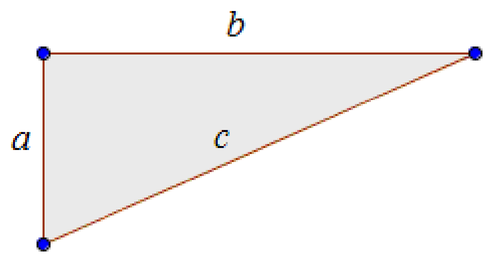


рис. 1

Знайдемо площу даного прямокутного трикутника: $S = \frac{ab}{2}$.

Візьмемо ще три прямокутні трикутники рівні даному. Розмістимо ці чотири однакові прямокутні трикутники, так як на рис.2, щоб утворився квадрат з сторонами $a+b$.

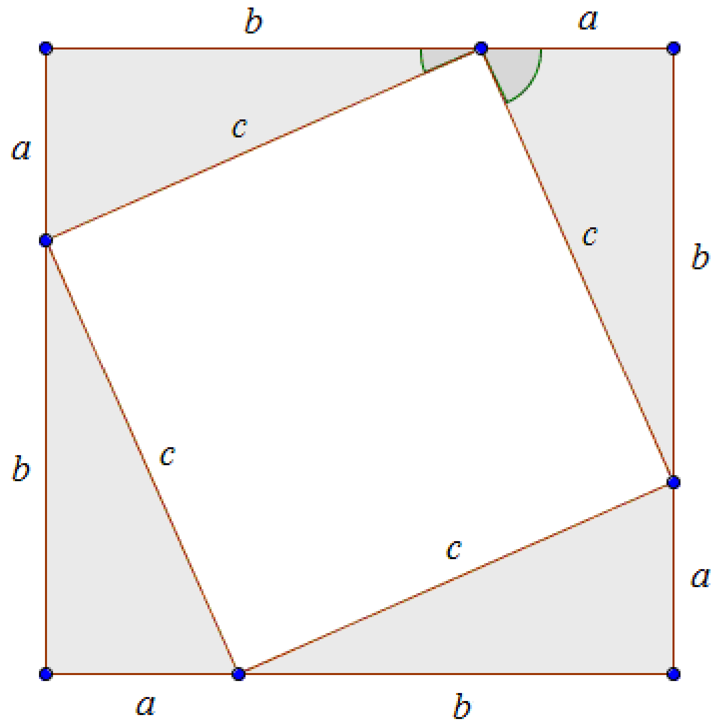


рис. 2

Чотирикутник, який утворився всередині квадрата буде квадратом зі сторонами c, дійсно, оскільки сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90^0, а розгорнутий кут дорівнює 180^0.

З однієї сторони площа великого квадрата дорівнює $(a+b)^2$, з іншої сторони вона дорівнює сумі площ чотирьох прямокутних трикутників і внутрішнього (білого) квадрата: $4\cdot\dfrac{ab}{2}+c^2$.

Прирівняємо отримані площі, оскільки вони є площами однієї і тієї ж фігури.

$$(a+b)^2 = 4\cdot\frac{ab}{2}+c^2,$$

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2,$$

$$a^2+b^2=c^2.$$

Що і потрібно було довести.

За подібністю трикутників:

Нехай ACB прямокутний трикутник, в якому кут $C-$ прямий, як показано на рисунку.

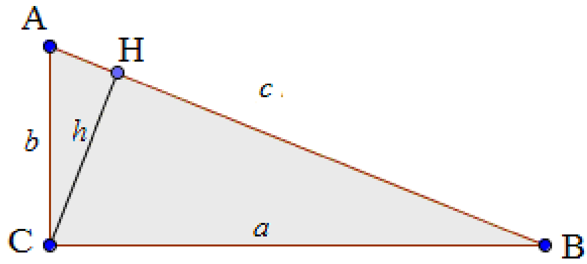


рис. 3

Проведемо висоту з вершини прямого кута і назвемо H точку перетину її із стороною AB. Утворений трикутник AHC подібний до трикутника ACB, оскільки вони обидва прямокутні, і в них спільний кут A.

Аналогічно міркуючи, трикутник CHB також подібний до трикутника ACB.

Перепозначимо: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тоді з подібності трикутників ACB і CHB, маємо: $\frac{a}{c} = \frac{HB}{a}$. Аналогічно, з подібності трикутників AHC і ACB, маємо: $\frac{b}{c} = \frac{AH}{b}$.

Перетворивши останні рівності, запишемо:

$a^2 = c \cdot HB$ і $b^2 = c \cdot AH$.

Якщо додати ці дві рівності, маємо:

$$a^2 + b^2 = c \cdot HB + c \cdot AH = c \cdot (HB + AH) = c \cdot c = c^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Що і потрібно було довести.

Дане доведення є доцільним, тоді коли учитель хоче повторити з учнями властивості подібності трикутників.

Окрім згаданих вище доведень, доречно пропонувати учням на домашнє завдання, практичне доведення даної теореми, шляхом вимірювань та обчислень. Розуміння завжди являє собою пізнання нового, невідомого з допомогою старого, вже відомого.

Опишемо, практичний спосіб доведення теореми Піфагора. Сформулюємо її в наступному вигляді:

У прямокутному трикутнику площа квадрата побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах.

Побудуємо прямокутний трикутник з катетами, наприклад, a і b та гіпотенузою c.

На катеті a будуємо квадрат, відповідно з стороною $a = 6\,(см)$, і вимірюємо його площу, щодорівнює a^2, маємо відповідний запис $S_1 = 36\,(см^2)$. Потім на катеті b будуємо квадрат, відповідно з стороною $b = 4\,(см)$, і вимірюємо його площу,що дорівнює b^2, маємо запис $S_2 = 16\,(см^2)$.

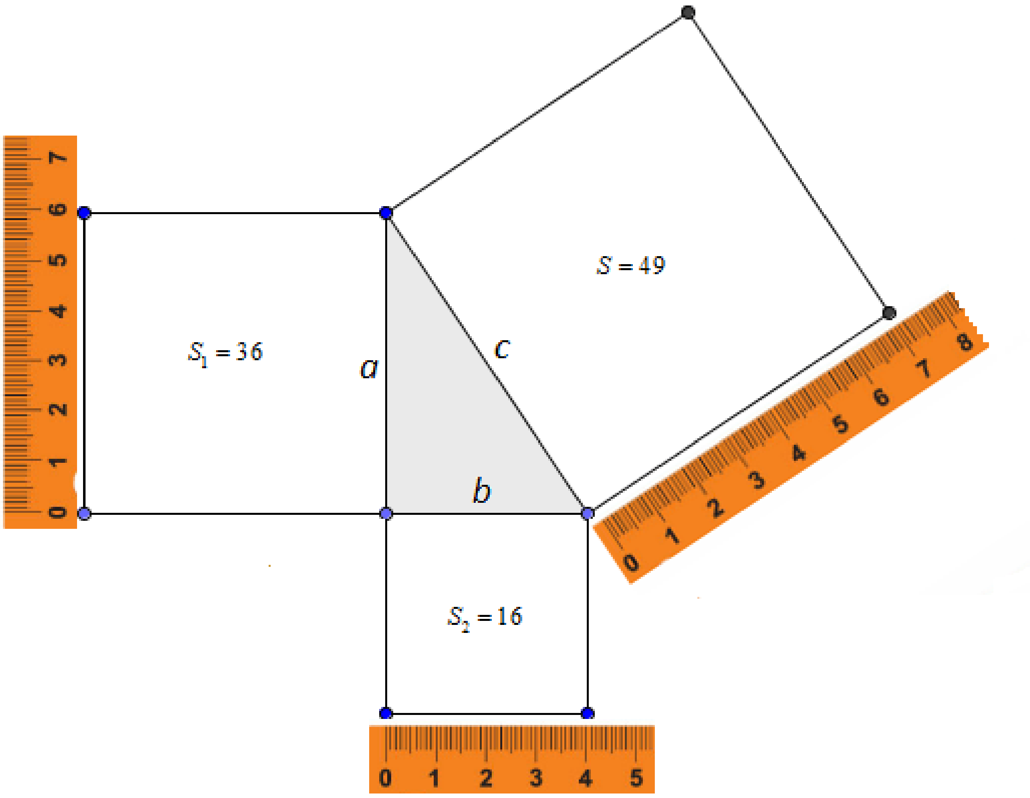


рис. 4

Аналогічно, площа квадрата побудованого на гіпотенузі $c = 7\ (см)$ дорівнює c^2, відповідно $S = 49\ (см^2) \approx 52\ (см^2)$.

Отримаємо: $a^2 + b^2 \approx c^2$.

Що і потрібно було довести.

Учнів, які поглиблено вивчають математику, повинно зацікавити доведення теореми Піфагора у трактуванні самого Евкліда, дане доведення може стимулювати інтерес до вивчення математики, за рахунок цікавості до її історичного розвитку.

Представимо дане доведення наступним чином:

Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом ABC. На кожній стороні BC, AB і AC побудуємо квадрати $BCIH$, $FABG$ та $ADEC$, дивись (рис. 5). З точки B проведемо пряму паралельну до AD. Вона перетне відрізки AC і DE під прямими кутами в точках K і L відповідно. Проведемо відрізки CF і BD отримаємо трикутники ACF і ADB.

Використаємо властивість рівності трикутників:

Якщо дві сторони одного трикутника і кут між ними дорівнює відповідно двом сторонам та куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

У нашому випадку:

Кути ABC і ABG – прямі, відповідно точки C, B, G лежать на одній прямій, так само як і точки A, B і H, лежать на одній прямій AH.

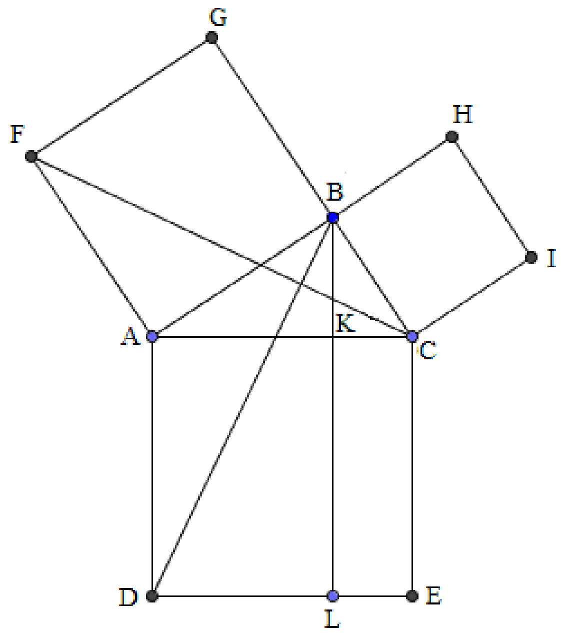


рис. 5

Кути DAC і FAB – прямі, тоді кут DAB дорівнює куту FAC, оскільки обидва є сумою прямого кута та кута BAC.

Тоді, трикутники DAB та FAC рівні за двома сторонами і кутом між ними.

Використовуючи теорему:

Площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, що має таку саму основу і таку саму висоту.

Площа прямокутника $ADLK$ дорівнює двом площам трикутника DAB, (дійсно, трикутник DAB і прямокутник $ADLK$, мають одну і ту ж саму основу AD, мало того, трикутник DAB і прямокутник $ADLK$, мають одну і ту ж саму висоту, яка в обох дорівнює по величині AK).

Площа квадрата $FABG$ дорівнює двом площам трикутника FAC, (дійсно, трикутник FAC і квадрат $FABG$, мають одну і ту ж саму основу FA, мало того, трикутник FAC і квадрат $FABG$, мають одну і ту ж саму висоту, яка в обох дорівнює величині AB).

Враховуючи, що трикутник DAB дорівнює трикутнику FAC, то відповідно дві площі трикутника DAB дорівнюють двом площам трикутника FAC, а тому площа прямокутника $ADLK$ дорівнює площі квадрата $FABG$.

$S_{ADLK} = S_{FABG} = AB^2$

Тепер проведемо відрізки AI і BE, отримаємо трикутники ACI і BCE, як на (рис. 6).

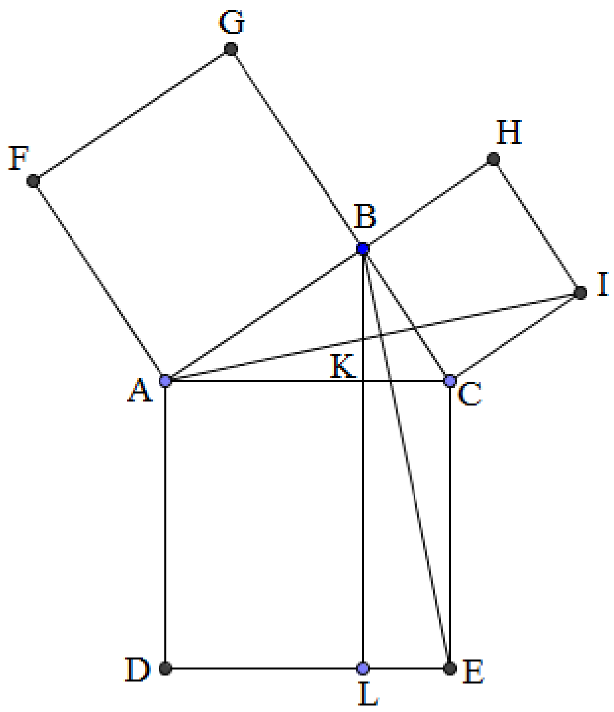


рис. 6

За властивістю рівності трикутників, отримаємо, що трикутник ACI рівний трикутнику BCE.

Використовуючи те, що площа трикутника дорівнює половині площі паралелограма, що має таку саму основу і таку саму висоту, отримаємо:

Площа прямокутника $KLEC$ дорівнює двом площам трикутника BCE, (дійсно, трикутник BCE і паралелограм $KLEC$, мають спільну основу та однакову висоту, яка по величині дорівнює KC).

Площа квадрата $BCIH$ дорівнює двом площам трикутника ACI, (дійсно трикутник ACI і квадрат $BCIH$, мають спільну основу та однокову висоту, яка по величині дорівнює BC).

Оскільки трикутники BCE і ACI рівні, то і подвоєні їх площі будуть рівними, а саме площа прямокутника $KLEC$ і квадрата $BCIH$.

$S_{KLEC} = S_{BCIH} = BC^2$

З одного боку площа квадрата $ADEC$ дорівнює сумі площ прямокутників $ADLK$ і $KLEC$, а з другого −площа квадрата дорівнює AC^2.

$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Що і потрібно було довести.

РОЗДІЛ 4. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Василина Наталя Олександрівна
студентка магістратури, спеціальності «Математика»

ЗАСВОЄННЯ ПОНЯТТЯ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА В ПРОЦЕСІ САМОСТІЙНОЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Невід'ємно важливим елементом вивчення математики є введення математичних понять. Характеризуючи пізнавальну діяльність як об'єкт управління, Н.Ф.Тализіна зазначає, що «Формування понять передбачає, по-перше, засвоєння системи спеціальних операцій для встановлення необхідних і достатніх ознак понять у конкретних предметах. По-друге, засвоєння загально логічної системи операцій: підведення об'єктів під дане поняття, одержання наслідків із належності об'єкта даному класу предметів. Через зазначену систему операцій і відбувається управління формуванням понять»[7].

До структури пізнавальної діяльності із засвоєння математичних понять входять як загальні, так і специфічні розумові дії. До *загальних*(за термінологією О. І. Раєва [4]) належать дії: аналіз, синтез, порівняння, абстрагування і конкретизація, узагальнення і спеціалізація, встановлення та використання аналогій, класифікація і систематизація. Вони забезпечують установлення необхідних і достатніх властивостей понять у конкретних об'єктах і формування узагальненого поняття та системи понять у структурі предмета.

До *специфічних*(за термінологією Н. Ф. Тализіної), або конкретних (за термінологією О. І. Раєва), розумових дій належать: дія підведення під поняття та обернена їй дія виведення наслідків — від факту належності об'єкта до певного поняття переходять до системи властивостей, які притаманні даному об'єкту.

Метою статті є показати роль загальних і специфічних розумових дій у процесі формування математичних понять та технологію введення поняття «паралелепіпед» в процесі самостійної пізнавальної діяльності учнів.

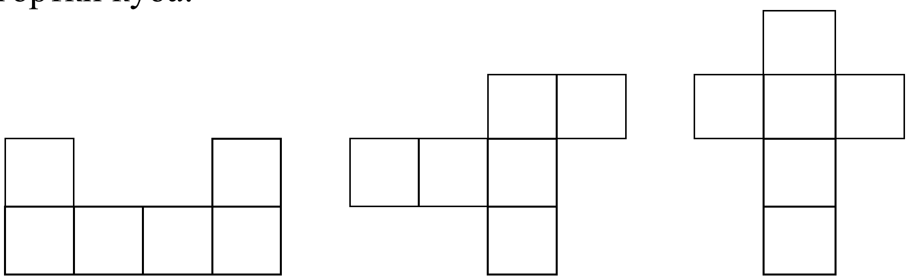
З поняттям «паралелепіпед», учні розпочинають знайомство ще в основній школі під час вивчення теми «Прямокутний паралелепіпед, його виміри» у 5 класі, 9 класі при вивченні розділу елементи стереометрії. Вивчення поняття «паралелепіпед» продовжується у курсі стереометрії 11 класу. У шкільних підручниках з геометрії 11 класу пропонується однакове означення паралелепіпеда: паралелепіпедомназивається призма, основа якої — паралелограм.

Важливим під час введення поняття «паралелепіпеда» є демонстрація моделей паралелепіпеда та його видів. Учні повинні пригадати уже відомі факти: усі шість граней паралелепіпеда — паралелограми; протилежні грані паралелепіпеда рівні й лежать у паралельних площинах, протилежні ребра рівні й паралельні (чому?).

На етапі мотивації навчальної діяльності учнів, вчитель може запитати учнів де в природі, навколишньому середовищі вони зустрічають моделі паралелепіпедів (сірникова коробка, пенал, цеглина, підручник і т.д.). Більшість учнів наведе приклади прямих паралелепіпедів. Проте, варто наголосити, що в навколишньому середовищі зустрічаються не лише предмети, які мають форму прямого паралелепіпеда. Тому учням можна запропонувати учням дати відповіді на наступні запитання:

1. Назвіть які-небудь предмети побуту, що мають форму похилого паралелепіпеда. Чому такі предмети зустрічаються дуже рідко?

2. На рисунку 1 зображено три фігури з номерами 1, 2, 3. Серед цих фігур вкажіть розгортки куба.



1 **2** **3**

Рис. 1.

А)Лише фігура 3;
Б) лише фігури 1 і 2;
В) лише фігури 1 і 3;
Г) лише фігури 2 і 3;
Д) фігури 1, 2, 3.

У процесі такої бесіди вчитель із учнями з'ясовує, що паралелепіпеди поділяють на похилі і прямі, серед останніх можна виділити прямокутні паралелепіпеди та куби (рис. 2).

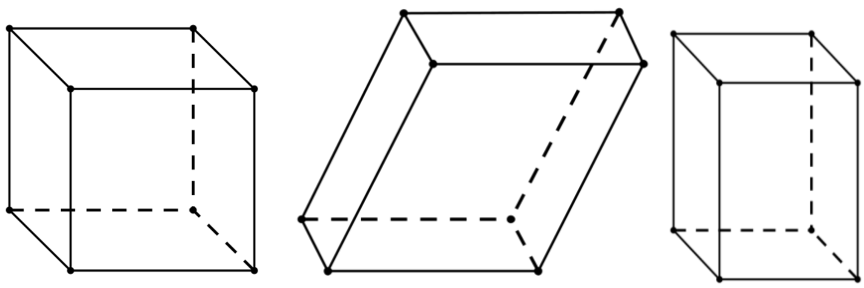


Рис. 2.

Бевз Г.П., Бевз В.Г. пропонують таку класифікацію паралелепіпедів (рис.3):

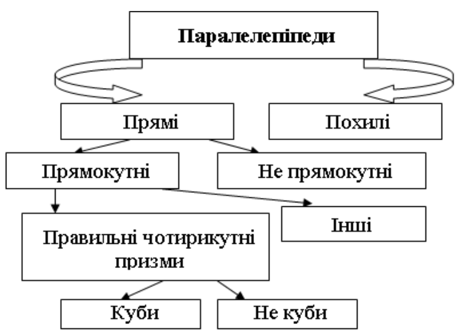


Рис. 3.

Оскільки, у результаті вивчення цієї теми учні мають розпізнавати основні види паралелепіпеда, його елементи, означати їх та обґрунтовувати основні властивості, тому важливо узагальнити і конкретизувати знання учнів.

Для цього вчитель підбирає систему запитань на які варто не тільки дати усну відповідь, але й проілюструвати:

1. Учень вважає, що терміни «правильна чотирикутна призма» і «прямокутний паралелепіпед» означають одне і теж саме. Чи правий він?
2. Чи можна правильну чотирикутну призму назвати прямокутним паралелепіпедом?
3. Чи може основою похилого паралелепіпеда бути прямокутник?
4. Чи існує похилий паралелепіпед, у якого чотири грані є прямокутники?

Виконуючи таку роботу, даючи відповідні на запитання, учні самостійно засвоюють математичні поняття, самостійно формулюють означення, знаходять спільні та відмінні властивості. Самостійне засвоєння учнями математичних понять сприяє розвитку вмінь порівнювати та аналізувати, використовувати засвоєнні знання під час розв'язування задач.

Наведемо приклади, як можна організовувати самостійну роботу учнів з елементами узагальнення і конкретизації під час вивчення поняття «паралелепіпед». Вчитель запитує, яке поняття більш загальне: «прямокутний паралелепіпед» чи «прямий паралелепіпед»? Учні, як правило, допускають помилки. А якщо відповідають правильно, то не можуть пояснити чому «прямий паралелепіпед» є більш загальним поняттям, ніж прямокутний паралелепіпед». Тому на даному етапі доцільно запропонувати учням записати властивості одного із понять, аналогічно до уже відомих властивостей другого поняття. Наприклад, таблиця записів може мати наступний вигляд (табл.1):

Таблиця 1.

Порівняння властивостей прямого і прямокутного паралелепіпедів

Прямий паралелепіпед	***Прямокутний паралелепіпед***
1. Призма	1.
2. В основі паралелограм	2.
3. Бічні ребра перпендикулярні до основ	3.
	4.

Очікувана відповідь учнів: 1) призма; 2) в основі прямокутник; 3) бічні ребра перпендикулярні до основ; 4) протилежні грані рівні між собою.

Учні виявляють, яке із понять має більше ознак (прямокутний паралелепіпед). Якщо в прямокутному паралелепіпеді не вимагати, щоб основою був прямокутник, то одержимо прямий паралелепіпед, тобто «прямокутний паралелепіпед» є частковим випадком «прямого паралелепіпеда». Отже, прямокутний паралелепіпед є конкретизацією прямого паралелепіпеда, а прямий паралелепіпед є узагальненням прямокутного паралелепіпеда.

Аналогічно вчитель може запропонувати учням порівняти поняття «прямокутний паралелепіпед» і «куб»(табл. 2).

Таблиця 2.

Порівняння властивостей прямокутного паралелепіпеда і куба

Прямокутний паралелепіпед	***Куб***
1. Прямий паралелепіпед	1.
2. Всі грані прямокутники	2.
	3.

Очікувана відповідь: 1) прямий паралелепіпед; 2) всі грані квадрати; 3) всі вершини рівновіддалені від точки перетину діагоналей.

Вчитель ставить перед учнями завдання: «Заповнити другий стовпчик таблиці, аналогічно до першого». Після самостійно проробленої учнями роботи, вчитель пропонує учням відповісти на запитання:

1) У якого поняття ознак більше? Чи є спільні ознаки? Яке поняття більш загальне, часткове? Чому? За якою ознакою куби виділяються серед сукупності прямокутних паралелепіпедів?

2) Чи можна вважати правильним означення «Кубом називається правильна чотирикутна призма, у якої висота дорівнює стороні основи»?

Також уміння і навички узагальнення і конкретизації понять формуються під час роботи з таблицями, наприклад порівняння властивостей призм, паралелепіпедів, прямих паралелепіпедів, прямокутних паралелепіпедів, кубів. Такі таблиці легко і швидко заповнювати на уроці, використовуючи мультимедійну дошку, або проектуючи таблицю на екран (табл. 3).

Таблиця 3.

Порівняння властивостей призм, прямих паралелепіпедів, прямокутних паралелепіпедів, кубів

	Призма	***Прямокутний паралелепіпед***	***Прямий паралелепіпед***	***Куб***
1.	Многогранник	Так	Так	Так
2.	Дві рівні основи	Так	Так	Так
3.	Бічні ребра – рівні і паралельні	Так	Так	Так
4.	Ні	Протилежні грані рівні і паралельні	Так	Так
5.	Ні	В основі прямокутники	Ні	Так
6.	Ні	Ні	Ні	В основі квадрат
7.	Ні	Ні	Ні	Всі виміри рівні
8.	Ні	Так	Кути прямі	Так

Після заповнення такої таблиці, вчитель пропонує учням наступні питання:

1. Чому призма є узагальненням паралелепіпеда, куба?

2. Які спільні властивості прямого паралелепіпеда і прямокутного паралелепіпеда?

3. Які властивості у прямого паралелепіпеда і куба спільні? В чому причина їх спільності?

4. Як можна дати означення куба через прямий паралелепіпед?

Крім роботи з таблицями, учні можуть виконувати вправи на узагальнення і конкретизацію понять. Наприклад, учням пропонується скласти послідовність узагальнення поняття «паралелепіпед».

Учні називають ознаки паралелепіпеда: призма; протилежні грані рівні і лежать у паралельних площинах; протилежні ребра рівні і паралельні; в основі паралелограм (окрім прямокутного паралелепіпеда).

Також для кращого засвоєння учнями поняття паралелепіпед, можна запропонувати учням виконати певну самостійну роботу, у формі тестових завдань. Це дозволить вчителеві проаналізувати на якому рівні були засвоєнні математичні поняття, які вивчалися на даному уроці.

Самостійна робота

1. При якій з перерахованих умов чотирикутна призма є правильною?

А) У її основі лежить квадрат.

Б) Усі її бічні ребра перпендикулярні до основи.

В) Усі її бічні грані – прямокутники.

Г) Така умова не наведена.

2. На рисунку 4 зображено розгортку многогранника. Скільки в нього вершин (В), ребер (Р) і граней (Г)?

	В	Р	Г
А.	3	4	6
Б.	8	7	6
В.	8	12	6
Г.	12	6	4

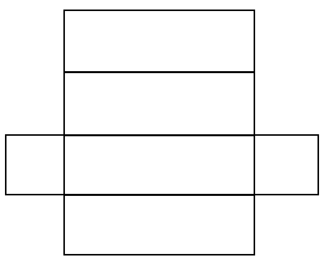


Рис. 4.

3. Грані куба з ребром 5 см пофарбували, і куб розрізали на кубики з ребром 1 см. Скільки вийшло кубиків, у яких пофарбовано рівно одну грань?

А) 54. Б) 8. В) 27.Г) 36.

4. Не існує похилого паралелепіпеда, серед граней якого є рівно:

А) 4 прямокутники.
Б) 2 прямокутники.
В) 1 прямокутник.
Г) 0 прямокутників.

5. На рис. 5 зображено розгортки многогранників. Визначте, скільки у цих многогранників вершин, граней, ребер.

А) Вершин — 8; граней — 6; ребер — 12;
Б) Вершин — 6; граней — 4; ребер — 8;
В) Вершин — 10; граней — 7; ребер — 8;
Г) Вершин — 8; граней — 4; ребер — 10;

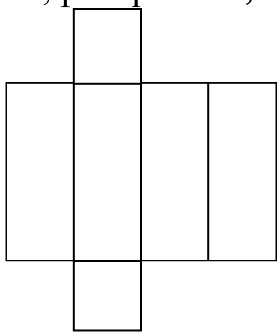


Рис. 5.

Таким чином, широке застосування самостійної роботи учнів на уроках математики, дає змогу успішно розв’язувати багато навчально-виховних завдань: підвищити свідомість і міцність засвоєння знань учнями, виробити в них уміння й навички, розвивати в учнів пізнавальні здібності, спостережливість, допитливість. Самостійна робота під час вивчення математичних понять значно стимулює процес навчання, сприяє значному покращенню якості математичної підготовки та розвитку мислення учнів.

Література

1. Бевз Г.П. Геометрія: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз, Н.Г.Владімірова, В.М.Владіміров. – К.: Генеза, 2011 – 336 с.
2. Бевз Г.П. Математика: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз. – К.: Генеза, 2011. – 320 с.
3. Бродський Я.С. Геометрія. Тести зі стереометрії. 10-11 класи. / Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 136 с.
4. Раев А.И. Управление умственной деятельностью младшего школьника./ А.И. Раев – Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1976. – 134 с.
5. Роганін О.М. Геометрія: Плани-конспекти уроків. / О.М. Роганін – К: Видавництво «Ранок», 220 с.
6. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. / З.І Слєпкань – Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. – 240 с.
7. Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. / Н.Ф. Талызина– М.:Изд-во Московского университета, 1975. – 343 с.

Коваль Тетяна Анатоліївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ОБ'ЄМУ КУЛІ З ВИКОРИСТАННЯМ СТЕРЕОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ

На сьогодні в системі освіти України триває процес реформування. Набирають все більшої ваги індивідуалізація та гуманізація освітнього середовища. В школах з'являються нові технічні засоби навчання. У фаховій літературі збільшується кількість повідомлень про нові нестандартні методики й прийоми роботи в навчанні. Але надмірне захоплення нестандартними формами і методами роботи може негативно позначитися на фундаментальних принципах шкільної педагогіки, а отже – і на якості освіти, зокрема математичної. Одним із фундаментальних принципів навчання є принцип наочності. Своїми коренями він сягає ще праць Я. А. Коменського і глибше. Але його авторитет не лише в традиційності, важливість принципу наочності обґрунтований дослідженнями психологів та педагогів, досвідом методистів і вчителів. Проте в сучасній науці у своїх традиційних формах він незаслужено втратив свою вагу. Хоча його досі визнають одним із провідних принципів, інтерес до нього згасає. Про це свідчить те, що останніми десятиліттями ця тема мало висвітлюється в наукових виданнях, зокрема періодичних.

Водночас раціональне застосування наочності може допомогти у вирішенні багатьох проблем сучасної школи: зниження інтересу до навчання, невміння дітей мислити абстрактно; у навчанні математики дотримання вимог принципу наочності сприятиме міцнішому засвоєнню знань, формуванню абстрактного мислення, більшій мірі розуміння й усвідомлення навчального матеріалу.

У даній статті ми описуємо введення поняття «об'єму кулі» з використанням стереометричної моделі.

Принцип Кавальєрі полягає в тому, що якщо перерізати фігуру сімейством усіх прямих, паралельних заданій, то довжини перетинань повністю визначають площу фігури. Зокрема, якщо у двох фігур ці довжини збігаються, то вони рівновеликі. Точного обґрунтування свого принципу Кавальєрі не дав, але розглянув його багаточисленні приклади. Ще більш ефективний принцип Кавальєрі при знаходженні об'ємів тіл.[1]

Принцип Кавальєрі. Якщо дві фігури $Ф_1$ і $Ф_2$ можна розташувати в просторі так, що в перетинах їх площинами, паралельними одній і тій же площині, виходять фігури F_1 і F_2 однакової площі (рис. 1), то обсяги вихідних просторових фігур рівні.

Для обґрунтування цього принципу представимо фігури $Ф_1$ і $Ф_2$, складеними з тонких шарів однакової товщини, які виходять при перетині фігур $Ф_1$ і $Ф_2$ площинами, паралельними деякої заданої площині (рис. 1). Так як відповідні шари мають однакову площу і товщину, то їх обсяги дорівнюють. Оскільки обсяги фігур дорівнюють сумі обсягів складових шарів, то рівні обсяги і самих фігур.

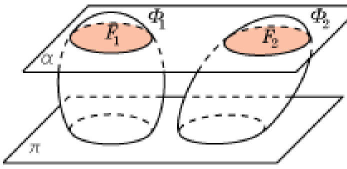


Рис. 1

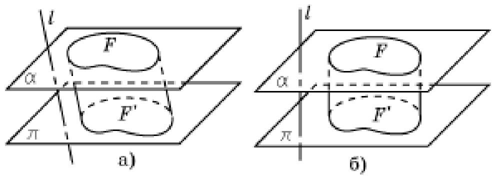


Рис. 2

Для знаходження обсягів фігур зручно об'єднати деякі фігури в один клас. З цією метою дамо визначення узагальненого циліндра. Нехай є – дві паралельні площини, l – перетинає ці площини пряма; F – фігура на одній з цих площин, F '– її паралельна проекція на іншу площину у напрямку прямої l (рис. 2, а). Відрізки, що сполучають точки фігури F з їх проекціями, утворюють фігуру в просторі, яку ми будемо називати узагальненим циліндром. Фігури F і F' називаються основами, а відстань між площинами основ називають висотою узагальненого циліндра.

У випадку, якщо у визначенні узагальненого циліндра замість паралельної проекції береться ортогональна, тобто пряма l перпендикулярна площинам α і π, то узагальнений циліндр називається прямим (рис. 2, б). В іншому випадку узагальнений циліндр називається похилим.

Зауважимо, що приватним випадком узагальненого циліндра є призма. У випадку, якщо основа F узагальненого циліндра є кругом, то узагальнений циліндр називається круговим.[3]

Нехай дано півкулю радіуса *R*, великий круг якої розміщено на площині α. Розглянемо циліндр, основа якого – круг радіуса *R*, розміщений в тій самій площині, і висота якого рівна *R* (рис. 3). В циліндр впишемо конус, основою якого буде верхня основа циліндра, а вершиною – центр нижньої основи циліндра. Доведемо, що фігура, яка складається із точок циліндра, не попадаючих всередину конуса, і дана півкуля мають рівні об’єми.

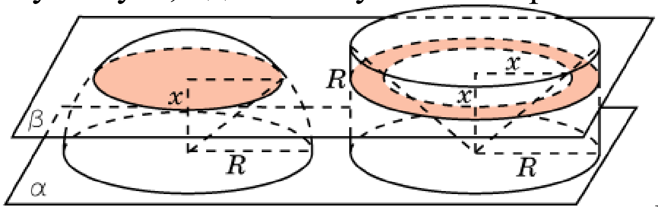


Рис.3

Проведемо площину β, паралельну площині α, на відстані *x* від неї, $0 \le x \le R$. В перерізі півкулі цієї площини отримаємо круг радіуса $\sqrt{R^2 - x^2}$ і площі $\pi(R^2 - x^2)$. В перерізі другої фігури є кільце, радіус внутрішнього круга в якому рівний *x*, а зовнішнього – *R*. Площа цього кільця рівна $\pi R^2 - \pi x^2$ і, отже, рівна площі перерізу півкулі. Із принципу Кавальєрі слідує, що півкуля і побудована фігура мають однакові об’єми. Обчислимо цей об’єм. Він рівний різниці об’ємів циліндра і конуса, тобто

$$V = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Об’єм кулі вдвічі більший об’єму півкулі і, відповідно, виражається формулою

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Для демонстрації принципу Кавальєрі візьмемо парну кількість монет й поставимо їх на дві стопки, але на одній всі виставимо рівно, а на іншій так, щоб лиш не повалилися (рис.4).

Рис.4

Ми можемо впевнено говорити, що існує зв'язок між фізикою й математикою щодо об'ємів тіл. Наприклад, розглянувши закон Архімеда.

Дійсно, якщо занурити для прикладу кулю і циліндр з витягнутими конусами, то їхні об'єми рівні, адже вони займають однаковий об'єм в посудинах із водою. Якщо вони займають однаковий об'єм, то значить виконується принцип Кавальєрі і закон Архімеда.

Отже, принцип Кавальєрі дозволяє вивести формули для об'ємів геометричних тіл, що вивчаються у шкільному курсі стереометрії.

Обрахуємо об'єм циліндра з витягнутими конусами:

$V_{циліндра} = \pi r^2 \cdot h$, де r=3 см, h = 6см.

$V_{циліндра} = 54\pi$ (см^3). $V_{2конусів} = 2/3\ \pi r^2 \cdot h = 36\pi$ (см^3).

$V_{циліндра - 2конуси} = 54\pi$ (см^3) - 36π (см^3) = 18π (см^3).

Отже, ми можемо вважати об'єм кулі й об'єм циліндра еквівалентними.[2]

Підтвердженням цього є експериментальне підтвердження та зв'язок математики з фізикою.

Дослід. Візьмемо дві посудини із поділками та наллємо в них однакову кількість води. В одну посудину зануримо кулю з радіусом 3 см, а в іншу циліндр з витягнутими конусами радіусом 3 см та висотою 6 см.

З досліду видно, що в обох посудинах рівень води однаковий.

Отже, як ми бачимо, що введення поняття «об'єм кулі» з використанням стереометричної моделі покращує в учнів пам'ять, увагу, уяву, мислення, краще запам'ятовування і т.д.

Література

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений, 9-е изд. – М.: Просвещение, 2000.

2. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2000.

3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2003.

Мазай Аліна Яківна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ПРО ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ КОНІЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Поняття конічних перерізів вперше вводиться в 11 класі при вивченні розділу «Тіла обертання», а саме теми «Конус». Тут учні вперше дізнаються, що конічними перерізами є криві другого порядку – еліпс, парабола і гіпербола. Якщо січна площина не паралельна основі конуса,але перетинає всі його твірні, вона перетинає конічну поверхню по еліпсу; якщо січна площина паралельна тільки одній з твірних конуса, вона перетинає конічну поверхню по частині параболи; якщо січна площина паралельна двом твірним, вона перетинає конічну поверхню по частині гіперболи.

Нехай Oxy – деяка прямокутна система координат на площині, а $Q(x,y)$ – вираз виду $ax^2+2bxy+cy^2$, де хоча б одне з чисел a, b, c відмінне від нуля.

Криві, задані рівнянням виду

$$Q(x,y)+2dx+2ey=f \quad (1)$$

називаються **кривими другого порядку**.

Будемо говорити, що одна крива на площині ***ізометрична*** другій кривій, якщо існує рух площини, при якому перша крива переходить в другу. Нашою задачею є за допомогою руху звести криву (1)до простішого вигляду.

Задача 1. *Доведіть, що якщо* $ac-b^2\neq 0$*, то за допомогою паралельного перенесенням* $x'=x+x_0$*,* $y'=y+y_0$ *рівняння (1) можна звести до вигляду:*

$$ax'^2+2bx'y'+cy'^2=f', \qquad (2)$$

де $f'=f-Q(x_0,y_0)+2(dx_0+ey_0)$.

Доведення. Зрозуміло, що

$$Q(x,y)+2dx+2ey=a(x'-x_0)^2+2b(x'-x_0)(y'-y_0)+c(y'-y_0)^2+$$
$$+2d(x'-x_0)+2e(y'-y_0)=ax'^2+2bx'y'+cy'^2+2(-ax_0-by_0+d)x'+$$
$$+2(-bx_0-cy_0+e)y'+Q(x_0,y_0)-2(dx_0+ey_0).$$

Якщо $ac-b^2\neq 0$, то система рівнянь $ax_0+by_0=d$, $bx_0+cy_0=e$ має (єдиний) розв’язок. Розв'язавши цю систему і поклавши $f'=f-Q(x_0,y_0)+2(dx_0+ey_0)$, рівняння (1) зводимо до потрібного вигляду. Що і потрібно було довести.

Початок системи координат, в якій рівняння кривої має вигляд (2), називають **центром кривої другого порядку**. Зрозуміло, що центр кривої є її центром симетрії.

Задача 2. *Доведіть, що якщо* $ac-b^2\neq 0$*, то крива (1) ізометрична або кривій* $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ *(яка називається еліпсом), або кривій* $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ *(яка* *називається гіперболою), або парі прямих, що перетинаються* $\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{y^2}{\beta^2}$, *або представляє собою одну точку чи порожню множину.*

Доведення. Якщо $b=0$, то потрібне представлення можна отримати за допомогою паралельного перенесення (задача 1). Якщо $b\neq 0$, то крім паралельного перенесення потрібно застосувати поворот. Після цього, виконавши очевидні перетворення, отримаємо рівняння вигляду:

$$\frac{x''^2}{\alpha^2}\pm\frac{y''^2}{\beta^2}=0 \text{ чи } \frac{x''^2}{\alpha^2}\pm\frac{y''^2}{\beta^2}=1.$$

Тут обидва числа α^2 і β^2 не рівні нулю, оскільки $\alpha^2\beta^2=\pm\left(ac-b^2\right)$. Що й потрібно було довести.

Осі системи координат, в якій рівняння кривої має такий вигляд, як в умові задачі 2, називають **осями** кривої. Зрозуміло, що осі кривої другого порядку є її осями симетрії.

Для гіперболи $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ прямі $\frac{x}{\alpha}=\pm\frac{y}{\beta}$ називають **асимптотами**.

Вісь Ox системи координат, в якій рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$, називають **віссю параболи**. Зрозуміло, що вісь параболи є її віссю симетрії.

Еліпс, параболу і гіперболу називають **конічними перерізами**. Ця назва пов'язана з тим, що вони утворюються при перетині конуса площиною.

Поняття конічних перерізів формується на основі задач, які підводять під це поняття.

Розглянемо конічні перерізи.

Еліпс

Задача 3. *Доведіть, що множина точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок F_1 і F_2 - стала величина, є еліпс.*

Доведення. Нехай початок координат буде посередині між точками F_1 і F_2, вісь Ox направимо по відрізку F_1F_2, а вісь Oy - перпендикулярно осі Ox. Нехай F_1 і F_2 мають координати $(c;0)$ і $(-c;0)$, відповідно, а сума відстаней від точки $X=(x;y)$ до F_1 і F_2 рівна $2a$. Тоді

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2\left(x^2+2xc+c^2\right)+a^2y^2=a^4+2a^2xc+x^2c^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Позначивши $b^2=a^2-c^2$, отримуємо $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Що й треба було довести.

Точки F_1 і F_2 називають **фокусами** еліпсами.

Задача 4. *Доведіть, що середини паралельних хорд еліпса лежать на одній прямій.*

Доведення. Точки (x', y') і (x'', y'') перетину еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ і прямої $y = px + q$ знайдемо, розв'язавши квадратне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(px+q)^2}{b^2}=1.$$

За теоремою Вієта $\frac{(x'+x'')}{2}=\frac{-a^2pq}{(b^2+a^2p^2)}$ і, значить,

$$\frac{y'+y''}{2}=p\frac{x'+x''}{2}+q=\frac{b^2q}{b^2+a^2p^2}.$$

Таким чином, середини хорд еліпса, паралельних прямій $y = px$, лежать на прямій $y=-\frac{b^2}{pa^2}x$. Що й треба було довести.

Діаметром еліпса називають довільну хорду, яка проходить через його центр. **Спряженими діаметрами** еліпса називають пару його діаметрів, які мають наступні властивості: середини хорд, паралельних першому діаметру, лежать на другому діаметрі. Розв'язання задачі 4 показує, що тоді середини хорд, паралельних другому діаметру, лежать на першому діаметрі.

Якщо еліпс є образом круга при афінному перетворенні, то його спряжені діаметри є образами двох перпендикулярних діаметрів цього круга.

Для еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $a \ge b$, число $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ називають **ексцентриситетом**. Прямі $x=\pm\frac{a}{e}$ називають **директрисами**. (У еліпса дві директриси.)

Парабола

Для параболи $2py = x^2$ точку $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ називають **фокусом**, а пряму $y=-\frac{p}{2}$ **- директрисою**.

Задача 5. *Пучок паралельних променів світла, віддзеркалюючись від кривої С, сходяться в точці F. Доведіть, що С – парабола з фокусом F і віссю, паралельною променям світла.*

Доведення. Розглянемо сімейство всіх парабол з фокусом в даній точці F і віссю, паралельною променям світла. Точніше кажучи, вісь параболи напрямлена так, щоб даний пучок променів світла після віддзеркалення від параболи сходився в точці F.

Нехай промінь світла віддзеркалюється від точки M кривою C і потрапляє в точку F. Тоді дотична до C в точці M співпадає з дотичною в точці M до параболи, яка проходить через точку M. Така властивість може виконуватись для всіх точок кривої C лише в тому випадку, коли вона співпадає з одною із парабол сімейства, яке розглядається. Що й потрібно було довести.

Гіпербола

Гіперболу, задану рівнянням $y=\frac{1}{x}$, називають **рівнобічною**.

Довільна гіпербола отримується із рівнобічної гіперболи за допомогою афінного перетворення. Точки F_1 і F_2 називаються **фокусами** гіперболи.

Діаметром гіперболи називають довільну хорду, яка проходить через її центр. **Спряженими** діаметрами називають пару її діаметрів, які мають наступну властивість: середини хорд, паралельних першому діаметру, лежать на другому діаметрі. Тоді середини хорд, паралельних другому діаметру, лежать на першому діаметрі.

Задача 6. *Доведіть, що площина трикутника, утвореного асимптотами і дотичною до гіперболи, однакова для всіх дотичних.*

Доведення. Дотична $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ перетинає асимптоти $y=\pm\frac{b}{a}x$ в точках з координатами $x_{1,2}=a\left(\frac{x_0}{a}\pm\frac{y_0}{b}\right)^{-1}$. Тому $x_1x_2=a^2$. Зрозуміло також, що площина розглянутого трикутника пропорційна x_1x_2. Що й треба було довести.

Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ число $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ називають **ексцентриситетом**. Прямі $x=\pm\frac{a}{e}$ називають **директрисами**. (У гіперболи дві директриси.)

Пучки конічних перерізів

Введемо для зручності наступне позначення. Будемо вважати, що пряма AB задається рівнянням $l_{AB}=0$, це рівняння визначене з точністю до пропорційності. В координатах x, y функція l_{AB} має вигляд $l_{AB}\left(x,y\right)=ax+by+c$, причому l_{AB} перетворюється в нуль в точках A і B.

Задача 7. *Нехай точки A, B, C, D лежать на конічному перерізі, заданому рівнянням другого степеня $f=0$. Доведіть, що*

$$f=\lambda l_{AB}l_{CD}+\mu l_{BC}l_{AD},$$

де λ і μ - деякі числа.

Доведення. Нехай X - точка даного конічного перерізу, відмінна від точок A, B, C і D. Виберемо числа λ_1 і μ_1 так, що $\lambda_1 l_{AB}\left(X\right)l_{CD}\left(X\right)+\mu_1 l_{BC}\left(X\right)l_{AD}\left(X\right)=0$, і розглянемо криву, задану рівнянням $f_1=0$, де $f_1=\lambda_1 l_{AB}l_{CD}$, $\mu_1 l_{BC}l_{AD}$. Ця крива задається рівнянням другого степеня і проходить через точки A, B, C і D і X. Але якщо крива другого степеня перетинає конічний переріз в п'яти різних точках, то ця крива співпадає з даним конічним перерізом, а значить, $f=\alpha f_1$, де α - деяке число.

Що й потрібно було довести.

Пучком конічних перерізів, породженим конічними перерізами $f=0$ і $g=0$, називають сімейством конічних перерізом $\lambda f+\mu g=0$. Результат задачі 7 можна інтерпретувати наступним чином: пучок конічних перерізів – це сімейство конічних перерізів, які проходять через 4 фіксованих точки.

Будемо називати **прямою Паскаля** шестикутника, вписаного в конічний переріз, пряму, на якій лежать точки перетину пар його протилежних сторін. При цьому шестикутником можна вважати і замкнуту із самоперетинами ламану.

Конічні перерізи як геометричні місця точок

Задача 8. *Доведіть, що множина точок, рівновіддалених від даної точки і даного круга, представляє собою еліпс, гіперболу або промінь.*

Доведення. Точка X, рівновіддалена від точки A і круга радіуса R з центром O повинна задовольняти співвідношенню $OX-AX=R$ у випадку, коли точка A розташована поза даним кругом, і відношенню OX, $AX=R$ у випадку , коли точка Aлежить на даному кругу, точка X повинна лежати на промені OA.Що й потрібно було довести.

Конічні перерізи широко застосовуються у астрономії: орбіти двох масивних тіл, між якими існує гравітаційна взаємодія, є конічними перетинами, якщо їхній спільний центр мас нерухомий. Якщо вони між собою зв'язані, то рухатимуться по еліптичних орбітах; якщо рухаються окремо, то траєкторії матимуть вигляд парабол або гіпербол (закон Кеплера).Орбіти планет, що обертаються навколо Сонця, мають форму еліпсів. Конічні перерізи часто зустрічаються в техніці. Властивістю параболічного дзеркала є те, що всі падаючі промені, паралельні його осі, сходяться в одній точці (фокусі). Це використовується в більшості телескопів-рефлекторів, де застосовується параболічне дзеркало, а також в антенах радарів і спеціальних мікрофонах з параболічними відбивачами. Від джерела світла, поміщеного в фокусі параболічного відбивача, виходить пучок паралельних променів. Тому в потужних прожекторах і автомобільних фарах використовуються параболічні дзеркала. Гіпербола є графіком багатьох важливих фізичних співвідношень, наприклад, закону Бойля-Маріотта (зв'язує тиск і об'єм ідеального газу) та закону Ома, що задає електричний струм як функцію опору при постійній напрузі.

Тому дуже важливо знати, що таке конічні перерізи і їх основні види.

Література

1. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. – 5-е изд., испр. И доп. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. – 640 с.

Машек Ольга Олегівна

Студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст», спеціальності «економіка»

ТЕОРЕМА ПРО ТРИ КОСИНУСИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Теорема про три косинуси є важливим інструментом в шкільному курсі математики, хоча в більшості підручників з геометрії для загальноосвітніх шкіл її не має, проте є досить багато задач, які за допомогою неї розв'язуються значно простіше ніж звичайними способами. В даній статті вводиться поняття теореми про три косинуси і дається добірка задач при розв'язанні яких доцільне їх використання.

Теорема про три косинуси. Нехай α — величина кута між похилою l і її проекцією на площину τ, β — величина кута між проекцією похилої l і прямою, яка проведена через основу тієї самої похилої в площині проекції і γ — величина кута між похилою l і прямою, яка проведена через її основу в площині проекції (рис. 1), тоді справедлива наступна тотожність:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta; \tag{1}$$

Доведення. Нехай $AO \perp \tau$, AB — похила до τ, BO — її проекція на площину τ і BC — пряма, проведена через основу похилої. Тоді, згідно умови,

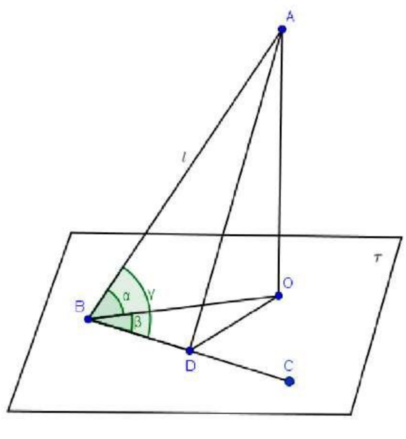


Рис. 1.

$\angle ABO = \alpha$, $\angle OBC = \beta$ і $\angle ABC = \gamma$. Проведемо $OD \perp BC$ і з'єднаємо точку A з точкою D. За теоремою про три перпендикуляри $AD \perp BC$.

Оскільки $AB = l$. Тоді з $\triangle AOB$:

$$BO = l \cos \alpha;$$
із $\triangle BDO$:
$$BD = BO \cdot \cos \beta,$$
$$BD = l \cos \alpha \cos \beta.$$
Із $\triangle ADB$:
$$BD = AB \cos \gamma$$
$$l \cos \alpha \cos \beta = l \cos \gamma$$
$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta,$$

що і потрібно було показати.

Нижче наведемо добірку задач в розв'язанні яких доцільно використовувати теорему про три косинуси.

Задача 1. Діагоналі, прямокутного паралелепіпеда двох суміжних бічних граней, які не перетинаються похилені до площини основи під кутами α і β. Знайти кут між цими діагоналями.

Розв'язання.

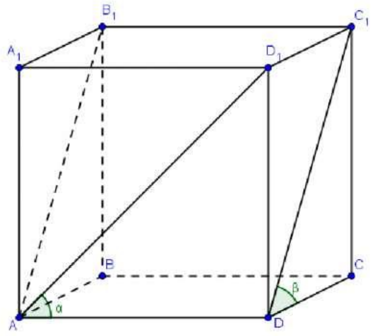


Рис. 2.

Нехай $\angle D_1AD = \alpha$ і $\angle C_1DC = \beta$ (рис. 2). Прямі AD_1 і DC_1 мимобіжні. Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, які перетинаються й паралельні даним мимобіжним прямим. Отже, щоб знайти кут між мимобіжними прямими, потрібно виконати паралельне перенесення прямої DC_1, так щоб точка D співпала з точкою A, тобто проведемо в грані AA_1B_1B діагональ AB_1. Діагональ AD_1 є похилою до площини AA_1B_1, AA_1 — її проекція і AB_1 — пряма, яка лежить в площині проекції.

Очевидно, що $\angle A_1AD_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ і $\angle A_1AB_1 = \frac{\pi}{2} - \beta$. Нехай кут, який нам потрібно знайти позначимо через γ, тоді $\angle B_1AD_1 = \gamma$ (кут між мимобіжними прямими AD_1 і DC_1). Тоді на основі теореми про три косинуси, маємо:

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\gamma = \arccos(\sin\alpha\sin\beta).$$

Відповідь. Отже, кут між діагоналями дорівнює $\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$.

Задача 2. Висота правильної трикутної призми дорівнює h. Через одне із ребер основи і протилежну вершину другої основи проведена площина. Знайти площу отриману в перерізі фігури, якщо кут при взятій вершині призми дорівнює 2α.Знайти допустимі значення α.

Розв'язання. Проблема в вирішені цієї задачі для учнів пов'язана з тим, що дані в умові лінійний елемент і кут не належать одній площині і тому,немає такого прямокутного трикутника, з якого можна було б починати розв'язання задачі. Але за допомогою (1) ця проблема легко вирішується.

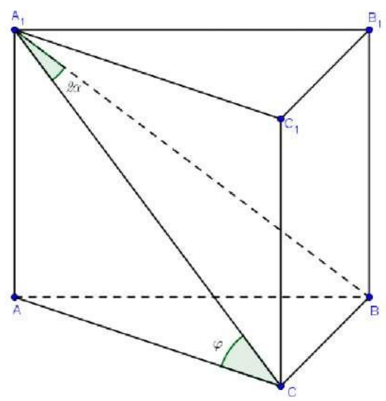


Рис. 3.

Якщо $\angle CA_1B = 2\alpha$, то $\angle A_1CB = 90° - \alpha$. $\angle A_1CA = \varphi$ (рис. 3). Тоді, скориставшись теоремою про три косинуси маємо:

$$\cos(90° - \alpha) = \cos\varphi\cos 60°; \tag{2}$$

або $\cos\varphi = 2\sin\alpha$,

$$\sin\varphi = \sqrt{1-4\sin^2\alpha} = 2\sqrt{\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}.$$

$$\text{Із } \Delta A_1AC,\ \angle A = 90^\circ$$

$$\sin\varphi = \frac{A_1A}{A_1C}$$

$$A_1C = \frac{A_1A}{\sin\varphi},$$

$$A_1C = \frac{h}{2\sqrt{\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}}.$$

Оскільки, ми маємо правильну трикутну призму, то $A_1C = A_1B$, звідси за формулою площі довільного трикутника ($S_\Delta = \dfrac{1}{2}a\cdot b\sin C$, де a, b — сторони трикутника, а C — кут між сторонами a і b)

$$S_{\Delta A_1BC} = \frac{h^2\sin 2\alpha}{8\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}; \tag{3}$$

Отримане для $S_{\Delta A_1BC}$ значення підказує, що допустимі значення для α в даній задачі знаходяться в межах: $0^\circ < \alpha < 30^\circ$. Встановимо обмеження для значення α. Для цього скористаємося рівністю 2. Із цієї рівності випливає, що $\cos(90^\circ-\alpha) < \cos 60^\circ$, $90^\circ-\alpha > 60^\circ$, звідси $\alpha < 30^\circ$, а так як $\alpha > 0^\circ$, то $0^\circ < \alpha < 30^\circ$.

Відповідь. Отже, площа трикутника дорівнює $\dfrac{h^2\sin 2\alpha}{8\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}$.

Приведені в статті базисні задачі і алгоритмічні рекомендації не слід розглядати як щось обов'язкове для кожного учня, але учні з високим рівнем знань повинні вміти використовувати теорему про три косинуси при розв'язанні геометричних задач.

Література

1. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М. Наука, 1960. 532 с.

2. Грабович И. Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: Книга для учителя. Рад. шк., 1989. 160 с.

Присяжнюк Володимир Олександрович
студент освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»,
спеціальність «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ОПИСАНОЇ КУЛІ В КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Вивчення систематичного курсу геометрії відкриває широкі можливості для розвитку творчих здібностей учнів, логічного і просторового мислення, формування прийомів розумової діяльності, інтелекту. Геометрія має навчати учнів правильному сприйманню навколишнього світу. Це основне положення, яким має керуватися вчитель при проектуванні навчальної діяльності. Реалізація вказаного положення забезпечується багатьма методичними прийомами і підходами, наприклад, широким застосуванням у навчанні наочності. Основним «будівельним» матеріалом змісту стереометрії є поняття. Тому методика формування стереометричних понять — одна з найважливіших складових методики навчання стереометрії. Застосування методології математичного моделювання при формуванні понять здійснюється за такою схемою:

— *підготовчий етап*, який охоплює: мотивацію необхідності вивчення нового поняття шляхом розгляду фізичних об'єктів чи відношень між ними, дослідження яких потребує застосування математичних методів; актуалізацію знань учнів, необхідних для свідомого засвоєння поняття шляхом звернення до відомих фізичних об'єктів, їхніх властивостей; підведення учнів до означення поняття за допомогою розгляду фізичних об'єктів, пошуку їхніх схожих суттєвих властивостей, абстрагування від несуттєвих тощо;

— *основний етап*, який включає: формулювання означення, введення терміна, символу, що означає поняття, вправи на варіювання суттєвих і несуттєвих властивостей поняття, на підведення під поняття, на наведення фізичних прикладів і контрприкладів (реальних об'єктів, які не підпадають під поняття), на пошук інших означень поняття;

— *етап встановлення адекватності поняття і його змістовності*, який реалізується шляхом застосування поняття для розв'язування задач, зокрема прикладних, встановлення зв’язків цього поняття з іншими поняттями і фактами.[3]

Однак, в шкільному курсі геометрії є ряд понять, при введенні яких важко дотримуватись зазначених етапів. Наприклад, в курсі стереометрії 11-го класу після вивчення многогранників і тіл обертання розглядають тему комбінації тіл (6 годин). Найскладнішим, але й найважливішим є розгляд різних геометричних конструкцій, один з елементів яких – куля. Найбільшого поширення набули конструкції, в яких куля є вписаною або описаною. Формування уявлень про ці конструкції доцільно проводити всіма доступними засобами. Наприклад, кулю, вписану в тетраедр, можна уявляти як результат «роздуття» гумової кулі, що міститься всередині тетраедра, до максимальних розмірів. Також вивчення цієї теми потребує широкого використання наочності. Поряд із зображеннями важливу роль відіграють різноманітні моделі, тощо.

Зображення вписаних і описаних многогранників:

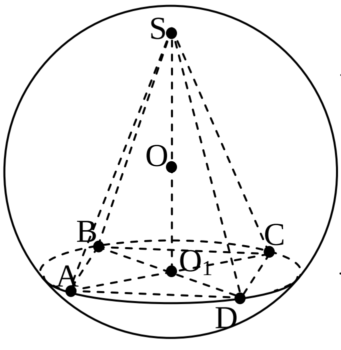


Рис.1

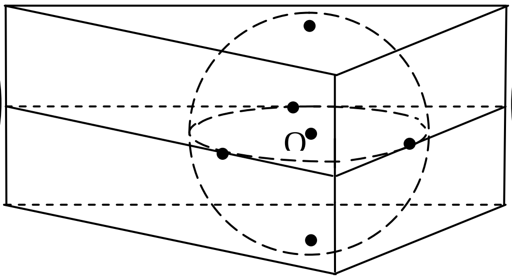


Рис.2

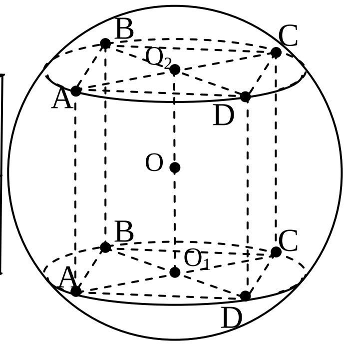


Рис.3

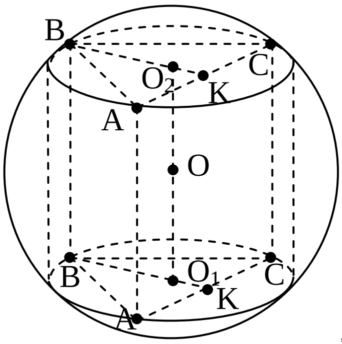


Рис.4

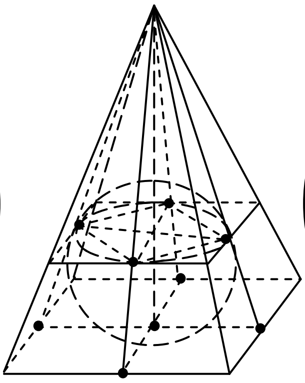


Рис.5

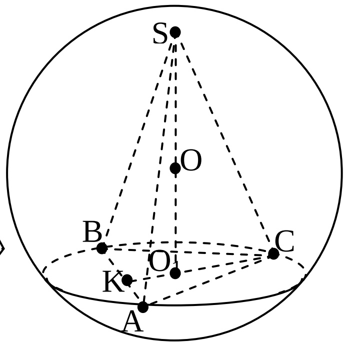


Рис.6

Оскільки, комбінації кулі з многогранниками у побуті, в навколишньому середовищі важко виділити, то етапом мотивації може бути цікава історична задача, або задача, що пропонувалась на зовнішньому незалежному оцінюванні. Наприклад, задача Евкліда: скласти піраміду, охопити її заданою сферою і довести, що в квадратах діаметр сфери буде у півтора рази більше за сторону піраміди» (йдеться про правильний тетраедр); задача із завдань зовнішнього незалежного оцінювання: в основі піраміди лежить прямокутний трикутник із кутом 15°. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює 6 см. Обчисліть об’єм піраміди (у $см^3$).

Щоб розв’язати ці задачі необхідно зобразити малюнок та з’ясувати взаємне розміщення елементів обох тіл, що входять до комбінації: висот, ребер, центра описаної кулі тощо. Отже, при введенні поняття вписаної кулі в многогранник або описаної кулі навколо многогранника потребує уваги побудова зображень комбінацій тіл. А.В. Грохольська, зазначає, що при вивченні кожного виду комбінації правильної призми (піраміди) з кулею варто на прикладі розв’язування нескладних задач з’ясувати: 1) алгоритм зображення такого виду комбінацій; 2) на які трикутники треба звернути увагу, в першу чергу, для визначення зв’язку між радіусом кулі та якимось лінійним елементом призми (піраміди).[2]

Розглянемо для прикладу описану кулю навколо многогранника. Практично у всіх шкільних підручниках означення описаної кулі навколо многогранника є однаковим: кулю називають описаною навколо деякого многогранника М, якщо всі вершини многогранника належать поверхні кулі. У цьому випадку многогранник М називають вписаним у кулю.

З означення описаної кулі випливають два факти:

1) усі вершини вписаного в кулю многогранника рівновіддалені від деякої точки (від центра описаної кулі);
2) кожна грань вписаного в кулю многогранника є вписаним в деяке коло многокутником (саме в те коло, яке утворюється в перерізі поверхні кулі площиною грані); при цьому основи перпендикулярів, опущених з центра описаної кулі на площини граней, є центрами описаних навколо граней кіл.

Звідси випливає, що не кожний многогранник можна вписати в кулю, оскільки не кожний многокутник можна вписати в коло. Однак, якщо навколо деякого многогранника можна описати кулю, то вона єдина, її центром є спільна точка перпендикулярів до площин граней, що проведені з центрів описаних навколо граней кіл. А така точка може існувати лише єдина (або не існувати жодної).

Далі доречним є запропонувати учням кілька зображень, серед яких потрібно відібрати многогранники вписані у кулі, та порівняти зображення на рисунках 7 і 10; 9 і 11; 12 і 14.

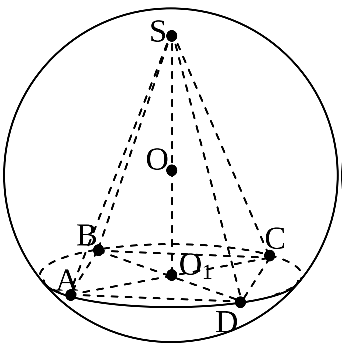


Рис.7

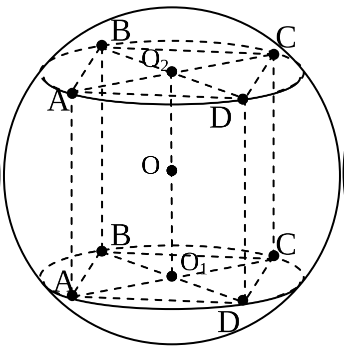


Рис.8

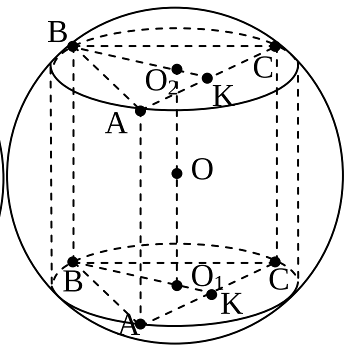


Рис.9

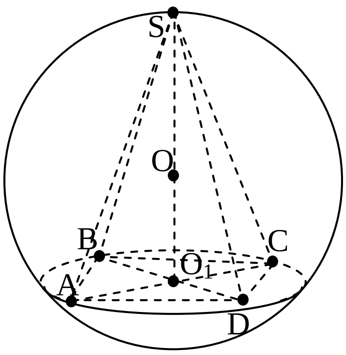


Рис.10

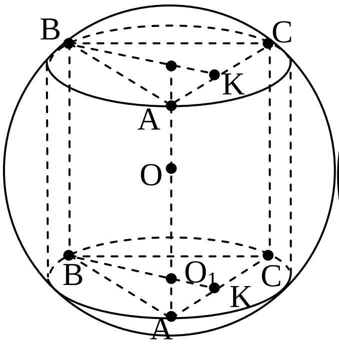


Рис.11

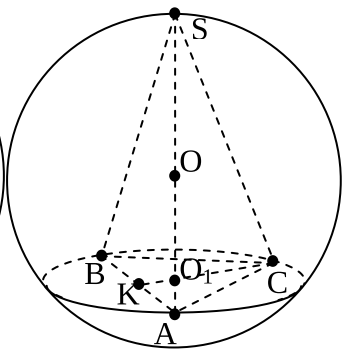


Рис.12

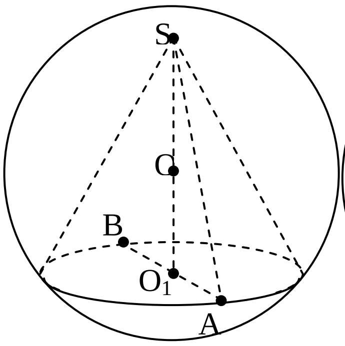


Рис.13

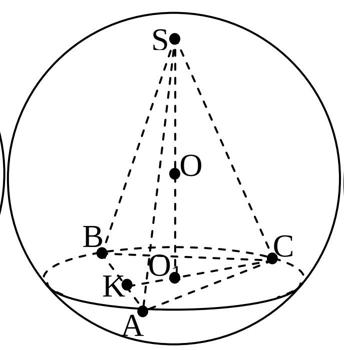


Рис.14

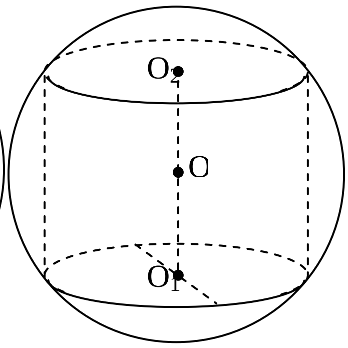


Рис.15

Після обговорення запропонованих зображень доцільно разом із учнями сформулювати алгоритми побудови зображень описаної кулі навколо призми та описаної кулі навколо піраміди. Наприклад, алгоритм зображення описаної кулі навколо піраміди може бути таким:

1) зображуємо кулю; верхній полюс і нижній переріз.
2) у побудований нижній переріз вписуємо відповідний многокутник— зображення основи піраміди — і визначаємо положення зображення вершини піраміди. У випадку правильної піраміди її вершину й коло, описане навколо многокутника основи, можна розглядати відповідно як полюс і паралель поверхні кулі. Висота, очевидно, проходить через центр кулі (звертаємо увагу учнів щодо зображення чотирикутника).
3) сполучаємо верхній полюс із вершинами чотирикутника, що лежить в основі.

На таких уроках, для економії навчального часу, вчителі як правило, користуються готовими зображеннями геометричних тіл на таблицях, моделями геометричних тіл. Важливо, щоб учні побачили послідовні етапи зображення відповідних комбінацій та навчилися здійснювати їх самостійно. Для полегшення роботи вчителя при зображенні комбінацій геометричних тіл доцільно використовувати мультимедійні засоби навчання.

Література

1. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач/ Г.П. Бевз. – К.: Рад. шк., 1988. – 190 с.

2. Боравльов А.П. Аналіз у розв'язанні задач на побудову / А.П. Боравльов, І.Г. Ленчук. – К.: Вища шк., 2002. – 191 с.

3. Бродський Я.С. Стереометрія у старшій школі: Посібник для вчителя / Я.С.Бродський, В.Г. Гречук, О.Л.Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 404с.

4. Грохольська А.В. Підготовка учнів до розв'язування задач на комбінацію многогранників з кулею /А.В. Грохольська // Математика в школі. – 2002. –№6. – С.17–24.

5. Прус А. Піраміда в контексті прикладної спрямованості в шкільному курсі стереометрії /А. Прус // Математика в школі. – 2005. –№2. – С.11 – 15.

Синюк Наталя Леонідівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ПЕРЕРІЗУ ПРОСТОРОВОГО ТІЛА СКЛАДНИМ ГЕОМЕТРИЧНИМ ОБ'ЄКТОМ

Засвоєння математичних понять відбувається в процесі аналітико-синтетичної діяльності учнів, спрямованої на виявлення істотних загальних властивостей певного поняття й усвідомлення його неістотних властивостей, а також на застосування нового поняття до розв'язування задач. До пізнавальної діяльності учнів щодо засвоєння математичних понять належать як загальні (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення тощо), так і специфічні розумові дії (підведення до поняття і обернена їй дія – виведення наслідків).

У разі використання абстрактно-дедуктивного методу навчання для формування нового поняття вчитель формулює означення сам, наводить приклади об'єктів, що належать до цього поняття, виявляє істотні спільні властивості та зазначає неістотні.

В процесі формування математичних понять учні припускаються помилок, самостійно виявляючи істотні властивості у разі формування поняття конкретно-індуктивним методом і формулюючи означення, якщо їх уже введено[3].

У математичній літературі представлені задачі на побудову перерізів просторових тіл площиною. Значно менше уваги приділено побудові перерізів просторових тіл більш складними геометричними об'єктами. В даній статті розглянемо задачу на побудову перерізу призми двогранним кутом.

Нехай потрібно побудувати переріз призми двогранним кутом, що проходить через чотири задані точки K, M, I, S, які не належать одній площині, з ребром, паралельним до грані AGED, причому відомо, що точки K, M належать одній із граней заданого двогранного кута, а точка I належить ребру двогранного кута і грані AGHВданої призми (рис.1).

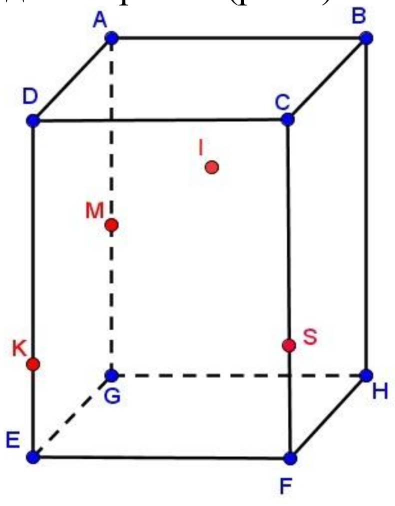


Рис. 1.

Виконаємо побудову шуканого перерізу за допомогою методу слідів.

Слідомсічної площини називають пряму перетину січної площини з площиною, в якій знаходиться основа тіла, яке перерізають. Суть методу: будується пряма (слід) перетину січної площини з площиною основи тіла. Знаходять точки перетину прямої слідів з площинами їх бічних граней. Ці точки разом з даними точками січної площини визначають прямі, яким належать сторони шуканого перерізу.

Побудуємо спочатку одну із граней двогранного кута, яка проходить через точки K, M, I. Побудуємо слід січної площини в α, площині основи призми. Цей слід використаємо для того, щоб отримати точки перетину січної площини з ребрами призми.

Для побудови сліду січної площини в площині α знайдемо точки перетину прямих MK та IM, які лежать в січній площині, з площиною α, тобто: $(MK)\cap(GE)=X_1$, $(IM)\cap(I_1G)=Y_1$. Через знайдені точки X_1 і Y_1 проведемо пряму X_1Y_1 – слід січної площини в площині α основи призми.

У цьому випадку для побудови перерізу не вистачає точок перетину січної площини з ребрами BH і CF даної призми. Продовжимо пряму Y_1I до перетину з ребром BH призми. Отримаємо точку R, яка належить площині перерізу. Далі продовжимо сторону FE основи до перетину з прямою X_1Y_1. Отримана точка P належить січній площині і площині грані DEFC. Проведемо пряму PK, яка в перетині з ребром CF дає точку Q. Побудуємо площину однієї з граней двогранного кута через точки M, K, Q, R.

За умовою задачі, точка I належить ребру двогранного кута. Проведемо через цю точку пряму, паралельну прямій MK. Вона перетне пряму KQ у точці N. Пряма IN буде ребром нашого двогранного кута.

Побудуємо іншу грань двогранного кута, яка проходить через точки I, N, S.Побудуємо слід січної площини в площині α основи призми.

Для побудови сліду січної площини в площині α знайдемо точки перетину прямих NS та IS, які лежать в січній площині, з площиною α, тобто: $(IS)\cap(I_1F)=X_2$, $(NS)\cap(EF)=Y_2$. Через знайдені точки X_2 і Y_2 проведемо пряму X_2Y_2 – слід січної площини двогранного кута в площині α основи призми.

У цьому випадку для побудови перерізу не вистачає точок перетину січної площини з ребрами DE і AG призми. Продовжимо пряму SNдо перетину з ребром DE призми. Отримаємо точку A_1, яка належить площині перерізу. Далі продовжимо сторону HF основи до перетину з прямою X_2Y_2. Отримана точка O належить січній площині і площині грані CFHB. Проведемо пряму OS, яка в перетині з ребром BH дає точку T. Проведемо пряму TI, яка в перетині з ребромAG дає точкуU. Побудуємо площину другої з граней двогранного кута через точки U,A_1, S, T.

Отже, отримали переріз призми двогранним кутомMKNSTI.

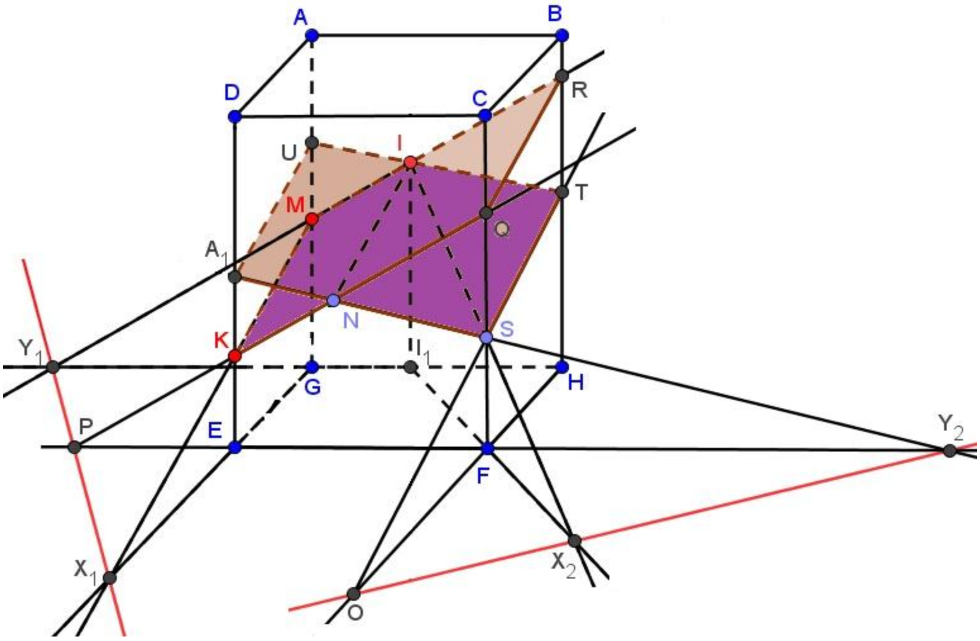


Рис. 2.

Запишемо побудову перерізу призми, враховуючи символіку [2]:

1. $(MK)\cap(GE)=X_1$.
2. $(IM)\cap(I_1G)=Y_1$.
3. (X_1Y_1).
4. $(Y_1I)\cap(BH)=R$.
5. $(FE)\cap(X_1Y_1)=P$.
6. $(PK)\cap(CF)=Q$.
7. $(MKQR)$.
8. $(IN)\|(MK)$.
9. $(IS)\cap(I_1F)=X_2$.
10. $(NS)\cap(EF)=Y_2$.
11. (X_2Y_2).
12. $(SN)\cap(DE)=A_1$.
13. $(HF)\cap(X_2Y_2)=O$.
14. $(OS)\cap(BH)=T$.
15. $(TI)\cap(AG)=U$.
16. (UA_1ST).
17. $(MKNSTI)$.

Постановказадачієкоректноютодіітількитоді, коливказанівсіумови, необхіднідлявиконанняпобудови.

Побудову такого типу перерізів двогранним кутом можна виконати, якщо:

1) задано п’ять точок, дві з яких однозначно визначають ребро двогранного кута, а інші три не лежали в одній площині;
2) задано шість точок, по три в кожній площині (гранях двогранного кута);
3) задано чотири точки і вказано розміщення ребра двогранного кута.

Література.

1. Гольдберг Я. Е. С чего начинается решение стереометрической задачи: Пособие для учителя. – К.: Рад. шк., 1990. – 118с.
2. Калашніков І. В., Синюк Н. Л. Побудова перерізів просторових тіл у шкільному курсі математики. – Саміздат. – Вінниця. – 2011. – 34с.
3. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і перероб. – К.: Вища шк., 2006. – 582с.

Бондар Марія Миколаївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

БАРИЦЕНТРИЧНІ КООРДИНАТИ

У загальноосвітніх школах України вивчаються тільки прямокутні декартові системи координат. Відповідно до чинної програми з математики вперше поняття “координатна пряма”, вводиться в курсі математики 5 класу; “прямокутна система координат на площині”, „Декартові координати” вводиться в курсі математики 6 класу. У курсі алгебри 7 – 9 класів здобуті знання і вміння застосовуються при побудові графіків функцій, графічному розв’язуванні рівнянь, нерівностей та їх систем. У курсі геометрії 8 класу знову передбачені вивчення декартових координат і застосування методу координат до дослідження властивостей геометричних фігур і означення тригонометричних функцій кутів від 0° та 180°, вивчення функцій.

Барицентричні координати це система координат, “прив’язана” до данного трикутника.Вперше барицентричні координати згадуються в книзі “Der barycentrische Calcul” Августа Мьобіуса , опублікованої в 1827 році.

Визначення барицентричних координат

Розглянемо трикутник ABC, вершини якого навантажені масами p, g, r (одночасно не дорівнюють нулю), і розглянемо систему $[p,A]$, $[g,B]$, $[r,C]$.

Побудуємо центр мас Z геометрично. Нехай A_1 – центр мас підсистеми $[g,B]$, $[r,C]$ (точка, яка ділить відрізок BC у відношені $\left|\frac{r}{g}\right|$ залежно від знаків мас зовнішнім або внутрішнім чином). Нехай B_1 і C_1 – центри мас систем $[r,C]$, $[p,A]$ і $[p,A]$, $[g,B]$ відповідно рисунку. За правилом групування і властивості єдиності центра мас, прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетнуться в шуканій точці Z.

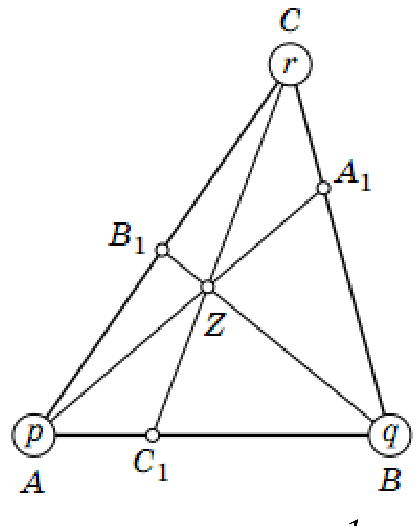


рис. 1

Правильне і обернене твердження: якщо взяти довільну точку Z, провести прямі через неї і вершини трикутника до перетину з протилежними сторонами трикутника (або їх продовженням) і знайти відношення, в яких вони ділять сторони трикутника. Використовуючи отримані відношення, легко навантажити вершини трикутника так, щоб точка Z стала центром мас системи точок A_1, B_1, C_1. Наприклад, якщо точка Z розташована всередині трикутника, то всі точки перетину відповідних прямих із сторонами трикутника потраплять всередину сторін, і позначивши $\frac{AC_1}{BC_1}=\alpha$, $\frac{AC_1}{BC_1}=\beta$, отримуємо систему $[1,A]$, $[\alpha,B]$, $[\alpha\beta,C]$. Якщо ж Z розташована зовні трикутника і відповідні прямі перетинають відрізок AC *внутрішнім* чином, а дві другі сторони трикутника *зовнішнім*, то отримаємо систему $[1,A],[-\alpha,B],[\alpha\beta,C]$ (потрібно замінити числа α і β протилежними за знаком).

Під записом $Z=(p,g,r)$ (або $Z(p,g,r)$) розуміють, що точка Z являється центром мас системи $[p,A],[g,B],[r,C]$ а трійка чисел (p,g,r) називається *барицентричними координатами точки Z в базисному трикутнику ABC*. Будь-яка така трійка чисел (за виключення трійки $(0{,}0{,}0)$ з точністю до множення всіх трьох координат на відмінне від нуля число однозначно визначає деяку точку проективної площини, і навпаки, кожній точці проективної площини відповідає єдина трійка чисел з точністю до множення всіх трьох чисел на відмінне від нуля число.

Трійка з нульовою сумарною масою відповідають нескінечно віддалені точки площини, утворені перетином трьох паралельних прямих, які виходять з вершини базисного трикутника, трійкам, у яких сума деяких двох координат нульова, – точки, які лежать на прямій, проходять через відповідну вершину базисного трикутника паралельно протилежній стороні. Якщо маємо тільки одну нульову координату, то це означає, що центр мас розташований на прямій, яка проходить через сторону базисного трикутника.

Розглянемо наступний приклад: побудуємо точку з барицентричними координатами $(1,1,1)$.

Підсистему з одиничними масами замінемо серединою сторони BC з масою 2. Далі за правилом важеля маємо: шуканою являється точка Z, симетрична вершині A відносно цієї середини (рис. 2, a).

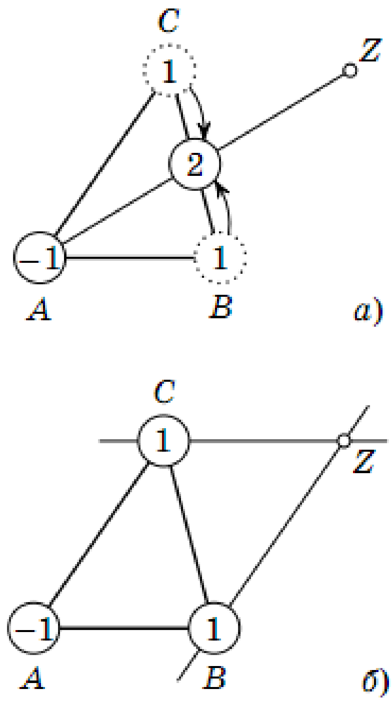


рис. 2

Цю ж точку можна побудувати і другим способом. Виділивши підсистему $[-1,A]$, $[1,B]$ приходимо до висновку, що центр мас всієї системи повинен знаходитись на прямій, яка проходить через C паралельно AB (центр мас системи із двох точок, що лежать на прямій, яка проходить через ці точки, навіть якщо серед них є нескінченно віддалені). Якщо ж вибрати підсистему $[-1,B]$, $[1,C]$ то виявиться, що центр мас всієї системи повинен знаходитися на прямій, яка проходить через B паралельно AC. Перетин двох побудованих прямих дає ту ж точку Z (рис. 2, б).

Виразимо барицентричні координати точки Z через площі трикутників ZBC, ZAC, ZAB. Відношення цих площ рівне відношеню відповідних відрізків (теорема Чеви: випадок внутрішніх точок. Виберемо в довільному трикутнику ABC точки A_1, B_1, C_1 на сторонах BC, CA, AB (рис. 3). Наступні два твердження рівносильні:

а) прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в деякій внутрішній точці Z трикутника ABC;

$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{BC_1}=1$ (умова Чеви)

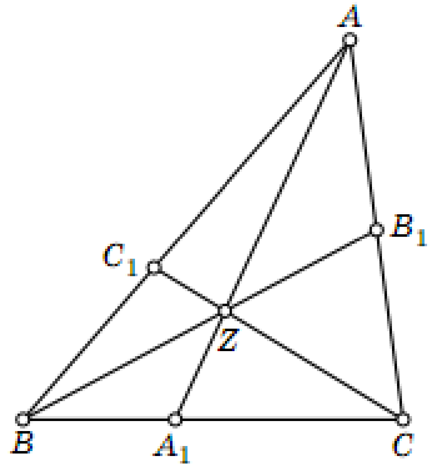


рис.3

Довести пряму теорему Чеви (а ⇒ б) найпростіше, замінивши відношення відрізка в умові Чеви на відношення площ:

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}}=\frac{S_{BZA_1}}{S_{CZA_1}},$$

відповідно,

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{S_{ABA_1}-S_{BZA_1}}{S_{ACA_1}-S_{CZA_1}}=\frac{S_{BCA}}{S_{CZA}},$$

Аналогічно

$$\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{S_{CZB}}{S_{BZA}},\frac{AC_1}{AC_1}=\frac{S_{CZA}}{S_{CZB}}.$$

Перемножимо ці три рівності:

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{AC_1}=\frac{S_{BZA_1}}{S_{CZA_1}}\cdot\frac{S_{CZB}}{S_{BZA}}\cdot\frac{S_{CZA}}{S_{CZB}}=1.$$

Обернена теорема Чеви слідує із прямої: нехай AA_1 і BB_1 перетинаються в точці Z. Нехай пряма CZ перетинає сторону AB трикутника в точці C_2. Для точок A_1, B_1, C_1 виконується умова Чеви:

$$\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AC_1}{AC_1}=1.$$

Співставивши ці співвідношення з заданими рівностями, приходимо до висновку, що $\frac{AC_2}{BC_2}=\frac{AC_1}{BC_1}, C_1=C_2)$.

Використавши однорідність координат, отримаємо, що $Z=(S_{ZBC}, S_{ZAC}, S_{ZAB})$.

(Для зовнішніх точок одну із площ потрібно брати із знаком “– ”.)

Барицентричні координати деяких чудових точок

Наведемо приклад барицентричних координат деяких чудових точок. Зазвичай їх вдається виразити двома способами: через довжини сторін і через кути трикутника. Переходити від однієї форми до другої допомагає теорема синусів :

$$a \sim sin\alpha, \quad b \sim sin\beta, \quad c \sim sin\gamma,$$

в силу однорідності можна замінювати довжину сторони на синус кута, і навпаки, – і теорема косинусів:

$$cos\,\alpha \sim a(b^2 + c^2 - a^2), cos\,\beta \sim b(c^2 + a^2 - b^2), \; cos\,\gamma \sim c(a^2 + b^2 - c^2).$$

Яка форма найзручніша, залежить від умови конкретної задачі.

Точка перетину медіан

$$M = (1,1,1).$$

Центр вписаного кола

$$I = (a,b,c) = (sin\alpha, sin\,\beta, sin\,\gamma).$$

Використавше те, що бісектриса ділить сторону трикутника у відношені, рівному відношеню відповідних сторін трикутника, отримуємо, що $I = (a,b,c)$. Як відмічалося вище, довжини сторін трикутника можна замінювати в барицентричних координат на синус відповідних кутів. Тому

$$I = (a,b,c) = (sin\alpha, sin\,\beta, \; sin\,\gamma).$$

Точка перетену висот

$$H = \left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \frac{1}{c^2 + a^2 - c^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) = (tg\alpha, tg\beta, \; tg\gamma).$$

В цьому випадку спочатку зручніше виразити барицентричні координати через кути трикутника , а потім перейти до довжин сторін.

Отже, оскільки $CA_1 = \dfrac{AA_1}{tg\gamma}, BA_1 = \dfrac{AA_1}{tg\beta}$, то $\dfrac{CA_1}{BA_1} = \dfrac{tg\beta}{tg\gamma}$. (рис. 4).

Аналогічно отримаємо, що $\dfrac{CB_1}{AB_1} = \dfrac{tg\gamma}{tg\alpha}$. Значить, $H = (tg\alpha, tg\beta, tg\gamma)$.

Перейдемо тепер до довжин сторін:

$$H = (tg\alpha, tg\beta, tg\gamma) = \left(\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}, \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta}, \frac{sin\,\gamma}{cos\,\gamma} \right) =$$

$$\left(\frac{a}{a(b^2 + c^2 - a^2)}, \frac{b}{b(c^2 + b^2 - c^2)}, \frac{c}{c(a^2 + b^2 - c^2)} \right) =$$

$$\left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \frac{1}{c^2 + b^2 - c^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right).$$

Точка Жергона

$$G = \left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c} \right) = \left(tg\frac{\alpha}{2}, tg\frac{\beta}{2}, tg\frac{\gamma}{2} \right).$$

Точка Нагеля

$$N = (p-a, \; p-b, \; p-c) = \left(ctg\frac{\alpha}{2}, ctg\frac{\beta}{2}, ctg\frac{\gamma}{2} \right).$$

І для точки Жергона, і для точки Нагеля вирази для барицентричних координат через довжини сторін отримуються з співвідношень:

$$AB_1 = AC_1 = p - a, BC_1 = BA_1 = p - b, CA_1 = CB_1 = p - c.$$

Щоб перейти до кутів трикутника можна використати формулу

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}\sim\frac{a}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{2abc}{b^2+2bc+c^2-a^2}=\frac{2abc}{(a+b+c)(b+c-a)}=$$
$$=\frac{abc}{a+b+c}\cdot\frac{1}{p-a}\sim\frac{1}{p-a}.$$

Аналогічно $tg\frac{\beta}{2}\sim\frac{1}{p-b}, tg\frac{\gamma}{2}\sim\frac{1}{p-c}$.

А можна діяти і по-другому: відрізки, на які чевиани ділять сторони, у випадку точки G рівні $r\ tg\frac{\beta}{2}$ і $r\ tg\frac{\gamma}{2}, r\ tg\frac{\gamma}{2}$ і $r\ tg\frac{\alpha}{2}, r\ tg\frac{\alpha}{2}$ і $tg\frac{\beta}{2}$, а у випадку точки $N - r_a\,tg\frac{\beta}{2}$ і $r_a\ tg\frac{\gamma}{2}, r_b\ tg\frac{\gamma}{2}$ і $r_b\ tg\frac{\alpha}{2}, r_c\ tg\frac{\alpha}{2}$ і $r_c\ tg\frac{\beta}{2}$, де $r_a, r_b, r_c -$ радіуси вписаних і описаних кіл. Відношення довжин цих відрізків виражаються тільки через тангенси половинних кутів (радіуси скорочуються).

Центри описаних кіл

$$O=\left(a^2\left(b^2+c^2-a^2\right), b^2\left(b^2+a^2-b^2\right), c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)=$$
$$=(sin2\alpha, sin2\beta, sin2\gamma).$$

Найпростіше виразити координати через кути, при чому як площі відповідних трикутників. Якщо вихідний трикутник гострокутний, то $\angle BOC=2\alpha$, якщо ж тупокутний, то $\angle BOC=180^\circ-2\alpha$. В будь-якому випадку $S_{BOC}=\frac{1}{2}R^2\,sin2\alpha$. Аналогічно $S_{COA}=\frac{1}{2}R^2\,sin2\beta, S_{AOB}=\frac{1}{2}R^2\,sin2\gamma.$ Таким чином,

$$O=(S_{BOC}\quad S_{COA}, S_{AOB})=(sin2\alpha, sin2\beta, sin\gamma).$$

Щоб перейти до довжин сторін, слід використати співвідношення
$sin2\alpha=2sin\alpha cos\alpha.$

Рівняння прямої

Знайдемо рівняння прямої в барицентричних координатах. Виберемо дві точки $X(p_1,g_1,r_1)$ і $X(p_2,g_2,r_2)$. За лемою про три точки на прямій XY лежить також і будь-яка точка $Z(\lambda p_1+\mu p_2,\lambda g_1+\mu g_2,\lambda r_1+\mu r_2)$(числа λ і μ одночасно не дорівнюють нулю). При цьому

$$\frac{XZ}{YZ}=\left|\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{p_2+g_2+r_2}{p_1+g_1+r_1}\right|,$$

залежно від знака виразу $\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{p_2+g_2+r_2}{p_1+g_1+r_1}$ точка Z ділить відрізок XY внутрішнім або зовнішнім чином. Варіюючи значенями λ і μ, ми можемо отримати будь-яку точку на прямій XY. *Лінійна* залежність координат X, Y і координат точки Z, які “пробігають ” по всій прямій XY, наштовхує на думку, що рівняння прямої XY потрібно шукати серед лінійних виразів
$kx+ly+mz=n.$

Спробуємо підібрати коефіцієнти $k, l, m, n.$ По-перше, в силу однорідності для будь- якого $v \neq 0$ разом з трійкую (x, y, z) рівняння має задовільняти і трійка (vx, vy, vz). Тому $n = 0$. По- друге, оскільки точки X і Y лежать на прямій XY, має виконуватися рівність

$$\begin{cases} kp_1 + lg_1 + mr_1 = 0, \\ kp_2 + lg_2 + mr_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Рівнянь два, а невідомих три. Тому ми можемо визначити із цієї системи коефіцієнти k, l, m лише з точністю до деякої дії (в нашому випадку з точністю до множення всіх коефіцієнтів на деяке число). Можливі два випадки: або $k = 0$, або $k \neq 0$. При $k = 0$ отримаємо систему

$$\begin{cases} lg_1 + mr_1 = 0, \\ lg_2 + mr_2 = 0, \end{cases}$$

Звідси маємо $g_1 r_2 - g_2 r_1 = 0.$ Якщо ж $k \neq 0$, то $g_1 r_2 - g_2 r_1 \neq 0.$ Оскільки ми шукаємо розв'язок k, l, m з точністю до множення на деяке число, отримаємо $k = g_1 r_2 - g_2 r_1$. Система (1) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases} (g_1 r_2 - g_2 r_1) p_1 + lg_1 + mr_1 = 0, \\ (g_1 r_2 - g_2 r_1) p_2 + lg_2 + mr_2 = 0. \end{cases}$$

Отримуємо $l = r_1 p_2 - r_2 p_1, m = p_1 g_2 - p_2 g_1$.

Рівняння $(g_1 r_2 - g_2 r_1)x + (r_1 \ p_2 - r_2 p_1)y + (p_1 \ g_2 - p_2 g_1)z = 0$ дійсно задовільняють всі точки Z прямої XY і тільки вони.

Якщо використовувати барицентричну систему координат, то значно спрощуються доведення великої кількості складних теорем геометрії трикутника. Оскільки багато властивостей трикутника в такій системі координат записуються значно простіше, ніж, скажімо, в прямокутній системі координат.

Література

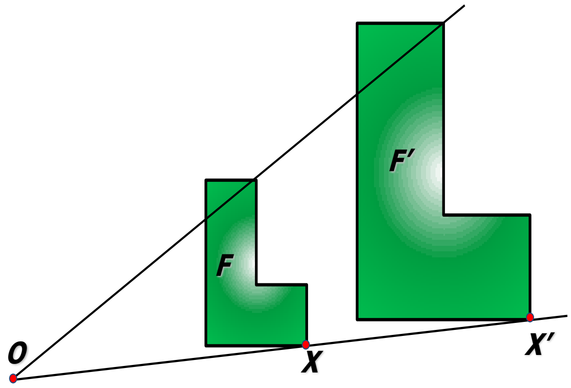
1. Програма з математики 6 клас.
2. Програма з алгебри 7-9 класи.
3. Програма з геометрії 8 клас.
4. Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2002.

Власюк Марина Володимирівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ПРО ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОВОРОТНОЇ ГОМОТЕТІЇ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

У шкільному курсі геометрії гомотетія вивчається у першому семестрі 9-го классу. Її вивчають на поверхневому рівні. У шкільному підручнику з геометрії сформульоване таке означення гомотетії.

Гомотетіяз центром O називається таке перетворення фігури F у фігуру F', внаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, щоб точка X' лежить на промені OX і $OX' = k \cdot OX$ (k - фіксоване додатне число). Гомотетію з центром O і коефіцієнтом k часто позначають через H_O^k.



Правило побудови образу певної точки вводимо за допомогою означення множення вектора на число. При цьому звертаємо увагу, що *для кожної точки площини можна побудувати її образ і прообраз, тобто площина відображається на себе.*

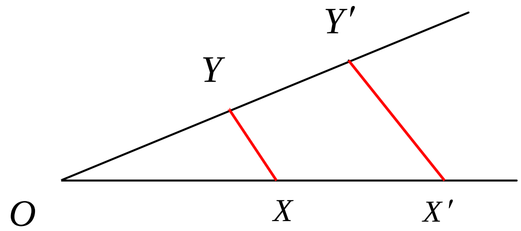
Основна властивість гомотетії

Теорема. Гомотетія є перетворення подібності.

Доведення.

- Нехай точки O, X, Y не лежать на одній прямій.
- Гомотетія з центром O і коефіцієнтом k.
- Точка X - переходить в точку X', точка Y в точку Y'.

За означенням гомотетії: $OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$. Отже, трикутники OXY і $OX'Y'$ подібні за двома пропорційними сторонами й кутом між ними.



Після доведення подібності гомотетичних фігур гомотетію використовують для побудови подібних фігур. *Гомотетичні фігури завжди подібні, але не навпаки,* оскільки подібні фігури можуть бути й негомотетичні.

Перетворення подібності більш загальне, ніж гомотетія, оскільки воно перетворює фігуру не тільки в подібну їй, а й у подібно розміщену.

За деякими іншими підручниками можна зустріти інше визначення гомотетії.

Гомотетія – перетворення, за якого кожній точці площини (простору) ставиться відповідно інша точка (образ даної), що лежить на прямій, яка з’єднує дану точку з якоюсь фіксованою точкою (центром).

Властивості гомотетії

- Гомотетія з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом k.
- При гомотетії пряма переходить у парлельну їй пряму або сама в себе; відрізок – у паралельний йому відрізок; кут – у рівний йому кут.
- На координатній площині гомотетія точок $A(x, y)$ і $B(x_1, y_1)$ задається формулами: $x_1 = k \cdot x$; $y_1 = k \cdot y$.

Відношення гомотетичності *рефлексивне* (оскільки кожна фігура гомотетична сама собі, $k = 1$), *симетричне* (якщо фігура F_1 гомотетична фігурі F з коефіцієнтом k, то фігура F гомотетична фігурі F_1 з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$).

Відношення гомотетичності в шкільному курсі математики не вважають транзитивним, оскільки в противному разі довелося б розглядати нескінченно віддалений центр гомотетії, тобто ми мали б справу з паралельним перенесенням. *Перетворення, обернене до гомотетії, є також гомотетією.* Відносно гомотетії кіл можна довести такі твердження.

1. Гомотетія перетворює довільне коло в коло, причому центр даного кола перетворюється в центр кола-образу, а відношення радіуса кола-образу до радіуса даного кола дорівнює модулю коефіцієнта гомотетії.
2. Будь-які два не конгруентні кола гомотетичні і мають два центри гомотетії.
3. Якщо кола конгруентні, то вони мають тільки один центр гомотетії.

Поворотною гомотетією називають композицію гомотетії і повороту, які мають спільний центр. Дві композиції $R_O^{\varphi} \circ H_O^k$ і $H_O^k \circ R_O^{\varphi}$ дають одне і те ж перетворення.

Коефіцієнти поворотної гомотетії можна вважати позитивними, так як $R_O^{180} \circ H_O^k = H_O^{-k}$.

Композиція двох гомотетій з коефіцієнтами k_1 і k_2, де $k_1 k_2 \neq 0$, є гомотетією з коефіцієнтами $k_1 k_2$, причому її центр лежить на прямій, з’єднуючи центри цих гомотетій.

Приклад. Доведіть, що композиція двох гомотетій з коефіцієнтами k_1 і k_2, де $k_1k_2 \neq 1$, є гомотетією з коефіцієнтами k_1k_2, причому її центр лежить на прямій, з'єднуючи центри цих гомотетій. Дослідіть випадок $k_1k_2 = 1$.

Розв'язання. Нехай $H = H_2 \circ H_1$, де H_1 і H_2 - гомотетії з центрами O_1 і O_2 і коефіцієнтами k_1 і k_2. Введемо позначення $A' = H_1(A)$, $B' = H_1(B)$, $A'' = H_2(A')$, $B'' = H_2(B')$. Тоді $\overrightarrow{O_1A'} = k_1 \cdot \overrightarrow{O_1A}$ і $\overrightarrow{A''B''} = k_2\overrightarrow{A'B'}$, … $\overrightarrow{A''B''} = k_1k_2\overrightarrow{AB}$. З цього випливає, що перетворення H при $k_1k_2 \neq 1$ є гомотетією з коефіцієнтом k_1k_2, а при $k_1k_2 = 1$ - паралельним перенесенням.

Залишається перевірити, що нерухома точка перетворення H лежить на прямій, яка з'єднує центри гомотетій H_1 і H_2. Так як $\overrightarrow{O_1A'} = k_1\overrightarrow{O_1A}$ і $\overrightarrow{O_2A''} = k_2\overrightarrow{O_2A'}$, то

$$\overrightarrow{O_2A''} = k_2\left(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1A'}\right) = k_2\left(\overrightarrow{O_2O_1} + k_1\overrightarrow{O_1A}\right) = k_2\overrightarrow{O_2O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1O_2} + k_1k_2\overrightarrow{O_2A}.$$

Для нерухомої точки H отримуємо рівність $\overrightarrow{O_2X} = (k_1k_2 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2} + k_1k_2\overrightarrow{O_2X}$, тому $\overrightarrow{O_2X} = \lambda\overrightarrow{O_1O_2}$, де $\lambda = (k_1k_2 - k_2)/(1 - k_1k_2)$.

Центром поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок CD, є точка перетину описаних кіл трикутників ACP і BDP, де P - точка перетину прямих AB і CD.

Приклад. а) Нехай P - точка перетину прямих AB і A_1B_1. Доведіть, що якщо серед точок A, B, A_1, B_1 і P немає спільних, то спільна точка описаних кіл трикутників PAA_1 і PBB_1 є центром поворотної гомотетії, яка переводить точку A в A_1, а точку B в B_1, причому така поворотна гомотетія єдина.

b) Доведіть, що центром поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок BC, є точка перетину кіл, проходить через точку A і перетинає пряму AB в точці B.

Розв'язання. а) Якщо O - центр поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок A_1B_1, то

$$\angle(PA, AO) = \angle(PA_1, A_1O) \text{ і } \angle(PB, BO) = \angle(PB_1, B_1O), \qquad (1)$$

а значить, точка O є точкою перетину описаних кіл трикутників PAA_1 і PBB_1. Випадок, коли ці кола мають єдину спільну точку P, очевидно: відрізок AB переводить у відрізок A_1B_1 при гомотетії з центром P. Якщо P і O - дві точки перетину даних кіл, то з нерівності (1) випливає, що $\triangle OAB \sim \triangle OA_1B_1$, а значить, O - центр поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB у відрізок A_1B_1.

b) Достатньо помітити, що точка O є центром поворотної гомотетії, яка переводить відрізок AB і відрізок BC, тоді і тільки тоді коли $\angle(BA, AO) = \angle(CB, BO)$ і $\angle(AB, BO) = \angle(BC, CO)$.

Теорія краще закріплюється при розв'язуванні задач. У шкільному курсі геометрії розглядають задачі початкового, середнього, достатнього і високого рівня; у більшості підручниках задачі високого рівня позначають (*) або (**). Розглянемо декілька прикладів.

Задача 1. Спільні зовнішні дотичні до пар кіл S_1 і S_2, S_2 і S_3, S_3 і S_1 перетинаються в точках A, B і C відповідно. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій.

Розв'язання. Точка A є центром гомотетії, яка переводить S_1 і S_2, точка B - центром гомотетії, яка переводить S_2 в S_3. Композиція цих гомотетій переводить S_1 в S_2, причому її центр лежить на прямій AB. З другої сторони, центром гомотетії, яка переводить S_1 і S_3, є точка C. Справді, точки перетину зовнішніх дотичних відповідає гомотетія з позитивним коефіцієнтом, а композиція гомотетій з позитивними коефіцієнтами є гомотетією з позитивним коефіцієнтом.

Задача 2. Дано квадрат $ABCD$. Точки P і Q лежать відповідно на сторонах AB і BC, причому $BP = BQ$. Нехай H - основа перпендикуляра, опущеного з точки B на відрізок PC. Доведіть, що $\angle DHQ = 90^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо перетворення, яке переводить трикутник BHC у трикутник PHB, т. ч. композиція на 90° відносно точки H і гомотетії з коефіцієнтом $BP:CB$ і центром H. Оскільки при цьому перетворення вершини квадрата переходить в вершину деякого іншого квадрата, а точки C і B переходять в точки B і P, то точка D переходить в точку Q, таким чином $\angle DHQ = 90^\circ$.

Задача 3. Дано два правильних п'ятикутника зі спільною вершиною. Вершини кожного п'ятикутника нумеруються цифрами від 1 до 5 за часовою стрілкою, причому в спільній вершині ставиться 1. Вершини з однаковими номерами з'єднані прямими. Доведіть, що отримані чотири прямі перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Нехай на колі S взята точка O, H - поворотна гомотетія з центром O. Доведемо, що всі прямі XX', де X - точка кола S і $X' = H(X)$, перетинаються в одній точці.

Нехай P - точка перетину прямих X_1X_1' і X_2X_2'. Відповідно точки O, P, X_1 і X_2 лежать на одному колі і точки O, P, X_1' і X_2' також лежать на одному колі. Відповідно, P - точка перетину кіл S і $H(S)$, таким чином всі прямі XX' проходять через точку перетину кіл S і $H(S)$, відмінну від точки O.

Задача 4. Нехай H_1 і H_2 - дві поворотні гомотетії. Доведіть, що $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$ тоді і тільки тоді, коли $H_1 \circ H_2(A) = H_2 \circ H_1(A)$ для деякої точки A.

Розв'язання. Достатньо довести, що якщо $H_1 \circ H_2(A) = H_2 \circ H_1(A)$, то $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$. Розглянемо перетворення $(H_1 \circ H_2)^{-1} \circ H_2 \circ H_1$. Це перетворення є паралельним перенесенням (похідна коефіцієнтів гомотетії рівна 1, а сума кутів повороту рівна 0). Крім того, це перетворення має нерухому точку A. Паралельне перенесення, яке має нерухому точку, є тотожнім перетворенням. Відповідно, $H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$.

Задача 5. Дано два неконцентричних кола S_1 і S_2. Доведіть, що існує рівно дві поворотні гомотетії з кутами повороту 90°, які переводять S_1 в S_2.

Розв'язання. Нехай O_1 і O_2 - центри даних кіл, r_1 і r_2 - їх радіуси. Коефіцієнт k поворотної гомотетії, який переводить S_1 в S_2, рівний r_1 / r_2, а її центр O лежить на колі з діаметром O_1O_2, і, крім того $OO_1 : OO_2 = k = r_1 / r_2$. Залишається перевірити, що коло з діаметром O_1O_2 і ГМТ O таких, що $OO_1 : OO_2 = k$, мають рівно дві спільні точки. При $k = 1$ це очевидно, а при $k \neq 1$ воно є колом, причому одна із її точок перетину з прямою O_1O_2, а друга – поза ним.

Задача 6. Кола S_1 і S_2 перетинаються в точках A і B. Прямі p і q, проходять через точку A, перетинають коло S_1 в точках P_1 і Q_1, а коло S_2 - в точках P_2 і Q_2. Доведіть, що кут між прямими P_1Q_1 і P_2Q_2 рівний куту між колами S_1 і S_2.

Розв'язання. Так як $\angle(P_1A, AB) = \angle(P_2A, AB)$, то орієнтовані кутові величини дуг BP_1 і BP_2 рівні. Тому при поворотній гомотетії з центром B, яка переводить S_1 в S_2, точка P_1 переходить в P_2, а пряма P_1Q_1 переходить в пряму P_2Q_2.

Відношення гомотетичності в шкільному курсі математики не вважають транзитивним, оскільки в противному разі довелося б розглядати нескінченно віддалений центр гомотетії, тобто ми мали б справу з паралельним перенесенням.

Метод гомотетії застосовують при розв'язуванні задач на побудову. Починають побудову, як правило, з фігури, подібної до шуканої так, щоб вона задовольняла всі умови задачі, крім однієї. Цим визначається форма фігури. Далі будують фігуру, гомотетичну побудованій, яка задовольняє всі умови задачі, тобто є шуканою.

Розглянувши тему: «Формування перетворення поворотної гомотетії у шкульному курсі геометрії», я зрозуміла, що ця тема необхідна у шкільному курсі геометрії. Адже перетворення поворотної гомотетії широко застосовуються при вивчені геометрії у ВНЗ. Я розглянула багато задач різних рівнів важкості, які краще допомагають вивчити це поняття.

Література

1. Праслов В. В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие.-5-е узд., испр. и доп.-М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006. – 640 с.
2. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики. – Х.: Гімназія, 2009. – 272 с.
3. Бевз Г. П. Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1977. - 200 с.

Войтовик Олексій Вікторович
студент 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

МЕТОДИКА ВВЕДЕННЯ ПОНЯТЬ «ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ» І «ПІДХІДНІ ДРОБИ ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ» В КУРСІ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

У теорії чисел, математичному аналізі, теорії ймовірностей і в обчислювальній математиці широко використовують так звані ланцюгові дроби, розглянемо питання про скінченні ланцюгові дроби та деякі застосування їх.

Нехай α – деяке дійсне число і нехай q_0 – найбільше з цілих чисел, не більших ніж α. Тоді

$$\alpha = q_0 + x_0 = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \text{ де } \alpha_1 > 1.$$

Аналогічно можна записати: $\alpha_1 = q_1 + x_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2},\ \alpha_2 > 1,$

$$\alpha_2 = q_2 + x_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3},\ \alpha_3 > 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{n-1} = q_{n-1} + x_{n-1} = q_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n},\ \alpha_n > 1,$$

$$\alpha_n = q_n + x_n = q_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}},\ \alpha_{n+1} > 1,$$

Якщо число α раціональне, то для деякого натурального n матимемо $x_n = 0$, отже, записи, про які щойно йшла мова, обірвуться.У цьому випадку матимемо:

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}} \qquad (1)$$

Означення 1.[4] *Вираз вигляду (1), де* $q_0, q_1, q_2, \ldots$ – *деякі цілі числа – називають ланцюговим дробом;* $q_0 \in Z,\ q_1, q_2, \ldots, q_n \in N,\ q_n > 1$.

Числа $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots$ називають *елементами* даного ланцюгового дробу, а правильні дроби $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \frac{1}{q_3}, \ldots$ – відповідно першою, другою, третьою і т. д. *ланкою ланцюгового дробу*. Ланцюговий дріб записується у вигляді

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots \atop + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}} \qquad (2)$$

або скорочено $[q_0; q_1, q_2, ..., q_n]$і називають ланцюговим дробом. Значення кожного ланцюгового дробу $[q_0; q_1, q_2, ..., q_n]$ знаходимо в результаті виконання скінченної кількості разів раціональних операцій над елементами цього дробу. Отже, за нашими припущеннями відносно елементів ланцюгового дробу кожен скінченний ланцюговий дріб, очевидно, виражає собою деяке раціональне число $\frac{a}{b}$. Справедливе також і обернене твердження.

Теорема 1. *Кожне раціональне число можна подати у вигляді деякого скінченного ланцюгового дробу.*

Д о в е д е н н я. див у [4].

Підхідні дроби ланцюгового дробу.

Ланцюговий дріб (2) має $n+1$ підхідних дробів:

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_n}{Q_n}. \qquad (3)$$

За означенням підхідного дробу

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1}.$$

За формулами $P_1 = q_0 q_1 + 1$, $Q_1 = q_1$, отже, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$,

$$P_2 = q_0(q_1 q_2 + 1) + q_2 = q_2(q_0 q_1 + 1) + q_0 = q_2 P_1 + P_0,$$

$$Q_2 = q_2 q_1 + 1 = q_2 Q_1 + Q_0 \qquad (4)$$

і

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_2 P_1 + P_0}{q_2 Q_1 + Q_0}.$$

Теорема 2.[1] (Правило утворення підхідних дробів). *Для будь-якого* $s \geq 2$

$$P_s = q_s P_{s-1} + P_{s-2}, \; Q_s = q_s Q_{s-1} Q_{s-2}. \qquad (5)$$

Д о в е д е н н я. При $s = 2$, як показують співвідношення (4), формули (5) правильні. Припустимо, що вони правильні для $s = m-1$ $(m > 2)$, і доведемо, що тоді вони правильні й для $s = m$.

Розглянемо відрізок

$$[q_0; q_1, q_2, ..., q_m] \; (2 < m \leq n) (6)$$

ланцюгового дробу (2). Підхідний дріб порядку r дробу (6) позначатимемо символом $\frac{P'_r}{Q'_r}$. Тоді: $P_m = q_0 P'_{m-1} + Q'_{m-1}$ і $Q_m = P'_{m-1}$. (7)

Але оскільки за припущенням формули (5) правильні для $s=m-1$, то, застосувавши їх до дробу $[q_0; q_1, q_2,..., q_m]$, дістаємо:

$$P'_{m-1} = q_m P'_{m-2} + Q'_{m-3}, \; Q'_{m-1} = q_m Q'_{m-2} + Q'_{m-3} \qquad (8)$$

(тут стоїть q_m, а не q_{m-1}, оскільки дріб $[q_0; q_1, q_2,..., q_m]$ починається з q_1,а не з q_0).

З співвідношень (7), (8) і за формулами:

$$P_m = q_0(q_m P'_{m-2} + P'_{m-3}) + (q_m Q'_{m-2} + Q_{m-3}) = q_m(q_0 P'_{m-2} + Q'_{m-2}) + (q_0 P'_{m-3} + Q'_{m-3}) = q_m P_{m-1} + P_{m-2};$$

$$Q_m = q_m P'_{m-2} + P'_{m-3} = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2},$$

тобто $P_m = q_m P_{m-1} + P_{m-2}$ і $Q_m = q_m Q_{m-1} + Q_{m-2}$.

Цим теорему доведено.

Формула (5) виражає чисельник P_s і знаменник Q_s підхідного дробу порядку s через елемент q_s і через чисельники і знаменники двох попередніх підхідних дробів й, отже, дає можливість за відомими підхідними дробами порядку $s-2$ і $s-1$ знайти підхідний дріб порядку s. Зауважимо, що на формулі (5) ґрунтується вся теорія ланцюгових дробів.

Обчислення чисельників і знаменників підхідних дробів за допомогою формули (5) зручно провадити за такою схемою:

	q_0	q_1	q_2	$\dots$	q_{n-1}	q_n
P_s	$P_0 = q_0$	$P_1 = q_0 q_1 + 1$	$P_2 = q_2 P_1 + P_0$	$\dots$	$P_{n-1} = q_{n-1} P_{n-2} + P_{n-3}$	$P_n = q_n P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_s	$Q_0 = 1$	$Q_1 = q_1$	$Q_2 = q_2 Q_1 + Q_0$	$\dots$	$Q_{n-1} = q_{n-1} Q_{n-2} + Q_{n-3}$	$Q_n = q_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Щоб обчислити P_s (s=2,3,…, n) за цією схемою, потрібно число q_s, що стоїть над P_s, помножити на число P_{s-2}, що передує P_{s-1}. За аналогічним правилом обчислюють Q_s.

Розглянемо деякі властивості підхідних зборів.

Теорема 3. [1]*При* s *=1,2,3,…,* n *справджується співвідношення*

$$P_s Q_{s-1} - P_{s-1} Q_s = (-1)^{s-1}. \qquad (9)$$

Д о в е д е н н я. При $s=1$ рівність (9) справедлива, бо $P_1 = q_0 q_1 + 1$, $Q_0 = 1$, $P_0 = q_0$, $Q_1 = q_1$, і тому $P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = 1$. Припустимо, що рівність (9) правильно при $s=m(1 \le m \le n-1)$,і доведемо, що тоді вона правильна й при $s=m+1$. Це справді так:

$$P_{m+1}Q_m - P_m Q_{m+1} = (P_m q_{m+1} + P_{m-1})Q_m - P_m(Q_m q_{m+1} + Q_{m-1}) = -(P_m Q_{m-1} - P_{m-1}Q_m) = -(-1)^{m-1} = (-1)^m,$$

тобто $P_{m+1}Q_m - P_m Q_{m+1} = (-1)^m$.

Отже, за принципом математичної індукції, рівність (9) правильна при будь-якому s ($1 \le s \le n$). Теорему доведено. З теореми 3 випливає справедливість такого твердження.

Наслідок. *Кожний підхідний дріб – нескоротний.*

Д о в е д е н н я. Дріб $\frac{P_0}{Q_0}$ нескоротний, оскільки $Q_0 = 1$.

Нескоротний також і кожен з дробів $\frac{P_s}{Q_s}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$). Справді, припустимо, що деякий дріб $\frac{P_m}{Q_m}$ скоротний, тобто $(P_m, Q_m) = d > 1\ (1 \le m \le n)$. Тоді ліва частина рівності

$$P_m Q_{m-1} - P_{m-1} Q_m = (-1)^{m-1}$$

ділитиметься на число d, а тому і права її частина $(-1)^{m-1}$ також має ділитися на d, що неможливо. Отже, наше припущення неправильне. Твердження доведено.

Цей висновок дає змогу застосувати розклад раціональних чисел у ланцюгові дроби для скорочення звичайних дробів. Справді, якщо звичайний дріб $\frac{P}{Q}$ розкласти у ланцюговий дріб, то останній підхідний дріб $\frac{P_n}{Q_n}$ цього ланцюгового дробу буде нескоротним дробом і дорівнюватиме $\frac{P}{Q}$.

Теорема 4. [1]*При* $s \ge 2$ *справджується співвідношення*

$$P_s Q_{s-2} - P_{s-2} Q_s = (-1)^s q_s. \qquad (10)$$

Д о в е д е н н я. Справді, за формулою (5)

$$P_s = q_s P_{s-1} + P_{s-2},\ Q_s = q_s Q_{s-1} + Q_{s-2}.$$

Тому

$$P_s Q_{s-2} - P_{s-2} Q_s = (q_s P_{s-1} + P_{s-2}) Q_{s-2} - P_{s-2}(q_s Q_{s-1} + Q_{s-2}) = q_s (P_{s-1} Q_{s-2} - P_{s-2} Q_{s-1}).$$

Але оскільки за теоремою 3 $P_{s-1} Q_{s-2} - P_{s-2} Q_{s-1} = (-1)^{s-2} = (-1)^s$, то $P_s Q_{s-2} - P_{s-2} Q_s = (-1)^s q_s$. Цим теорему доведено.

Теорема 5.[4]*Підхідні дроби парного порядку даного ланцюгового дробу утворюють зростаючу, а підхідні дроби непарного порядку – спадну послідовність.*

Д о в е д е н н я. Поділимо обидві частини співвідношення (10) на $Q_s \cdot Q_{s-2}$. Тоді матимемо:

$$\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-2}}{Q_{s-2}} = \frac{(-1)^s q_s}{Q_s Q_{s-2}}.$$

Звідси випливає, що при s парному справджується нерівність

$$\frac{P_s}{Q_s} > \frac{P_{s-2}}{Q_{s-2}},$$

а при s непарному – нерівність

$$\frac{P_s}{Q_s} < \frac{P_{s-2}}{Q_{s-2}}.$$

Цим теорему доведено.

Теорема 6. *З двох підхідних дробів* $\frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}$ *і* $\frac{P_s}{Q_s}$ *даного ланцюгового дробу дріб парного порядку завжди менший від дробу непарного порядку.*

Д о в е д е н н я. Поділимо обидві частини співвідношення (9) на $Q_s \cdot Q_{s-1}$; тоді матимемо:

$$\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}} = \frac{(1)^{s-1}}{Q_s Q_{s-1}}.$$

Звідси випливає, що при парному s справджується нерівність

$$\frac{P_s}{Q_s} < \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}},$$

а при непарному s – нерівність

$$\frac{P_s}{Q_s} > \frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}.$$

Отже, з двох дробів $\frac{P_{s-1}}{Q_{s-1}}$ і $\frac{P_s}{Q_s}$ менший той, порядок якого парний. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає справедливість такого твердження.

Наслідок. *Кожен підхідний дріб парного порядку даного ланцюгового дробу менше від будь-якого підхідного дробу непарного порядку цього ланцюгового дробу.*

Література

1. Бородін О.І. Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970. – 274с.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Просвещение, 1966. – 384с.
3. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176с.
4. Завало С.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1976. – ч.2. – 384с.
5. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112с.

Габузь Сергій Олегович
студент магістратури, напрям підготовки «Математика»

ПРО ВВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ КОМБІНАТОРИКИ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ТА ВИЩІЙ ШКОЛАХ

Формування комбінаторного мислення є важливим завданням впровадження ймовірнісно-статистичної змістової лінії у шкільну освіту. Воно має формуватися неперервно за такими етапами: 1) пропедевтичний етап, який охоплює початкову школу, 5–6-й класи; 2) основний етап – 7–9-й класи; 3) завершальний етап – старшу школу.

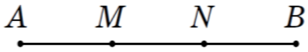
В початковій школі існує реальна можливість забезпечення комбінаторної пропедевтики, шляхом включення до арифметичного, алгебраїчного та геометричного матеріалу 1–4 класів задач та вправ відповідного характеру. Наприклад це задачі такого змісту: «Запишіть усі можливі двоцифрові числа за допомогою цифр 1 і 4», «Кожне з чисел від 10 до 20 розкладіть на два доданки так, щоб один із доданків дорівнював 8» та ін.

Основні методичні орієнтири навчання учнів комбінаторної діяльності є наступні.Провідною метою є навчання учнів не розв'язуванню задач певного типу, а формування комбінаторного мислення. Крім цього необхідно постійно варіювати умови здійснення комбінаторних міркувань; методика навчання розв'язування комбінаторних задач повинна будуватися з урахуванням того, що дітям притаманна своя, поки ще не досконала логіка міркувань, не можна придушувати її, нав'язувати «дорослі» способи розв'язування задач. У процесі навчання розглядаються різні можливості здійснення перебору під час розв'язування комбінаторних задач, в учня є вибір шляхів і засобів розв'язування задачі, він може діяти в даній ситуації згідно із своїми особливостями. Зазначимо також, що у навчанні розв'язуванню комбінаторних задач зберігається етапність, основний напрямок роботи – це перехід учнів від здійснення випадкового перебору варіантів до проведення системного, спочатку без застосування засобів його організації, потім за їх допомогою. Для учнів початкової школи розроблені дидактичні ігри, що сприяють здійсненню учнями дії перебору, розвиткові комбінаторного мислення.

Як приклад, можна розглянути гру «анаграми». Це захоплююча, розвиваюча комбінаторне мислення гра. Нове слово, складене з усіх букв деякого слова, називається його анаграмою. Анаграма слова — це результат перестановки в іншому порядку усіх його букв. Два або більше слова, утворені з одних і тих же букв, складають блок анаграм. Ось декілька цікавих прикладів: корба-кобра — блок з двох п'ятибуквенних анаграм; приказ-каприз — блок з двох шестибуквенних анаграм; карта-карат-катар — блок з трьох п'ятибуквенних анаграм.

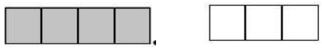
Включення до арифметичного, геометричного й алгебраїчного матеріалу математики 5–7 класів комбінаторних задач дає можливість активізувати розумову діяльність учнів. Наприклад,

1) Точки M і N розбивають відрізок AB на 3 частини. Назвіть усі відрізки з кінцями в точках A, B, M і N.



2) Порівняйте числа, не знаючи деяких цифр, у віконці напишіть знак >, < або =: 2*□4*; *5□7; 99□*8.

3) Утворіть усі можливі фігурки з двох таких смужок:



Для цих задач особливе значення має не отримання відповіді, а процес її знаходження, процес переробки вхідної інформації на вихідну. На першому місці стоїть пошук розв’язання, його реалізація і пізнавальні висновки з опрацьованої теми. Важливим є заключний етап роботи над навчальною задачею комбінаторного характеру. Основним його змістом є осмислення розв’язання, формулювання і розв’язування інших задач (якщо це можливо), безпосередньо пов’язаних з попередньою, породжених першою, і висновки про те, як знаходиться і виконується розв’язання. В цілому процес роботи над задачею комбінаторного характеру має яскраво виражений дослідницький характер, містить елементи творчості. Важливо й те, що комбінаторні задачі є інтегративним чинником між різними математичними поняттями, виховують в учнів гнучкість мислення. Основною особливістю формування комбінаторних знань та вмінь у 5–7 класах є те, що під час ознайомлення з ними домінують індуктивні міркування, в основному, наочно-інтуїтивного рівня із залученням практичного досвіду учнів і прикладів довкілля. Ознайомлення з поняттями комбінаторики повинно відбуватись так, щоб не гальмувати вивчення основних розділів систематичного курсу математики, а сприяти йому.

Також, важливим шляхом збереження вмінь, набутих у 5-му класі в процесі розв'язування комбінаторних задач, є їх використання під час вивчення інших предметів. Безумовно, вчителів цих предметів слід зорієнтувати і підготувати до такої роботи.

Немало можливостей підтримувати «комбінаторну форму» учнів має зміст курсу математики 7–9-х класів [1].

По-перше, повернення у 9-му класі до розгляду ймовірності випадкової події не лише дає змогу а й потребує використання елементів комбінаторики. По-друге, серед текстових задач природне місце можуть зайняти задачі з комбінаторики. Йдеться про текстові задачі, які зводяться до розв'язування квадратних чи інших типів рівнянь. Фактично більшість із цих задач є оберненими до традиційних комбінаторних задач, що передбачають знаходження кількості способів здійснення певного вибору, або розбиття. Комбінаторні задачі корисно використовувати під час вивчення многочленів і взагалі в процесі вивчення різних тем курсу алгебри. Певні комбінаторні задачі можна розглядати і в курсі геометрії в 7-9-х класах. Вони природні під час вивчення взаємного розміщення прямих на площині, в темі «Многокутники».

Система задач у 8–9 класах з поглибленим вивченням математики має бути розрахована на реалізацію рівневої диференціації. Диференціація передбачає добір задач різної складності. Пропонується трирівнева система задач (А –

середній, Б – достатній, В – високий). Принцип структурування полягає в тому, що, по-перше, кожний наступний рівень задач вимагає від учнів більш повного використання як алгоритмічної, так і евристичної компоненти, по-друге, задачі третього рівня складності включають елементи задач першого і другого рівнів, а задачі другого рівня складності містять елементи задач першого рівня. Орієнтація на диференціацію знаходить своє відображення у відкритості рівнів складності запропонованого масиву задач. Наявність набору задач до кожного рівня складності дозволяє залучати до роботи всіх учнів. Достатня кількість запропонованих задач створює атмосферу творчого змагання. Як приклад, пропонується такий перелік задач [2-3]:

1. Скількома способами можна скласти список ремонтної бригади з 9 чоловік? ($P_9 = 9! = 362880$)
2. Учневі потрібно скласти 4 екзамени протягом 8 днів. Скількома способами це можна зробити? ($A_8^4 = \dfrac{8!}{(8-4)!} = 1680$)
3. Із 20 робітників потрібно виділити 6 для робот на елеваторі. Скількома способами це можна зробити? ($C_{20}^6 = \dfrac{20!}{6!(20-6)!} = 38760$)
4. Скільки осіб брало участь у шаховому турнірі, якщо кожний учасник зіграв з кожним по одній партії, а всього було зіграно 210 партій? ($C_x^2 = \dfrac{x(x-1)}{2} = 210$)
5. У їдальні є 3 перші страви, 5 других і 2 треті. Скількома способами можна скласти обід із трьох страв? ($C_3^1 \cdot C_5^1 \cdot C_2^1 = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$)

Одним із мотивів вивчення комбінаторики в старшій школі є потреби теорії ймовірностей та математичної статистики. Крім того комбінаторика є прекрасним полігоном для навчання математичного моделювання, адже необхідною умовою розв'язування комбінаторних задач є переклад задач на мову математики, мову множин, мову вибірок, або мову розбиття. Це перший етап математичного моделювання. Далі внутрішньомодельне розв’язання зводиться до обчислення кількості розміщень, комбінацій, перестановок або значень інших виразів, які їх містять. Нарешті, здобутий результат перекладається на мову вихідної ситуації. Таким чином, навчання комбінаторики суттєво сприяє формуванню вмінь будувати і досліджувати математичні моделі – одного з найважливіших прийомів математичної діяльності.

Доцільно вивчення комбінаторики в старшій школі починати з повторення (чи навчання) методу перебору можливих варіантів розв’язування комбінаторних задач. Перебір варіантів можна використати для з'ясування того, чи впливає на результати вибору порядок відбору елементів чи ні, тобто для визначення того, чи є вибір, що розглядається в задачі, впорядкованим чи невпорядкованим, чи є цей вибір з поверненням, чи без повернення. Перебір варіантів можна використати також для розвинення навичок самоконтролю.

Іноді безпосередній перебір варіантів може бути єдиним способом розв'язання задачі або її частини.

Варто після повторення у старшій школі методу перебору можливих варіантів розв'язування комбінаторних задач, повторити чи розглянути основні комбінаторні правила: множення, додавання, доповнення. По-перше, їх можна використати під час отримання основних формул комбінаторики. По-друге, багато комбінаторних задач для свого розв'язання потребують не лише застосування формул, а й використання основних правил: йдеться як про об'єднання різних методів розв'язування задачі, так і пошук найбільш раціональних методів її розв'язування. По-третє, використання різних методів розв'язування задачі є одним із засобів самоконтролю.

Головним у вивченні комбінаторики мають бути не тотожні перетворення виразів або розв'язання рівнянь, що містять число розміщень, перетворень, комбінацій, а розв'язання змістових задач, застосування елементів комбінаторики до розв'язування імовірнісних задач.

Комбінаторні задачі є традиційними на математичних олімпіадах різних рівнів. Вчителю математики в позакласній та гуртковій роботі слід звернути увагу на розв'язування комбінаторних задач підвищеної складності, наприклад такого типу: «Скількома способами натуральне число n можна подати у вигляді суми k натуральних доданків (суми, які відрізняються порядком доданків, вважати різними)», «Дано правильний $(2n+1)$-кутник. Знайдіть кількість трикутників, вершини яких співпадають з вершинами даного $(2n+1)$-кутника і містять його центр» [5]. Такі задачі розвивають нестандартне мислення учнів.

Розв'язування задач за допомогою формул комбінаторики пов'язане із формуванням певних прийомів комбінаторної діяльності, а саме:

1) впорядкований вибір декількох елементів з однієї множини:
   - з поверненням;
   - без повернення;
2) перестановки
   - різних елементів;
   - елементів, серед яких є однакові;
3) невпорядкований вибір елементів з деякої множини
   - з поверненням;
   - без повернення;
4) розбиття елементів на групи
   - якщо елементи різні, а порядок груп несуттєвий;
   - якщо елементи різні, а порядок груп суттєвий;
   - якщо елементи однакові, а порядок груп несуттєвий;
   - якщо елементи однакові, а порядок груп суттєвий;

Власне кажучи, виконання вказаних дій, оволодіння прийомами підрахунку об'єктів під час виконання кожної з перелічених дій і складає зміст навчання комбінаторики на різних його етапах від початкової до старшої школи. Змінюються лише, відповідно до віку учня, методи розв'язування задач, засоби, якими користуються учні, міркування, за допомогою яких досягається мета.

В системі математичної підготовки студентів по напряму програмування, економіки, математики, а також по технічним і гуманітарним дисциплінам важливе місце посідає дискретна математика. Вона є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» та базовою для вивчення таких спеціальних дисциплін як «Алгебра і теорія чисел», «Теорія ймовірностей», «Математична логіка», «Теорія графів» тощо. Знання та вміння, отримані під час вивчення даної навчальної дисципліни, використовуються під час вивчення переважної більшості наступних дисциплін професійної та практичної підготовки фахівця [4].

Метою і завданнями навчальної дисципліни «Дискретна математика» у вищій школі є ознайомлення та оволодіння сучасними методами дискретної математики, теоретичними положеннями, основними поняттями та визначеннями та основними застосуваннями дискретної математики в різних задачах математики та інших, зокрема профільних дисциплінах, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів. В процесі вивчення дисципліни студенти мають отримати необхідні знання з основ і прикладних методів аналізу і синтезу (проектування) об’єктів і процесів дискретної природи, які певним чином мають зв'язок з обраною спеціальністю.

Отже, як ми бачимо, комбінаторику учні вивчають протягом усього періоду навчання в школі (хоч про це вони і не здогадуються), і дуже часто ця лінія продовжується і у вищій школі. Тому проблема введення основних понять комбінаторики є надзвичайно важливою і актуальною.

Література

1. Бродський Я. Про навчання комбінаторики в 7-9 класах / Яків Бродський, Олександр Павлов // Математика. – 2007. – №29-30. – С. 30-33.
2. Коломієць Н. Елементи комбінаторики. Добірка задач / Наталія Коломієць // Математика. – 2007. – №33. – С. 19-24.
3. Кравченко Н. Розв'язування задач з комбінаторики. Алгебра і початки аналізу, 11 клас / Н. Кравченко // Математика. – 2007. – №7. – С. 18-20.
4. Щедролосьєв Д. Є. Дискретна математика як фундаментальна дисципліна в системі математичної підготовки майбутніх інженерів-програмістів / Д. Є. Щедролосьєв // Інформаційні технології в освіті. – 2010. – Випуск 5. – С. 129-133.
5. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В.А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208с.

Гуртова Ганна Станіславівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ І ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ РОЗМІРНОСТІ В ЗАГАЛЬНООСВІТНІЙ ТА ВИЩІЙ ШКОЛІ

Постановка проблеми. Поняття розмірності пройшло довгий діалектичний шлях розвитку, перш ніж сформуватись у нині існуючому вигляді. Розвиток математики в різні часи приводив до цього поняття в різних розуміннях: наприклад зараз ми говоримо про розмірність векторного простору, різноманітні означення розмірності множини (топологічну, фрактальну та ін.). В останні десятиліття різко зріс інтерес до множин зі складною будовою – фракталів. В основі вивчення фрактальних множин лежить поняття розмірності. Питанню формування цього поняття у школярів та студентів і присвячена дана стаття.

Для з'ясування природи поняття розмірності звернемось до аналізу історичних етапів його становлення. Ще задовго до того, як на початку XX століття була створена теорія множин, на інтуїтивному рівні використовувалось поняття розмірності. При цьому завжди вважалось, що відрізок, коло мають розмірність 1; квадрат, круг – розмірність 2; куб, куля – розмірність 3. Більше того, завжди вважалось, що лінії одновимірні, поверхні – двовимірні, просторові тіла – тривимірні, точніше поняття лінія та одновимірність, поверхня та двовимірність, тіло та тривимірність пов'язувались нерозривним чином. Евклід лінією називав «довжину без ширини», а поверхню – тим, що має тільки довжину і ширину[6].

Активний розвиток теорії розмірності розпався на три періоди. До першого періоду відносяться три відомі статті, які належать Пуанкаре, Лебегу і Брауеру. Брауер найпершим дав точне визначення топологічної розмірності. Ці статті були спрямовані на відхід від інтуїтивного уявлення розмірності і на закладення основ строго означення. [1]

Об'єм поняття розмірності відкриває доступ до вивчення ряду цікавих властивостей точкових множин, до побудови загальної теорії, яка є одним із найбільших досягнень математики першої половини XX століття.

До другого періоду розвитку цієї теорії відносять роботи Урисона, Менгера, Гуревича і Фрейденталя, які розвинули поняття розмірності множини. Відзначимо великий внесок в побудову теорії розмірності радянського математика П. С. Урисона. Він всі отримані результати виклав у доповіді Московському математичному об'єднанню в 1921 році. У цьому ж році Менгер дав визначення індуктивної розмірності.

Третій період розвитку теорії розмірності – це період геометризації цієї теорії і встановлення її зв'язку з іншими розділами топології, зокрема комбінаторною. Цій темі присвячена книга Гуревича та Волмена [1]. Вони сформулювали основну теорему розмірності.

Значний поштовх до сучасного розуміння розмірності множини здійснив Ф. Хаусдорф, який ввів поняття дробової розмірності, яка визначається для довільної множини простору R^n. Означення Хаусдорфа дробової розмірності для "простих" множин співпадає з їх топологічною розмірністю, втім ця характеристика набуває значимості для вивчення будови множин зі складною локальною будовою (наприклад, множин канторівського типу, графіків неперервних ніде не диференційованих функцій). Розвинув і поглибив ідеї Хаусдорфа А. Безикович. Поняття розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини є центральним у новому і стрімко розвиваючому розділі математики – фрактальній геометрії.

Таким чином, термін «розмірність» залежно від контексту, в якому він вживається, несе різне смислове навантаження. З цим поняттям учні знайомляться ще з середньої школи на рівні уявлень, зокрема, підрозмірністю геометричної фігури розуміють кількість вимірів, які має ця фігура. Окрім розмірності множини говорять також і про розмірність простору – максимальну кількість лінійно незалежних векторів у цьому просторі. Суміжними поняттями до поняття розмірності є поняття розміру і виміру. Розмір – величина, масштаб якого-небудь явища; сила, міра вияву чого-небудь. Вимір – величина, що вимірюється; визначення якої-небудь величини чогось.

У теорії множин вивчається поняття топологічної розмірності множини, яке визначається за допомогою покриттів цієї множини іншими множинами. Топологічна розмірність множини є одним з інструментів для порівняння множин в плані їх «масивності», проте часто вона не є ефективною для порівняння фрактальних множин. Під фракталом(від лат. fractus — подрібнений, дробовий) в математиці розуміють нерегулярну, в певному смислі самоподібну структуру. В широкому розумінні фрактал означає фігуру, малі частини якої в довільному збільшенні є подібними до неї самої (див. [7]). Термін фрактал увів у 1975 році видатний вчений Бенуа Мандельброт.

На сучасному етапі суспільно-політичного й соціально-економічного розвитку України об'єктивною необхідністю є модернізація системи освіти. Розвиток математики як науки повинен певною мірою коректувати зміст матеріалу, що вивчається в школі. В останні десятиліття різко зросла сфера застосування математики як в природничих, так і в суспільних науках. Наприклад, нові поняття фрактальної геометрії, передусім фрактальної розмірності, проникають в такі галузі людських знань як економіка, географія, медицина, інженерія. Ми вважаємо, що це певною мірою повинно знайти своє відображення при формуванні поняття розмірності в школі.

Зокрема, при вивченні математики в 5–6 класах, алгебри та геометрії в 7–11 класах слід звернути увагу на таке математичне поняття як «розмірність». Не буде перебільшенням сказати, що всю математику пронизує ідея розмірності. Зазвичай в математиці цікавляться не лише окремими об'єктами (числами, геометричними фігурами), а й з їх розмірами та вимірами, тобто довжиною, шириною, висотою, площею, об'ємом. З даним поняттям повинні бути добре знайомі не тільки учні, що навчаються у класах поглибленого вивчення математики, а й учні звичайних класів загальноосвітніх шкіл.

Ми проаналізували проблему вивчення поняття розмірності у шкільному курсі математики, визначили можливості реалізації прикладної спрямованості шкільної математики через розв’язування відповідних задач. Також з’ясували, що в навчальному процесі є передумови для кращого, ширшого вивчення учнями даного поняття. Багато тем містять матеріал, на основі якого можна легко вводити і розширювати знання учнів про розмірність, а це буде сприяти більш глибокому та осмисленому вивченню абстрактної математичної теорії, а також підвищенню інтересу учнів до вивчення математики.

Активне формування цього поняття починається з 7-го класу. Точка має розмірність 0, відрізок – 1 (має лише один вимір – довжину), прямокутник – 2 (має довжину та ширину); паралелепіпед – 3 (має довжину, ширину і висоту). В курсі геометрії 9-го та 11-го класів в класах з поглибленим вивченням математики вводиться поняття базису (розклад вектора за двома неколінеарними та розклад вектора за трьома не компланарними векторами), що фактично підводить до розуміння поняття «розмірність простору».

В курсі алгебри 9-го класу при вивченні теми «Геометрична прогресія»[3,4] можна познайомити учнів з найпростішими фрактальними множинами, наприклад, зі сніжинкою Коха. Сніжинка Коха є межею конструкції, що починається з трикутника та доповнюється рекурсивною заміною кожного відрізка набором із чотирьох відрізків, які утворюють трикутний “виступ” [2, 6]. Щоразу, коли додаються нові трикутники, периметр фігури зростає на третину й тому прямує до нескінченності, коли кількість ітерацій прямує до нескінченності. Довжина межі сніжинки Коха, таким чином, є нескінченною, а її площа – скінченною (її значення обчислюється за формулою суми нескінченної спадної геометричної прогресії).

На гурткових заняттях в 11-му класі після вивчення теми «Логарифми» вчитель може ознайомити учнів з поняттям самоподібна розмірність. В якості вправ можна запропонувати знайти самоподібну розмірність відрізка, квадрата, куба (і переконатись, що вона дорівнює відповідно 1, 2, 3 та співпадає з очікуваною відповіддю – топологічною розмірністю), а також кривої Коха та килима Серпінського. При цьому, розв’язуючи метричні задачі (обчислення довжини та площі з допомогою формул обчислення суми геометричної прогресії) ми говоримо про неможливість порівняння цих двох множин (обидві мають нескінченну довжину та нульову площу). Разом з тим самоподібна розмірність є більш точним інструментом «порівняння» таких множин: для кривої Коха вона рівна $\log_3 4$, для килима Серпінського – $\log_2 3$. Оскільки $\log_2 3 > \log_3 4$, то в певному розумінні килим Серпінського є «масивнішою», більшою множиною, ніж крива Коха.

Крива Коха та килим Серпінського належать до точних, або детерміністичних, фракталів. Крім таких фракталів, є випадкові, або недерміністичні фрактали, у яких не зберігається точне повторення. Наприклад, маленькі гілки дерев побудовані майже так само, як і великі, які, відповідно, повторюють будову дерева загалом. Аналогічно, якщо розглядати берегову лінію з великої висоти, а потім зі значно меншої, то можна побачити приблизно подібні криві. Зараз математики шукають різні інструменти для дослідження якомога простіших фракталів. На сьогоднішній день головним таким інструментом є поняття дробової розмірності.

У шкільних підручниках зовсім немає задач, що стосуються саме поняття «розмірності». Прочитавши теоретичний матеріал, в учня може і не сформуватися уявлення про дане поняття. Тому тут на допомогу повинен прийти вчитель.

Нові навчальні плани передбачають подальше зменшення годин на вивчення математики. А пояснити матеріалу потрібно набагато більше. Тому вивчення окремих розділів або тем варто виносити на гурткову роботу або на факультативні заняття [5]. У зв'язку з численними застосуваннями фрактальних множин і для того, щоб поглибити знання учнів про розмірність, зацікавити їх цією темою зокрема і математикою взагалі, ми пропонуємо факультатив «Найпростіші фрактали», який розрахований для учнів ЗОШ, на якому розглянути такі теми:

1. Поняття розмірності. Її види.
2. Фрактал. Приклади фракталів. Фрактали в природі.
3. Застосування фракталів.

У вищій школі формування поняття розмірності відбувається при вивченні таких розділів математики як лінійна алгебра, диференціальна геометрія та теорія множин. У лінійній алгебрі розмірність розглядається при вивченні теми «Векторні простори», а в диференціальній геометрії при вивченні теми «Топологія».

В даній статті ми розглядали введення поняття розмірності в загальноосвітній та вищій школі. Ми довели, що розмірність застосовується при розв'язуванні багатьох задач з курсу алгебри і геометрії. Отже, поняття розмірністі займає важливе місце при вивченні математики в різних класах.

Література

1. Гуревич В. Теория размерности / Гуревич В., Волмэн Г. – М., 1948. – 232 с.
2. Долбилин Н. Мозаика из снежинок / Н. Долбилин // Квант. – №1. – 2008. – С. 14.
3. Мерзляк А. Г. Алгебра. Поглиблене вивчення: Підручник для 9 класу / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2005. – 288 с.
4. Мерзляк А. Г. Алгебра : підручник для 9 кл. з поглибл. вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 384 с.
5. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. /З. І. Слєпкань. – К.: Вища шк.., 2006. – 582 с.
6. Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / Турбин А.Ф., Працевитый Н. В. – К.: Наукова думка, 1992. – 208 с.
7. uk.wikipedia.org/wiki/Фрактал.

Дарченко Ольга Володимирівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

МЕТОДИКА ВВЕДЕННЯ ПОНЯТЬ «НАЙБІЛЬШИЙ СПІЛЬНИЙ ДІЛЬНИК І НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ КРАТНЕ МНОГОЧЛЕНІВ» В КУРСІ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

З поняттями найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне натуральних чисел учні знайомляться ще в курсі математики середньої школи. При вивченні курсу алгебри і теорії чисел в педагогічному університеті студенти математичного відділення використовують такі означення:

Означення 1. Якщо цілі числа a і b діляться на натуральне числоd, то d називається *спільним дільником* чисел a і b.

Означення 2. Найбільший серед усіх спільних дільників чисел a і b називається їх *найбільшим спільним дільником* і скорочено позначають НСД(a;b) або (a;b).

Розглянемо многочлени:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad a_n b_m \neq 0$$

Але порівнювати многочлени*f(x) і* *g(x)* не можна (можна порівнювати лише значення цих многочленів при певних значеннях змінної *x),* тому в курсі алгебри і теорії чисел використовують дещо інші означення спільного дільника і найбільшого спільного дільника двох многочленів.

Означення 3. Многочлен *h(x)* називається спільним дільником многочленів *f(x)* і *g(x)***,** якщо *f(x)*⋮*h(x)* і *g(x)*⋮*h(x).*

Означення 4. Многочлен *d(x)* називається найбільшим спільним дільником **(НСД)** многочленів *f(x)* і *g(x),* якщо:

1^0. *d(x)* є спільним дільником многочленів *f(x)* і *g(x);*

2^0. *d(x)* ділиться на будь-який спільний дільник даних многочленів.

З властивостей подільності многочленів слідує що НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$ визначається однозначно з точністю до сталого множника $c \cdot d(x)$, $c \neq 0$, с є Р. Будемо його позначати *(f(x) ; g(x))* або *(f;g).*

Теорема 1. Для будь-яких многочленів $f(x)$ і $g(x)$, $g(x) \neq 0$ з кільця Р[x] їхній **НСД** існує і дорівнює останній відмінній від нуля остачі в алгоритмі Евкліда.

Доведення. Нехай степінь многочлена $f(x)$ більший за степінь многочлена **g(x).** Виконаємо ділення з остачею, що застосовувалося для цілих чисел і називається алгоритмом Евкліда:

$$f(x) = g(x) \cdot s_1(x) + r_1(x), \Rightarrow \deg r_1(x) < \deg g(x) = m$$
$$g(x) = r_1(x) \cdot s_2(x) + r_2(x), \Rightarrow \deg r_2(x) < \deg r_1(x)$$
$$r_1(x) = r_2(x) \cdot s_3(x) + r_3(x), \Rightarrow \deg r_3(x) < \deg r_2(x)$$
$$r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x) \cdot s_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), \Rightarrow \deg r_{k-1}(x) < \deg r_{k-2}(x)$$
$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x) \cdot s_k(x) + r_k(x), \Rightarrow \deg r_k(x) < \deg r_{k-1}(x)$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x) \cdot s_{k+1}(x).$$

Степінь остачі після кожного ділення зменшується і не більше ніж через m кроків остача буде рівна нулю.

Отже, $r_k(x) \neq 0$ є дільником $r_{k-1}(x)$.

$r_{k-2}(x)$ ділиться на $r_k(x)$, тобто $r_k(x)$ є дільником і

$$r_{k-3}(x),..., r_2(x), r_1(x), g(x), f(x),$$

$r_k(x)$ є спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Розглянемо тепер довільний спільний дільник $h(x)$ многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

З першої рівності слідує, що $r_1(x) \vdots h(x)$, отримаємо $r_2(x) \vdots h(x)$, $r_3(x) \vdots h(x), \ldots, r_{k-1}(x) \vdots h(x)$, $r_k(x) \vdots h(x)$.

$r_k(x)$ є НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо $d(x)$ є НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з кільця P[x], то можна знайти такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що $f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x) = d(x)$, тоді цей вираз є лінійним поданням многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

З поняттями спільного кратного і найменшого спільного кратного натуральних чисел учні знайомляться ще в курсі математики середньої школи. При вивченні курсу алгебри і теорії чисел в педагогічному університеті студенти математичного відділення використовують такі означення:

Означення 5.*Спільним кратним* чисел *a* і *b* називається натуральне число*k*, якщо *k* ділиться на *a* і *b*.

Означення 6. Найменше серед усіх спільних кратних чисел *a* і *b* називається їх *найменшим спільним кратним* і скорочено позначають НСК [*a*;*b*] або [*a*;*b*].

Але порівнювати многочлени*f(x) і g(x)* не можна (можна порівнювати лише значення цих многочленів при певних значеннях змінної *x),* тому в курсі алгебри і теорії чисел використовують дещо інші означення спільного кратного і найменшого спільного кратного двох многочленів.

Означення 7. Спільним кратним многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з кільця P[x] називається многочлен $s(x)$ є P(x) такий, що $s(x) \vdots f(x)$ і $s(x) \vdots g(x)$.

Означення 8. Найменшим спільним кратним **НСК** многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається таке їхнє спільне кратне, на яке ділиться кожне спільне кратне цих многочленів.

Теорема 3. (Про зв'язок між НСД і НСК) Для довільних відмінних від нуля многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з кільця P[x] їх найменше спільне кратне існує і визначається однозначно з точністю до сталого множника, за формулою:

$$[f(x); g(x)] = \frac{f(x) \cdot g(x)}{(f(x); g(x))}$$

Доведення. Розглянемо многочлен $q(x)=\frac{f(x)\cdot g(x)}{(f(x);g(x))}$, де $(f(x);\ g(x))$ найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

$f(x)$ ділиться на $(f(x);\ g(x))$, $g(x)$ ділиться на $(f(x);\ g(x))$.

Оскільки

$$q(x)=\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\cdot g(x)=\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\cdot f(x),$$ то $q(x)$ є спільним кратним многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Нехай тепер $s(x)$ – довільне спільне кратне многочленів $f(x)$ і $g(x)$; тоді $s(x)\,\vdots\, f(x)$ і $s(x)\,\vdots\, g(x)$ і тому $s(x)=s_1(x)f(x)$, причому $\frac{s_1(x)\cdot f(x)}{g(x)}=p(x)$ - многочлен з P[x].

Подамо тепер $f(x)$ і $g(x)$ у вигляді $f(x)=(f(x),g(x))\cdot f_1(x)$, $g(x)=(f(x),g(x))\cdot g_1(x)$, де $f_1(x)$ і $g_1(x)$ многочлени з P [x] , при цьому $(f_1(x),g_1(x))=1$.

Тоді $p(x)=\frac{s_1(x)\cdot f_1(x)(f(x),g(x))}{g_1(x)(f(x),g(x))}=\frac{s_1(x)\cdot f_1(x)}{g_1(x)}$.

Оскільки $(f_1(x),g_1(x))=1$, то $s_1(x)\,\vdots\, g_1(x)$. Вводячи позначення $\frac{s_1(x)}{g_1(x)}=t(x)$ є P[x],дістанемо: $s_1(x)=g_1(x)\cdot t(x)$,

звідки $s(x)=s_1(x)f(x)=f(x)\cdot g_1(x)\cdot t(x)=\frac{f(x)\cdot g(x)}{(f(x),g(x))}t(x)=q(x)\cdot t(x)$, тобто

$s(x)\,\vdots\, q(x)$

Отже, q(x)є дійсно НСК многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Воно знаходиться за формулою

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)\cdot g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

Теорему доведено.

Приклад:Дано многочлени $f(x)=2x^3+x^2-2x-1$; $g(x)=x^3+1$. Знайти НСК$(f(x);g(x))$ і многочлени $u(x)$ і $v(x)$ такі, що виконується рівність: $f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=(f(x);g(x))$

Розв'язання: Знайдемо НСД многочленів

$$\begin{array}{l|l} \_\ 2x^3+x^2-2x-1 & x^3+1 \\ \quad 2x^3 \qquad\qquad +2 & \hline 2 \\ \hline x^2-2x\ \ -3 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} f(x)=g(x)\cdot s(x)+r(x) \\ g(x)=r(x)\cdot s_1(x)+r_1(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \_\ x^3 \qquad\qquad +1 & x^2-2x\ \ -3 \\ \quad x^3-2x^2-3x & \hline \text{x+2} \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\underline{}\,2x^2+3x+1 \\
\underline{2x^2-4x-6} \\
\quad 7x+7
\end{array}
\qquad r(x)=r(x)\cdot s_2(x)+r(x)
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{}\,x^2-2x-3 & 7x+7 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2+x} & \frac{1}{7}x-\frac{3}{7} \\
\underline{}-3x-3 & \\
\underline{-3x-3} & \\
\quad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
r_2(x)=0 \\
(f(x);g(x))=r_1(x)=7x+7
\end{array}
$$

Знайдемо $[f(x),g(x)]$;

$$[f(x);g(x)]=\frac{(2x^3+x^2-2x-1)(x^3+1)}{7x+7}=\frac{(2x^3-2x-1)(x+1)(x^2-x+1)}{7(x+1)}=\frac{2x^5-2x^4+x^2-x-1}{7}$$

Знайдемо многочлени $u(x)$ і $v(x)$:

$[f(x);g(x)]$ або [f:g]

$$(f(x);g(x))=r_1(x)=g(x)-r(x)\cdot s_1(x)=g(x)-(f(x)-g(x)\cdot s(x))s_1(x)=$$
$$=g(x)-f(x)s_1(\tilde{o})+g(x)\cdot s(x)\cdot s_1(x)=f(x)\cdot(-s_1(x))+g(x)(1+s(x)s_1(x))$$

$u(x)=-s_1(x)=-(x+2)=-x-2$,

$v(x)=1+2(x+2)=2x+5$.

Відповідь: $u(x)=-x-2$, $v(x)=2x+5$, $[f(x);g(x)]=\frac{1}{7}(2x^5-2x^4+x^2-x-1)$

Література

1. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел.- Київ: Вища школа, 1976.- 380с.

2. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум.Ч.2.- Київ: Вища школа, 1986.- 262с.

3. Кулик В.Т., Рокіцький І.О. Алгебра. – Вид. 2-ге, перероб. і доп - Вінниця: Глобус-Прес,2005.-264с.

Домрачева Надія Юріївна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

МЕТОДИКА ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ КОНГРУЕНЦІЇ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

Досить часто в алгебрі і теорії чисел зустрічаються такі поняття як «конгруенція», «відношення конгруентності». Розглянемовведення даних понять.

Вперше термін “конгруенція” було опубліковано в 1801 році у книзі “Disquisitionesarithmeticae” (“Дослідження з арифметики”) видатного німецького математика Карла Гаусса.У своїй книзі він створив основні методи та систематичну побудову теорії конгруенцій в кільці цілих чисел. [6]

Визначимо у множині цілих чисел Zвідношення конгруенції за модулем m, де m є N, m>1. Існує три означення конгруентності двох цілих чисел аі b за модулем m.

Означення 1. Нехай m натуральне число, більше одиниці . Цілі числа a іb називаються *конгруентними за модулем m*, якщо при діленні на m вони дають однакові остачі. Цей факт скорочено записують так: $a \equiv b$ (modm).[5]

Приклад 1. Числа 14 та 5 конгруентні за модулем 3, оскільки мають однакові остачі при діленні на 3, які рівні 2. $14 \equiv 5$ (mod 3).

Означення 2. Цілі числа a іb називаються *конгруентними за модулем m,* де m – натуральне число, m>1, якщо їхня різниця a – b ділиться на m. [4]

З означення 2 випливає наступна теорема.

Теорема 1.Для того щоб числа a іb були конгруентними за модулем m необхідно і достатньо, щоб їх різниця ділилася на m.

Доведення.*Необхідність.* Нехай $a \equiv b$ (modm). Тоді a=mq$_1$+ rіb=mq$_2$+ +r. Звідки a –b =m(q$_1$ –q$_2$) і (a –b) ⋮m.

Достатність. Нехай (a –b) ⋮m. Тоді a –b =mt. Припустимо, що b=mq+ +r. Будемо мати a = b +mt = m(q + t) + r, тобто $a \equiv b$ (modm). ■

Наслідок. Числа a іbконгруентні за модулем m тоді і тільки тоді, коли існує ціле t таке, що a = b +mt.

Наслідок з теореми 1 дозволяє дати ще таке означення конгруентних за модулем m чисел.

Означення 3. Цілі числа a іb називаються *конгруентними за модулем m*, де m –натуральне число, більше одиниці, якщо існує таке ціле число t, що a=b+ +mt.[6]

Якщо розглядається кілька чисел, конгруентних між собою за тим самим модулем m, то роблять такий запис: $a \equiv b \equiv c \equiv d$ (modm). [3] Так, наприклад, $3 \equiv 8 \equiv 13$ (mod 5).

Теорема 2. Відношення конгруенції цілих чисел за даним модулем m є відношенням еквівалентності.

Доведення. Очевидно, що $a \equiv a$ (modm)та, коли $a \equiv b$ (modm), то і $b \equiv a$ (modm).

Нехай $a \equiv b$ (modm) і $b \equiv c$ (modm). Тоді a=mq_1+ r, b=mq_2+r і c = mq_3++r. За означенням конгруенції маємо $a \equiv c$ (modm). Отже, відношення конгруенції за модулем m є рефлексивним, симетричним і транзитивним. ■

З властивостей подільності цілих чисел, означення конгруенції та доведених теорем випливають ряд властивостей конгруенцій, які можна поділити на дві групи: при незмінному та при змінному модулі.

Властивості конгруенцій при незмінному модулі.

Властивість 1. Конгруенції за одним модулем можна почленно додавати.

Дійсно, нехай $a \equiv b$ (modm) і $c \equiv d$ (modm). Тоді a = b +mt_1 і c = d + mt_2. Звідки маємо a + c = b + d = m(t_1+ t_2), тобто $a + c \equiv b + d$ (modm). Аналогічні міркування мають місце для будь-якої скінченної кількості конгруенцій.

Наслідок 1. До обох частин конгруенції можна додати одне і те ж число.

Наслідок 2. Конгруенції за одним модулем можна почленно віднімати.

Наслідок 3. З однієї частини конгруенції можна переносити доданок до іншої її частини, змінивши знак на протилежний.

Наслідок 4. До будь-якої частини конгруенції можна додати число, кратне модулю.

Властивість 2. Конгруенції за одним модулем можна почленно перемножати.

Справді, якщо $a \equiv b$ (modm) і $c \equiv d$ (modm), то a = b +mt_1 і c = d + mt_2. Звідки маємо ac = (b +mt_1)(d + mt_2) = bd +m(bt_2+dt_1+$t_1 t_2$) = bd +mt, де t = bt_2++dt_1+$t_1 t_2$. Це означає, що $ac \equiv bd$ (modm). Аналогічні міркування мають місце для будь-якої скінченної кількості конгруенцій.

Наслідок 1. Конгруенцію можна піднести до будь-якого натурального степеня n.

Наслідок 2. Обидві частини конгруенції можна помножити на те саме натуральне число.

Наслідок 3. Обидві частини конгруенції можна поділити на їх спільний дільник d, взаємно простий з модулем. [6]

Властивості конгруенцій при змінному модулі.

Властивість 1. Обидві частини конгруенції і модуль можна помножити на одне й те саме натуральне число.

Справді, з конгруенції $a \equiv b$ (modm) випливає рівність a = b +mt, де t – ціле; помножаючи її на ціле k>0, дістанемо ak = bk +mkt, звідки випливає конгруенція $ak \equiv bk$ (modmk).

Властивість 2. Обидві частини конгруенції і модуль можнаподілити на будь-який їхній спільний натуральний дільник.

Справді, припустимо, що $a \equiv b$ (modm) і a = a_1d, b =b_1d, m = m_1d, тоді маємо a = b +mt, або a_1d = b_1d + $m_1$dt. Звідси, скорочуючи обидві частини останньої рівності на d, дістанемо: a_1 = b_1 + m_1t; отже, $a_1 \equiv b_1$ (modm_1).[1]

Властивість 3. Якщо конгруенція має місце за кількома модулями, то вона має місце і за модулем, який є їх найменшим спільним кратним.

Властивість 4. Якщо конгруенція має місце за модулем m, то вона також має місце за кожним натуральним дільником числа m.

Властивість 5. Якщо $a \equiv b$ (modm), то (a, m) = (b, m).[6]

Відношення конгруентності за даним модулем m є бінарним відношенням еквівалентності на множині цілих чисел Z. Класи еквівалентностей називають класами лишків за даним модулем m. Лишком класу за модулем m називають будь-яке число цього класу [4]. Класи лишків будемо позначати символами $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, … [3]. До класу лишків, який містить число a, належать усі цілі числа x виду x=a+mq, де qєZ.

Повною системою лишків (ПСЛ) за модулем m називають будь-яку систему лишків, утворену з m чисел, взятих по одному з кожного класу лишків. Існують такі основні повні системи лишків:

а) повна система найменших невід'ємних лишків;

б) повна система найменших за абсолютною величиною лишків;

в) повна система найменших натуральних (додатних) лишків.

При m =7 повними системами лишків є, наприклад, такі системи чисел:

$$p_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$p_2 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$
$$p_3 = \{-24, -9, -1, 56, 1, 16, 73\}.$$

Система p_1 складається з найменших невід'ємних лишків усіх класів, система p_2 – з абсолютно найменших лишків; а система p_3 з довільних 7 чисел, узятих по одному з кожного класу.

Уведемо тепер поняття найбільшого спільного дільника класу лишків за модулем m. Згідно з властивістю, усі числа одного класу мають однаковий НСД з модулем m: якщо a, b належать цьому класу, тобто $a \equiv b$ (modm), то (a, m) = = (b, m).

Означення 4. Найбільшим спільним дільником класу називається найбільший спільний дільник чисел a іm. Якщо (a, m)=1, то такий клас називають взаємно простим з модулем m.

Зведеною системою лишків (ЗСЛ) за модулем m називають будь-яку систему лишків, утворену з $\varphi(m)$ чисел, взятих по одному з кожного класу, взаємно простого з модулем m, $\varphi(m)$ - функція Ейлера, визначена на множині натуральних чисел; значення $\varphi(m)$ є кількість невід'ємних чисел, менших за m і взаємно простих з m. Очевидно, число $\varphi(m)$ дорівнює кількості чисел, які утворюють ЗСЛ за модулем m.

Оскільки відношення конгруентності є відношенням еквівалентності, то різні класи лишків за модулем m не мають спільних елементів. Тим самим можна стверджувати, що два класи лишків збігаються, якщо вони мають хоч один спільний елемент. [3]

Розглянемо поняття лінійної конгруенції з одним невідомим.

Означення 5. Конгруенціями з одним невідомим за модулем m називаються конгруенції виду

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \text{ (modm)},$$

де в лівій частині міститься многочлен з цілими коефіцієнтами. Якщо a_nне ділиться на число m, то n називається степенем конгруенції; при $a_n \vdots m$ старший член $a_n x^n \equiv 0$(modm) і його можна відкинути.

Розв'язком конгруенції $f(x) \equiv 0$ (modm) є будь-яке ціле число a, яке задовольняє конгруенцію, тобто $f(a) \equiv 0$(modm). Легко зрозуміти, що в цьому випадку разом з числом a конгруенцію задовольняють і всі числа класу, до якого належить a. Тому введемо таке означення.

Означення 6. Розв'язком конгруенції $f(x) \equiv 0$ (modm) називається клас лишків за модулем m, кожне число якого задовольняє цю конгруенцію.

Оскільки класів чисел за даним модулем m є m, то конгруенція може мати лише скінченну кількість розв'язків або може не мати їх зовсім.

Конгруенції розв’язують за допомогою простих конгруенцій, рівносильних заданим.

Означення 7. Конгруенції називаються рівносильними, якщо множини їх роз’язків збігаються.

Щоб побудувати рівносильні конгруенції, над заданою конгруенцією проводять операції, які грунтуються на властивостях. До операцій, які не порушують множину розв’язків конгруенцій, належать такі:

а) Додавання до обох частин конгруенції будь-якого многочлена g(x) з цілими коефіцієнтами.

б) Додавання до однієї з частин конгруенції многочлена з коефіцієнтами, кратними модулю.

в) Множення обох частин конгруенції на число, взаємно просте з модулем.

г) Множення обох частин конгруенції і модуля на те саме натуральне число.

При розв’язанні конгруенцій виду $ax \equiv b$(modm) розглядають два випадки: (a, m) =1 і (a, m) =d>1.

Якщо (a, m)=1, то конгруенція $ax \equiv b$(modm) має єдиний розв’язок. Коли ж (a, m)=d>1 і число b не ділиться на d, то конгруенція $ax \equiv b$(modm) не має розв’язків. Якщо (a, m) =d>1 і $b \vdots d$, то конгруенція $ax \equiv b$(modm) має d розв’язків. [3]

Література

1. Бородін О.І. Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970. – 276 с.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1966. – 384 с.
3. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1976. – Ч. 2. – 384 с.
4. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В. , Рокіцький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. – К.: Вища школа, 1986. – Ч. 2. – 264 с.
5. Збірник задач з теорії чисел. [Навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету] За редакцією І.О. Рокіцького. – Вінниця, 2005. – 148 с.

Дончак ГаннаВікторівна

студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ІЗОТОМІЧНІ СПРЯЖЕННЯ

Цікаво спробувати зрозуміти, а чому той або інший результат геометрії трикутника здійснює на нас більший або менший вплив. В грубому приближенню відповідь наступна: прекрасна теорема геометрії трикутника пов'язана, як правило, з дивовижними точками, прямими і колами. Але пряма або коло дивовижне, якщо має які-небудь дивовижні точки трикутника.

З точками першого порядку пов'язані чудові результати – теореми прямої Ейлера, кола дев'яти точок.

Далі, точки другого порядку можна вважати точки, являються «похідними» від точок першого порядку, які отримуються під дією якого – не будь перетворення.

Точки третього порядку визначаються аналогічно, які «похідні» точок другого порядку і так далі. Зрозуміло, що з ростом порядку кількість точок стрімко зростає, про те, так само програє в якості: чим більший порядок, тим геометричні зв'язки між ними менш виразніші.

Зафіксуємо на площині трикутник ABC. Виберемо деяку точку площини Z і проведемо через неї і вершини трикутника прямі, які перетинають сторони трикутника (або їх продовження) в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Кожну таку точку відобразимо симетрично відносно середини тієї сторони, на якій вона лежить. Отримані три точки позначимо через A_2, B_2, C_2 (рис. 1).

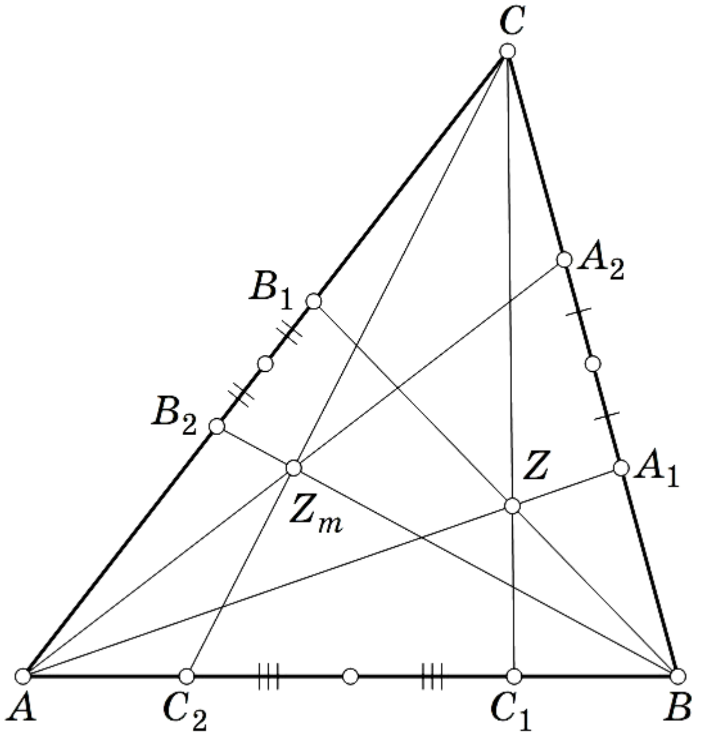


Рис. 1

Тоді прямі AA_2, BB_2, CC_2 також перетинаються в деякій точці Z_m. Ця точка називається ізотомічно спряженою точці Z відносно трикутника ABC.

Коректність визначення ізотонічного спряження випливає з теореми Чєви: в умові Чєви чисельники міняються місцями зі знаменниками, і якщо відповідь дорівнювала одиниці, то «перевернуті» відповіді також дорівнюють одиниці.

Ізотомічні спряженняплощини. В геометрії спряженням називають перетворення F площини, яке повертає будь-яку точку назад після дворазового застосування. Формально це можна записати так:

$$F\left(F\left(X\right)\right) = X$$

для будь-якої точки X, чи

$$F \circ F = F^2 = Id$$

(перетворення F^2 дає тотожне перетворення Id).

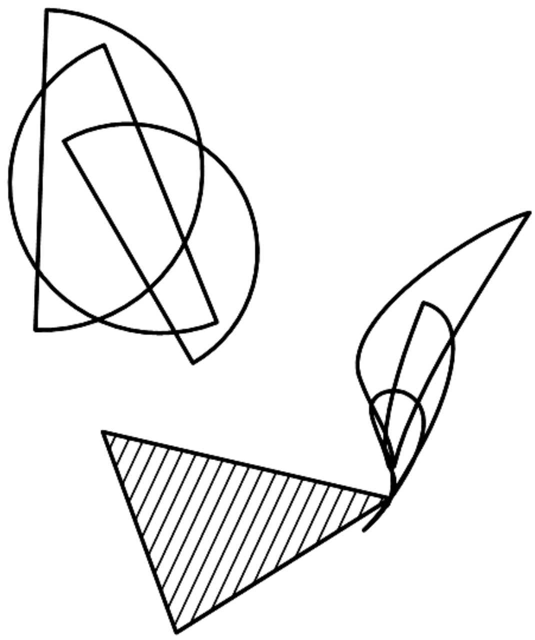


Рис. 2
Образи трьох півкіл під дією перетворення
відносно заштрихованого трикутника

Такою властивістю володіють симетрії відносно точки, прямої чи кола (інверсія). Очевидно, що і вище розглянуті нами перетворення володіють цією ж властивістю . Однак вони влаштовані більш складним чином, наприклад, не зберігають прямі і кола (тобто образ прямої чи кола може бути чимось іншим, рис. 2). Окрім того, безпосередньо із визначення випливає, що ізотомічне спряження «погано» впливають на точки, які розташовані на сторонах (чи їх продовженнях), які породжують ці перетворення трикутника. Будь-яка точка під дією цих перетворень переходить в протилежну вершину, а вершини – в будь-яку точку на протилежній стороні. Порушується однозначність! Але якщо виключити із області визначення прямі, які містять сторони трикутника, однозначність відновлюється.

Однією з важливих характеристик перетворення є наявність (чи відсутність) нерухомих точок, тобто точок, які залишаються під дією перетворення на місці. Легко зрозуміти, що нерухомими точками ізотонічного спряження (поєднання) являються точка перетину медіан і точки, симетричні вершинам трикутника відносно середини відповідних сторін.

За допомогою ізотонічного спряження можна отримувати нові чудові точки, наприклад, анти ортоцентр H_m (точку, ізотомічно спряжену ортоцентру) чи точку I_m перетину анти бісектрис (точку, ізотомічно спряжену центру вписаного кола).

Дізнаємось, які лінії переходять в нескінченно віддалену пряму під дією розглянутих сполучень, тобто знайдемо множину точок, для яких медіани, їх вміст, переходять в трійки паралельних прямих.

Виявляється, для ізотонічного спряження такою лінією являється описаний еліпс Штейнера – еліпс, який містить вершини трикутника, а також точки, симетричні точці перетину медіан (яка є центром даного еліпса) відносно середин відповідних сторін (рис. 3).

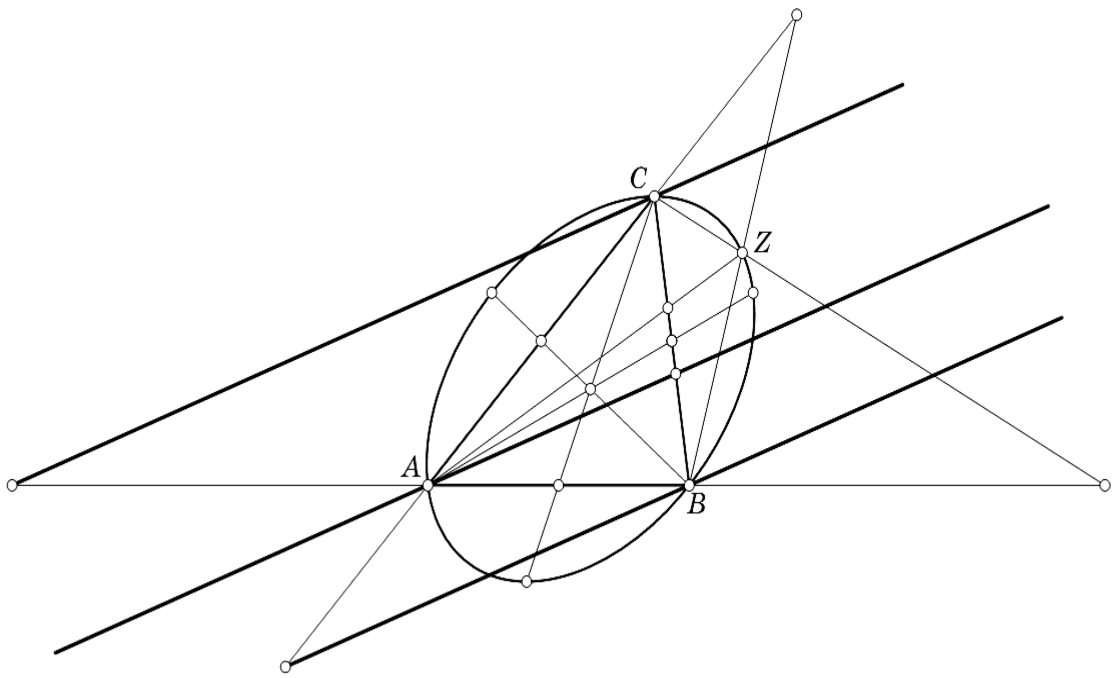


Рис. 3

Коли точка Z має барицентричні координати (p,q,r), то барицентричні координати точки Z_m, ізотомічно спряженій Z, виражаються наступним чином: $Z_m = \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right)$. Це твердження очевидне: по визначенні ізотонічного спряження $BA_1 = CA_2$, де A_1 – точка перетину прямих AZ і BC, а $A_2 - AZ_m$ і BC.

Вписаний еліпс Штейнера має найбільшу площу серед всіх еліпсів, вписаних в даний трикутник, а описаний – найменшу серед всіх описаних. Це легко доводиться, коли перевести еліпс в окіл афінним перетворенням і скористуватися тим, що при афінному перетворенню зберігається відношення площ.

Задача №1

Найдіть рівняння еліпсів Штейнера в барицентричних координатах.

Точкою Штейнира називають точку перетину описаного іліпса Штейнера з описаним колом трикутника, відмінну від вершин трекутника.

Розв'язання:

Барицентричні координати точки не змінюються при афінному перетворенню, тому еліпси Штейнера задаються такими же рівняннями, як вписане і описане коло. Тому описаний еліпс Штейнера в барицентричних координатах $(\alpha:\beta:\gamma)$ задається рівнянням :

$$\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta=0$$

а вписаний – рівнянням:

$$2\beta\gamma+2\alpha\gamma+2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

Задача №2

Знайти барицентричні координати точки Штейнера.

Зауваження. Відмітимо без доведення, що дотична в точці дотику вписаного кола і кола дев'яти точок дотикається також і вписаного еліпса Штейнера. Те ж вірно і для вневписаних кіл.

Розв'язання:

Описаний еліпс Штейнера задається рівнянням $\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta=0$, а описане коло – рівнянням $a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta=0,$ де $a,b,c-$довжини сторін. З першого рівняння отримуємо $\gamma=-\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Підставивши цей вираз у друге рівняння, отримаємо $\alpha:\beta=\left(c^2-a^2\right):\left(b^2-c^2\right)$. Таким чином, точка Штейнера має барицентричні координати

$$\left(\frac{1}{b^2-c^2}:\frac{1}{c^2-a^2}:\frac{1}{a^2-b^2}\right).$$

Література

1. Мякишев А., Элементы геометрии треугольника. – Москва: МЦНМО, 2002.
2. Блак М., Болтянский В., Геометрия масс. – Москва: Наука, 1987.
3. Мякишев А., О некоторых преобразованиях, связанных с треугольником // Матиматическое образование. №1(8), 1999.
4. Прасолов В., Задачи по планиметрии. – Москва: МЦНМО, 2001.
5. Прасолов В., Точки Брока и изогональное сопряжение. – Москва: МЦНМО, 2000.

Заскока Оксана Василівна

студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ПРО ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОЇ РЕШІТКИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

У шкільному курсі математики часто зустрічаються задачі, які розв'язуються за допомогою цілочисельних решіток.

До уваги уваги читачів пропонується добірка задач на тему: "Цілочисельні решітки". Їх можна пропонувати учням середніх загальноосвітніх шкіл під час підготовки до державної підсумкової атестації і зовнішнього незалежного оцінювання.

Розглянемо на площині систему прямих, які задані рівняннями: $x = m$ і $y = n$, де m і n – цілі числа . Ці прямі створюють решітку квадратів або *цілочисельну решітку*. Вершини цих квадратів, тобто точки з цілочисельними координатами, називаються *вузлами цілочисельної решітки*.

Розглянемо деякі задачі з шкільного курсу математики [1].

Задача №1.

Чи існує правильний трикутник з вершинами у вузлах цілочисельної решітки?

Розв'язання. Припустимо, що вершини правильного трикутника ABC розміщені у вузлах цілочисельної решітки. Тоді тангенси усіх кутів, які утворилися при перетені сторін AB і AC з лініями решітки, раціональні. При будь якому положенні трикутника ABC сума або різниця деяких двох таких кутів α і β рівна $60°$. Звідси $\sqrt{3} = tg60° = tg(\alpha \pm \beta) = (tg\alpha \pm tg\beta)/(1 \mp tg\alpha tg\beta)$ – раціональне число. Ми отримали протиріччя.

Задача №2.

Доведіть, що при $n \neq 4$ правильний n – кутник не можна розмістити так, щоб його вершини були у вузлах цілочисельної решітки.

Розв'язання. Для $n = 3$ і $n = 6$ твердження випливає із попередньої задачі, тому будемо вважати, що $n \neq 3,4,6$. Припустимо, що існують правильні n – кутники з вершинами у вузлах цілочисельної решітки ($n \neq 3,4,6$). Серед усіх таких n –кутників можна вибрати той, у якого довжина сторони найменша. (для доведення достатньо врахувати, що якщо a – довжина відрізка з кінцями у вузлах решітки то $a = \sqrt{n^2 + m^2}$, де n і m – цілі числа, тому довжина відрізка з кінцями у вузлах решітки може приймати лише кінцеве число різних значень, які менші за дані.) Нехай $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}$. Тоді $B_1...B_n$ – правильний n – кутник, вершини якого лежать у вузлах цілочисельної решітки, а його сторона менша за сторону правильного n – кутника $A_1...A_n$. Для $n = 5$ це видно з (див. рис.2), а для $n \geq 7$ – із (див. рис.1.) отримали протиріччя із вибором n – кутника $A_1...A_n$.

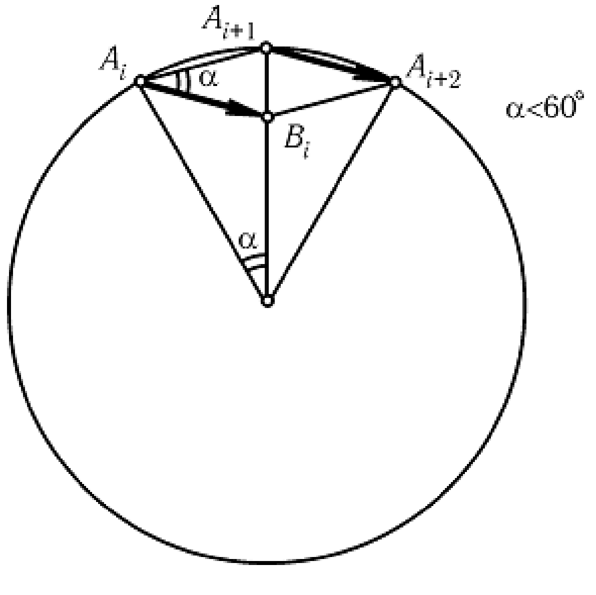


Рис.1

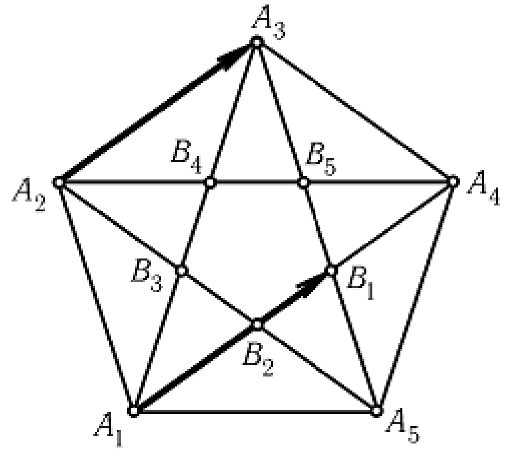


Рис.2

Задача №3.

Чи можна прямокутний трикутник з ціими сторонами розмістити так, щоб його вершини лежали у вузлах цілочисельної решітки, але ні одна з його сторін не проходила по лініях решітки?

Розв'язання. Легко бачити, що трикутник з вершинами в точках з координатами $(0,0)$, $(12,16)$ і $(-12,9)$ має дані властивості.

Задача №4.

Чи існує замкнена ламана із непарною кількістю елементів однакової довжини, всі вершини якої лежать у вузлах цілочисельної решітки?

Розв'язання. Припустимо, що існує замкнена ламана $A_1 \ldots A_n$ із непарною кількістю елементів рівної довжини, всі вершини якої лежать у вузлах цілочисельної решітки. Нехай a_i і b_i – координати проекцій вектора $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ на горизонтальну і вертикальну осі. Позначимо довжину елемента через c. Тоді $c^2 = a_i^2 + b_i^2$, тому c^2 при діленні на 4 дає остачу 0, 1 або 2. Якщо c^2 ділиться на 4, то a_1 і b_i діляться на 2 (це доводиться простим перебором всіх можливих остач, які a_i і b_i дають при діленні на 2). Тому при гомотетії з центром A_1 і коефіцієнтом 0,5 наша ламана перейде у ламану із меншою довжиною елементів, вершини якої також лежать у вузлах решітки. Після деяких таких операцій прийдемо до ламаної, у якої c^2 не ділиться на 4, тобто дає остачу 1 або 2. розіб'ємо ці варіанти, помітивши, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_m = 0$.

1. c^2 при діленні на 4 дає остачу 2. Тоді числа a_i і b_i не парні, тому число $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ не парне і не може дорівнювати нулеві.

2. c^2 при діленні на 4 дає остачу 1. Тоді одне із чисел a_i і b_i не парне, а друге парне, тому число $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_m$ не парне і не може дорівнювати нулеві.

Задача №5.

Вершини опуклого многокутника розміщені у вузлах цілочисельної решітки, причому жодна із сторін не проходить через лінії решітки. Доведіть, що сума довжин горизонтальних відрізків ліній решітки, які замкнені у многокутнику, рівна сумі довжин вертикальних відрізків.

Розв'язання. Доведемо, що кожна із цих сум рівна площі многокутника. Горизонтальні лінії решітки розрізають многокутник на два трикутника з основами a_1 і a_2, a_2 і a_3, ..., a_{n-1} і a_n. Висоти трикутників і трапецій рівні 1, тому сума цих площ рівна $\frac{a_1}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\ldots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}+\frac{a_n}{2}=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Для вертикальних ліній доведення аналогічне.

Задача №6.

Вершини многокутника (не обов'язково опуклого) розміщені у вузлах цілочисельної решітки. В середині многокутника лежить n вузлів решітки, а на границі m вузлів. Доведіть, що його площа рівна $n+m/2-1$ (формула Піка).

Розв'язання. Кожному многокутнику M з вершинами у вузлах цілочисельної решітки поставимо у відповідність число $f(M)=\sum_i \varphi_i/2\pi$, де сумування ведеться по всіх вузлах решітки, які належать M, а кут φ_i визначається наступним чином: $\varphi_i=2\pi$ для внутрішньої точки многокутника, $\varphi_i=\pi$ для граничної точки, яка відрізняється від вершини, і φ_i – кут при вершині, якщо даний вузол – вершина. Легко бачити, що $f(M)=n+\frac{(m-2)\pi}{2\pi}=n+\frac{m}{2}-1$. Залишається перевірити, що число $f(M)$ рівне площі многокутника M.

Нехай многокутник M розрізаний на многокутники M_1 і M_2 з вершинами у вузлах решітки. Тому якщо формула Піка правильна для двох із многокутників M, M_1 і M_2, то вона вірна і для третього.

Якщо M – прямокутник зі сторонами p і q, які напрямлені по лініях решітки, то $f(M)=(p-1)(q-1)+\frac{2(p-1)}{2}+\frac{2(q-1)}{2}+\frac{4}{4}=pq$.

У цьому випадку формула Піка справедлива. Розрізавшипрямокутник M діагоналлю на трикутники M_1 і M_2 і скористаючись тим, що $f(M)=f(M_1)+f(M_2)$ і $f(M_1)=f(M_2)$, легко довести справедливість формули Піка для будь якого прямокутного трикутника з катетами, які напрямлені по лініями решітки. Відрізавши декілька таких трикутників від прямокутника, можна отримати будь який трикутник (див. рис.3).

Для закінчення доведення формули Піка залишається відмітити, що многокутник можна розрізати на трикутники діагоналями, які не перетинаються.

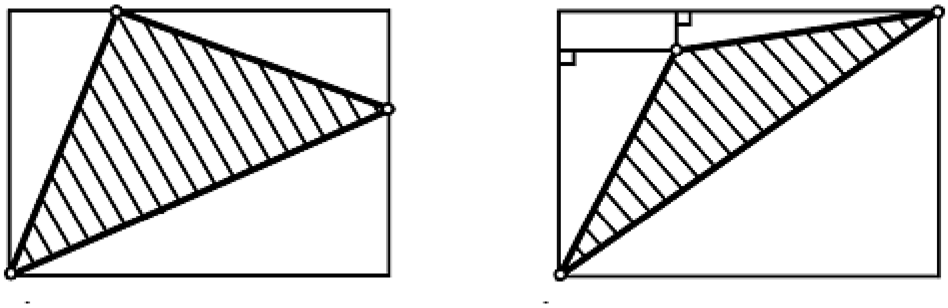


Рис.3

Задача №7.

Вершини трикутника ABC рзміщені у вузлах цілочисельної решітки, причому на його сторонах інших вузлів немає, а в середині є один вузол O. Доведіть, що O – точка перетину медіан трикутника ABC.

Розв'язання. Згідно формули Піка $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COA} = 1/2$, а отже, O – точка перетину медіан трикутника ABC.

Задача №8.

Доведіть, що для будь якого n –кутника існує круг, на якому лежить рівно n цілочисельних точок.

Розв'язання. Доведемо спочатку, що на крузі з центром $A = (\sqrt{2}, 1/3)$ не може лежати більше ніж одна цілочисельна точка. Якщо m і n – цілі числа, то $(m-\sqrt{2})^2 + (n_1 - (1/3))^2 = q - 2m\sqrt{2}$, де q – раціональне число. Тому із рівності

$(m_1 - \sqrt{2})^2 + (n_1 - 1/3)^2 = (m_2 - \sqrt{2})^2 + (n_2 - (1/3))^2$

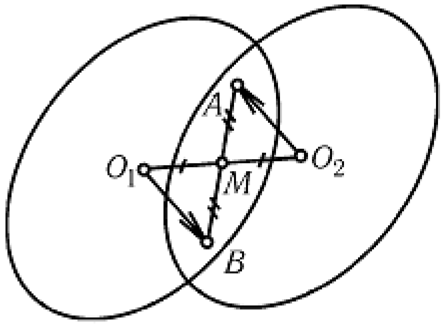
випливає, що $m_1 = m_2$. За теоремою Вієта сума коренів рівняння $(n-(1/3))^2 = d$ рівна $2/3$, тому лише один корінь може бути цілочисельним.

Розмістимо тепер радіуси кругів з центром A, які проходять через цілочисельні точки, в порядку зростання: $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots$ Якщо $R_n < R < R_{n+1}$, то всередині круга радіуса R з центром A лежить рівно n цілочисельних точок.

Задача №9.

Початок координат є центром симетрії опуклої фігури площею більше 4. Доведіть, що ця фігура хоча б одну точку з цілими координатами, відмінну від початку координат. (Мінковський)

Розв'язання. Розглянемо дві опуклі фігури, які отримуються із даної за допомогою перенесення на вектори, координати яких парні. Доведемо, що хоча б дві із цих фігур перетинаються. Початкову фігуру можна помістити у круг радіусом R з центром у початку координат, причому R можна вибрати цілим числом. Візьмемо ті фігури координати центрів яких є не від'ємними числами, які неперевищують $2n$. Таких фігур рівно $(n+1)^2$ штук і всі вони лежать в середині квадрата зі стороною $2(n+R)$. Якби вони не перетиналися, то при будь якому n виконувалася б нерівність $(n+1)^2 S < (n+R)^2$, де S – площа даної



фігури. Але так як $S>4$, то n можна вибрати так, щоб виконувалась нерівність $(n+R)/(n+1)<\sqrt{S/4}$.

Нехай тепер фігури з центрами O_1 і O_2 мають спільну точку A (див. рис.4). Доведемо, що тоді середина M відрізка O_1O_2 належить обом фігурам (зрозуміло, що точка

Рис.4

M має цілі координати). Нехай $\overrightarrow{O_1B}=-\overrightarrow{O_2A}$.

Оскільки дана фігура центрально симетрична, точка B належить фігурі з центром O_1. Ця фігура опукла, і точка A і B належать їй, тому їй також належить середина відрізка AB. Зрозуміло, що середина відрізка AB співпадає із серединою відрізка O_1O_2.

Задача №10.

а) У всіх вузлах цілочисельної решітки, крім одного, в якому знаходиться мисливець, ростуть дерева, стовбури яких мають радіус r. Доведіть, що мисливець не зможе побачити зайця, який знаходиться від нього на відстані більшій за $1/r$.

б) Нехай n – натуральне число. У всіх точках цілочисельної решітки, які розміщені строго в середині кола радіуса $\sqrt{n^2+1}$ з центром у початку координат і відмінним від від початку координат, ростуть дерева раіусу r. Доведіть, що якщо $r<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, то на заданому колі є точка, яку можна побачити із початку координат.

Розв'язання. а) Нехай мисливець знаходиться в точці O, а заєць – в точці A; A_1 – точка, яка симетрична A відносно O. Розглянемо фігуру Φ, яка містить всі точки, відстань від яких до відрізка AA_1 не перевищує r (див. рис.5).

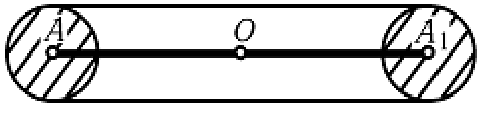


Рис.5

Достатньо довести, що Φ містить хоча б один вузол решітки (якщо вузол попадає у заштриховану область, то точка A належить стовбуру дерева).

Площа Φ рівна $4rh + \pi r^2$, де h – відстань від мисливця до зайця. Якщо $h > 1/r$, то $4rh + \pi r^2 > 4$. За теоремою Мінковського Φ містить цілочисельну точку.

б) Розглянемо прямокутник з вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(n,1)$ і $(n,0)$. Покажемо, що із початку координат можна побачити точку $(n,1)$. Дійсно, відстань від точок $(1,0)$ і $(n-1,1)$ до прямої, яка проходить через точки $(0,0)$ і $(n,1)$, рівна $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Тому дерева, які ростуть у цих точках, не перетинають задану пряму. Решта дерев її також не перетинають.

Цілочисельні решітки допомагають розв’язати не тільки суто математичні задачі, а і задачі практичного спрямування (задача№10 (а, б)). Розв’язання задач на цілочисельні решітки розвиває в учнів логічне мислення, допомагає узагальнити і систематизувати свої знання.

Література

1. Прасолов П. П., Задачи по планиметрии: учебное пособие./ Прасолов П. П. /-М.: МЦНМО: ОАО “Московские учебники”, 2006.- 640с.

2. Бодрик О. Г., Збірник конкурсних і олімпіадних заадач з математики [Текст]/О. Г.Бодрик; ред. О. К. Закусило. – К.: Діалектика, 1995.- 192 с.

3. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад./ Бабинская И. Л./ – М.: Наука, 1975. – 111 с.

4. Березин В. Н., Березина Л. Ю., Никольская Й. Л. Сборник задач для факультативних и внеклассных занятий по математике. – М.: Просвещение. 1985. – 175 с.

5. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Змагання юних математиків України. – Львів: Каменяр, 2006.

Луценко Віктор Юрійович
студент 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

МЕТОДИКА ВВЕДЕННЯ ПОНЯТЬ ГРУПИ, ПІДГРУПИ, ПІВГРУРИ, КВАЗІГРУПИ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ

Засвоєння математичних понять відбувається у процесі аналітико-синтетичної діяльності учнів, спрямованої на виділення суттєвих загальних властивостей певного поняття й усвідомлення несуттєвих властивостей, а також на застосування нового поняття до розв'язування задач. У структурі пізнавальної діяльності учнів щодо засвоєння математичних понять входять як загальні, так і специфічні розумові дії [7].

Поняття квазігрупа вводиться в математиці при вивченні алгебри, а саме вступу до алгебри, при розгляді розділу «Основні алгебри та числові системи». Після розгляду найпростіших понять про алгебраїчні операції та їх властивості, в параграфі «найпростіші поняття про півгрупи, квазігрупи та групи», де розглядаються різні поняття множин, об'єднаних за певними властивостями на основі алгебраїчних операцій.

Спочатку вводиться поняття алгебри та алгебраїчної системи:

Алгебра – непорожня множина, на якій задана деяка сукупність алгебраїчних операцій; при цьому сама множина називається базовою множиною алгебри ((N;+,*),(R;+,-)…).

Алгебраїчна система – непорожня множина, на якій, крім алгебраїчних операцій (які можуть бути і відсутні) задана певна сукупність відношень між елементами цієї множини яка називається базовою множиною алгебраїчної системи. Приклад (Z;+,-,*;<,⋮)) [4].

Для вивчення понять групи, підгрупи, півгрупи, квазігрупи потрібно знати всі означення з допомогою яких і на основі яких вводяться ці поняття. Тому за загально прийнятою схемою введення понять в курсі алгебри далі вводиться поняття типу алгебри.

Типом алгебри, алгебраїчної системи називається послідовність арностей всіх алгебраїчних операцій, відношень, що задані в цій алгебрі, в алгебраїчній системі. Алгебри, алгебраїчні системи називають однотипними, якщо їх типи співпадають.

Далі вводяться поняття підалгебри та підсистеми, як підмножин множин, які є алгеброю та алгебраїчною системою і в яких виконуються всі їх особливості, тобто вони є алгеброю і алгебраїчною системою відповідно.

Зауважимо, що алгебру одного з найпростіших типів – типу T = (2), тобто алгебру з однією бінарною операцією, яку назвали раніше бінарним оперативом. Тоді підалгебру такого бінарного оператива природно називати підоперативом.

Справедлива така теорема:

Непорожній перетин довільної сім'ї підалгебр (підсистем) є підалгеброю (підсистемою) даної алгебри (алгебраїчної системи) [1].

Далі вводяться поняття півгрупи, як алгебри з однією бінарною операцією (нехай ця операція позначається *), яка є асоціативною, тобто задовольняє умові

$$(\forall x, y, z \in G)((x * y) * z = x * (y * z)).$$

Також вводяться різні види півгруп залежно від додавання певних умов до операцій півгруп, наприклад, комутативна або абелева півгрупа це півгрупа на якій задана бінарна операція, яка є комутативною, тобто

$$(\forall g, h \in G)(g * h = h * g) \text{ [2].}$$

Ідемпотентною є півгрупа в якій всі її елементи є ідемпотентами, тобто виконується:

$$(\forall g \in G)(g * g = g).$$

Серед ідемпотентів півгрупи важливу роль відіграють поглинаючий і нейтральний елементи.

Ідемпотентний елемент $0 \in G$ півгрупи G називається **поглинаючим,** якщо для довільних елементів $g \in G$ півгрупи Gвиконуються рівності:

$$0 * g = g * 0 = 0 \text{ [6].}$$

Ідемпотентний елемент $0 \in G$ півгрупи G називається **нейтральним,** якщо для довільних елементів $g \in G$ півгрупи Gвиконуються рівності:

$$e * g = g * e = g$$

Далі вводиться поняття підпівгрупи, так само як і в означенні під алгебри; це підмножина множини, яка є півгрупою, і ця підмножина теж є півгрупою.

На основі цього вводяться ще такі твердження про підпівгрупи:

Якщо $H \subset G$ непорожня підмножина півгрупи $G = (G;*)$, то Hє її підпівгрупою тоді і тільки тоді, коли H – стабільна підмножина відносно операції $*$, тобто

$$H * H \subset H$$

що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню:

$$(\forall g, h \in G)(g, h \in H \Rightarrow g * h \in H),$$

тобто разом з довільними своїми елементами $g, h \in H$ ця підмножина містить результат $g * h$ виконання операції $*$ над елементами g, h [3].

Якщо $(H_i)_{i \in I}$ – сімейство підпівгруп півгрупи $G = (G;\cdot)$, то і їх перетин $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ є підпівгрупою півгрупи G,якщо $H \subset G$ – непорожня підмножина G.

Очевидно, що G– це тривіальна «найбільша» підпівгрупа даної півгрупи $G = (G;\cdot)$.

І потім уже вводиться поняття квазігрупи.

Бінарний оператив G = (G;*) називається квазігрупою, якщо для довільних елементів, $a,b \in G$ рівняння виду $x*a=b$, $a*y=b$ мають єдиний розв'язок відносно невідомих x, y [4].

Зауважимо, що серед латинських квадратів є так звані **магічні квадрати,** в яких суми чисел кожного рядка, стовпця і обох діагоналей рівні між собою, і ці квадрати є таблицями Келі для квазігрупи. Наприклад, такою таблицею для n=4 елементів є наступна:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	1	2
3	4	3	2	1
4	2	1	4	3

Також виділяють в квазігрупі підмножини, які називаються її лівим, середнім, правим ядром [1].

Поняття групи містить ще більше вимог до своєї бінарної операції.

Бінарний оператив G = (G; $*$) називаєтьсяг**рупою**, якщо бінарна операція $*$ асоціативна, існує нейтральний елемент, і до кожного елемента існує симетричний елемент, тобто мають місце такі аксіоми:

$$\begin{aligned}&(\forall x, y, z \in G)((x*y)*z = x*(y*z));\\&(\exists e \in G)(\forall g \in G)(e*g = g*e = g);\\&(\forall g \in G)(\exists \overline{g} \in G)(\overline{g}*g = g*\overline{g} = e).\end{aligned} \quad [5]$$

Далі вводиться поняття підгрупи та різні множини, що вводяться в алгебрі на основі понять груп і підгруп.

Група Gназивається комутативною або абелевою, якщо її операція комутативна, тобто має місце співвідношення:

$$(\forall x, y \in G)(x*y = y*x).$$

Група називається **скінченною (нескінченною),** якщо множина її елементів скінченна (нескінченна); для скінченної групи кількість її елементів називають **порядком групи**[2].

Підмножина $H \subset G$ групи G = (G; $*$) називається **підгрупою цієї групи**G, якщо відносно групової операції $*$ в G підмножина H теж є групою.

На основі цього вводяться ще такі твердження про підгрупи:

Для того, щоб підмножина $H \subset G$ групи G = (G; $*$) була її підгрупою, необхідно і достатньо, щоб Hбула такою непорожньою підмножиною, яка задовольняла би наступним співвідношенням:

$$(\forall x, y \in G)(x, y \in H \Rightarrow x*y \in H);$$

$$\left(\forall x \in G\right)\left(x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H\right)$$

які відповідно означають, то ця не порожня підмножина замкнена відносно операції * і оберненості елементів [4].

Доцільним є пояснення учням чи студентам того, що при розгляді цих множин, умови накладаються не на саму множину, а на операцію, введену в ній.

Така система введення понять є загально прийнятою і доцільною. Адже наступні поняття вводяться на основі попередніх і з більшою кількістю властивостей для бінарної операції, визначеної в цих поняттях. За рахунок токої системи виконуються всі необхідні вимоги до введення нових понять, наведені в книзі.

Але була б доцільною і інша система. В якій вводились би поняття в такій послідовності:

Алгебра, алгебраїчна система, підалгебра, підсистема, як основні множини, в яких майже не винесені особливі вимоги до операцій і які є такими, які використовуються в школі.

Півгрупи, підпівгрупи, як наступного виду множин, в яких до операцій вже використовуються певні вимоги (асоціативність).

Групи та підпівгрупи, як множини, в яких використовуються додаткові умови до операцій на основі тих, що задані в півгрупі та підпівгрупі (асоціативність, існування нейтрального елемента та нейтрального). Такі умови для операції є сприйнятними при навчанні, адже такі операції розглядаються при навчанні в школі з самого початку.

А далі вводити поняття квазігрупи, в якій вже потрібно використовувати нестандартні операції, такі як додавання і множення, а також щоб використовувались умови, задані в понятті квазігрупи. Звичайно в такій системі понять поняття квазігрупа зумовлює відкидання деяких умов, заданих для операції в групі, але воно об’єднує поняття півгрупи і групи та відмежовує поняття людей, що вивчають цей курс, про звичайні математичні операції від більш складних.

Література

1. Гарвацький В.С., Калашников І.В., Кулик В.Т. Вступ до алгебри частина друга. – В. : Вінниця, 2007. – 196с.
2. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1974. – Ч.І. – 446 с.
3. Кулик В.Т., Рокіцький І.О. Алгебра. – Вінниця: ВДПУ, Глобус – Прес, 2005. – 264 с.
4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979. – 560с.
5. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: ФМ, 1962. – 396 с.
6. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, 1974. – 384 с.

7. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. Спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

Майданюк Олена Леонідівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ФОРМУВАННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ

Кожна наука і кожний навчальний предмет оперує певною сукупністю властивих їм понять.

У математичних поняттях відображаються в основному просторові форми і кількісні відношення матеріального світу. Однак вони не просто взяті з навколишнього світу, а утворені в результаті ідеалізації – мисленого утворення абсолютно точних, досконалих об’єктів.

У процесі вивчення математики учням доводиться засвоювати кілька сот понять Учитель насамперед повинен дбати не стільки про те, щоб учні запам’ятали означення, скільки про те, щоб вони його розуміли. Учень повинен знати істотні властивості виучуваного поняття, уміти навести приклади відображуваних у цьому понятті об’єктів, а також знати його загальновживану назву. Тільки в цьому разі можна вважати, що учень засвоїв поняття.

Відповідно до сучасної програми з математики основи фінансової математики учні вивчають ще починаючи з 6-го класу темою «Відношення і пропорції» і закінчуючи темою «Елементи прикладної математики» у 9 класі.

Вивчаючи ці теми учні повинні ознайомитися з наступними поняттями:

- Відношення;
- Випадкова подія;
- Ймовірність випадкової події;
- Пряма пропорційна залежність;
- Пропорційні змінні;
- Пропорція;
- Круговий сектор;
- Частота;
- Середнє значення статистичних вимірювань.

Ознайомлювати учнів з тим або іншим поняттям можна по-різному, залежно від самого поняття і від підготовки учнів. У багатьох випадках, щоб учні краще розуміли, треба починати пояснення нового поняття з розгляду конкретних прикладів, а вже тільки після цього давати його означення. В інших випадках можна зразу сформулювати означення, а потім ілюструвати його конкретними прикладами. Перший із цих способів введення поняття називають конкретно-індуктивним, а другий – абстрактно-дедуктивним.

Суть абстрактно-дедуктивного методу навчання полягає в тому, що під час вивчення нового матеріалу вчитель відразу сам наводить означення понять, що вводяться, а потім наводить конкретні приклади об’єктів, що належать до цих понять.

Конкретно-індуктивний метод навчання протилежний абстрактно-дедуктивному. За цього методу пояснення нового матеріалу починається з розгляду прикладів. Використовуючи приклади, учні мають можливість виявити істотні властивості поняття, що вводиться. Це допомагає самостійно чи за допомогою вчителя сформулювати означення поняття

Нехай, наприклад, треба пояснити учням поняття «пропорційні змінні». У цьому разі починати з означення недоцільно, бо учні не розуміють його. Краще починати пояснення з розгляду конкретних прикладів – тих, що є в підручнику або інших. Можна спочатку розглянути, наприклад, таблицю 1 витрати бензину для автомобіля «Волга».

Таблиця 1

Пройдена відстань, км	0	10	20	30	40	50	60
Витрати бензину, л	0	1,2	2,4	3,6	4,8	6	7,2

Тут маємо дві змінні: пройдена відстань і витрата бензину. Кожному значенню першої змінної відповідає певне значення другої. Знайдімо частку від ділення яких-небудь двох чисел першого рядка цієї таблиці і двох відповідних чисел другого рядка.

$40 км : 10 км = 4$ і $4{,}8 л : 1{,}2 л = 4$

Ці частки рівні, отже, маємо пропорцію:

$40 км : 10 км = 4{,}8 л : 1{,}2 л.$

Так само: $60 км : 30 км = 7{,}2 л : 3{,}6 л$,

$20 км : 40 км = 2{,}4 л : 4{,}8 л$ і т.д.

Взагалі, якщо взяти будь-які два значення однієї з цих змінних і відповідні їм значення другої, то з них можна скласти пропорцію. Тому такі дві змінні називають пропорційними.

У розглядуваному випадку сформулювати означення повинен спочатку сам учитель, бо воно для учнів порівняно важке.

Вводячи поняття абстрактно-дедуктивним і конкретно-індуктивним методом, вчителеві легко керуватися таблицями 2 і 3.

Введення поняття конкретно-індуктивний методом

Таблиця 2

№ п.п.	Етапи вивчення поняття	Зміст етапів вивчення поняття
1.	Аналіз прикладів	Вчитель пропонує розв’язати задачу: Учень полюбляє пити 250 г чаю з 3-ма ложечками цукру (30 г). Визначити, скільки хлопчику потрібно буде всипати цукру на 400 г чаю, щоб смак не змінився. Число $\frac{30}{250} = \frac{3}{25}$ показує, яку частину від маси напою становить маса цукру. А якщо учень хоче випити 400 г чаю, то, щоб він мав звичний смак, у ньому має бути розчинено

		$400 \cdot \frac{3}{25} = 48$ (г) цукру.
2.	Введення терміна	Запишемо у відсотках: $\frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\%$. Число 12 показує, скільки відсотків у випитому чаї становить цукор. Це число називають ***відсотковим відношенням*** маси цукру до маси чаю.
3.	Виявлення суттєвих властивостей поняття.	Учитель пропонує учням запитання: -Які властивості є суттєвими для відсоткового відношення? Відповідь: - Відношення двох чисел виражене у відсотка. - Відношення двох чисел – це частка від ділення першого з них на друге
4.	Формулювання означення	Відсоткове відношення показує, скільки відсотків одне число становить від другого.
5.	Розв’язування вправ на підведення під поняття	Вчитель пропонує самостійно розв’язати задачу: У класі 12 дівчаток. Знайти відсоткове відношення кількості дівчат до кількості учнів, якщо у класі навчається 30 дітей.

Введення поняття абстрактно-дедуктивним методом

Таблиця 3

№ п.п.	Етапи вивчення понять	Зміст етапів вивчення понять
1.	Введення терміна.	Оскільки $3{,}6:0{,}9=4$ і $1{,}2:0{,}3=4$, то справедливою є рівність $3{,}6:0{,}9=1{,}2:0{,}3$, яку називають пропорцією.
2.	Формулювання означення поняття.	Рівність двох відношень називають пропорцією.
3.	Розглядаються приклади об’єктів, які належать даному поняттю.	Пропорцію можна записати: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Числа a і d - крайні члени пропорції, b і c - середні члени пропорції.
4.	Виявляються суттєві і несуттєві властивості.	Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх членів.

Вводячи нове поняття, слід ввести і термін – його назву. Кожний учитель, вводячи новий термін, повинен написати його на дошці, правильно прочитати, поставити наголос. У багатьох випадках бажано навести й етимологію (походження) розглядуваного терміна і символічного позначення. Розглянемо приклад введення поняття «відсоток».

Приклад.

Відсотком називається сота частина числа, тобто 1/100 або 0,01. Позначають відсоток знаком «%».

Як з'явилась позначка відсотка?

Позначка відсотка з'явилася в результаті друкарської помилки: укладач переставив цифри в числі 100. Ось так – 010. Перший нуль трохи підвели вгору, другий - опустили, одиницю трохи спростили – ось і вийшов цей знак. Це одна з легенд, але існують й інші.

Відсотки були відомі індусам в 5 столітті.

У Європі десяткові дроби з'явилися на 1000 років пізніше. Їх увів Бельгійський учений Симон Стевін. Він же в 1584 році вперше опублікував таблицю відсотків.

Означає, 1 % - це одна сота частка. Відсоток записується так: 1%, 5%

1% = 0,01

Досвід показує, що як би добре не пояснював вчитель, деякі учні нерідко допускають помилки в розумінні понять і в формулюваннях їх означень. Наведемо найбільш характерні помилки:

1. Відсутність в означенні деяких істотних ознак.
2. Наявність в означенні зайвих ознак чи умов.
3. Заміна потрібного родового поняття іншим.
4. Пропуск родового поняття.

Виправляти подібні «означення» найкраще за допомогою контр прикладів, тобто наводити такі об’єкти, які задовольняють сформульовані «означення», але які не входять до обсягу даного поняття.

Література

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посіб. / Г.П. Бевз – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.
2. Мерзляк А.Г. Математика: Підруч. для 6 класу. / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір – Х.: Гімназія, 2006 – 304 с.
3. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. / З.І. Слєпкань – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.

Матковська Інна Анатоліївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки«Математика»

ПРО ФОРМУВАННЯ ІНВЕРСНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

У шкільному курсі планіметрії розглядають два види перетворень площини: рух і перетворення подібності (гомотетії). Як гомотетія, так і рух є лінійними перетвореннями, тобто такими, за яких прямі переходять у прямі. Або, іншими словами, в декартовій системі координат ці перетворення задаються лінійними рівняннями. Безумовно, клас лінійних перетворень площини набагато ширше і не вичерпується лише рухом і гомотетією. Проте іноді буває корисно розглянути і нелінійні перетворення. При таких перетвореннях пряма може перейти в будь-яку криву. В середній школі на уроках геометрії ми звикли зустрічатися з однією - єдиною кривою - колом. Не будемо порушувати цю традицію, що йде ще від Евкліда, і розглянемо чудове перетворення площини, яке називається інверсією. При інверсії деякі прямі переходять в кола.

Розглянемо на площині коло ω з центром O і радіусом R і довільну точку A_1, відмінну від центру O.

Дамо наступне означення (рис. 1).

Точка A_2 називається *симетричною* точці A_1 відносно кола ω з центром O і радіусом R, якщо точка A_2 лежить на промені OA_1 і $OA_1 \cdot OA_2 = R^2$.

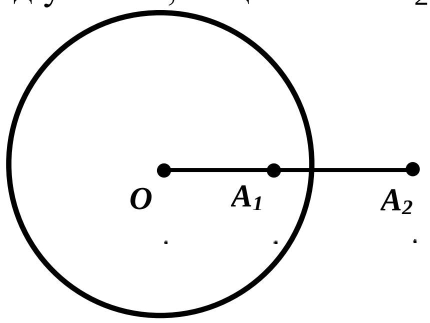


Рис. 1

З визначення випливають такі твердження:

1. Для кожної точки площини, окрім центру O, існує єдина точка, симетрична їй відносно кола ω.

2. Для центру O симетричної точки не існує.

3. Якщо точка A_2 симетрична точці A_1 відносно кола ω, то і точка A_1 симетрична точці A_2 відносно кола ω.

4. Кожна точка, яка лежить на колі ω, симетрична сама собі.

5. Якщо A_1 і A_2 - різні симетричні точки, то одна з них лежить в колі ω, а інша - зовні.

Тепер можна розглянути відображення площини на себе, яке переводить будь-яку точку, крім центру O, в точку, симетричну їй відносно кола ω. Це перетворення і називається *інверсією* площини відносно кола ω. Питання про долю центра кола O залишимо поки відкритим. Будемо розглядати площину з виколотою точкою O. На такій «проколеній площині» інверсія повністю і однозначно визначена для всіх точок. Наочно уявити собі інверсію можна як результат «вивертання» площини через коло ω. Всі точки кола інверсії залишаються на місці. Всі точки, що знаходилися в середині кола ω, опиняться зовні, а всі точки, які знаходятьсяззовні кола, попадають всередину.

Якщо точки A_1 і A_2 міняються при цьому місцями, то з означення симетричних точок $OA_1 \cdot OA_2 = R^2$, тобто $OA_2 = \frac{R^2}{OA_1}$. Виходить, чим більша величина OA_1, тим менша величина OA_2 і навпаки - чим ближчеточка розташована до центру інверсії, тим далі її образ від цього центру. Якщо присувати точку A_1 все ближче і ближче до центру O, тим самим наближаючи величину OA_1 до нуля, то величина OA_2 буде необмежено зростати і точка A_2 «піде в нескінченність» (рис. 2).

Доречно також пояснити, чому ми називаємо точки A_1 і A_2 симетричними. Для цього розглянемо таку точку A_1, що OA_1 мало відрізняється від R, тобто точку, що лежить близько до кола інверсії. Її образ A_2 також лежить недалеко від кола інверсії, але по іншу сторону. Якщо при цьому зробити радіус R дуже великим (як кажуть, досить великим), щоб видима частина кола ω стала вельми схожою на пряму (так само як видима нами частина земної поверхні дуже схожа на площину), то точки A_1 і A_2 стануть «Вельми схожі» на точки, симетричні щодо цієї «Майже прямій» (рис. 3).

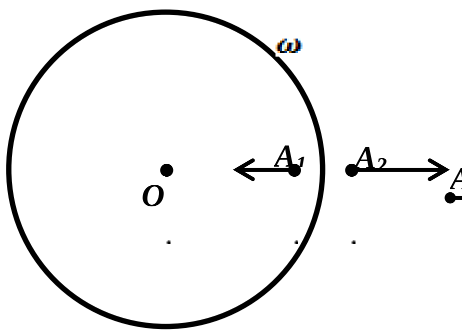


Рис. 2

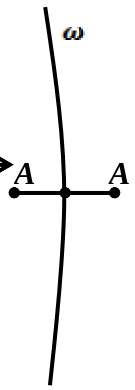


Рис. 3

Побудова

З визначення симетричних точок випливає, що для будь-якої точки площини (слова «крім центру O» будемо надалі пропускати) однозначно визначена симетрична їй точка. Хотілося б, однак, не просто бути впевненим у її існування, а й вміти досить швидко її побудувати циркулем і лінійкою.

Нехай точка A лежить зовні кола ω з центром O, AM та AN - дотичні до кола ω, прямі OA і MN перетинаються в точці B. Тоді точки A і B симетричні відносно кола ω (рис. 4).

З подібності прямокутних трикутників OMA і OBM слідує пропорція $\frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OM}$, або $OA \cdot OB = OM^2$.

Тепер можна побудувати точку, симетричну будь-якій точці площині відносно даного кола. Це легко зробити відносно даного кола як для точки A, розташованої всередині кола, так і для точки B, розташованої поза нею.

Однак незважаючи на простоту побудови, вона має певний недолік. Точки A і B названі симетричними відносноколa, а сама побудова в деякому сенсі «несиметрична». Дійсно, якщо точка A лежить зовні кола ω, то для побудови треба спочатку провести дотичну, а потім опустити на пряму OA перпендикуляр з точки дотику. Якщо ж дана точка лежить в колі, то побудова ведеться у зворотному порядку: спочатку - перпендикуляр, потім - дотична. Хотілося б знайти таку побудову, щоб воно діяло абсолютно однаковим чином, незалежно від того, як саме розташована початкова точка: усередині або за колом. Це побудова слідує з наступного завдання.

Нехай K, M, N -довільні точки на колі, p -серединний перпендикуляр до відрізка MN. Тоді прямі KM і KN перетинають пряму p в точках A і B, симетричних відносно кола (рис. 5).

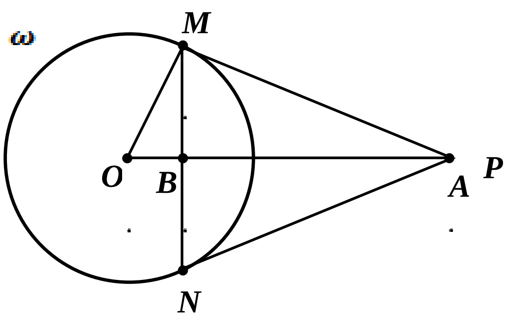


Рис. 4

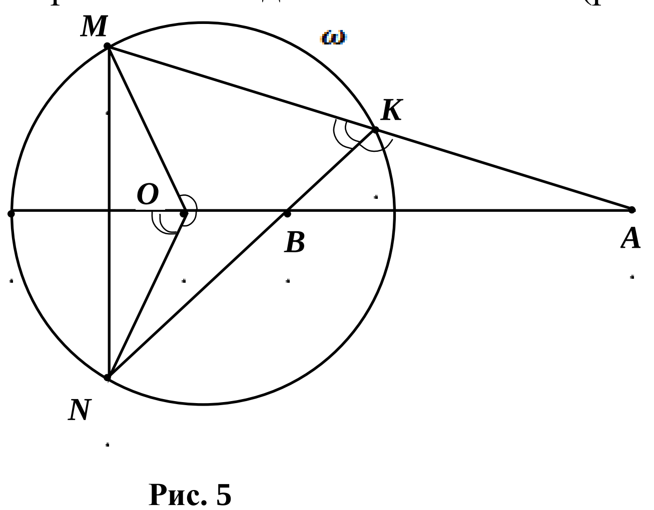


Рис. 5

Розв'язання. Нехай P - точка перетину прямої p з колом, яка лежить поза відрізка AB. Так як $\angle MKN$ - вписаний, а $\angle PON$ дорівнює половині відповідного йому центрального кута, отже, $\angle MKN = \angle PON$ і $\angle BKA = \angle BON$. Тому в трикутниках ONB і KAB всі кути відповідно рівні.

Отже, рівні і відповідні кути трикутників BON і MOA. З подібності трикутників BON і MOA отримуємо: $\frac{OA}{ON} = \frac{OM}{OB}$, $OA \cdot OB = OM \cdot ON = R^2$.

Використовуючи отриманий результат, будуємо точку, симетричну даній точці A, наступним чином (рис. 6):

1) проведемо пряму OA і довільну січну, що проходить через точку A і перетинає коло ω в точках M і K;

2) опустимо з точки M перпендикуляр на пряму OA і продовжимо його до перетину з колом в точці N.

Пряма KN перетинає OA в шуканої точці B. Легко бачити, що якщо на нашому малюнку поміняти місцями літери A і B, а також M і N, то опис побудови не зміниться (рис. 7).

Послідовність дій залишиться тією ж самою, оскільки довільну січну KM можна провести як з внутрішньої точки кола, так і з зовнішньої, а для побудови байдуже - лежить початкова точка A на відрізку KM чи на його продовженні. Зауважимо також, що перший спосіб побудови (рис. 4) є виродженим випадком другого, при якому точки M і K збігаються, а січна перетворюється на дотичну. Якщо спробувати провести всі побудови циркулем і лінійкою, то переваги другого способу стають очевидними. Дійсно, відрізок MN можна замінити відповідною дугою кола з центром, що лежить на прямій OA. Тоді для побудови треба провести всього три прямі і одне коло.

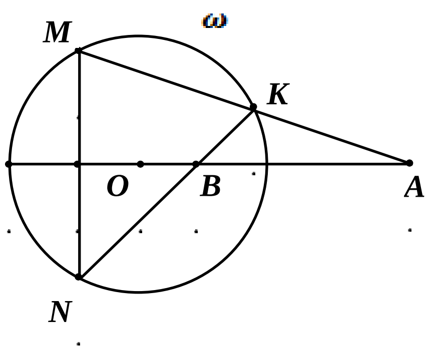


Рис. 6

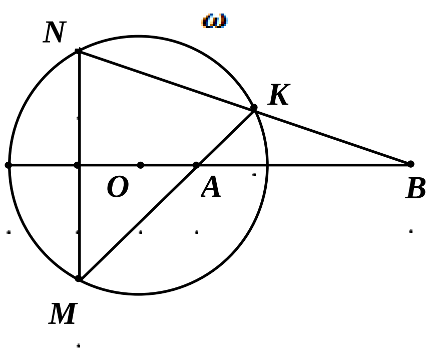


Рис. 7

Властивості інверсії

До цих пір ми застосовували інверсію лише до єдиної точки. Подивимося тепер, що станеться, якщо застосуватице перетворення до складнішого об'єкту. Природно спробувати подіяти інверсією на пряму. Якщо ця пряма проходить через центр інверсії, то точки, що знаходилися всередині кола, опиняться зовні, і навпаки:точки, що знаходилися поза колом, опиняться всередині, але в цілому пряма перейде сама в себе. Набагато цікавіше випадок, коли початкова пряма не проходить через центр інверсії.

Основна лема. *Нехай* A_1, A_2 *і* B_1, B_2 *- пари різних точок, симетричних відносно кола* ω *з центром* O. *Тоді* $\angle OA_1B_1 = \angle OB_2A_2$ (рис. 8).

Теорема 1. *Пряма, яка не проходить через центр інверсії, переходить в коло, що проходить через центр інверсії.* (рис.

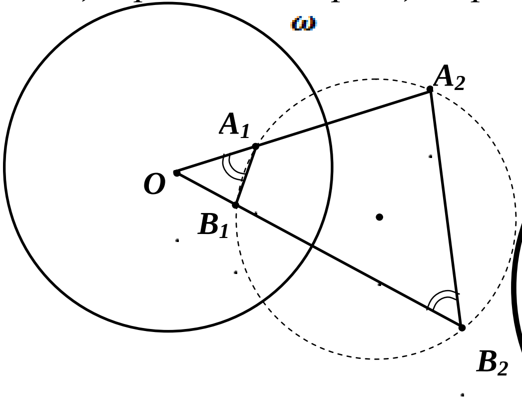
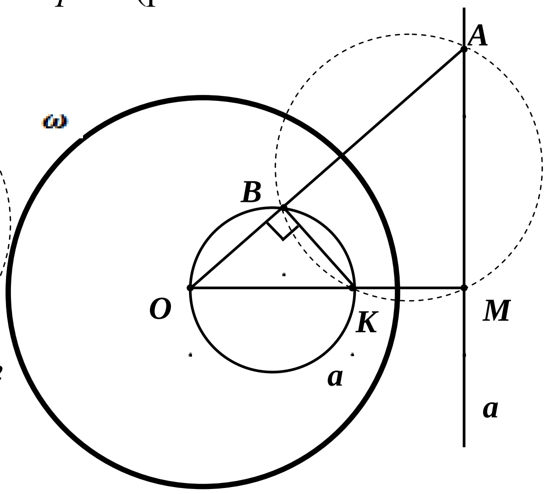


Рис. 8



9)

Рис. 9

Доведення. Опустимо із центра O перпендикуляр OM на дану пряму a і розглянемо точку K, симетричну точці M відносно кола інверсії. Побудуємо коло α з діаметром OK. Розглянемо довільну пряму, не збігається з OK, що проходить через центр O і не паралельний прямий a. Нехай вона перетинає коло ω в точці B, а пряму a - в точці A (рис. 9).

Кут при вершині B прямий, оскільки він спирається на діаметр. З подібності прямокутних трикутників OBK і OMA отримуємо $OA\cdot OB = OM\cdot OK$. Оскільки точки M і K з побудови симетричні, $OA\cdot OB = OM\cdot ON = R^2$. Отже, точки A і B також симетричні відносно кола інверсії. Отже, пряма a і коло ω переходять один в одного при інверсії.

Теорема 2. *Коло, що не проходить через центр інверсії, переходить в коло, коло не проходить через центр інверсії* (рис. 10).

Доведення. Розглянемо інверсію відносно кола ω і кола α_1, яка не проходить через центр інверсії O. Проведемо пряму через центри кіл α_1 і ω. Ця пряма перетинає коло α_1 в діаметрально протилежних точках B_1 і C_1. Побудуємо точки B_2 та C_2, відповідно симетричні точкам B_1 і C_1 відносно кола ω, і розглянемо коло α_2, побудоване на діаметрі B_2C_2. Доведемо тепер, що точки, симетричні точкам кола α_1, розташовані на колі α_2, і навпаки. Візьмемо на колі α_1 довільну точку A_1 і побудуємо точку A_2, симетричну точці A_1 відносно кола ω. Тепер застосуємо основну лему до другої четвірки точок A_1, A_2, B_1, B_2 і до A_1, A_2, C_1, C_2. Перша четвірка дає рівність кутів $A_1B_1C_1$ і B_2A_2M, а друга $A_1C_1B_1$ і C_2A_2O.

Трикутник $A_1B_1C_1$ є прямокутним, оскільки B_1C_1 - діаметр кола, отже, $\angle A_1B_1C_1 + \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$, отже, $\angle B_2A_2M + \angle C_2A_2O = 90^\circ$. З останньої рівності випливає, що $\angle B_2A_2C_2$ - прямий і, отже, точка A_2 розташована на колі α_2 з діаметром B_2C_2, що потрібно було довести.

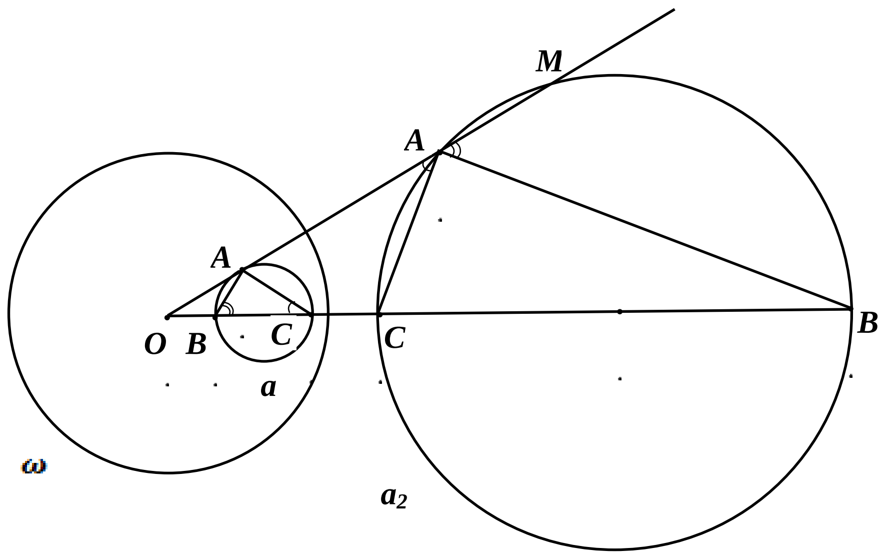


Рис.

Література

[1] Жижилкин И. Д. Инверсия. – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 72 с.

[2] Боровик В. Н. Подібність. Інверсія // Математика: Посіб. Для факультативних занять у 9 класі. - К.: Освіта, 1993.- С. 110-136.

[3] Боровик В. Н., Вивальнюк Л. М., Мурач М. М. та ін. Математика: Посіб. для факультативних занять у 8 класі. – К.: Рад. шк., 1981. – 208 с.

[4] Боровик В. Н., Зайченко І. В., Мурач М. М., Яковець В. П. Геометричні перетворення площини: Навчальний посібник. Частина 3: Подібність і гомотетія. Інверсія. – Ніжин, 2002. – 277 с.

[5] Математика: Посіб. Для педагогічних інститутів / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, В. М. Костарчук та ін. – К.: Вища школа, 1980. – 400 с.

[6] Математика: Посіб. для факультативних занять у 8 класі / В. М. Костарчук, В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк та ін. - К.: Рад. шк., 1969. – 312 с.

[7] Математика: Посіб. для факультативних занять у 9 класі /І. Ф. Тесленко, М. Б. Гельфанд, Д. М. маєргойз, Г. М. Скобелев. – К.: Рад. шк., 1972. – 190 с.

[8] Математика: Посіб. для факультативних занять у 10 класі / В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач та ін. – К.: Рад. шк., 1981. – 208 с.

[9] Математика 10: Посіб. Для шкіл та класів з поглибленим вивченням математики / Л. М. Вивальнюк, О І. Соколенко, М. М. Мурач, / В. Н. Боровик та ін. – К.: Освіта, 1998. – 302 с.

[10] Тесленко І. Ф. метод інверсії. – 3-тє вид. – К.:1976. – 70 с.

Миколайчук Юлія Володимирівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ МЕТОДИ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ АЛГЕБРАЇЧНОЇ ОПЕРАЦІЇ НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ У СТАРШИХ КЛАСАХ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

Взагалі факультативні курси розраховані на тих учнів, які добре встигають з математики. Проте як виняток можна дозволити відвідувати факультатив і тим учням, хто ще не досяг високих оцінок, але має потенціальні можливості для цього. Залучати до факультативів і гуртків доцільно, розв'язуючи на звичайних уроках цікаві задачі і проблеми, які потребують розширення знань і умінь. Учням пропонується розширити їх на факультативних заняттях.

Не можна механічно переносити методи, прийоми, організаційні форми і засоби навчання математики в звичайних класах на факультативне навчання. Враховуючи, що учні на факультативних заняттях мають більше можливостей у просуванні в навчанні і стійку цікавість до математики, тут мають переважати методи проблемного навчання (проблемний виклад, евристичні бесіди, дослідницький метод).

На факультативних заняттях ефективною є лекційно-практична система навчання, в якій належне місце відводиться семінарам. [2]

Актуальність дослідження. На сучасному етапі розвитку України у системі суспільно-педагогічних цінностей відбулися значні зміни. Збільшуючи обсяг знань, якими школярі повинні оволодіти, змушуючи їх засвоювати, школа виховує споживача, втрачаючи при цьому творця й діяча. Такий підхід до виховання особистості сприяв тому, що значна кількість молодих людей виявилася не готовою до самостійного життя у складних і суперечливих умовах сьогодення. Вони недостатньо підготовлені до узагальнення отриманої інформації, перетворення її на гнучкі системи, які можуть бути застосовані в різних життєвих ситуаціях, фактично не підготовлені до творчого аналізу ситуації.

Дослідженню проблеми факультативного навчання присвятили свої праці В. О. Гусєв, В. О. Дедух , Д. А. Епштейн, І. Д. Звєрєв, В. І. Кизенко, М. І. Кондаков, Н. М. Крюкова, А. В. Мордовська, С. М. Новіков, М. А. Прокоф'єв, В. І. Ревякіна, О. А. Саркісян, Е. М. Соф'янц, О. М. Топузов, К. Р. Тувіке та інші. Змістом факультативного навчання математики займались В. М. Боровик, Л. М. Вивальнюк, І. Кадиров, Л. М. Лоповок, І. Л. Нікольська, З. І. Слєпкань, І. Ф. Тесленко, В. В. Фірсов, С. І. Шварцбурд та інші.

Об'єктом статті є процес навчання учнів старшої школи на факультативних заняттях з математики.

Предметом статті є методична система формування поняття «алгебраїчна операція» на факультативних заняттях з математики.

Метою статті є розглянути різні способи введення поняття «алгебраїчна операція» на факультативних заняттях у старших класах з поглибленим вивченням математики.

Кожна математична теорія вивчає множини, на яких введенні певні відношення. Алгебра вивчає множини, на яких визначені відношення, що мають назву алгебраїчних операцій. З прикладами алгебраїчних операцій ми зустрічалися ще в шкільному курсі математики, а також вивчаючи інші розділи вищої математики. Прикладами алгебраїчних операцій у шкільному курсі є додавання і множення чисел, многочленів, алгебраїчних дробів, додавання векторів площини, додавання матриць, об’єднання і переріз множин, кон’юнкція і диз’юнкція висловлень, додавання і множення функцій, композиція відображень тощо. Ці операції виконуються над парами чисел, многочленів, векторів, функцій.

Розглянемо такі методи введення поняття «алгебраїчна операція».

Абстракто-дедуктивний метод.[2]

Часто факультативні заняття проводяться за таким планом:

1. Знайомство з матеріалом (доповідає вчитель чи хтось з учнів).
2. Самостійна робота учнів із завданнями теоретичного та практичного характеру (завдання даються всім однакові).
3. Колективне обговорення розв'язків задач, порівняння способів розв'язків, узагальнення пошуку нових шляхів, перенесення засвоєних прийомів та. методів на інший учбовий матеріал програмного чи факультативного курсу з математики або суміжних предметів.
4. Розв'язування задач підвищеної складності.

Тому на першому етапі плану знайомство з матеріалом учні записують тему «Алгебраїчні операції та їх властивості», а потім записують наступний план проведення факультативу:

1. Означення поняття «алгебраїчна операція».
2. Найпростіші алгебраїчні операції.
3. Властивості алгебраїчних операції.

А тоді розглядаючи означення поняття «алгебраїчна операція» вчитель диктує учням саме означення і вони записують його, тобто нехай маємо деяку множину елементів A, тоді n-арною алгебраїчною операцією f на множині A – є відображення (функція) f прямого добутку n елементів даної множини в саму множину $f : A^n \to A$.[1]

Метод евристичної бесіди.

Даний метод полягає в тому, що вчитель заздалегідь готує систему запитань, відповідаючи на які учні самостійно формулюють означення поняття «алгебраїчна операція».

Оскільки на факультативних заняттях учні сильні і проявляють гарний потенціал до математики то можна евристичну бесіду провести в такому вигляді. Учні роблять велике коло всередині якого знаходиться вчитель. Він повідомляє їм тему заняття, а потім вчитель поступово задає ряд запитань.Наприклад:

1. Що вивчає алгебра?
2. Що ми розуміємо під множиною?
3. Що ви розумієте під поняттям алгебраїчна операція?
4. Чи вичали ви при вивченні множин якісь операції?
5. Чи можна операції поділити на складні і прості?
6. Що таке впорядкована пара?
7. Що ми розуміємо під прямим добутком?
8. Чи є декартів добуток операцією?
9. Скільки елементів може мати деяка множина?
10. Що ми розуміємо під відображенням елементів однії множини в іншу?
11. Що ми розуміємо під відображенням елементів певної множини в себе?
12. Що ми розуміємо під поняттям «унарна»? А «бінарна»?
13. Чи можна деякий виділений елемент в множині назвати операцією?

Після ряду даних запитань учитель разом з учнями формулює поняття алгебраїчної операції, як відображення прямого добутку *n* елементів даної множини в саму множину $f : A^n \to A$.

Конкретно-індуктивний метод навчання.

Вчитель задає ряд завдань, які можуть бути записані або на дошці, або на індивідуальних картках, або відображені на інтерактивній дошці за допомогою проектора. Вони можуть бути на такі поняття, як «впорядкована пара», прямий добуток, відображення. Використовуючи дані приклади, учні мають можливість виділити суттєві ознаки поняття, що вводиться. Це допомагає самостійно чи з допомогою вчителя сформулювати означення поняття. Наведемо приклади таких завдань:

№1° Скільки впорядкованих пар можна утворити з елементів одноелементної множини $\{a\}$; двохелементної множини $\{b;c\}$?

№2° Дано множини: $A=\{1;4;5\}$, $B=\{3;1\}$. Знайдіть декартовий добуток $A\times B$ і $B\times A$, і покажіть, що $A\times B\neq B\times A$.

№3° Нехай $X=\{1;2;3\}$. Знайдіть $X\times X$. Зобразіть кожну впорядковану пару графічним представленням.

№4° Чи вірне твердження, що множина точок у прямокутній системі координат на площині є геометричною ілюстрацією декартового добутку?

№5* Знайдіть декартовий добуток $X\times Y$ і дайте його графічне зображення, якщо $X=\{x|x\in R\}, Y=\{y|\,0\le y\le 1\}$.

№6 Нехай А={m;n;p;q}, В={0;1}. Відповідність між множинами А та В задано за допомогою пар (m;0), (n;0), (p;l), (q;l). Зобразіть стрілками дану відповідність. Чи є ця відповідність функцією?

№7°. Які з відповідностей є функціями (див рис. 1, 2)?

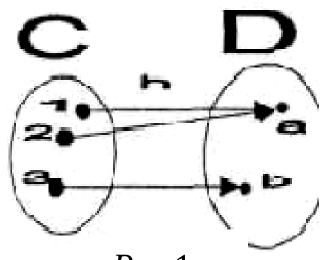


*Рис.*1

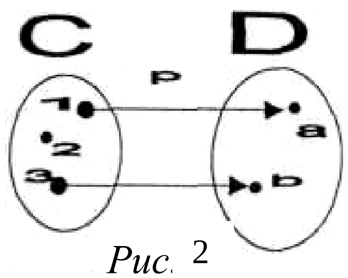


Рис. 2

№8°. Кожному учневі вашого класу, який писав останню контрольну роботу по математиці, відповідає оцінка, яку він отримав за цю роботу. Чи є вказана відповідність між множиною учнів вашого класу, які писали цю контрольну роботу, і множиною оцінок функцією? [1]

Проблемний виклад.

Проблемний виклад як метод навчаня математики полягає в тому, що, пояснюючи навчальний матеріал, учитель сам висуває проблему і, звичайно, як правило, сам їх розв’язує. Однак постановка проблем посилює увагу учнів, активізує процес сприймання і пояснення того, що пояснює вчитель. Так при вивченні поняття «алгебраїчна операція», вчитель на кожному етапі висуває проблему, наприклад, – «Що ми називаємо відображенням? Як воно позначається?» або «Чи є різниця між прямим та декартовим добутком множин?» та інші.

Таким чином, ми показали що поняття «алгебраїчна операція» можна ввести різними методами, зокрема такими як: абстрактно-дедуктивним, методом евристичної бесіди, конкретно-індуктивним та методом проблемного викладу. Але введення даного поняття можна провести також за допомогою інших методів, зокрема таких як метод доцільних задач та дослідницьким методом.

Література

1. Гарвацький В. С.Вступ до алгебри. Ч. 2 / В. С. Гарвацький, І. В. Калашніков, В. Т. Кулик. – Вінниця: ВДПУ, 2007. – 257 с.

2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – Київ: «Зодіак – ЕКО», 2000. – 257 с.

Наумович Людмила Юріївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

КОНГРУЕНЦІЇ n-ГО СТЕПЕНЯ ЗА СКЛАДЕНИМ МОДУЛЕМ

1. Зведення конгруенції за складеним модулем до системи конгруенцій за попарно простими модулями.

Покажемо, що розв'язання конгруенції за складеним модулем можна звести до розв'язання конгруенції за простим модулем. Попередньо доведемо наступну теорему.

Теорема 1. Нехай складений модуль M конгруенції

$$f(x) \equiv 0(\mathrm{mod} M) \qquad (1)$$

представлено у вигляді добутку попарно простих множників : $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$, де $(m_i, m_j) = 1$.

Тоді : 1) конгруенція (1) рівносильна системі конгруенцій

$$f(x) \equiv 0(\mathrm{mod} m_1), f(x) \equiv 0(\mathrm{mod} m_2), \ldots, f(x) \equiv 0(\mathrm{mod} m_k); \qquad (2)$$

2) якщо конгруенція (1) має N розв'язків за модулем M, а окремі конгруенції системи (2) мають за відповідними модулями $n_1, n_2, \ldots, n_k$ розв'язків, то $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Доведення. 1. Відомо, що коли конгруенція має місце за деяким модулем M, то вона має місце також за модулем, який дорівнює будь-якому його дільнику. Звідси видно, що кожне значення x, яке задовольняє конгруенції (1), також задовольняє системі конгруенцій (2).

З іншого боку, відомо, що коли конгруенція має місце за кількома модулями, то вона має місце і за модулем, який дорівнює найменшому спільному кратному даних модулів (у випадку попарно простих чисел їх найменше спільне кратне дорівнює добутку даних чисел). Це показує, що будь-яке значення x, яке задовольняє системі конгруенцій (2), також задовольняє конгруенції (1).

Таким чином, конгруенція (1) і система конгруенцій (2) рівносильні, причому навіть і в тому випадку, коли $(m_i, m_j) \neq 1$.

2. В силу еквівалентності конгруенції (1) і системи конгруенцій (2) (навіть в тому випадку, коли $(m_i, m_j) = 1$) природно вважати розв'язком системи конгруенцій (2) клас чисел за модулем $M = [m_1, m_2, \ldots, m_k]$, які задовольняють всім конгруенціям системи (2).

Приймаючи таке означення для розв'язків системи конгруенцій (2), можна сказати, що конгруенція (1) і система конгруенцій (2) мають одні і ті ж розв'язки.

Таким чином, щоб знайти число N розв'язків конгруенції (1), достатньо підрахувати число розв'язків системи конгруенцій (2).

Зробимо це для випадку, коли $(m_i, m_j) = 1$, який розглядається в теоремі.

Слід зауважити, що якщо хоча б одна з конгруенцій системи (2) не має розв'язків, то не має розв'язків також вся система, а отже, і конгруенція (1).

Нехай b_1 - один з розв'язків 1-ої конгруенції, b_2 - один з розв'язків 2-ої конгруенції,$\ldots$,b_k - один з розв'язків k-ої конгруенції. Тоді система конгруенцій

$$x \equiv b_1 (\mathrm{mod}\, m_1), x \equiv b_2 (\mathrm{mod}\, m_2), \ldots, x \equiv b_k (\mathrm{mod}\, m_k) \qquad (3)$$

має єдиний розв'язок

$$x \equiv x_0 = M_1 \cdot M_1^{'} \cdot b_1 + M_2 \cdot M_2^{'} \cdot b_2 + \ldots + M_k \cdot M_k^{'} \cdot b_k (\mathrm{mod}\, M), \qquad (4)$$

який є також розв'язком системи конгруенцій (2) і конгруенції (1) [6,§5].

Але 1-ша конгруенція має n_1розв'язків, 2-га конгруенція - n_2 розв'язків, $\ldots$, k-та конгруенція має n_k розв'язків; отже виходить $n_1, n_2, \ldots, n_k$ систем виду (3), яким відповідають стільки ж значень x_0.

Для ствердження, що їм відповідають різні розв'язки системи конгруенцій (2), необхідно ще показати, що вони належать до різних класів за модулем M .

У справедливості останнього ми переконуємося, розглядаючи які числа x_0 і $x_0^{'}$ одержується, коли замінюємо розв'язок хоча б однієї конгруенції іншим її розв'язком , наприклад b_1 на $b_1^{'}$.

Питання зводиться, очевидно, до того, чи можуть бути конгруентними за модулем M числа $M_1 \cdot M_1^{'} \cdot b_1$ і $M_1 \cdot M_1^{'} \cdot b_1^{'}$, оскільки решта доданків в x_0 і $x_0^{'}$ рівні між собою. Але якщо припустити, що $M_1 \cdot M_1^{'} \cdot b_1 \equiv M_1 \cdot M_1^{'} \cdot b_1^{'} (\mathrm{mod}\, M)$, то повинно бути також

$$M_1 \cdot M_1^{'} \cdot b_1 \equiv M_1 \cdot M_1^{'} \cdot b_1^{'} (\mathrm{mod}\, m_1),$$

а оскільки

$$M_1 \cdot M_1^{'} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m_1),$$

то і

$$b_1 \equiv b_1^{'} (\mathrm{mod}\, m_1).$$

Але це неможливо, оскільки b_1 і$b_1^{'}$ належать до різних класів за модулем m_1.

Отже, ми одержуємо неконгруентні числа за модулем M , а тому

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Теорема доведена.

2. Зведення до конгруенцій за модулем p^{α} і до конгруенцій за модулем p.

Згідно теореми, доведеної в попередньому пункті, розв'язання конгруенції

$f(x) \equiv 0$ за складеним модулем M зводиться до розв'язування конгруенцій

виду $\quad f(x) \equiv 0(\bmod p^{\alpha})$, $\quad$ (5)

оскільки в якості попарно простих множників модуля M можна брати числа виду p^{α}, де p - просте число, α - натуральне число.

Розв'язувати конгруенцію (5) безпосередньо методом підбору, очевидно, дуже незручно, оскільки навіть при невеликих p і α число p^{α} може виявитися досить великим. Тому добре те, що розв'язання конгруенції (5) можна звести до розв'язування конгруенції

$$f(x) \equiv 0(\bmod p) \tag{6}$$

Дійсно, оскільки будь-яке ціле число x_1, яке задовольняє конгруенцію (5), задовольняє також конгруенцію (6) (якщо $f(x_1) \vdots p^{\alpha}$, то тим більше $f(x_1) \vdots p$), то потрібно такі числа, які задовольняють конгруенцію (5), шукати серед множини значень, які задовольняють конгруенцію (6). Зробимо це поступово, переходячи спочатку від конгруенції (6) до такої конгруенції за модулем p^2, потім за модулем p^3 і т.д., поки не дійдемо до конгруенції (5).

Отже, нехай нами знайдено один розв'язок конгруенції (6) : $x \equiv x_1(\bmod p)$,

$$\text{або } x_1 = x + pt_1, \text{ де } t_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7}$$

Міркування, якими ми тут скористаємося, цілком аналогічні тим, які ми застосовували при розв'язанні лінійної системи.

Якщо t_1 - будь-яке ціле число, то за формулою (7) одержуються числа, які всі задовольняють конгруенції (6). Щоб виділити з них ті числа, які задовольняють конгруенцію

$$f(x) \equiv 0(\bmod p^2), \tag{8}$$

ми не можемо брати для t_1 будь-які цілі значення, повинні брати лише такі, для яких

$$f(x_1 + pt_1) \equiv 0(\bmod p^2).$$

Для обчислення лівої частини і спрощення її вигляду зручно замінити многочлен $f(x_1 + pt_1)$ його розкладом за формулою Тейлора

$$f(x_1) + pt_1 f^{'}(x_1) + \frac{(pt_1)^2}{2!} f^{''}(x_1) + \ldots + \frac{(pt_1)^k}{k!} f^{(k)}(x_1),$$

де, як відомо $\frac{1}{k} f^{(k)}(x_1)$ - ціле число.

За винятком перших двох доданків, всі решта містять p в степені ≥ 2 і діляться, таким чином на p^2. Тому за модулем p^2 попередня конгруенція рівносильна наступній :

$$f(x_1)+pt_1\cdot f'(x_1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p^2) \qquad (9)$$

Звідси, в силу того, що $f(x_1)\vdots p$, одержуємо конгруенцію

$$\frac{f(x_1)}{p}+f'(x_1)t_1\cdot t_1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),$$

або

$$f'(x_1)\cdot t_1\equiv -\frac{f(x_1)}{p}(\mathrm{mod}\,p). \qquad (10)$$

А. В найбільш загальному випадку, коли $f'(x_1)\vdots p$, тобто $f'(x_1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, з конгруенції (10) знаходимо

$$t_1\equiv t'(\mathrm{mod}\,p), t_1=t'+pt_2,\text{ де } t_2=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Підставляючи значення t_1 в (7), одержимо розв'язок конгруенції (10) :

$$x=x_1+p(t'+pt_2)=x_1+pt'+p^2t_2.$$

При $t_2=0$ ця формула дає одне із значень, які задовольняють конгруенції (8); позначимо його через x_2.

Тоді $x=x_2+p^2\cdot t_2$, де $t_2=0,\pm1,\pm2,\ldots$

або $x\equiv x_2(\mathrm{mod}\,p^2)$.

Переходячи до розв'язання конгруенції

$$f(x)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p^3), \qquad (11)$$

на t_2 накладаємо вимогу

$$f(x_2+p^2t_2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p^3).$$

Застосовуючи формулу Тейлора, знаходимо

$$f(x_2)+p^2\cdot t_2\cdot f'(x_2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p^3),$$

А оскільки $f(x_2)\vdots p^2$, то звідси слідує, що

$$\frac{f(x_2)}{p^2}+f'(x_2)\cdot t_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,p). \qquad (12)$$

Оскільки $x_1\equiv x_2(\mathrm{mod}\,p)$,

то $f'(x_1)\equiv f'(x_2)(\mathrm{mod}\,p)$.

Але $f'(x_1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, отже, і $f'(x_2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$.

Таким чином, конгруенція (12) дає один розв'язок

$t_2 \equiv t_2^{'} (\mathrm{mod}\, p)$, або $t_2 = t_2^{'} + pt_3$, де $t_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, при допомозі якого складаємо розв'язок конгруенції (11) :

$$x = x_2 + p^2 (t_2^{'} + pt_3) = x_2 + p^2 t_2^{'} + p^3 t_3,$$

$$\text{або} \quad x \equiv x_3 + p^3 \cdot t_3, t_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\text{або} \quad x \equiv x_3 (\mathrm{mod}\, p^3).$$

Повторюючи використовуваний процес далі, ми прийдемо до розв'язання конгруенції (5) :

$$x \equiv x_\alpha (\mathrm{mod}\, p^\alpha).$$

Б. Якщо в конгруенції (10) $f^{'}(x_1) \vdots p$, а права частина на p не ділиться, то конгруенція не має розв'язків; разом з тим не будуть мати розв'язків також конгруенції (8) і (5).

В. Якщо при $f^{'}(x_1) \vdots p$ права частина також ділиться на p, то конгруенція (10) є тотожною і її будуть задовольняти всі цілі числа t_1.

Таким чином конгруенцію (8) будуть задовольняти всі числа, які одержуються за формулою (7), тобто ті самі числа, які задовольняли конгруенцію (6). Але за модулем p^2 вони не будуть більше належати одному класу лишків, а будуть належати p класам, так що конгруенція (8) буде мати p розв'язків .

З цих розв'язків будемо далі таким способом виділяти ті числа, які задовольняють конгруенцію за модулем p^3 і т.д.

Література

1. Боревич З.И., Шафаревич И.Р.Теория чисел. –М.: Наука, 1972.- 495 с.
2. Бородін О.І. Теорія чисел. -К.: Вища школа, 1970.- 274 с.
3. Бух штаб А.А. Теория чисел.- М.: Просвещение, 1966.- 384 с.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел.- М.: Наука, 1981.- 176 с.
5. Завало С.Т. та ін. Алгебра і теорія чисел.-К.: Вища школа, 1976.- Ч.2.- 384 с.
6. Михелович Ш.Х. Теория чисел.- М: Высшая школа, 1967.- 336 с.

Нікуляк Тетяна Вікторівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДО ПИТАННЯ ВИВЧЕННЯ ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Не один раз протягом вивчення шкільного курсу математики виникала потреба поповнення запасу чисел, з якими виконувалися дії. У першому класі для дії додавання вистачало натуральних (тобто цілих додатних) чисел. Результат множення натуральних чисел також завжди виражався натуральним числом. А ось віднімати дозволялося тільки від більшого менше: тільки тоді різниця була також натуральним числом. Що стосується ділення, то частка є цілим числом, тільки якщо ділене кратне з дільником. Приєднання до натуральних дробових від’ємних чисел та нуля дало множину так званих раціональних чисел. Для довільних двох чисел з цієї множини результати додавання, віднімання, множення та ділення (якщо тільки дільник не нуль) також виражаються раціональними числами. Для чотирьох дій арифметики запасу задачі на визначення довжини кола та площі круга познайомили нас з числом π, яке не виражається раціональним числом. Ірраціональними числами почали оперувати у восьмому класі, розв’язуючи задачу на здобування коренів. Виявилося, що навіть квадратні корені з більшості цілих чисел, такі як $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ і т. д., не є раціональними числами.

Якщо раціональні числа зображуються точками числової осі, то залишається ще на осі незаповненою нескінченна множина точок, кожна з яких зображує деяке ірраціональне число. Сукупність раціональних та ірраціональних чисел утворює множину дійсних чисел, зображення яких заповнюють усю числову вісь.

Здавалося, що тепер можна заспокоїтися: запасу дійсних чисел вистачило, щоб виразити результат здобуття довільного кореня зі всякого додатного числа, наприклад $\sqrt[3]{2},\sqrt{\pi}$. Значення довільної функції, що вивчається в школі, також виражається дійсними числами, наприклад $\lg 2, \sin 1, tg\frac{\pi}{6}$ і т.д.

Однак у тому ж восьмому класі задача на розв’язання квадратного рівняння

$$x^2 + px + g = 0, \qquad (1)$$

що еквівалентне рівнянню

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = -g + \frac{p^2}{4}, \qquad (2)$$

приведе до формули для його корнів

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}. \qquad (3)$$

Але обчислення за формулою (3) можливе лише за умови, що дискримінант $D = \frac{p^2}{2} - g$ є невід’ємним числом. При D>0 формула (3) дає два різних дійсних корені, а при $D = 0$ - один дійсний корінь другої кратності.

У випадку $D<0$ рівняння (1) не має дійсних коренів. Застосування формули (3) вимагало б у цьому випадку здобуття квадратного кореня з від'ємного числа D, але такого кореня серед дійсних чисел не існує.

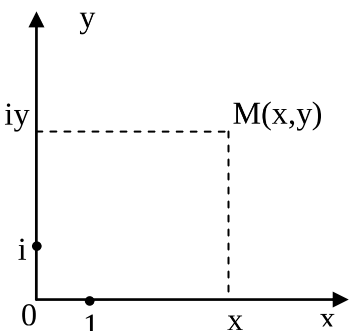
А якщо доповнити запас дійсних чисел новими числами, для яких формула (3) має смисл і при від'ємному D? Ця задача розв'язується введенням комплексних чисел. За допомогою комплексних чисел виражаються розв'язки будь-якого степеня.

Отже, розглянемо в даній статті різні підходи, щодо введення понять комплексного числа.

Алгебраїчний підхід. Для зображення комплексних чисел нам потрібна вже не пряма, а площина. Проведемо в площині через деяку точку O дві взаємно перпендикулярні осі Ox та Oy. Точку $M(x;y)$ будемо вважати зображенням комплексного числа z, яке визначається виразом

$$z = x + yi \qquad (4)$$

Символ i - уявна одиниця (рис.1)



(рис.1)

$i^2 = -1$. За допомогою уявної одиниці можна здобути квадратній корінь з від'ємних чисел:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36\cdot(-1)} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1} = 6i;$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(-1)} = \sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\cdot i.$$

Степені уявної одиниці:

$i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = -i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, ...$

Значення степенів числа i повторюються з періодом, що дорівнює 4. Тому i^n можна обчислити за схемою:

$$n \vdots 4 \quad i^n = 1$$
$$n \vdots 4 \text{ (ост.1) } i^n = i$$
$$n \vdots 4 \text{ (ост.2) } i^n = -1$$
$$n \vdots 4 \text{ (ост.3) } i^n = -i$$

Приклад 1. Обчислити i^{28}, i^{33}, i^{135}.

Оскільки $28 \vdots 4$, то $i^{28} = 1$.

$33 : 4 = 8$ (ост.1), то $i^{33} = i$;

135:4=33 (ост.3), то $i^{135} = -i$.

Означення. Числа вигляд $z = x + yi$, де x і y - дійсні числа, i - уявна одиниця, будемо називати *комплексними*.

x називається *дійсною частиною* комплексного числа $z = x + yi$, y - *уявною частиною* комплексного числа $z = x + yi$.

$x = \operatorname{Re} z$ - дійсна частина,

$y = \operatorname{Im} z$ - уявна частина.

Наприклад. $\operatorname{Im}(-1+4i) = 4, \operatorname{Re}(-8i) = -8$ і т.д.

Якщо $a = 0$, то число bi - чисто уявне,

$b = 0$, то число a - дійсне,

$a = 0, b = 0 \; 0 + 0i = 0.$

$z = x + yi$ - комплексне число, записане в алгебраїчній формі.

Точки $(x,0)$ осі Ox (для них ордината $y = 0$) будуть зображати дійсні числа x: таким чином, $x = x + i0$. Точки $(0, y)$ осі Oy (для них $x = 0$) будуть зображати так звані чисто уявні числа (при $y \neq 0$) $iy : iy = 0 + iy$. Точка $(0;1)$ на осі Oy зображує уявну одиницю. Відповідно до цього вісь Ox називають дійсною віссю, а вісь Oy - уявною віссю.

Початок координат $O(0,0)$ зображує число нуль: $0 = 0 + 0i$.

Означення 1. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ та $z_2 = x_2 + y_2 i$ називають *рівними*, якщо співпадають відповідні їм точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$.

Означення 2. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ та $z_2 = x_2 + y_2 i$ називаються рівними тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні та уявні частини:

$$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Площина XOY, що використовується для зображення комплексних чисел, називається комплексною площиною.

Увага! Комплексні числа між собою порівнювати не можна.

Приклад 2. Знайти x і y з рівності:

а) $3y + 5xi = 15 - 7i;$

б) $(2x;3y) + (x - y)i = 7 + 6i.$

Розв'язання

а) $\begin{cases} 3y = 15, \\ 5x = -7. \end{cases}$

Маємо: $x = -\dfrac{7}{5}, y = 5.$

б) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x - y = 6. \end{cases}$

Розв'язуючи систему рівнянь, маємо: $x = 5, y = -1.$

Дійсне число $\sqrt{x^2 + y^2}$ називається модулем комплексного числа $z = x + yi$ та позначається $|z|$ або $|x + yi|$. Отже, $|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розглянемо *дії над комплексними числами в алгебраїчній формі*.

I. *Сумою* $z_1 + z_2$ двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ та $z_2 = x_2 + y_2 i$ назвемо число

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2), \qquad (5)$$

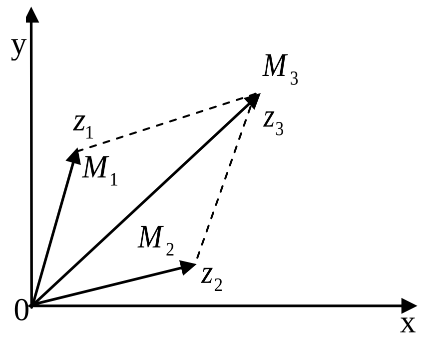
Властивості:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$

2) $z + 0 = z;$

3) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$

Дамо геометричну інтерпретацію суми комплексних чисел z_1 і z_2.



Побудуємо на комплексній площині точки $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$, що зображають (рис.2) відповідно числа z_1 і z_2.

Проведемо вектори $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$. Вочевидь координати векторів $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$ співпадають з координатами точок M_1 і M_1, тобто $\overrightarrow{OM_1}$ $(x_1;y_1)$, $\overrightarrow{OM_2}$ $(x_2;y_2)$. Тому вектори $\overrightarrow{OM_1}$ і $\overrightarrow{OM_2}$ також будемо вважати зображенням чисел z_1 і z_2. Означення суми z_1 і z_2 відповідає означенню суми векторів, що їх зображають.

Протилежними будемо вважати комплексні числа вигляду $x+iy$ та $-x-iy$ (зображаються відповідно протилежними векторами) (рис.3). Дія віднімання зводиться до дії додавання відповідно протилежного вектора:

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1+iy_1)+(-x_2-iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Приклад 3. $z_1=2+3i, z_2=5-7i$.

Обчислити:

а) z_1+z_2;

б) z_1-z_2.

Розв'язання

а) $z_1+z_2=2+3i+5-7i=2+5+(3-7)i=7-4i,$

б) $z_1-z_2=2+3i-(5-7i)=-3+10i$.

II . *Добуток комплексних чисел*.

Назвемо *добутком* $z_1\cdot z_2$ комплексних чисел $z_1=x_1+y_1i$ та $z_2=x_2+y_2i$ комплексне число

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2). \qquad (6)$$

Легко перевірити, що множення, яке визначається формулою (6), володіє властивостями множення дійсних чисел:

1) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;

2) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$;

3) $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$;

4) $1\cdot z=0$;

5) $0\cdot z=0$;

6) $z_1\cdot z_2=0$ - виконується за умови, якщо один з множників (або обидва) дорівнює нулю.

З властивостей дії множення легко побачити, що для комплексних чисел можна використовувати формули скороченого множення.

Приклад 4. Знайти добутки:

1) $(2+3i)(5-7i)=10-14i+15i-21i^2=10+i+21=31+i$;

2) $(2+3i)^2 4+12i+9i^2=4-9+12i=-5+12i$;

Означення. Числа вигляду $z=x+yi$ та $\bar{z}=x-yi$ називають *спряженими*.

Комплексно спряженим до $x-yi$ є число $x-i(-y)$, тобто саме число z. Тому можна вважати, що z і $\bar{z}$ - пара комплексних спряжених чисел. Очевидно, що точки відповідні до z і $\bar{z}$ тоді й тільки тоді, коли $z=x$. Це означає, що число, яке дорівнює своєму спряженому, є дійсним; також правильне й обернене твердження. Добуток $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$ - дійсне число завжди.

Ш . *Ділення комплексних чисел.*

Часткою $\frac{z_1}{z_2}$ двох комплексних чисел $z_1=x_1+y_1i$ та $z_2=x_2+y_2i$ (де $z_2\neq 0$) визначимо як таке число w, що $z_2\cdot w=z_1$. Маємо:

$$w=\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{z_2\cdot\overline{z_2}}\cdot z_1\cdot\overline{z_2} \qquad (7)$$

- формула частки комплексних чисел.

Права частина формули (7) цілком визначена , бо являє собою добуток дійсного числа $\frac{1}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{1}{x_2^2+y_2^2}$ на комплексне число $z_1\cdot\overline{z_2}$, яке можна знайти за допомогою добутку $(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)$. Залишилося показати, що w, яке знайдемо за формулою (7) , задовольняє співвідношення $z_2\cdot w=z_1$. Маємо:

$$z_2\cdot w=z_2\cdot\frac{1}{z_2\cdot\overline{z_2}}\cdot z_1\cdot\overline{z_2}=z_2\cdot\overline{z_2}\cdot\frac{1}{z_2\cdot\overline{z_2}}\cdot z_1=\frac{x_2^2+y_2^2}{x_2^2+y_2^2}\cdot z_1=z_1$$

Приклад 5. Обчислити: $\left(\frac{\overline{z_1}-iz_2}{2z_2}\right)$, якщо $z_1=1+2i, z_2=-3i$.

Розв'язання

$\overline{z_1}=1-2i$, $iz_2=-3i^2=3{,}2z_2=-6i;$

$$\left(\frac{\overline{z_1}-iz_2}{2z_2}\right)^6=\left(\frac{1-2i-3}{-6i}\right)^6=\left(\frac{2+2i}{6i}\right)^6=\left(\frac{(1+i)i}{3i^2}\right)=\left(\frac{-1+i}{-3}\right)^6=\left(\left(\frac{1-i}{3}\right)^2\right)^3=\left(-\frac{2i}{9}\right)^3=\frac{8}{729}i.$$

Відповідь: $\frac{8}{729}i$.

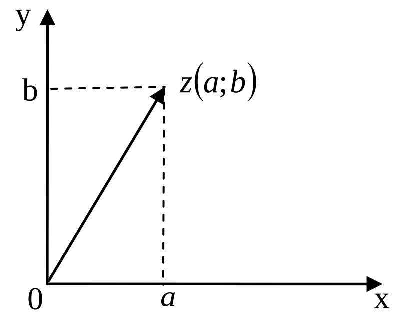
Таким чином, комплексні числа, утворюють поле, яке позначають буквою C.

Множина дійсних чисел є підмножиною множини комплексних чисел.

Розглянемо **геометричний підхід.**

Комплексне число $z=a+bi$ зображується на декартовій площині точкою, яка має координати $(a;b)$. Ця точка позначається тією ж буквою z. Відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини є взаємно однозначною (рис.4). Тобто кожне комплексне число зображується однією точкою площини, і, навпаки, кожна точка площини зображує єдине комплексне число. При цьому координатна площина називається *комплексною площиною* (позначається C), вісь абсцис називається дійсною віссю, а вісь ординат називається уявною віссю.

Як зазначено було раніше, комплексне число $z=a+bi$ можна зобразити такою точкою z комплексної площини з координатами $(a;b)$



Кожній точці з координатами $(a;b)$ відповідає єдиний вектор з початком у точці $(0;0)$ та кінцем у точці $z(a;b)$. Точка $z(a;b)$ називається *афіксом* числа $a+bi$. Вектор $\overrightarrow{OZ}$, який відповідає комплексному числу $z=a+bi$, називають радіус-вектором.

Нехай задано комплексне число $z=a+bi$. Маємо: $a+bi=r(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$. Тригонометрична форма комплексного числа $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

(Рис.3) де $p=Arg(a+bi)$, $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Правила переходу від алгебраїчної до тригонометричної форми комплексного числа:

1. Заходимо модуль комплексного числа r, де $r=\sqrt{a^2+b^2}$.
2. Для знаходження φ спочатку визначаємо в якій чверті знаходиться точка z.
3. Знаходимо розв'язок рівняння $tg\varphi=\frac{b}{a}$, який визначає кут у цій чверті.
4. Записуємо комплексне число в тригонометричній формі.

Якщо комплексному числу $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, модуль якого 1, поставити у відповідність показників вираз $e^{i\varphi}$, то одержимо співвідношення $\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$ - *формула Ейлера.*

$z=re^{i\varphi}$ - показникова форма комплексного числа.

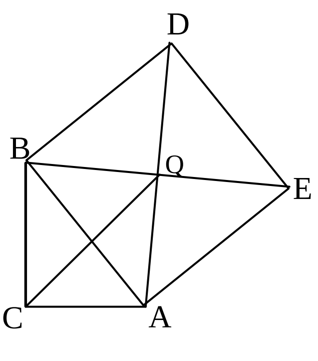
Також комплексні числа у планіметрії.

Теорія комплексних чисел може бути використана у ході розв'язування геометричних задач на площині; і, навпаки, факти геометричного характеру дозволяють доводити деякі співвідношення та тотожності для комплексних чисел. Так, раніше було встановлено, що для довільних комплексних чисел z_1 і z_2 таких, що $|z_1|=|z_2|=c$ має місце рівність $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4c^2$.

Тобто сума квадратів довжин діагоналей ромба дорівнює сумі квадратів довжин усіх його сторін.

Дійсно, точки площини відповідні до комплексних чисел $0, z_1, z_2$ та z_1+z_2, є вершинами ромба, для якого $|z_1|$ і $|z_2|$ - довжини діагоналей .

Розглянемо задачу.



На гіпотенузі АВ прямокутного трикутника АВС побудований квадрат поза трикутником. Знайти відстань від вершини С прямого кута до центра Q квадрата, якщо довжина катетів ВС іАС рівні, відповідно, аі

Розв'язання

1 спосіб. Оскільки ΔABC - прямокутний $(\angle C=90°)$. Катети (за умовою) дорівнюють a ib.

Нехай $BC=a, AC=b$, тоді гіпотенуза за теоремою Піфагора: $AB=\sqrt{a^2+b^2}$

На цій гіпотенузі побудований квадрат, тобто всі сторони квадрата дорівнюють $\sqrt{a^2+b^2}$. Q – точка перетину діагоналей цього квадрата. За властивістю діагоналей квадрата: $AQ=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$. Діагоналі квадрата перпендикулярні одна одній. $\angle BQA=90°$ і $\angle QBA=\angle QAB=45°$.Розглянемо ΔAQC, $\angle CAQ=\angle CAO+\angle OAQ$. Нехай $\angle CAO=\alpha$, тоді $\angle CAO=45°+\alpha$. За теоремою косинусів:

$$CQ=b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-2b\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}\cos(45°+\alpha).$$

Знайдемо: $\cos(45°+\alpha)=\cos 45°\cos\alpha-\sin 45°\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.Тоді

$$CQ=b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}b\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}b\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=$$

$$b^2+\frac{a^2+b^2}{2}-b^2+ab=\frac{a^2+b^2+2ab}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}.$$

$$CQ=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}}=\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь: $CQ=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}}=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

2 спосіб(за допомогою комплексних чисел).

Приймемо точку С за початкову, а прямі САіСВ за дійсні і уявні осі. Тоді точки АіВ будуть мати відповідно комплексні координати b і ai, причому $b=\overline{b}$ і $a=\overline{a}$. При повороті на $90°$ вектор $\overrightarrow{QB}$переходить в вектор $\overrightarrow{QA}$. Тому маємо рівність $(ai-q)i=b-q$, де q - координата точки Q. Звідси $q=\frac{a+b}{1-i}$. Знаходимо:

$$CQ^2=q\overline{q}=\frac{a+b}{1-i}\cdot\frac{a+b}{1+i}=\frac{1}{2}(a+b)^2,\ CQ=\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Література

1. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вид., допов. і переробл. / З. І. Слєпкань. – К.: Вища шк., 2006. – 582.

2. Буковська О. І. Комплексні числа: теоретичний матеріал з алгоритмами розв’язування задач. Основні вимоги до знань, умінь та навичок. Метод.пос./О.І. Буковська. – Х: Основа, 2004 р. -112с. – (Б-ка ж-лу «математика в школах України»; Вип.9(21)).

3. М.Б. Баяк. Реальные применения мнимых чисел: Для ст.шк. возраста/М.Б. Баяк, Г.Д.Баяк, А.А. Полужин – Київ: Рад. Школа 1988.

4. Я. П. Понарин. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах/ Я. П. Понарін - МЦНМО, 2004 - с. 159.

Ніяка Тетяна Віталіївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ТЕХНОЛОГІЯ ВВЕДЕННЯ ГРАФІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Теорія графів — це окрема математична дисципліна, роком виникнення якої можна вважати 1936, коли вийшла в світ монографія угорського математика Д.Кенига «Теорія скінченних і нескінченних графів». До цього графи зустрічалися в різних галузях науки і практики та головоломках. Можна вважати, що теорія графів з'явилася саме в процесі розв'язування головоломок. Останнім часом графи ефективно використовуються в теорії планування й управління, соціології, медицині, електроніці, програмуванні, під час розв'язування комбінаторних та ймовірнісних задач.

Сучасний шкільний курс математики має величезні розвиваючі можливості завдяки своїй цілісності та логічній строгості. Для того, щоб школярі усвідомили важливі математичні поняття, покладені в його основу (множина, відношення, функція, рівняння, нерівність, геометрична фігура, алгоритм тощо), треба дібрати такі методи і форми навчання, щоб матеріал подавався на доступному для них рівні.

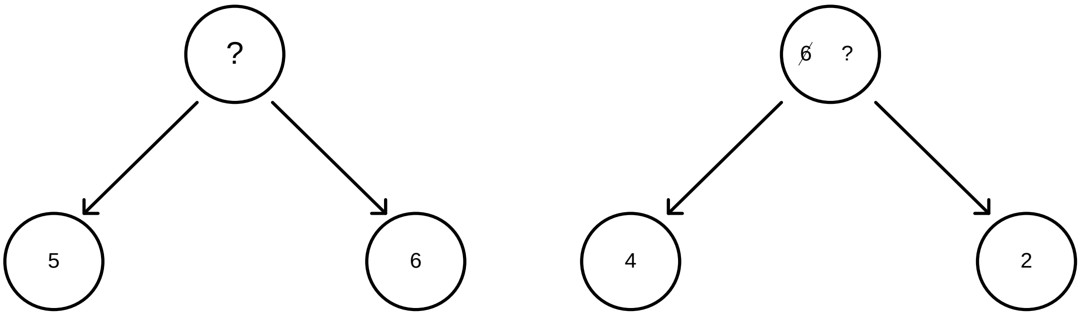
У діючих шкільних програмах з математики поняття графа не вводиться. Вперше учні знайомляться з структурою графа у початковій школі. Відомо, що у процесі викладання математики в початкових класах учитель спирається як на безпосереднє сприймання учнями окремих предметів або фактів, так і на їхню уяву. На мою думку, використання елементів теорії скінченних орієнтованих графів як методичного прийому унаочнення навчального матеріалу на уроках математики є надзвичайно актуальною темою на сьогоднішній день. Нею цікавляться педагоги-новатори, психологи, студенти і викладачі педагогічних інститутів. Вона широко висвітлюється в науково-методичній літературі, зокрема в журналах «Початкова школа», «Навчальна школа», «Педагогіка і психологія».

Учні допускають чимало помилок, вишукуючи план розв'язування задач, вибираючи та виконуючи арифметичні дії для його реалізації. Це зумовлюється тим, що не всі школярі мають чіткі уявлення про структуру і механізм розв'язування задач. Дехто не вміє їх аналізувати, уявляти відповідну життєву ситуацію, не бачить або не розуміє вказаних у задачі зв'язків між даними числами і шуканими, не має навичок самоконтролю. Ці та інші недоліки трапляються здебільшого в роботі тих учителів, котрі недостатньо урізноманітнюють види роботи над задачею. Одним із шляхів розв'язку цієї проблеми є використання елементів теорії скінченних орієнтованих графів [1, 2].

Наведемо деякі конкретні приклади застосування скінченних орієнтованих графів при розв'язуванні задач у початковій школі.

Задача: Петро посадив 5 дерев, а Сашко 6 дерев. Скільки дерев посадили Петро і Сашко разом ?

Розширення умови такої задачі доцільно конкретизувати графічним зображенням її розбору, починаючи від запитання. Для цього ставимо в кружечку знак питання, а від нього проводимо дві стрілки, на кінцях яких у кружечках записуємо числа 5 і 6. Якщо число 6 невідоме (вчитель закреслює 6 і поруч ставить знак питання), то треба знову вказати два числа, за якими можна знайти 6 (проводить дві нові стрілки, на яких пише числа 4 і 2).

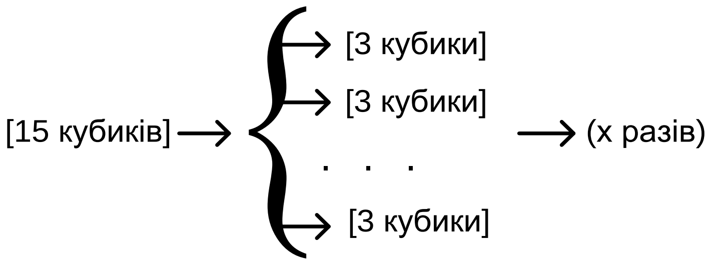


мал. 1

Саме при розв'язуванні таких задач графи допомагають учням схематично зобразити умову задачі, чітко уявити структуру і механізм її розв'язування, відповідну життєву ситуацію, зрозуміти вказані у задачі зв'язки між даними числами і шуканими, визначити алгоритм розв'язку.

Корисно пропонувати дітям складати задачі за графічним зображенням їх умов.

Наприклад, пропонується розглянути такий граф та скласти за ним задачу:

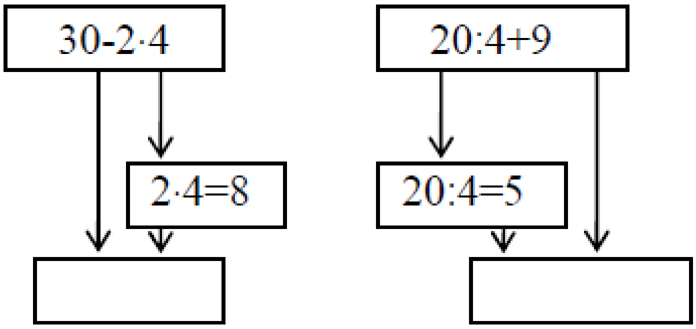


мал. 2

За даним графічним зображенням умови діти можуть скласти наступну задачу: Хлопчик брав з коробки по 3 кубики кілька разів. Усього він узяв 15 кубиків. Скільки разів брав хлопчик кубики?

Корисно і доцільно використовувати графи і при розв'язуванні прикладів. Скажімо, при вивченні теми «Додавання та віднімання в межах 100» (без переходу через 10) графи допомагають дітям краще ознайомитися з новим матеріалом, обдумувати і наочно проводити виконання арифметичних дій.

Доцільне використання графів і при вивченні теми «Порядок дій», де вони допомагають учням самостійно засвоїти дану тему, а вчитель лише керує їх розумовою діяльністю. На першому етапі навчання порядку дій потрібно пам’ятати, що математичні обчислення повинні бути доступні кожній дитині. Головне тут – навчити розбиратися в порядку виконання арифметичних дій. Наприклад, для цього доцільно скористатись такими скінченними орієнтованими графами:



мал. 3

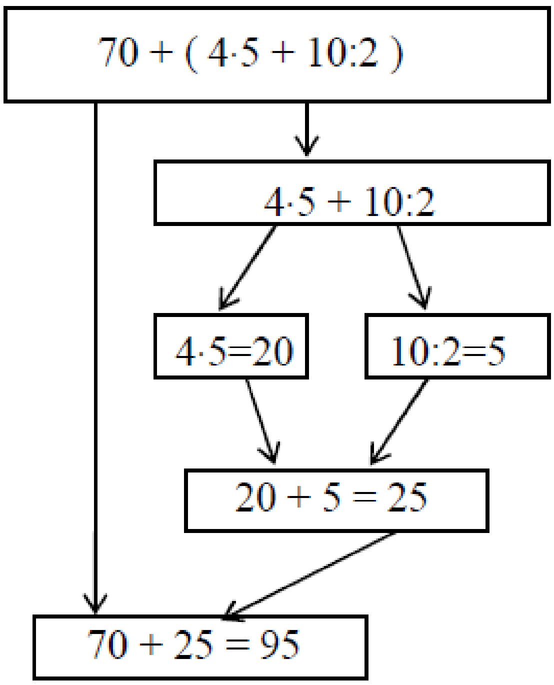
30-8=22 5+9=14

На наступному етапі роботи пропонуються приклади на 3 і 4 дії та з використанням дужок:

40 + 21 : 7 - 10 = , 70 + (4×5 + 10 : 2) = ,

60 - 4 × 5 + 36 : 6 = , (5 × 6-12) - 3×5 = .

Учні вже самі пояснюють порядок дій у таких прикладах, рахують їх з цікавістю і кожного разу пояснюють порядок дій уже без помилок. При цьому, наприклад, можна застосувати скінченний орієнтований граф:



мал. 4

Доцільно запропонувати учням і цікаві завдання з використанням графів:

1. З’єднати числа, які в сумі складають число, записане посередині.

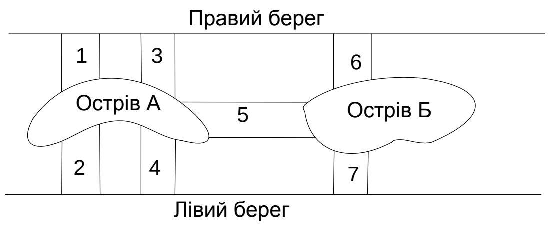
2. Записати у «віконечках» числа, за яких рівності правильні.
3. Розв'язати кругові приклади.
4. Подати числа у вигляді суми розрядних доданків.
5. Відгадати, яке число було закладено в лічильну машину.
6. Обчислити за алгоритмом.

Отже, використання елементів теорії графів у початковій школі дає можливість унаочнити абстрактні математичні поняття, зробити їх доступними для сприймання учнями початкових класів і має велике значення для успішного засвоєння ними курсу математики.

Якщо учні не познайомилися з графами ні в початковій школі, ні в середній, доцільно розглянути цю тему на заняттях спецкурсу або математичного гуртка, використовуючи науковий підхід введення поняття графа.

Історично так склалося, що теорія графів виникла понад 200 років тому під час розв'язування задачі про кенігсберзькі мости.

Місто Кенігсберг розташоване на берегах річки Преголя, рукави якої ділили місто на чотири частини, в тому числі на два острови – Кнайпгоф і Ломзе, що поєднувалися сімома мостами. Жителі міста помітили, що ніяк не можуть здійснити прогулянку по всім семи мостам, проходячи по кожному з них рівно один раз. Так виникла головоломка: «Чи можна пройти всі сім Кенігсберзьких мостів рівно один раз і повернутися в те місце, з якого почали прогулянку?»(див. мал. 5).

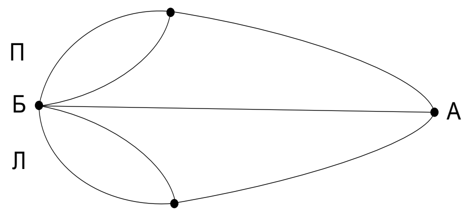


мал. 5

Багато мешканців міста намагалися розв'язати цю задачу як теоретично, так і практично, під час прогулянок. Але нікому це не вдавалося; ніхто не зміг і довести, що це й теоретично неможливо.

У 1736 році задача про сім мостів зацікавила видатного математика, члена Петербурзької академії наук Леонарда Ейлера. Про це він написав у листі італійському математику і механіку, інженеру Маріоні 13.03.1736. Він помітив, що дана задача полягає в тому, щоб по карті провести маршрут – лінію, не відриваючи олівець від паперу, обійти всі сім мостів і повернутися в початкову точку. Тому Ейлер став розглядати замість карти мостів схему із точок і ліній, відкинувши мости, острови і береги, як не математичні поняття. Ось що у нього вийшло.

На спрощеній схемі (графі) мостам відповідають лінії (ребра графа), частинам міста — точки з'єднання ліній(вершини графа).



мал. 6

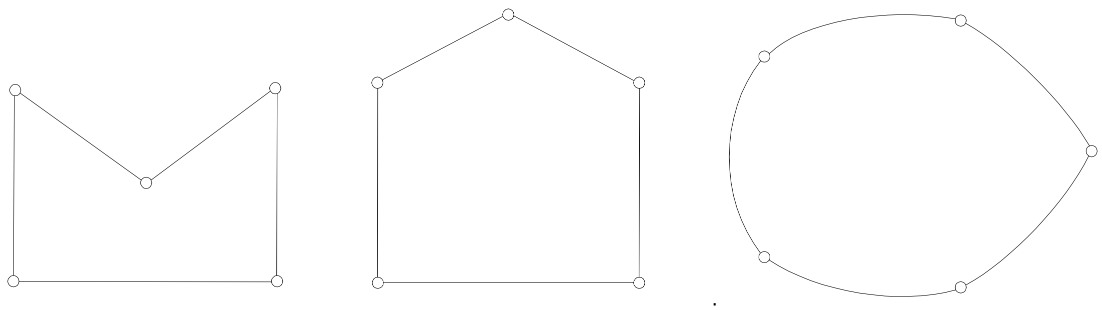
В наш час такі схеми із точок і ліній стали називати графами, точки називають вершинами графа, а лінії – ребрами графа. В кожній вершині графа сходиться декілька ліній. Якщо число ліній – парне, то вершина називається парною, а якщо число ліній непарне, то вершина називається непарною.

Граф мостів Кенігсберга має 4 непарні вершини. Тому, неможливо пройти всіма мостами, не проходячи по жодному з них двічі.

Отже*, граф* (з лат. означає «пишу») — це непорожня множина точок і множина відрізків, обидва кінці яких належать заданій множині точок.

При зображенні графів на малюнках або схемах відрізки можуть бути прямолінійними або криволінійними, а довжини відрізків і розміщення точок — довільними.

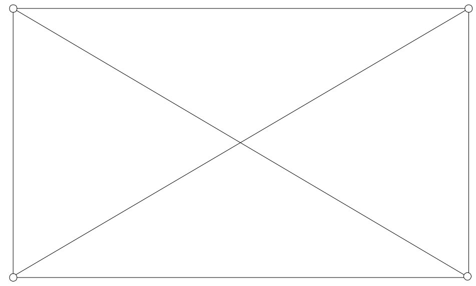
Наприклад, фігури на малюнку 7 зображають один і той самий граф.



мал. 7

Точки інакше називають *вершинами графа,* а відрізки — *ребрами графа.*

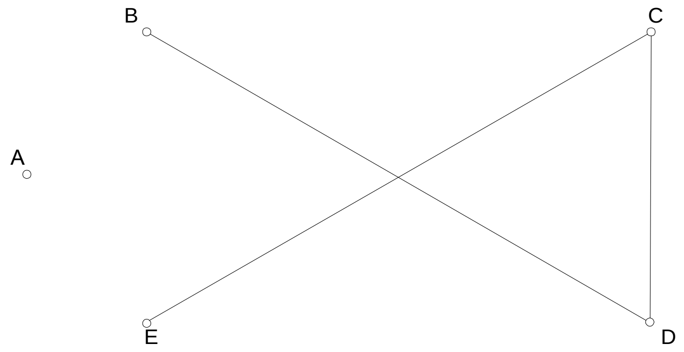
Вершини графа на малюнку виділяються, як правило, кружечками або квадратиками. Це пов’язане з тим, що не завжди точки перетину ребер вважаються вершинами графа. Наприклад, на малюнку точка перетину «діагоналей чотирикутника» не є вершиною.



мал. 8

Граф, вершини якого не належать до жодного ребра, називаються *ізольованими.* Граф без ізольованих вершин називається зв'язним.

Граф, зображений на малюнку 9, має 5 вершин, 3 ребра та одну ізольовану вершину *А*.



мал. 9

Вершини позначають, як правило, великими буквами українського або латинського алфавіту *(А, В,* С, …,*X, Y),* а іноді — числами. Ребра позначають парами вершин (наприклад, *(А, В),* (1; 5)) або малими буквами українського чи латинського алфавіту *(а, Ь, с, ... х, у).*

Можна також зображати граф і не позначаючи буквами його ребра та вершини.

Прикладами графів можуть бути схеми метрополітену і залізниці, структурні формули молекул та інші схеми і плани, де не дається масштаб, а вказуються лише зв'язки між об'єктами, які їм належать.

На сьогоднішній час графи дуже зручно використовувати для розв'язання задач різних видів. Теорія графів є дуже актуальною, її широко застосовують не тільки у математиці, а й в інших природничих науках – зокрема, у фізиці, хімії, географії, біології, картографії та в багатьох інших науках. Діаграми графа подібно до геометричних рисунків дозволяють одержати наочне представлення до різного роду задач. Графи дозволяють будувати математичну модель зв'язків між заданими елементами.

Отже, на мою думку доцільно ввести окремий розділ «Графи» в шкільному курсі математики.

Література

1. Лишенко Г. П. Творча робота над задачею // Початкова школа. - 1985. - № 8.- с. 70 - 71.
2. Друзь Б. Г. Вправи на формування найпростіших уявлень про інформатику і лічильні машини // Початкова школа. - 1988. - № 1. - с. 27 - 29.
3. Граф-дерево і розв'язування задач // Математика – 2002 – квітень (№15) - с. 3-4.

Поліщук Марина Анатоліївна
студентка 4курсу, напрям підготовки «Математика»

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Постановка проблеми.Число – фундаментальне поняття математики, ним пронизані усі математичні теорії. Історично в різні часи числа по-різному записувались і представлялись. Під системою числення розуміють сукупність прийомів та правил найменування й позначення чисел. Залежно від задач, які розв'язуються, зручно використовувати ту чи іншу систему числення. Наприклад, в повсякденному житті людство користується десятковою системою числення; для представлення комп'ютерних даних використовують двійкову і шістнадцяткову системи числення. Поряд з цими традиційними системами числення все більшого практичного застосування знаходять і так звані нетрадиційні способи запису дійсних чисел. Аналізу того, як формується поняття «система числення» в учнів та студентів, і присвячена ця стаття.

Поняття «система числення» в широкому розумінні має пряме відношення до математичної теорії чисел. У шкільному курсі математики вона, фактично, не вивчається. Але на пропедевтичному рівні вводиться поняття «система числення». Це викликано як потребами самої математики, так і реалізацією міжпредметних зв'язків з інформатикою. При цьому системою числення називають метод зображення чисел за допомогою обмеженої кількості цифр (знаків) [3]. Це дещо звужене розуміння поняття системи числення.

Для кращого розуміння того, що сьогодні слід розуміти під поняттям «система числення» проаналізуємо історію розвитку цього поняття.

Традиційно прийнято класифікувати системи числення на два типи: непозиційні і позиційні.

Система числення, в якій значення кожної цифри в довільному місці послідовності цифр, яка означає запис числа, не змінюється, називається *непозиційною*. Система числення, в якій значення кожної цифри залежить від місця в послідовності цифр у записі числа, називається *позиційною*.

У шкільному курсі математики вивчають *позиційну десяткову систему числення* в 5 класі в розділі «Натуральні числа». Десяткова позиційна система числення є загальноприйнятою в сучасному світі, яка з Індії через арабські країни прийшла в Європу. Основою системи числення називається число, яке означає, у скільки разів одиниця наступного розряду більше за одиницю попереднього, тобто ми маємо справу із степенями числа 10. Наприклад, число 555 можна записати так: $5\cdot10^2+5\cdot10^1+5\cdot10^0=555$.

Будь-яке десяткове число є сумою різних степенів основи 10, помножених на відповідні коефіцієнти (цифри).

В будь-якій позиційній системі числення число є сумою степенів основи, помножених на відповідні коефіцієнти:

$$N=a_n\cdot q^n+a_{n-1}\cdot q^{n-1}+...+a_1\cdot q^1+a_0,$$

де N – число, що зображається,q – основа системи, a – коефіцієнти (цифри) числа.Якщо за основу системи числення прийняти різні числа, наприклад: 2, 3, 8, 16, 32 і т. ін. , то можна отримати: двійкову, трійкову, вісімкову та ін. системи числення.

Формування поняття десяткової системи числення закріплюється в позакласній роботі, шляхом розв’язування задач, пов’язаних з розкладом числа за його цифрами. Традиційним типом завдань на математичних олімпіадах 5–7 класів є задачі такого типу: «У трицифровому числі поміняли місцями дві останні цифри і додали одержане число з початковим. В результаті одержали 1187. Знайдіть всі такі числа і поясніть, чому інших немає» (Вінницька районна олімпіада 1999–2000 рр., 7 клас). Розв’язання такого типу задач, з одного боку, формує чітке уявлення про роль цифр в записі числа, а з іншого – зводиться до розв’язування найпростіших рівнянь в цілих числах.

Тема «Системи числення» вивчається і в шкільному курсі інформатики, адже це пов’язано з тим фактом, що числа в пам’яті комп’ютера подані в двійковій системі числення, а для зовнішнього зображення вмісту пам’яті, адреси пам’яті використовують шістнадцяткову і вісімкову системи. Двійкова система числення – основна позиційна система числення, яка використовується в комп’ютері. Особливістю цієї системи є те, що вона містить мінімально можливу кількість цифр (0 та 1). Основою системи є цифра 2 і записується (10). В двійковій системі число 25 виглядатиме таким чином:

$$25_{10} = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1 \text{ або } 25_{10} = 11001_2.$$

Непозиційні системи числення виникли раніше систем позиційного типу. Прикладом непозиційної системи, що дійшла до наших днів, є римська система числення. Числа в цій системі позначаються спеціальними знаками, наприклад: 1-I, 5-V, 10-X, 50-L, 100-C, 500-D, 1000-Мта ін. Для запису проміжних чисел існує правило: кожний менший знак, який записаний праворуч від більшого, додається до його значення, а ліворуч – віднімається від нього. Наприклад: IV – 4;VII – 7;IIC– 98;LXII – 62;DCLXVIII – 668;CMLXII – 967 та ін. Основний недолік непозиційних систем – велика кількість різних знаків і складність виконання арифметичних операцій. Втім і сьогодні цією системою числення користуються в повсякденному житті.

На позакласних уроках з математики варто ознайомити дітей з іншими системами числення, які використовувало людство в різні історичні епохи. Наприклад, єгипетська система числення— непозиційна система числення, яка вживалася в Стародавньому Єгипті аж до початку X ст. н.е. У цій системі цифрами були ієрогліфічні символи; вони позначали числа 1, 10, 100 і т. д. до мільйона.Числа, не кратні 10, записувалися шляхом повторення цих цифр. Кожна цифра могла повторюватися від одного до 9 разів. Фіксованого напрямки запису чисел не існувало: вони могли записуватися справа наліво або зліва направо і навіть вертикально[3].

З часом уявлення про системи числення розширювались. Сьогодні все більшого застосування знаходять інші нетрадиційні системи числення. Одним з таких способів зображення чисел є подання їх ланцюговими дробами. При цьому кожне дійсне число «закодовується» з допомогою скінченної або нескінченної кількості натуральних чисел. При цьому слід зауважити відмінність між, наприклад, десятковою системою числення і поданням числа ланцюговим дробом: десяткова система числення є способом «закодувати» задане дійсне число використовуючи скінченну або нескінченну кількість цифр 0,1,…,9, в той час як зображення числа ланцюговим дробом «закодовує» задане дійсне число, використовуючи в якості «алфавіту» усі натуральні числа.

Ланцюгові (інша назва - неперервні) *дроби* вперше з'явились в XVI ст. Канонічний ланцюговий дріб – це вираз вигляду

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}\ ,$$

де a_0 - будь-яке ціле число, $a_1, a_2, a_3, \ldots$,- цілі додатні (натуральні) числа, називають неповними частинними або елементами даного дробу. В залежності від кількості цих елементів розрізняють скінченні і нескінченні ланцюгові дроби. Наприклад, ланцюговими дробами будуть такі вирази:

$$1+\frac{1}{2},\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}},\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ldots}}},\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Перших два вирази являють собою скінченні ланцюгові дроби, а останні – нескінченні. Алгоритм розвинення раціональних чисел в ланцюговий дріб можна знайти, наприклад, в [1,4].

Для ірраціонального числа процес цього розкладу в ланцюговий дріб продовжується нескінченно. Але і в цьому випадку іноді можна визначити вид дробу. Розглянемо в якості прикладу число $\sqrt{5}\approx 2{,}236\ldots$. Його ціла частина – 2, відповідно, остача - $\sqrt{5}-2$. Після перетворення остачі вираз прийме вигляд

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{1/\left(\sqrt{5}-2\right)}.$$

Помножимо чисельник і знаменник внутрішнього дробу на $\sqrt{5}+2$:

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{1/\left(\sqrt{5}-2\right)}=2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}}.$$

За формулою розкладу квадратів

$$\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)=5-2^2=1.$$

Тому

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}.$$

Якщо в правій частині останньої формули поставити замість $\sqrt{5}$ саме її «нескінченне число разів», то отримаємо

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}.$$

Для ланцюгових дробів не має простих і зручних правил виконання арифметичних дій, тим не менше вони активно використовуються у багатьох теоретичних дослідах і прикладних задачах, наприклад в задачах небесної механіки [1].

Сьогодні існує і багато інших систем числення. Їх дослідження є традиційною задачею теорії чисел. Нетрадиційні системи числення допомагають розв'язувати нові задачі, які стоять перед математиками. Однією з таких задач є пошук ефективного способу математичного задання фрактальних множин. Наприклад множина Кантора – це підмножина відрізку дійсних чисел $[0;1]$, запропонована німецьким математиком Георгом Кантом. Множина Кантора будується за допомогою видалення середніх третин сегментів прямої. На першому кроці видаляється середня третина із одиничного відрізку $[0;1]$, залишаючи $\left[0;\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};1\right]$. На наступному кроці, видаляється середня третина кожного із отриманих відрізків. Цей процес продовжується до нескінченності. Множина Кантора всіх точок інтервалу $[0;1]$, які залишаються після всіх повторних видалень. Множина Кантора є прототипом фракталу [2].

Якщо представляти числа в десятковій системі числення, то по вигляду числа фактично неможливо встановити чи належить задане число множині Кантора. Разом з тим, в трійковій системі числення це зробити дуже просто: число належить множині Кантора, якщо його подання в трійковій системі числення не містить одиниць.

Таким чином, під системою числення розуміють спосіб представлення та зображення чисел. При цьому кожному числу ставиться у відповідність скінченна або нескінченна послідовність інших чисел, що беруться з певної множини, яку називають алфавітом. Системи числення можуть використовувати як скінченний, так і нескінченнийалфавіт.

Література

1. Арнольд В.И.Цепные дроби / В.И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2001. – 40 с.
2. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов / А. Д. Морозов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
3. ФоминС.В. Системы счисления / С.В.Фомин. – М. : Наука, 1987. – 48 с.
4. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика / Гл. ред. М.Д. Аксенова. – М. : Аванта+, 2003. – 688 с.

Рафа Наталя Володимирівна
студентка магістратури, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ

Поняття неперервності функції відноситься до числа найважливіших в математиці. Однак, учні засвоюють його дуже формально: не розуміють зміст означення, логіки доведення теорем, не можуть навести приклади існуючих процесів, які описуються неперервними функціями.

Мета статті: описати технологію введення поняття неперервності функції в точці.

Наведемо приклади, за допомогою яких можна ввести поняття неперервності функції. У процесі розгляду таких прикладів учні знайомляться з поняттям неперервності функції спочатку на інтуїтивному рівні, потім за допомогою вчителя формулюють строге означення поняття та виділяють суттєві ознаки поняття.

До уроку потрібно підготувати зображення графіків функцій, що розглядаються в прикладах 1-4.Ці зображення можуть бути у вигляді плакатів, презентацій тощо.У багатьох підручниках з алгебри і початків аналізу вивчення даної теми починається розглядом прикладу 1.

Приклад 1. Візьмемо кубик свинцю, який має об'єм 1 дм^3 при 0 °С і рівномірно нагріємо його. Дослід показує, що зміна об'єму кубика відбувається так: при нагріванні від 0° до 327° об'єм свинцю збільшується від 1000 см^3 до 1030 см^3 поступово, без стрибків, тобто об'єм набуває при цьому проміжних значень. При t = 327° (точка плавлення свинцю) об'єм різко (стрибком) зростає до 1067 см^3 і при подальшому нагріванні від 327° до 500° знов поступово, без стрибків, зростає від 1067 см^3 до 1088 см^3, знаходячись при цьому в рідинному стані. Графік зміни об'єму свинцю залежно від температури подано на рисунку 1, звідки видно, що при 0° <t < 327° графік є неперервною, суцільною кривою *AB,* априt = 327° відбувається стрибок від точки *B* (327; 1030) до точки *C* (327; 1067), причому точка *B* належить графіку, а точка *C* йому не належить. При 327° <t < 500° графік знов є неперервною, суцільною кривою *СК.* Тут вісь *AN* лежить вище осі абсцис *(A* (0; 1000) належить осі ординат, але не збігається з початком *O).* Тому відрізки *BC* і *MP* не будуть ординатами точок *B* і *M.*

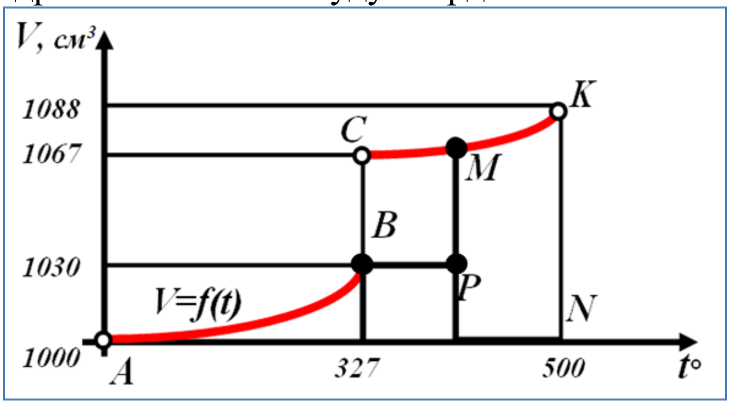


Рис.1.

Отже, графік залежності між температурою і об'ємом свинцю є функцією $v = f(t)$, яку задано на відрізку [0°, 500°], і є розривною в точці t = 327°, хоч і визначена в кожній точці відрізка.

З'ясуємо, як математично можна виразити ту особливість функції, що$v=f(t)$ в точці t_0 = 327° має розрив.

Обчислимо границю функції в точці t_0= 327°. З рисунка видно, що при t < 327 і $t \to 327$ значення функції v як завгодно близько наближаються до числа 1030, тобто v (327) = 1030 є границею функції. Приt> 327 і $t \to 327$ значення v як завгодно близько наближаються до числа 1067, тобто це число є теж границею функції. Але якщо границя в точці існує, то вона має бути єдиною.

Отже, при $t \to 327$ функція $v = f(t)$ не має границі. Це і стало причиною існування розриву функції в точці t = 327, хоч в цій точці функція визначена.[4]

Приклад 2.При зниженні температури ртуті до 4,1 К її питомий опір раптово зменшується до нуля. Графік зміни питомого опору ртуті зображено на рисунку 2. Неважко помітити, що стрибкоподібна зміна відбувається при x_0=4,1. Отже, відповідна функція має розрив у точці x_0.

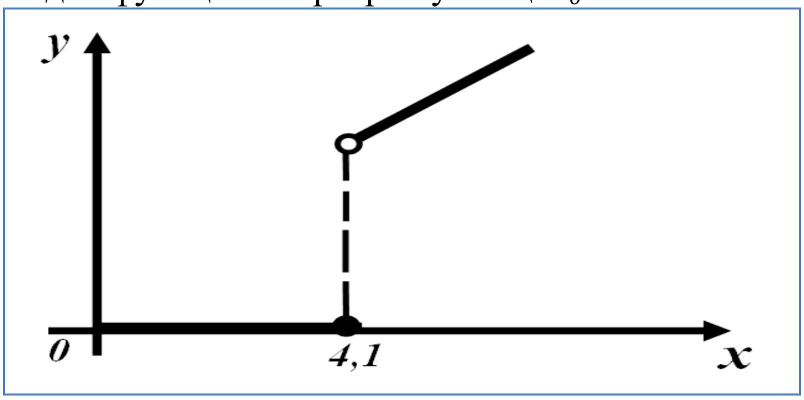


Рис. 2

Приклад 3. Основним елементом будь-якої будівельної конструкції є балка. Балки, на які спираються балкони, закладаються в стіну лише одним кінцем, другий же кінець залишають вільним. Такі балки називаються консольними. Перш ніж застосувати балку у будь-якій конструкції, її потрібно перевірити на міцність, тому що під дією навантаження балка прогинається. Візьмемо балку, лівий кінець якої замурований в стіну, і покладемо на неї рівномірно розподілене навантаження Q. Нехай довжина вільної ділянки балки дорівнює l. Відношення Q / l називаються інтенсивністю навантаження. Чим більша інтенсивність навантаження, тим сильніше прогинається балка. Позначимо через y прогин балки в точці, що знаходиться на відстані x від її лівого (не закріпленого в стіну) кінця. Кожній точці x відповідає єдине значення прогину, отже, прогин балки y є функцією відстані x, визначеної на проміжку [0; l]. Найбільший прогин буде на вільному кінці балки, тобто при x=1. Графік функції $y(x)$ зображений на рисунку 3.[2]

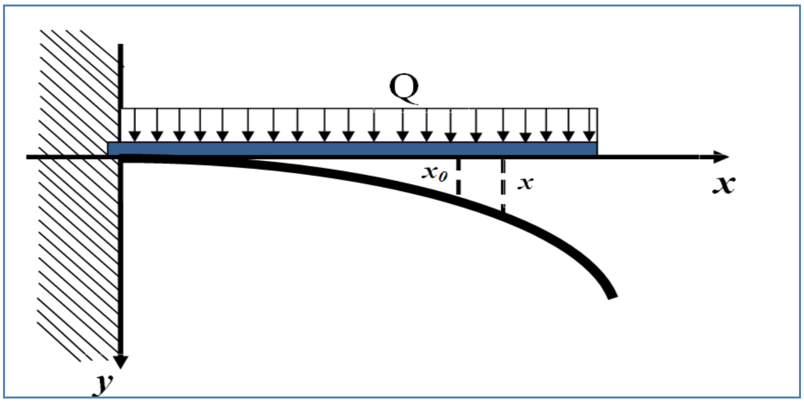


Рис. 3

Приклад 4. Розглянемо вже знайому нам функцію *y={x},* де *{x}*-дробова частина числа *x*. Її графік зображений на рисунку 4.

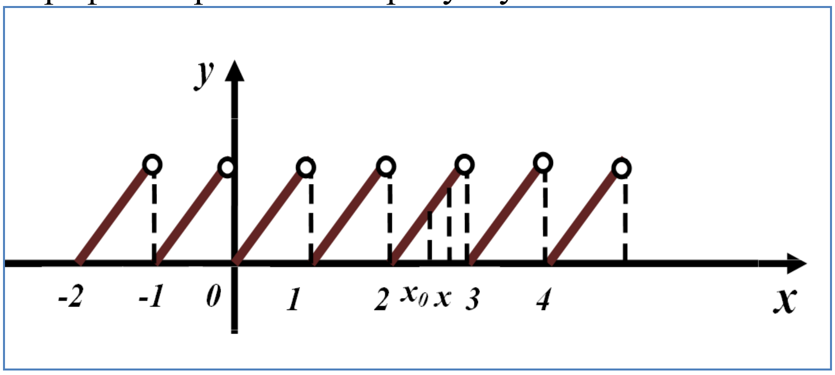


Рис.4

Після розгляду прикладів цих функцій варто запропонувати учням порівняти графіки на рисунках 1-4, знайти в них спільне і відмінне. Очевидно, графіки функційf *(t)* (приклад 1),*y=f (x)*(приклад 2)*y={x}* (приклад 4), схожі один на одного в тому сенсі, що вони не можуть бути зображені одним рухом руки, графіки складається з окремих частин. Очевидно, на кожному з проміжків функції *f (t)*,*y=f (x)*,*y={x}* неперервні в зазначеному вище сенсі. Такі функції будемо називати розривними. Графік функції *y(x)*(приклад 3) суттєво відрізняється від перших двох, він являє собою неперервну лінію, тобто лінію, яку можна накреслити одним рухом руки (не відриваючи олівця від паперу). Домовимося з учнями називати такі функції неперервними.

Далі вчитель пояснює, що не всі функції є неперервними, але функції, що описують реальні процеси в природі і техніці, неперервні. Наприклад: зміна атмосферного тиску залежно від висоти над рівнем моря, зміна температури і вологи повітря за якийсь проміжок часу, зміна росту, ваги людини з плином часу і так далі – всі ці процеси протікають неперервно. Тому неперервні функції особливо важливі для практичних цілей.

За графіком функції ми можемо визначити, чи є вона неперервною або розривною. Однак, вчитель зазначає, що побудова графіка досить часто буває дуже трудомісткою, технічно складною справою, до того ж достовірність графіка без попереднього аналізу дослідження функції сумнівна.Отже, сформувавши в учнів інтуїтивне уявлення про неперервність функції, ставимо перед нами наступну, нову задачу: ввести відповідну термінологію, сформулювати властивості неперервних функцій.

Перш за все потрібно точно визначити, що мається на увазі, коли кажуть, що функція *f (x)*, неперервна в точці x_0.

Спробуємо кількісно описати різницю між неперервними і розривними функціями. Ми бачимо, що функція, зображена на рисунку 3, має наступні властивості: для близькихзначень аргументу, наприклад x і x_0, відповідні значення функції, тобто $f(x)$ і $f(x_0)$, також наближаються один до одного. Цією властивістю наділена і функція $y=\{x\}$ у всіх точках x, крім цілочисельних. А ось в точках $x=n$, в яких немає неперервності, справа йде по іншому. Подивимося уважно ще раз, як веде себе ця функція в околі «поганих» точок. На кожному проміжку $[n; n+1]$ вона неперервно зростає, наближаючись як завгодно близько до значення 1, але цього значення не досягає, а в точці $x=n+1$раптово, стрибком повертається до значення нуль. Ми бачимо, що в точках, де немає неперервності, з наближення двох значень аргументу вже не обов'язково слідує, що відповідні значення функції будуть наближатись один до одного. Очевидно, цю обставину можна покласти в основу означення неперервності функції в точці. Перш за все необхідно надати точний зміст твердженню: якщо xнаближається до x_0, то $f(x)$наближається до $f(x_0)$.

Після такої бесіди вчителя з класом вводиться поняття «приросту аргументу» і «приросту функції» і відповідні символи. Роз'яснюється зміст записів: $\Delta y \to 0$ і $\Delta x \to 0$. Використовуючи їх, отримуємо наступне означення неперервності функції в точці.[3]

Означення 1. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad (1)$$

Вчитель повинен пояснити, що означення неперервності функції в точці можна надати інші формулювання, відмінні за формою, але тотожні за змістом з означенням 1. Запишемо вираз (1) в наступному вигляді:

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0,$$

звідси

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Отримаємо наступне означення неперервності функції в точці.

Означення 2. Функція f називається неперервною в точці x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad (2)$$

Отже, функція $y=f(x)$ в точці x_0 буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

1) функція $y=f(x)$ визначена в точці x_0, тобто існує число $f(x_0)$;

2) існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ функції в точці x_0;

3) границя функції дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Разом всі ці умови є необхідними і достатніми для того, щоб функція $y=f(x)$ буде неперервною в точці x_0.

Необхідно підкреслити, що для встановлення факту неперервності функції в точці можна користуватися будь-яким з означень (крім цього часто використовують означення неперервності функції в точці за Коші), але в різних випадках доцільно використовувати різні означення неперервності.

Означення 1 максимально наближене до інтуїтивних уявлень учнів про неперервність функції, тому воно значно краще сприймається учнями та фактично містить алгоритм доведення неперервності функції в точціx_0, воно досить ефективно використовується при знаходженні межі неперервної функції. Дійсно, рівність (2) означає, що функція f неперервна в точці x_0 і її межу в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці.[4]

Щоб довести неперервність функції в точці x_0 за допомогою означення 1, потрібно:

1) дати аргументу x_0 приріст Δx;

2) знайти відповідний приріст функції

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

3) дослідити Δy при $\Delta x \to 0$; якщо отримаємо, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y \to 0$, то робимо висновок, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0.

Для кращого розуміння теоретичного матеріалу з даної теми варто розглянути наступні завдання.

Завдання 1. На які із запитань слід відповісти ствердно?

1) Чи може функція бути неперервною у точці, у якій вона не визначена?
2) Чи може бути функція неперервною у точці $x=a$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не існує?
3) Чи завжди функція неперервна в деякій точці $x=a$, якщо функція визначена в цій точці та існує $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?
4) Чи завжди, якщо функція f неперервна в точці $x=a$, точка a належить області визначення цієї функції?

Ствердну відповідь можна дати на 4 запитання.

Завдання 2. Для кожної з функцій, графік яких зображено на рисунках 5-6, з'ясувати:

1) Чи визначена функція в точці x_0?
2) Чи існує границя функції в точці x_0?
3) Якщо границя в точці x_0 існує, то чи дорівнює вона значенню функції в цій точці?
4) Якщо границя в точці x_0 існує, то чи існує при цьому ліва або права границі?

Розв'язання.

Для графіка функції зображеного на рисунку 5:

1) функція в в точці x_0не визначена;
2) границя функції в точці x_0 існує;
3) Границя в точці x_0 існує, границя дорівнює значенню функції в цій точці.

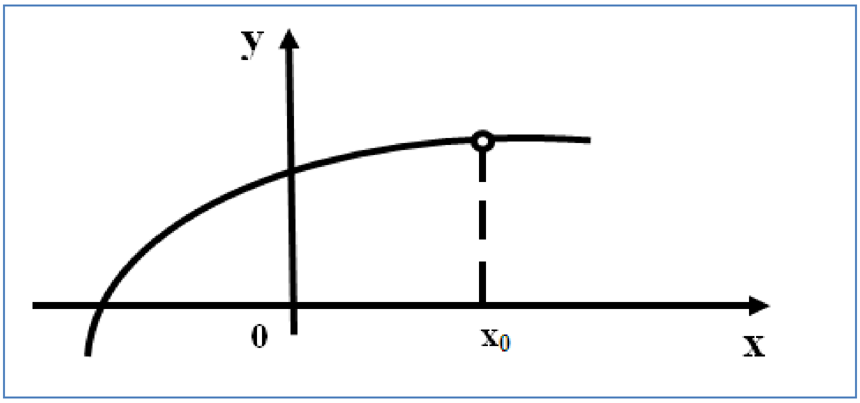


Рис. 5

Для графіка функції зображеного на рисунку 6:

1) функція в точці x_0 визначена;
2) границя функції в точці x_0існує;
3) границя в точці x_0 існує, дорівнює значенню функції в цій точці;
4) границя в точці x_0 існує, існує при цьому ліва і права границі.

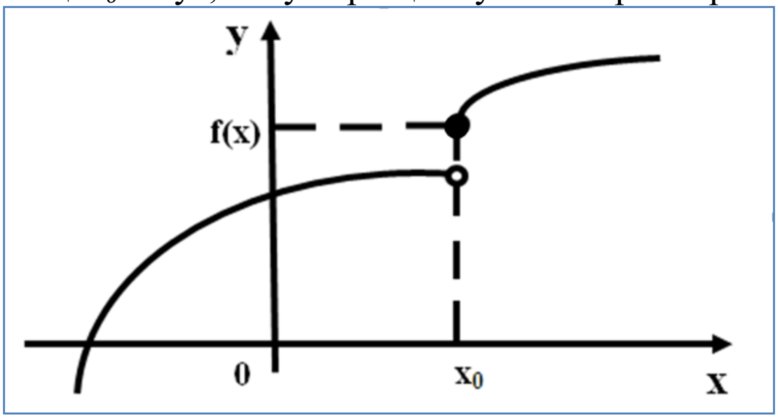


Рис. 6

Завдання 3. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \textit{якщо } x<1, \\ 3x-2, \textit{якщо } x\geq 1 \end{cases}$$

є неперервною в точці $x_0=1$.

Розв'язання. Оскільки $f(1)=1$, то для розв'язання задачі досить показати, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(1+\Delta x)-1)=0.$ Розглянемо дві можливості:

1) $\Delta x<0.$ Тоді маємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}((1+\Delta x)^2-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}((\Delta x)^2+2\Delta x)=0.$

2) $\Delta x>0.$ У цьому випадку $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3(1+\Delta x)-3)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}3\Delta x=0.$

Завдання 4. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \textit{якщо } x\neq 0, \\ 0, \textit{якщо } x=0 \end{cases}$$

не є неперервною в точці x_0=0.

Розв'язання. Оскільки, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, а $f(0)=0$, то дана функція $f(x)$ не є неперервною в точці x_0.

Для того, щоб встановити на якому рівні учні засвоїли матеріал з теми «Неперервність функції в точці» доречно запропонувати для самостійного опрацювання такі завдання:

Завдання 1. Дано функцію $f(x)=1-2x$. Знайдіть її приріст у точці $x_0=3$, який відповідає приросту аргументу $\Delta x=0{,}2.$

Завдання 2. Чи визначена функція $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x+3}$ у точці $x=-3$? Чи існує границя даної функції в цій точці? Якщо так, то чому вона дорівнює?

Завдання 3. Чи є зображена на рисунку 7 крива графіком неперервної функції?

Рис. 7

Завдання 4. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x},\ \text{якщо}\ x\neq 0,\\ a,\ \text{якщо}\ x=0\end{cases}$$

не є неперервною в точці $x_0=0$.

Завдання 5. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2},\ \text{якщо}\ x\neq 0,\\ 2,\ \text{якщо}\ x=0\end{cases}$$

є неперервною в точці $x_0=0$.

Література

1. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу 10-11: підручник [для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів] / Г. П. Бевз. – К.: ОСВІТА, 2006. – 256 с.
2. Виленкина Н. Я. Функции в природе и технике. – М.: Просвещение, 1978, с. 94.
3. Головченко Н. С. Из опыта введения понятия непрерывности функции / Н. С. Головченко // Математика в школе. – 1981. – №6. – С. 15-18.
4. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу 11клас: підручник [для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів] / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: ЗОДІАК-ЕКО, 1998. – 608 с.

Солодюк Олег Васильович
студент 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ІЗОГОНАЛЬНЕ СПРЯЖЕННЯ

З кожним трикутником пов'язане перетворення на площині, яке називається ізогональне спряження. Точки, що переходять одна в одну при ізогональному спряжені (ізогонально спряжені точки), часто мають цікаві властивості. Про них і піде мова в цій статі.

Розглянемо довільний трикутник ABC і точку P всередині нього. Відобразимо прямі AP, BP і CP відносно бісектрис кутів A, B і C відповідно (рис.1). Доведемо, що три отримані прямі перетинаються в одній точці.

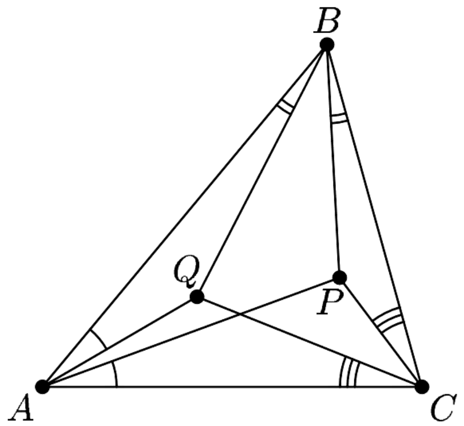


Рис. 1

Скористаємось допоміжною побудовою. Нехай P_1, P_2 і P_3 – точки, симетричні точці P відносно прямих AC, AB і BC відповідно (рис. 2), Q – центр описаного кола трикутника $P_1P_2P_3$. Покажемо, що через точку Q проходять прямі, симетричні прямим AP, BP і CP відносно бісектрис кутів A, B і C відповідно.

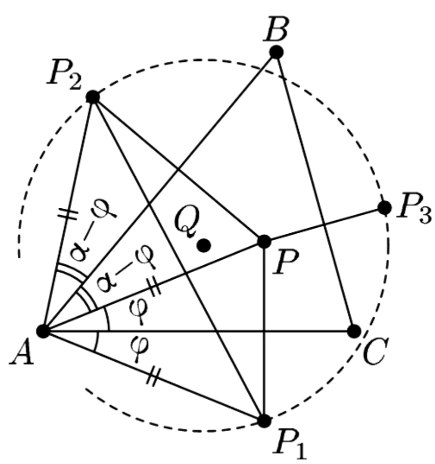


Рис. 2

Будемо вважати, що трикутник ABC гострокутній. Позначимо $\angle BAC = \alpha, \angle PAC = \varphi$. Тоді

$$\angle P_1AC = \angle PAC = \varphi,$$
$$\angle P_2AB = \angle PAB = \alpha - \varphi.$$

А оскільки $AP_1 = AP = AP_2,$ трикутник P_1AP_2 є рівнобедреним, і його кут при вершині A дорівнює $2\alpha.$ Проведемо бісектрису кута P_1AP_2, а значить, проходить через точку $Q.$ Але

$$\angle QAB = \angle P_2AQ - \angle P_2AB = \alpha - (\alpha - \varphi) = \varphi,$$

тобто

$$\angle QAB = \angle PAC.$$

Аналогічно доводяться рівності $\angle QBA = \angle PBC$ і $\angle QCA = \angle PCB.$

Відповідно, прямі AQ, BQ і CQ симетричні прямим AP, BP і CP відносно бісектрис кутів A, B і C відповідно.

Доведення для випадку коли трикутник ABC не є гострокутнім, доводиться аналогічно.

Точку Q називають *ізогонально спряженою* точці P відносно трикутника $ABC.$ Зрозуміло, що коли точка Q ізогонально спряжена точці P, тоді точка P ізогонально спряжена точці $Q.$ Дійсно, коли пряма AQ симетрична прямій AP відносно бісектриси кута A трикутника $ABC,$ тоді і пряма AP симетрична прямій $AQ.$

Аналогічним чином можна визначити ізогональну спряжену точку не тільки для внутрішніх точок трикутника, але і для точок які залишились в площині, відмінних від A, B і C. При цьому може виявитись, що прямі, симетричні прямим AP, BP і CP відносно бісектрис трикутника $ABC,$ паралельні. В такому разі ми вважаємо, що цій точці ізогонально спряжена «безкінечно віддалена» точка.

Відображення, яке переводить кожну точку площини (крім A, B і C) в точку, яка їй ізогонально спряжена, називається *ізогональним спряженням* відносно трикутника $ABC.$

Найпростіші властивості ізогонального спряження

1. *Ізогональне спряження не являється взаємно однозначним відображенням.*

Розглянемо, наприклад, точку на прямій $BC,$ відмінну від B і C. Пряма, симетрична прямій BC відносно бісектриси кута B, існує, очевидно, пряма AB, а пряма, симетрична BC відносно бісектриси кута $C,$ існує пряма AC. Тому вихідна точка перейде в точку $A.$ Означає, що вся пряма BC (за виключення точок B і C, для яких відображення невизначено) перейде в точку A. Тому ізогональне спряження являється взаємно однозначним відображенням.

Наведене твердження вимагає деякі пояснення для точок, ізогонально спряжених точками описаним околом трикутника ABC (відмінним від вершин A, B і C). Справа в тому що для кожної такої точки P прямі, симетричні прямим AP, BP і CP відносно бісектрис відповідних кутів трикутника, паралельні (рис. 3).

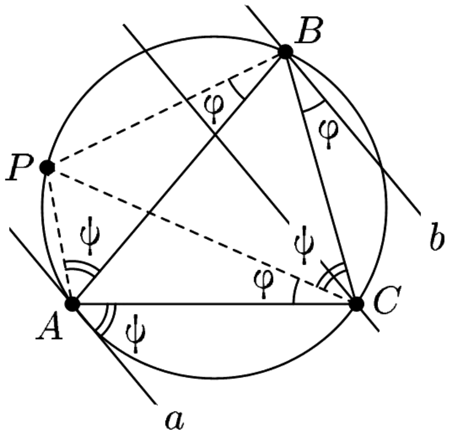


Рис. 3

Докажемо, наприклад, що прямі a і b паралельні (див. рис. 3). Сума внутрішніх односторонніх кутів $\angle A+\psi$ і $\angle B+\varphi$, утворених при перетині прямих a і b січною AB, рівно $\angle A+\psi+\angle B+\varphi=\angle A+\angle B+\angle C=180^0$. Звідси випливає, що $a \| b$.

Це означає, що кожній точці описаній околом, окрім вершин трикутника, відповідає деяка невласна точка, яка лежать на невласній прямій площини. Вірне і зворотне: коли даній невласній точці, визначеній «пучком» паралельних прямих, поставить у відповідність три паралельні прямі «пучка», що проходять через вершини трикутника, то прямі, симетричні їм відносно бісектрис відповідних кутів трикутника, визначають точку, ізогонально спряжену цій невласній точці.

2. *Ізогональне спряження має рівно чотири нерухомих точки (тобто існує рівно чотири точки, які ізогонально спряженні самим собі): центр вписаної і центри вневписаних околів трикутника ABC (рис. 4).*

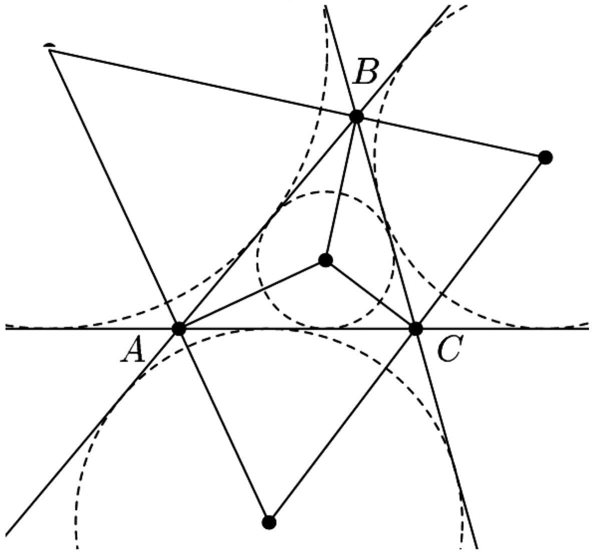


Рис. 4

Центр вписаного околу – це точка перетину бісектрис трикутника. Зрозуміло, що ця точка самоспряжена. Центр вневписаного околу – це точка перетину двох бісектрис зовнішніх кутів трикутника. Оскільки бісектриса зовнішнього кута перпендикулярна бісектрисі суміжного з ним внутрішнього кута, то перетворення симетрії відносно бісектриси цього внутрішнього кута залишає пряму, містить бісектрису внутрішнього кута, на місці. Означає, що при ізогональному спряженні точка перетину двох бісектрис зовнішніх кутів також залишається на місці.

Зрозуміло, що других нерухомих точок ізогональне спряження не має.

3. *Ортоцентр (точка перетину висот) трикутника* ABC *ізогональна спряжений центру описаного около цього трикутника.*

Доведення проведемо для гострокутного трикутника (випадок не гострокутного трикутника доводиться аналогічно). Нехай O - центр описаного околу, H - точка, ізогонально спряжена точці O. Позначимо $\angle ACB = \gamma$ (рис. 5).

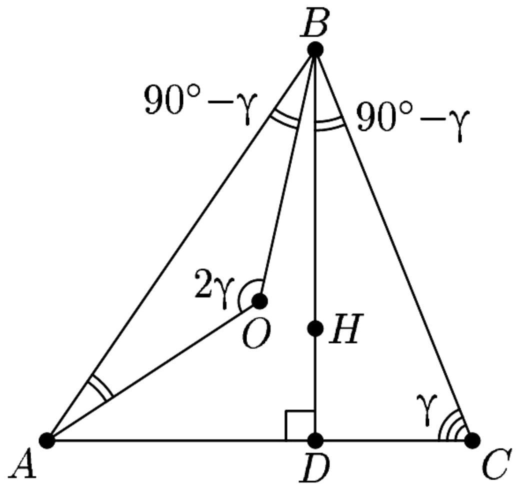


Рис. 5

За теоремою про вписаний кут, $\angle AOB = 2\gamma$. Трикутник AOB рівнобедрений, тому $\angle ABO = 90^0 - \gamma$ як кут при основі. Нехай точка D на прямій AC така, що $\angle CBD = \angle ABO.$ Тоді, за визначенням, точка H лежить на прямій $BD.$ Але $\angle BCD = \gamma, \angle CBD = 90^0 - \gamma,$ тому BD - висота трикутника $ABC.$ Аналогічно міркуючи, приходимо до висновку, що точка H лежить на всіх трьох висотах трикутника $ABC.$

Література

1. Прасолов В., Задачи по планиметрии. – Москва: МЦНМО, 2001.
2. Блак М., Болтянский В., Геометрия масс. – Москва: Наука, 1987.
3. Прасолов В., Точки Брока и изогональное сопряжение. – Москва: МЦНМО, 2000.

Студент Оксана Віталіївна
студентка 2 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ВЕКТОРА В ШКІЛЬНІЙ ТА ВИЩІЙ МАТЕМАТИЦІ

Поняття вектора в різних розділах математики вводиться по-різному. Найчастіше вектором називають напрямлений відрізок, або клас однакових напрямлених відрізків. Вперше з вектором ми знайомимось в шкільному курсі геометрії; більш детальніше та під дещо іншим кутом зору поняття вектора розглядається в аналітичній геометрії та лінійній алгебрі, які вивчаються у вищих навчальних закладах.

Саме поняття «вектор» (від лат. «той, що несе») ввів ірландський математик В. Гамільтон у 1845 році в роботах, які присвячені побудові числових систем, що узагальнюють комплексні числа. Він перший започаткував такі терміни: «скаляр», «скалярний добуток», «векторний добуток». Фактично в той самий час поняття вектора ввів німецький математик Г. Грассман. Саме Грассман першим розглядав поняття вектора без зв’язку їх з точками (як в геометрії) чи з силою, швидкістю та прискоренням (як у фізиці). Узагальнив ці два підходи англійський математик В. Кліффорд, він заснував векторне числення. Сучасного вигляду векторне числення набуло в XIX столітті у працях американського фізика і математика Дж. Гіббса.

Введенню поняття вектора в шкільному курсі математики сприяють фізичні величини, які характеризуються не лише величиною, але і напрямом (сила, швидкість, прискорення), з якими учні знайомляться на уроках фізики. Крім того для фізичних величин характерною є точка прикладання, оскільки розглядаються саме зв’язані вектори. Досить часто розглядають також ковзні вектори, тобто вектори, які можна переміщати лише вздовж прямої, на якій вони задані. На відміну від фізики в математиці вивчаються вільні вектори, при чому введення самого поняття не є однозначним.

Варто зазначити, що поняття вектора, яке по суті виникло з потреб розв’язування фізичних задач, в шкільній математиці носить також іншу важливу функцію: вектори є потужним інструментом для розв’язування геометричних задач.

В різних підручниках пропонуються дещо різні підходи до означення поняття вектора. Розглянемо їх детальніше.

В підручниках геометрії О. В. Погорєлова [8], [9], вектор — це напрямлений відрізок, при цьому рівність двох векторів випливає з того, що при паралельному перенесенні вони суміщаються (поняття вектора вводиться після введення поняття руху). Як наслідок цього формулюється властивість рівних векторів – вони однаково напрямлені і рівні за абсолютною величиною. При цьому абсолютною величиною вектора або його модулем називається довжина відрізка, що зображає вектор. В підручниках [3], [4] вектором називають також направлений відрізок втім рівні вектори означаються як однаково направлені колінеарні вектори з різними довжинами.

Дещо інше подання в підручниках О. Д. Алєксандрова [1], Г. В. Апостолової[5]. Вважається, що поняття вектора ототожнюється з поняттям векторної величини, тобто величини, яка має числове значення і напрям. Такий самий підхід пропонується і в підручнику з геометрії Мерзляка М. С. [7], причому вказується, що векторами в геометрії є напрямлені відрізки, оскільки такі відрізки характеризуються не лише довжиною, але і напрямом.

В підручнику М. І. Бурди, Н. А. Тарасенкової [6] паралельне перенесення визначається вектором. Позначається вектор як множина всіх однаковонапрямлених відрізків рівної довжини. Оскільки зообразити всю площину на папері не є можливим, то автори книги вважають доцільним на практиці вектор позначати одним напрямленим відрізком.

Хоча поняття вектора в різних підручниках вводиться дещо по-різному, загалом вивчаються одні й ті самі суміжні поняття (координати вектора, рівність векторів, довжина вектора, дії над векторами: додавання і віднімання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів, кут між векторами). В усіх цих випадках введення поняття вектора та перших означень, пов'язаних з ними здійснюється конкретно-індуктивним методом, тобто спочатку розглядаються приклади з повсякденного життя (фізичні поняття), потім формулюється відповідне означення.

Введення операцій над векторами також по-різному вводиться різними авторами. При цьому існує два підходи. Перший (пропонується в підручниках [7], Мерзляка) полягає в тому, що сумою двох векторів називається вектор, який одержується з допомогою «правила трикутника». При цьому як теорема доводиться той факт, що якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають координати $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$ відповідно, то вектор $\vec{a}+\vec{b}$ має координати $(x_1+x_2; y_1+y_2)$. Такий підхід відповідає конкретно-індуктивному методу введення поняття, оскільки перед цим спочатку розглядається задача про переміщення матеріальної точки спочатку з точки A в точку B, а потім з точки B в точку C. Другий підхід (пропонувався в підручнику Погорєлова) дещо зворотний: під сумою двох векторів із заданими координатами $(x_1; y_1)$ та $(x_2; y_2)$ називається вектор з координатами $(x_1+x_2; y_1+y_2)$ і як теорема доводиться «правило трикутника» додавання векторів. Те ж саме стосується операції множення вектора на число. Такий підхід відповідає абстрактно-дедуктивному підходу до введення поняття суми векторів.

Розглядаючи дії над векторами, помічаємо, що між діями над числами і діями над векторами є певна аналогія, що вказує на те, що вектори з введеними для них діями утворюють лінійний простір. Зазначимо, що підручник для класів з поглибленим вивченням математики [7] акцентує увагу на таких властивостях додавання векторів: переставній, сполучній та властивості суми вектора $\vec{a}$ і $\vec{0}$. Це є пропедевтикою до розуміння поняття векторного простору, яке з'явиться при вивченні математичних дисциплін у вищій школі.

При вивченні векторів вводиться векторний метод розв'язання геометричних задач, що є досить важливим. Це полягає в наступному: будь-який геометричний об'єкт (точку, пряму чи площину) можна записати у вигляді векторної рівності і навпаки. Отже, особливість цього методу в тому, що він зводить складну геометричну задачу до алгебраїчної, яку, зазвичай, легше розв'язати ніж геометричну.

За допомогою векторного методу розв'язують афінні й метричні задачі. Афінні задачі розв'язуються за допомогою лише лінійних операцій: додавання і віднімання векторів та множення вектора на число; тут переважно ставиться вимога довести паралельність прямих і площин, довести, що дані точки розміщені на одній прямій, дані прямі—в одній площині. Метричні задачі розв'язуються за допомогою не лише лінійних операцій, а й скалярного добутку векторів; найчастіше ставиться вимога знайти довжину відрізка, величину кута, встановити відношення перпендикулярності прямих і площин.

Вивчаючи аналітичну геометрію і лінійну алгебру, поглиблюються знання про вектор.

В підручнику П. С. Алєксандрова [2] вектор вводиться як напрямлений відрізок, при чому точка, що позначає початок вектора називається точкою прикладання цього вектора, також вводиться поняття нульового вектора, коли початок і кінець вектора співпадають.

В навчальному підручнику В. П. Яковець, В. П. Боровик, Л. В. Ваврикович «Аналітична геометрія» [11] вектором називається множина однаковонапрямлених (співнапрямлених) відрізків однакової довжини. Визначення нульового вектора збігається з зазначеним вище. При чому про рівність векторів можна говорити лише, коли множини відповідних їм напрямлених відрізків збігаються. Звідси випливає перша ознака рівності двох векторів, а саме: щоб два вектори були рівними, необхідно і достатньо, щоб вони були однаковонапрямленими і мали рівні довжини.

В курсі «Лінійної алгебри» поняття «вектор» вперше з'являється в розумінні «n-вимірного арифметичного вектора», тобто впорядкованого набору n чисел (або елементів певного поля). Множина таких об'єктів в природний спосіб наділяється операціями додавання і множення на число.

Згодом вводиться поняття векторного простору, яке визначається аксіоматично і здебільшого розглядається над полем дійсних чи комплексних чисел. Елемент векторного простору називається вектором. У векторному просторі нульовий вектор вирізняється такою своєю властивістю: при додаванні двох векторів,один з яких є нульовим, сума дорівнює ненульовому вектору, ця властивість не залежить від перестановки доданків. Слід зазначити, що на цьому етапі кардинально змінюється уявлення про те, що називають вектором в математиці: залежно від того, який векторний простір розглядається, вектором може називатись впорядкована пара чисел, направлений відрізок, многочлен, матриця, функція тощо. Важливим для векторної алгебри є введення поняття лінійної залежності і лінійної незалежності векторів. Від цього поняття відбувається послідовний перехід до визначення базису. Узагальнюючи, можна сказати, що все вище зазначене характерне для більшості підручників з лінійної алгебри, зокрема для підручника В. С. Чаріна [10].

Широкомасштабний розгляд поняття вектора відбувався завдяки його використанню в різних сферах діяльності людини. Вектори дуже часто використовуються в хімії, кристалографії, техніці, економіці, механіці, кінематиці, статиці, динаміці та гідродинаміці. У математиці його властивості використовуються для виведення тригонометричних формул, доведення багатьох ключових тверджень (наприклад, теореми косинусів), а скалярний добуток векторів допомагає при доведенні теорем на перпендикулярність, при знаходженні величин кутів. Все це ще раз підкреслює доцільність та важливість вивчення векторів.

Література

1. Александров А. Д. Начала стереометрии, 10: Проб. ученик. Материалы для ознакомления / А. Д. Александров, А. А. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 1982. – 191 с.

2. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. –512с.

3. Атанасян Л. С. Геометрия, 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010.—384 с.

4. Атанасян Л. С. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 18-е изд. — М. : Просвещение, 2009. — 255 с.

5. Апостолова Г. В. Геометрія: 11кл. : Підруч. для загальнооосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профільн. рівень / Г. В. Апостолова. —К. : Генеза, 2011. – 304 с.

6. Бурда М. І. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл./ М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. –К.: Зодіак–ЕКО, 2009. –240 с.

7. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. вивченням математики / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. – Х. : Гімназія, 2009 – 272 с.

8. Погорєлов О. В. Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 7–9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.В. Погорєлов – 8-е вид.—К.: Школяр, 2004—240с.

9. Погорєлов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10–11 кл. серед. шк. –2-ге вид. –К.: Освіта, 1995—128с.

10. Чарін В. С. Лінійна алгебра / В. С. Чарін. –2-ге вид., стер. – К. : Техніка, 2005.—416с.

11. Яковець В. П. Аналітична геометрія: Навчальний посібник / Яковець В. П., Боровик В. П., Ваврикович Л. В.—Суми : ВТД «Університетська книга», 2004.—296с.

Цимбал Марина Анатоліївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ТЕХНОЛОГІЯ ВВЕДЕННЯ ПОНЯТЬ ПРО ГАММА-ФУНКЦІЮ

Введенню нових понять з математики присвячуються як уроки в середній школі, так і лекції у вищих навчальних закладах. Виявляється, що ці заняття є найбільш складними як для викладача, так і для учня або студента.

Закономірно, що, зустрічаючись із новим поняттям, людина намагається засвоїти його, звертаючись при цьому до вже відомих їй понять. Про це свідчать навіть приклади, далекі від математики. Розповідають, що коли аборигени однієї глухої місцевості Африки вперше побачили танк, то назвали його носорогом. Виявилось, що в цій місцевості жило багато носорогів. Отже, щоб людина могла засвоїти нове поняття, вона повинна мати певний “фундамент”, тобто певний запас необхідних знань.Проілюструємо це на прикладі поняття гамма-функції Ейлера.

За означенням, гамма-функція – це математична функція, що розширює поняття факторіалу на поле комплексних чисел. Вона відноситься до класу спеціальних функцій, які представлені у вигляді власного або невласного інтегралу, що залежить не тільки від формальної змінної, але й від параметра. Якщо подати це означення без належної підготовки, то воно сприймається студентами в кращому випадку формально.

Щоб засвоїти нове поняття, студент повинен до цього уже володіти певним науковим і логічним апаратом. Математичний апарат для цього сформований ще у середній школі – поняття функції, параметричної функції, факторіалу, інтегралу і в університеті – комплексні числа, границя, власний і невласний інтеграли і т. д.

На лекціях, присвячених введенню нових понять, у кожного слухача виникають також питання про доцільність введення цих понять. Частіше всього, доцільність введення нових понять випливає безпосередньо з розгляду конкретних задач. Саме тому на заняттях, присвячених введенню цих понять, необхідно розглядати задачі, які до них приводять.

В нашому випадку до поняття гамма-функції приводить розширення поняттяфакторіалу.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Функцію факторіал можна ще записати у вигляді рекурентного співвідношення:

$$(N + 1)! = (N + 1) \cdot n!.$$

Це співвідношення можна розглядати не тільки при цілих значеннях n. Розглянемо різницеве рівнянняG $(z + 1) = zG (z)$.(1)

Незважаючи на просту форму запису, в елементарних функціях це рівняння не розв’язується. Його розв’язок називається гамма-функцією. Гамма-функцію можна записати у вигляді ряду або у вигляді інтеграла. Для вивчення глобальних властивостей гамма-функції зазвичай користуються інтегральним поданням.

Інтегральна форма

Перейдемо до розв'язування цього рівняння. Будемо шукати розв'язок у вигляді інтеграла Лапласа:

$$\Gamma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Gamma}(\mathrm{p}) \exp(-pz)\, dp$$

У цьому випадку права частина рівняння (1) може бути записана у вигляді:

$$z\Gamma(z) = z\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Gamma}(p) \exp(-pz)\, dp = -\Gamma(p)\exp(-pz)|_{-\infty}^{+\infty} + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Gamma}'\,(p) \exp(-pz)\, dp$$

Ця формула справедлива, якщо існують межі для неінтегрального члена. Заздалегідь нам невідома поведінка образу G . Припустимо, що образ гамма-функції такий, що неінтегральнийдоданок дорівнює нулю. Після того, як буде знайдено розв'язок, треба буде перевірити, чи вірне припущення про неінтегральний доданок, інакше доведеться шукати G (z)
як-небудь по-іншому. Ліва частина рівності (1) записується наступним чином:

$$\Gamma(z+1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Gamma}(p) \exp(-pz) \exp(-p)$$

Тоді рівняння (1) для образу гамма-функції має вигляд:

$$\tilde{\Gamma}(p) \exp(-p) = \tilde{\Gamma}'\,(p)$$

Це рівняння легко розв'язати:

$$\tilde{\Gamma} = -Cexp(-\exp(-p)) \exp(-pz)\, dp \text{ (2)}$$

Неважко помітити, що знайдена функція Гнасправді така, що неінтегральний член у формулі (2) дорівнює нулю. Знаючи образ гамма-функції, легко одержати і вираз для прообразу:

$$\Gamma(z) = C\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\exp(-p)) \exp(-pz)\, dp$$

Ценеканонічна формула, для того, щоб привести її до вигляду, отриманому Ейлером, треба зробити заміну змінної інтегрування:
t = exp (-p), тоді інтеграл набуде вигляду:

$$\Gamma(z) = C\int_{0}^{+\infty} \exp(-t) t^{(z-1)} dt$$

Стала C вибирається так, щоб при цілих значеннях z гамма-функція збігалася з функцією факторіал: Γ (n +1) = n!, тоді:

$$\Gamma(1) = C\int_{0}^{+\infty} \exp(-t)\, dt = 1$$

Отже,C = 1. Остаточно отримуємо формулу Ейлера для гамма-функції:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) t^{(z-1)} dt \text{(3)}$$

Гранична форма

Гамма-функцію можна представити у вигляді нескінченного добутку. Це можна помітити, якщо в інтегралі (3) представити

$$\exp(-t) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

Тоді інтегральна форма гамма-функції:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{(z-1)}dt$$

У цій формулі ми можемо поміняти межі - межу інтегрування в невласномуінтегралі і межу при $n\to\infty$ всередині інтеграла. Наведемо результат:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n t^{(9z-1)}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

Проінтегруємо за частинами:

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{(z-1)}dt = \frac{t^{z-1+1}}{z}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n 1|_{t=0}^{t=n} -$$

Якщо провести цю процедуру n разів, отримаємо:

$$\Gamma_n(z) = \frac{n!\,n^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$$

Переходячи до границі, отримаємо граничну форму Ейлера для гамма-функції:

$$\Gamma_n(z) = \lim_{n\to\infty} n!\frac{n^z}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)}(4)$$

Введенню кожного нового поняття повинна передувати інформація про його подальшу необхідність, тобто практичне застосування.

Гамма функції є зручним засобом для обчислення деяких інтегралів зокрема багатьох з тих інтегралів, які не можна представити в елементарних функціях.

Застосуємо гамма функцію до обчислення інтеграла:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x cos^n x dx$, де m>-1, n>-1.

Покладаючи, що $\sin^2 x = u$, маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x cos^n x\, dx = \int_0^1 u^{\frac{m+1}{2}-1}(1-u)^{\frac{m+1}{2}-1}du =$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

маємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m x cos^n x dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}$$

у інтегралі

$\int_0^\infty x^k e^{-mx^n}\, dx$, де k> -1, n> 0, досить покласти$mx^n = t$

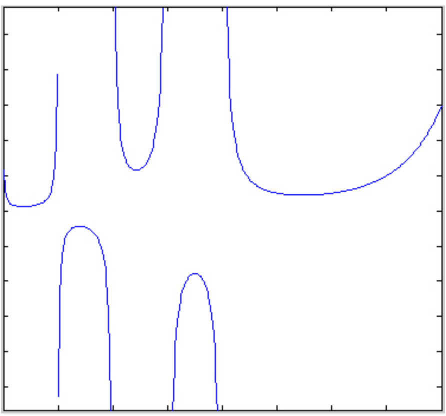
$$\int_0^\infty x^k e^{-mx^n} dx \frac{1}{mx^{\frac{k+1}{n}}}\int_0^\infty t^{\frac{k+1}{n}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{mn^{\frac{k+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Інтеграл$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1} dx$, де s> 0, розкласти в ряд

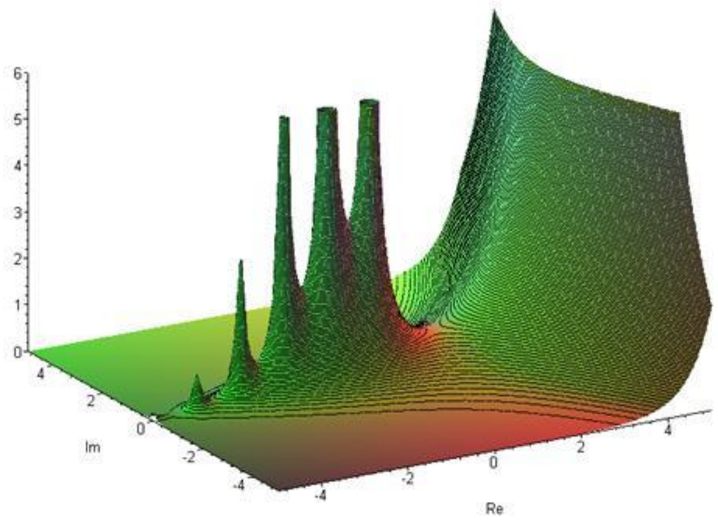
$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1} dx = \int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt\right) =$$
$$= \Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \Gamma(s)\varepsilon(s)$$

де $\varepsilon(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$- дзетта-функція Рімана

Для кращого розуміння деяких математичних понять використовується їх графічне зображення. Графік гамма-функції наведений на рисунку.



Графік гамма-функції дійсної змінної



Графік гамма-функції

В даній статті ми розглянули технологію введення поняття гамма-функції Ейлера, яка включає:

- мотивацію необхідності введення даного поняття;
- математичне виведення функції Ейлера в різних формах;
- наочну ілюстрацію;
- практичне використання.

Література

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.- М.: Наука, 1966. – 624 с.
2. Ильин В.А. , Садовничий В.А., СендовБл.Х., Математический анализ. - М.: Издательство МГУ, 1987. - 358с.
3. Киселёв О.М. Зоопарк чудовищ или знакомство со специальными функциями.- Х: ХНАМГ, 2000. – 80 с.
4. Кузнецов Д.С. Специальные функции.- М.: Высшая школа, 1962. – 272 с.
5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения (2-е изд.).- М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. – 359 с.
6. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М., Наука, 1990. – 528 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А.Интегралы и ряды, специальные функции.- М.:Наука, 1983. – 749 с.

Чабан Наталя Володимирівна
студентка 2 курсу, напрям підготовки «Математика»

РІЗНІ ПІДХОДИ ДО ВВЕДЕННЯ ПОНЯТТЯ ДЕТЕРМІНАНТА В КУРСІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Поняття детермінанта є одним з базових в лінійній алгебрі та аналітичній геометрії. З'явившись з потреб розв'язування систем лінійних рівнянь воно стало зручним інструментом для розв'язування багатьох інших задач. В аналітичній геометрії використовуються лише детермінанти другого і третього порядків, які означаються з допомогою прямої формули. Для лінійної алгебри важливо ввести означення детермінанта n-го порядку. При цьому в сучасній літературі пропонується це робити по-різному. Висвітленню цих підходів до означення детермінанта і присвячена ця стаття.

Термін «детермінант» походить від латинського слова determino, що означає «визначати». Вживання цього терміна в алгебрі пояснюється тим, що детермінанти визначають розв'язки системи лінійних рівнянь. Тому замість терміна «детермінант» вживають також термін «визначник».

Вперше поняття детермінанта згадується японським математиком Секі Такаказу в 1683 році, і незалежно у 1693 році німецьким математиком Готфрідом Лейбніцом, за 160 років до того як була розроблена теорія матриць.

Багато років детермінанти застосовувалися в основному при обговоренні систем лінійних рівнянь. Проте вже в 1750 році в статті швейцарського математика Габріеля Крамера було показано, що детермінанти можуть бути корисними і в аналітичній геометрії, а саме для побудови рівнянь відомих кривих у декартовій площині. Пізніше, у 1812 році Огюстен-Луї Коші у своїй праці опублікував формули, які виражали через детермінанти об'єми деяких многогранників (зокрема тетраедра).

Завдяки дослідженням Коші з'явився інтерес до застосувань детермінантів у різних сферах діяльності. І вже на початок XX століття теорія детермінантів була розвинута досить глибоко.

Сьогодні детермінанти мають мале обчислювальне значення у великомасштабних матричних обчисленнях. Тим не менше детермінантні формули та знання є корисними в деяких застосуваннях лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу тощо.

В сучасній літературі пропонуються різні підходи до означення детермінанта n-гопорядку, а саме:

1) аксіоматичний;
2) індуктивний або рекурсивний;
3) аналітичний.

Розглянемо їх детальніше.

Історично поняття детермінанта вперше виникло у зв'язку з проблемою виведення формул, які давали б змогу знаходити розв'язки системи лінійних рівнянь. Суть аксіоматичного підходу означення детермінанта полягає в наступному.

Розглянемо систему лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Після відповідних спрощень та перетворень у випадку сумісності системи одержимо її розв'язок:

$$x = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Легко помітити, що чисельники й знаменники у цих формулах побудовані за одним і тим самим правилом: кожний з цих виразів утворено з чотирьох чисел як різниця попарних добутків.

Оскільки до цього можна ввести поняття матриці як прямокутної таблиці, складеної з елементів певного поля, то можна ввести поняття детермінанта матриці другого порядку (детермінанта другого порядку) як певного числа, що ставиться у відповідність до заданої матриці.

Детермінантом матриці другого порядку $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$називають число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, яке схематично записують $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Нехай тепер задано систему трьохлінійнихрівняньз трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему, використовуючи знайдені формули розв'язку системи двох рівнянь з двома невідомими, приходимо до результату:

$$x = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}},$$

$$y = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}},$$

$$z = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}.$$

Легко помітити, що ці формули за своєю будовою дуже подібні. Їх чисельники і знаменники утворені за тим самим правилом, причому знаменники однакові і побудовані лише з коефіцієнтів при невідомих.

За аналогією з попереднім введемо поняття визначника третього порядку. Детермінантом матриці 3-го порядку з елементами a_{ij} називають число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

З означення видно, що детермінант 3-го порядку є алгебраїчною сумою шести членів, утворених з дев'яти елементів квадратної матриці 3-го порядку за певним правилом. Кожний член є добутком трьох елементів і беруть його з певним знаком.

Для запам'ятовування вказаних означень використовують різні мнемонічні правила («правило трикутників», правило Саррюса).

Розв'язуючи ці системи в загальному вигляді, можна було б ввести поняття детермінанта 4-го порядку, потім 5-го і т.д. Однак такий спосіб введення визначників більш високих порядків виявився б трудомістким і малоефективним із зростанням порядку детермінанта обчислення становилися б дедалі громіздкими.

Поняття детермінанта довільного порядку таким способом ввести взагалі неможливо. Помічена аналогія в будові детермінантів 2-го і 3-го порядків приводить до такого означення детермінанта *n*-го порядку: детермінантом матриці *n*-го порядку

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається алгебраїчна сума усіх можливих $n!$ членів, кожний з яких є добутком *n* елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці; при цьому знак члена визначається множником $(-1)^t$, де t – число інверсій в перестановці других індексів даного члена, якщо він упорядкований за першими індексами [1].

На базі цього означення можна вивести усі властивості детермінантів, зокрема і теорему Лапласа – розклад детермінанта за довільним рядком (стовпцем).

Вказане означення є складним для запам'ятовування, непрактичним для обчислень.Це його головний недолік. Таке означення в загальному випадку несе теоретичний характер.

Іншим методом введення поняття детермінанта є *індуктивний*, або *рекурсивний* [2, 5].

Нехай ми маємо матрицю *n*-гопорядку над числовим полем *P*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij} \right]$$

Множину всіх матриць прийнято позначати через $M_n(P)$.

Якщо $n=1$, то кожна з матриць множини $M_1(P)$ складається з одного числа a_{11}. Вважатимемо, що в цьому випадку детермінантом матриці A $\det A = a_{11}$. Якщо $n=2$, то будемо вважати, що

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Детермінант матриці третього порядку визначимо через детермінанти матриць другого порядку: $\det A = a_{11}\det M_{11} - a_{12}\det M_{12} + a_{13}\det M_{13}$, де матриці M_{11}, M_{12} і M_{13} отримані з A видаленням першого рядка і одного з трьох стовпців.

Для будь-якої квадратної матриці A нехай M_{ij} позначає під матрицю утворену видаленням i-го рядка і j-го стовпця матриці A. Тоді $\det M_{ij}$ називають мінором елемента a_{ij}, а число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ називають його алгебраїчним доповненням.

Отже, для $n \ge 2$ *детермінант* матриці n-го порядку $A=\left[a_{ij}\right]$ є сума n членів виду $a_{1j}A_{1j}$:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} .$$

Таке означення детермінанта, як можна довести, рівносильне тому, що було означено при аксіоматичному підході. Усі властивості доводяться на основі методу математичної індукції.Такий підхід притаманний багатьом сучасним американським підручникам з лінійної алгебри (див. наприклад, [5]).

Ще одним підходом до означення детермінантів n-го порядку є *аналітичний* підхід.

Розглянемо систему векторів $\vec{a}_1,\ldots,\ \vec{a}_n$ і спробуємо сконструювати індикатор лінійної незалежності – функцію $f\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n\right)$, яка дорівнює нулю у випадку лінійної залежності даної системи. При цьому функція f повинна мати якомога простий вигляд. Для цього на неї накладається ряд обмежень, зокрема те, що ця функція f має бути лінійною по кожному аргументу при фіксованих значеннях інших аргументів. Дамо точне формулювання вимог до функції f:

а) для будь-якого $1 \le i \le n$ функція лінійна за i-м аргументом:

$$f\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{i-1},\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{a}_{i+1},\ldots,\vec{a}_n\right)=$$

$$=\alpha f\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{i-1},\vec{a},\vec{a}_{i+1},\ldots,\vec{a}_n\right)+\beta f\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{i-1},\vec{b},\vec{a}_{i+1},\ldots,\vec{a}_n\right)$$

для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{b}\in R^n$ і чисел $\alpha,\beta\in R$;

б) якщо система векторів $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ лінійно залежна, то $f\left(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n\right)=0$;

в) функція приймає задане ненульове значення на заданій лінійно незалежній системі (умова нормування): $f\left(\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n\right)=1$, де $\vec{e}_1,\dots\vec{e}_n$ – стовпці одиничної матриці розмірністю $n\times n$ [3].

Функцію *f*із вказаними властивостями будемо називати індикатором лінійної незалежності.

Доводиться, що за вказаних умов існує лише єдина функція, що їх задовольняє. При цьому якщо її розглядати в термінах координат векторів, то вона задовольняє означення детермінанта, що пропонується при аксіоматичному підході.

У підручнику [4] поняття визначників 2-го і 3-го порядків виникає у зв'язку з обчисленням площ і об'ємів найпростіших фігур і тіл у геометрії. Розглядаючи на площині прямокутну систему координат автор ставить перед собою задачу знаходження площі паралелограма побудованого на векторах цієї системи. Тобто задавши у прямокутній системі координат два вектори з їхніми проекціями на осі координат ми приходимо до поняття визначника другого порядку. Аналогічним чином, розв'язуючи задачу про обчислення об'єму паралелепіпеда, який визначається трьома векторами в просторі, приходимо до поняття визначника третього порядку [4].

Таким чином, поняття детермінанта може вводитись різними шляхами, приймаючи за означення ту чи іншу його характеристичну властивість. На нашу думку, аксіоматичний підхід є дещо застарілим, оскільки таке означення не несе в собі практичної цінності і є в загальному випадку суто теоретичним. Разом з тим, явне вираження детермінанта через його елементи повинно доводитись як властивість при використанні рекурсивного та аналітичного підходів означення детермінанта.

При аксіоматичному та аналітичному підходах означення визначника вводяться конкретно-індуктивним шляхом, тобто до нього приходять, розв'язуючи цілком конкретну задачу: відповідно знаходження розв'язків систем лінійних рівнянь та конструювання індикатора лінійної залежності системи векторів. Рекурсивний підхід реалізує абстрактно-дедуктивний підхід до введення поняття, тобто усі застосування визначника знайдуть своє відображення після вивчення його властивостей.

Література

1. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел. Частина перша / Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. – К. : Вища школа, 1974. – 464 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. К.Линейная алгебра : Учеб. для вузов / Ильин В. А., Позняк Э. К. – 4-е изд. – М. : Физматлит, 1999. – 296 с.
3. Тыртышников Е. Е. Матричныйанализ и линейная алгебра / Тыртышников Е. Е. –М. : Физматлит, 2007. – 358 с.
4. Чарін В.С. Лінійна алгебра / Чарін В. С. – 2-ге вид., стер. – К.: Техніка, 2005. – 416с.

Студентський науково-методичний збірник

Методичний пошук.
Технології введення математичних понять у процесі навчання математики

Збережено особливості мовного стилю авторів

Технічний редактор: Ю.В.Фірманюк
Відповідальний за випуск: Д.О. Баб’юк
Оригінал-макет: Ю.В.Фірманюк
Дизайн обкладинки: Ю.В.Фірманюк

Здано до складання 05.01.2012
Підписано до друку 12.01.2012
Формат Папір офсетний
Гарнітура TimesNewRoman. Друк різографічний.
Умовн. друк. арк.
Наклад 200 прим.