Вінницький державний педагогічний університет

імені Михайла Коцюбинського

Інститут математики, фізики і технологічної освіти

Кафедра математики і методики навчання математики

Третій випуск збірника
публікацій студентів напряму
підготовки «Математика»
за тематичним напрямом

«Застосування математичних знань та вмінь»

присвячується **80-річчю**
кафедри математики
Вінницького державного педагогічного університету імені
Михайла Коцюбинського

Вінниця – 2013

Методичний пошук. Застосування математичних знань та вмінь // Студентський науково-методичний збірник. Випуск 3. – Вінниця: ФОП Легкун В.М., 2013 – 301 с.

Затверджено до друку вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського
(протокол № 12 від 26 червня 2013 р.)

Рецензенти:

Ясінський В.А. – Заслужений вчитель України, доцент кафедри математики та методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.
Клочко В.І. – доктор педагогічних наук, професор кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету.

Редакційна колегія:

О. І. Матяш – консультант
К.І.Полянська – відповідальний редактор
М.В.Савченко – заступник відповідального редактора
В.П.Слободян – заступник відповідального редактора
І.О.Зелена – секретар редакційної колегії
А.Я.Мазай – секретар редакційної колегії
Т.В.Ніяка – секретар редакційної колегії
М.А.Цимбал – секретар редакційної колегії

Відповідальність за автентичність цитат, правильність фактів і посилань несуть автори статей.

Для студентів та вчителів напряму підготовки «Математика»

ЗМІСТ

Розділ 1. Застосування знань алгебри у розв'язуванні різних математичних задач.....8

Агаркова Ольга Євгенівна
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ БАНАХА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ……..8

Бойко В. П.
ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ ДІАГНОСТИКИ УЧНІВСЬКИХ ПОМИЛОК З АЛГЕБРИ……...12

Власюк Наталя Володимирівна
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ОПТИМІЗАЦІЮ……18

Калюжко Наталя Миколаївна
ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ ПЕРЕТВОРЮВАТИ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ВИРАЗИ В ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗАДАЧ……24

Крайнічук Галина Василівна
ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ЛАТИНСЬКИХ КВАДРАТІВ……...29

Кузьменко Мар'яна Дмитрівна
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КУБІЧНИХ РІВНЯНЬ……33

Лавренюк Альона Іванівна
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО ТА НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯФУНКЦІЇ…….……..37

Макух Ірина Станіславівна
ДОБІРКА ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДО ТЕМИ «ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ»…….42

Мартинюк Тетяна Сергіївна
МЕТОДИКА РОЗВЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ…….……46

Масняк Ольга Сергіївна
ФУНКЦІЯ В КОНТЕКСТІ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ АЛГЕБРИ……...……52

Нікуляк Тетяна Вікторівна
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ВІЄТА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ……....58

Приходько Ніна Василівна
ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ РІЗНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ…….…62

Струк Світлана Миколаївна
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРУ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ……....67

РОЗДІЛ ІІ. Застосування знань геометрії у роз'язуванні різних математичних задач……...72

Вергелес Наталя Василівна
ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ НА ДОСЛІДЖЕННЯ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

СТАРШОЇ ШКОЛИ……..……..…72
Жбанкова Анна Леонідівна
ЕВРИСТИЧНІ ПРИЙОМИ ПРИ РОЗВЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ НА ТЕМУ: «ПІРАМІДА»…… ……77
Зелена Ірина Олександрівна
ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ……..83
Кремінська Анна Сергіївна
ВИКОРИСТАННЯ ПРЯМИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІЗНИХ ТІЛ ЗАДАНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ……...87
Луценко Віктор Юрійович
ОПОРНІ ЗАДАЧІ З ТЕМИ «КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ»…….92
Масняк Ольга Сергіївна
ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩІ ПОВЕРХНІ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ……..97
Окопна Таїса Миколаївна
ЗАДАЧА ПРО МЕДІАНИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА……...103
Павлюк Наталя Анатоліївна
ЗАСТОСУВАННЯ ОПОРНИХ КОНСПЕКТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ»……..108
Полянська Катерина Ігорівна
ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАВДАНЬ ПРИКЛАДНОГО ЗМІСТУ З ГЕОМЕТРІЇ ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ З МАТЕМАТИКИ……...…113
Романенко Анна Олександрівна
ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ»……..119
Салямон Катерина Антонівна
СТЕРЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ПРАКТИЧНОГО ЗМІСТУ……..124
Слободян Вікторія Петрівна
ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ В СТАРШІЙ ШКОЛІ……...…130
Сторожук Людмила Валеріївна
МІСЦЕ І РОЛЬ АНАЛОГІЙ В ПІЗНАННІ ТА НАВЧАННІ……...135
Хомчак Наталія Володимирівна
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ СТЮАРТА ТА ЇЇ НАСЛІДКИ……..138
Ярмолюк Ольга Анатоліївна
МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ’ЗАННЯ ЗАДАЧ…….143
Ящук Каріна Ігорівна
ФОРМУЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ КРУГА З ВИКОРИСТАННЯМ СУЧАСНИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ……147

РОЗДІЛ ІІІ. Застосування математичних методів в гуманітарній сфері...153
Байдацький Олександр Павлович
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ПРОГНОЗІ ПОГОДИ……...153
Волошанюк Тетяна Анатоліївна
ЗАСТОСУВАННЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ ЯК ЗАСОБУ ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ РОЗУМОВОЇ АКТИВНОСТІ УЧНІВ……159
Гончарук Вікторія Володимирівна
ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У 5-6 КЛАСАХ…….……164
Дерепащук Людмила Михайлівна
ЗАСТОСУВАННЯ КОМБІНАТОРИКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ «ВЕНГЕРСЬКОГО ШАРНІРНОГО КУБИКА» ТА У ЖИТТІ……168
Костюк Дмитро Анатолійович
МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ІСТОРИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ…….…174
Мазай Аліна Яківна
МАТЕМАТИЧНА ЗАДАЧА ЯК ЗАСІБ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ (НДДС)……...…178
Ніяка Тетяна Віталіївна
ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ В ЗАДАЧАХ ПОШУКУ НАЙКОРОТШИХ ШЛЯХІВ……..184
Олексієнко Віталіна Олександрівна
ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК МАТЕМАТИКИ І МУЗИКИ……190
Савченко Маргарита Валеріївна
ЗНАННЯ ГЕОМЕТРІЇ ТА КМІТЛИВІСТЬ У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЦІКАВИХ ПОБУТОВИХ ЗАДАЧ…….……195
Сапсай Богдан Юрійович
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ У МОВОЗНАВСТВІ……200
Серветнік Віталій Віталійович, Томчук Ірина Іванівна
ПРОБЛЕМНІ СИТУАЦІЇ ЯК ЗАСІБ АКТИВІЗАЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ВНЗ І-ІІ РІВНЯ АКРЕДТАЦІЇ……...203
Цимбал Марина Анатоліївна
ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ З ТЕОРІЇ РЕШІТОК ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПЕРЕЛИВАННЯ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧНОГО БІЛЬЯРДА……207
Яцишен Сергій Олегович
КРИВА ЗАБУВАННЯ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ……..…213

РОЗДІЛ ІV. Застосування математичних методів в природничо-науковій сфері…….……...217
Бірченко Вікторія Леонідівна
РІЗНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ…….217
Бондар Марія Миколаївна
ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ……....222

Войтовик Олексій Вікторович, Устимчук Юлія Анатоліївна,
ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИКИ В БІОЛОГІЇ……...227
Волкодав Тетяна Анатоліївна
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ЕКОНОМІЦІ…….233
Заскока Оксана Василівна
ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІКИ……..240
Ільчук Аліна Григорівна
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СІЛЬСЬКОМУ ГОСПОДАРСТВІ…...244
Ільчук Ірина Сергіївна
ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ……...248
Клєйманов Владислав Олександрович
ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ В ЕКОНОМІЦІ……..253
Кузема Олександр Олександрович
МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ГЛОБАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПОЗИЦІОНУВАННЯ (GPS)…….259
Матковська Інна Анатоліївна
ВИКОРИСТАННЯ ЛАТИНСЬКИХ КВАДРАТІВ У ВИБОРІ МЕТОДУ ПОПЕРЕДНЬОЇ ОБРОБКИ РИНКОВИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ……265
Мельник Тетяна Олександрівна
ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ…...269
Наконечний Я.В., Дарченко О.В.
АРИФМЕТИЧНА І ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЇ В БАНКІВСЬКИХ РОЗРАХУНКАХ……..273
Нечипорук Юлія Володимирівна
ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВІДСОТКІВ……278
Пугач Олена Сергіївна
ГРАФИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ…….282
Солодюк Ганна Вікторівна
ВИКОРИСТАННЯ ЕЙЛЕРОВИХ ГРАФІВ……..287
Солодюк Олег Васильович
СПРОЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ НОВІТНІХ ТЕХНОЛОГІЙ…….291
Фармагей Оксана Олексіївна
ТЕОРІЯ ГРАФІВ. ЗАСТОСУВАННЯ ДЕРЕВ……..296

Передмова

Збірник статей призначається для тих, хто бажає поглибити знання з математики та методики навчання математики. Мета посібника – дати майбутнім вчителям методичну розробку, в якій систематизовано вдалі та різноманітні приклади застосування математичних знань та умінь.

Збірник статей підготовлено у відповідності до вимог навчальної програми з методики навчання математики та завдань фахової підготовки майбутнього вчителя математики.

Збірник статей структурований за модульним принципом. Він складається з чотирьох частин, кожна з яких містить матеріал, що відповідає певній тематиці:

1. Застосування знань алгебри у розв'язуванні різних математичних задач.
2. Застосування знань геометрії у розв'язуванні різних математичних задач.
3. Застосування математичних методів у гуманітарній сфері.
4. Застосування математичних методів у природничо-науковій сфері.

Кожний розділ складається з 12 - 16 статей. Кожна стаття вибудована за єдиною структурою: постановка проблеми, мета статті, виклад основного матеріалу, висновки, література.

У створенні збірника «Методичний пошук. Випуск 3» взяла участь група студентів магістратури спеціальності «Математика». Крім редакційної колегії та технічної підготовки збірника до випуску активно працювали над його створенням: Бірченко В.Л., Бондар М.В., Вергелес Н.В., Гончарук В.В., Заскока О.В., Ільчук І.С., Кремінська А.С., Солодюк О.В..

Автори вдячні за поради і рекомендації, критичні зауваження і доброзичливі побажання викладачам кафедри математики та методики навчання математики:

РОЗДІЛ І. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ АЛГЕБРИ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ РІЗНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Агаркова Ольга Євгенівна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ БАНАХА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Постановка проблеми. Однією з найпопулярніших задач з математики є розв'язування рівнянь та їх систем. В наш час існує безліч науковців, які займаються пошуком різних методів розв'язування цих рівнянь. Але не завжди ці методи є раціональними та ефективними. Існують такі методи розв'язання рівняння, які не дають змогу знайти навіть наближений розв'язок. Саме для розв'язання рівнянь такого типу використовується теорема Банаха, яка є гарантом існування і єдності розв'язку широкого класу рівнянь і є актуальною у математичних науках.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Наука про банахові простори створювалася від першої половини минулого століття, зокрема зусиллями потужної групи львівських математиків, до якої входили С.Банах, С.Мазур, В.Орлич, Ю. Шаудер, Г. Штейнгауз, а також у другій половині – багатьма математиками з усього світу. Цікаві та надзвичайно складні проблеми приваблюють декілька сотень математиків і у наш час починаючи від класичних робіт Дж. фон Неймана, Л. Шварца, Ж. Д'єдонне, А. Гротендіка, Н. Бурбакі до сучасних робіт українських математиків Т. О. Банаха, М. Л. Горбачука, М. З. Згуровського, П. І. Когута, В. К. Маслюченко, В. С. Мельника та інших.

Мета статті: продемонструвати важливість теореми Банаха про стиснуті відображення та показати її застосування до рівнянь та систем лінійних рівнянь.

Виклад основного матеріалу. Крім лінії узагальнення, яка дозволяє бачити різні поняття методи з більш абстрактної точки зору, виявити глибокі зв'язки і закономірності, опустивши при цьому деталі, не менш важливою є лінія застосування, яка орієнтується на конструктивні методи розв'язання задач, серед яких чи найпопулярнішою є задача розв'язання рівнянь. Ми вже маємо все для того, щоб сформулювати і обґрунтувати один із популярних методів розв'язання рівнянь – *метод послідовних наближень*.

Нехай $f: X \to X$ відображення метричного простору X в себе.

Означення 1.

Точка x_0 *називається* <u>*нерухомою*</u> *для відображення* $f: X \to X$ *, якщо* $f(x_0) = x_0$

Очевидно, що задача знаходження нерухомої точки є фактично задачею розв'язання рівняння $f(x) = x$.

Цікаво, які ж умови гарантують існування нерухомої точки, тобто коли рівняння $f(x) = x$ має розв'язок і причому єдиний.

Відповідь на це питання дає теорема Банаха (Стефан Банах (1892 – 1945) – видатний польський та український математик).

Теорема(Банаха). Будь-яке стискуюче відображення $f: X \to X$ *повного метричного простору X в себе має єдину нерухому точку* x^**, причому* x^**можна одержати як границю послідовності* (x_n)*, де* $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0,1,2\ldots$, x_0 – *довільна точка простору X* .[3]

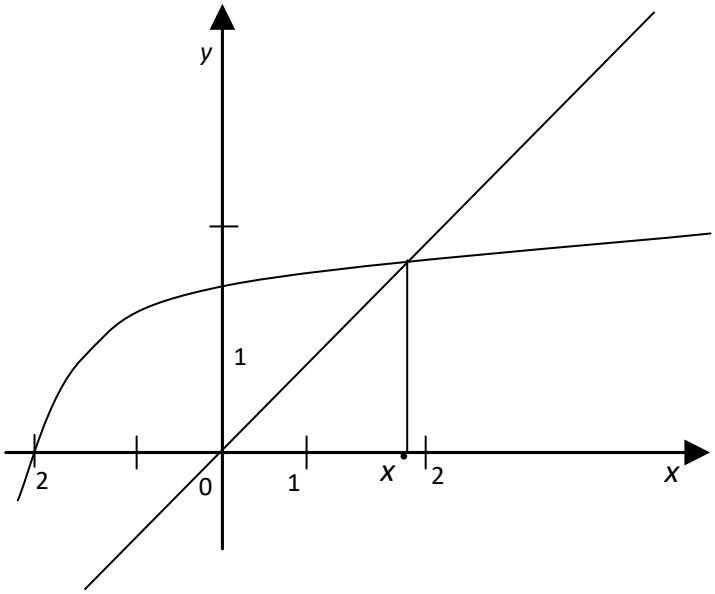
Метод послідовних наближень має багато застосувань, зокрема, до розв'язування рівнянь, систем рівнянь, диференціальних рівнянь, добування коренів та ін.

Продемонструємо на конкретних прикладах застосування теореми Банаха.

Приклад 1. Довести, що до рівняння $\sqrt[3]{x+2} = x$ можна застосувати метод послідовних наближень. Знайти його корінь з точністю до 0,01.

Розв'язання.

Побудуємо схематично графіки функцій $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$, $g(x) = x$



Переконуємось, що корінь рівняння належить відрізку $[0;\ 2]$. Функція $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ зростаючою і неперервною на $[0;\ 2]$ і $\forall x \in [0;\ 2]$: $\sqrt[3]{2} \le f(x) \le \sqrt[3]{4}$, тобто $f(x)$ відображає $\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right]$ в себе.

Оскільки $|f'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} < \frac{1}{3}$ на $\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right]$ то для будь-яких $x_1, x_2 \in \left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right]$, використовуючи теорему Лагранжа, маємо:

$$\rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) = |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2| < \frac{1}{3}\rho(x_1, x_2),$$

$c \in (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

Отже, відображення, яке здійснює функція , відрізка $\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right]$ в себе є стискуючим. Тоді за теоремою Банаха існує єдина нерухома точка, або єдиний корінь рівняння $\sqrt[3]{x+2} = x$, який можна знайти методом послідовних наближень. Якщо взяти $x_0 = 1$, то $x_1 = f(x_0) = \sqrt[3]{3} \approx 1{,}442$. Для того щоб

визначити, яке n-е наближення потрібно прийняти за шуканий розв'язок, скористаємось формулою:

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0) \le \varepsilon$$

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0) \le 0{,}01$$

Оскільки $\alpha = \frac{1}{3}$, то маємо

$$\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}}\rho(x_1,x_0) \le 0{,}01$$

$$3^n \ge \frac{3\rho(x_1,x_0)}{0{,}02} = \frac{3 \cdot 0{,}442}{0{,}02} = 66{,}3$$

Якщо $n = 3$, то $3^3 = 27 < 66{,}7$, а якщо $n = 4$, то $3^4 = 81 > 66{,}7$. Це означає, що за розв'язок x^* даного рівняння потрібно взяти 4-те наближення:

$x_2 = \sqrt[3]{3{,}442} \approx 1{,}510$, $x_3 \approx 1{,}520$, $x_4 \approx 1{,}521$, а тому $x^* \approx 1{,}52$ з точністю до 0,01.

Відповідь: $x^* \approx 1{,}52$

Розглянемо застосування теореми Банаха до розв'язування лінійних систем

Приклад 2. Переконатись, що система має єдиний розв'язок і розв'язати її методом послідовних наближень з точністю до $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\begin{cases} 10x - 2y + z = 9, \\ x + 5y - z = 8, \\ 4x + 2y + 8z = 32. \end{cases}$$

Розв'язання.

Подамо дану систему у вигляді

$$\begin{cases} x = 0{,}2y - 0{,}1z + 0{,}9, \\ y = -0{,}2x + 0{,}2z + 1{,}6, \\ z = -0{,}5x - 0{,}25y + 4. \end{cases}$$

Обчислимо α для заданої системи за формулою :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}^2} = \alpha < 1$$

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}^2} = \sqrt{0{,}04 + 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}25 + 0{,}0625} \approx 0{,}665$$

$$\alpha < 1$$

Отже, за теоремою Банаха дана система має єдиний розв'язок.

За нульове наближення візьмемо точку $(x_0, y_0, z_0) = (0{,}9; 1{,}6; 4)$,тоді перше наближення матиме вигляд

$$(x_1, y_1, z_1) = (0{,}82; 2{,}22; 3{,}15).$$

Для того щоб визначити, яке *n*-е наближення потрібно прийняти за шуканий розв'язок, скористаємось формулою :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}^{n} \rho(x_1; x_0) \le 0{,}01.$$

Оскільки, $\alpha = 0{,}4425$, то маємо

$$\frac{0{,}4425}{0{,}5575}^{n} \rho(x_1; x_0) \le 0{,}01$$

$$\rho(x_1; x_0) = \sqrt{(0{,}82-0{,}9)^2 - (2{,}22-2{,}6)^2 - (3{,}15-4)^2} = 0{,}9345.$$

Якщо $n = 12$, то $\frac{0{,}665^2}{0{,}335} 0{,}9345 = 0{,}02 > 0{,}01$;

якщо $n = 13$, то $\frac{0{,}665^3}{0{,}335} 0{,}9345 = 0{,}0138 > 0{,}01$;

якщо *n* =14, то $\frac{0{,}665^4}{0{,}335} 0{,}9345 = 0{,}0092 < 0{,}01$.

Отже, із заданою точністю за розв'язок можна прийняти 14-те послідовне наближення. Зауважимо, що послідовні наближення досить просто обчислити за допомогою електронних таблиць Excel:

x_n	y_n	z_n	n
0,9000000000	*1,6000000000*	*4,0000000000*	*0*
0,8200000000	2,2200000000	3,1500000000	1
1,0290000000	2,0660000000	3,0350000000	2
1,0097000000	2,0012000000	2,9690000000	3
1,0033400000	1,9918600000	2,9948500000	4
0,9996239000	2,0002956000	3,0009810000	6
0,9988870000	1,9983020000	3,0003650000	5
0,9999610200	2,0002714200	3,0001141500	7
1,0000428690	2,0000306260	2,9999516350	8
1,0000109617	1,9999817532	2,9999709090	9
0,9999992597	1,9999919895	2,9999990809	10
0,9999984898	1,9999999642	3,0000023728	11
0,9999997556	2,0000007766	3,0000007640	12
1,0000000789	2,0000002017	2,9999999281	13

1,0000000475	*1,9999999698*	*2,9999999101*	*14*

Таким чином, розв’язком заданої системи із точністю $\varepsilon = 10^{-2}$ буде точка

$$(x_{14}, y_{14}, z_{14}) = (1; 2; 3).$$

Відповідь: (1; 2; 3).

Висновки. Теорема Банаха про стиснуті відображення має багато застосувань, зокрема, до розв’язування рівнянь та систем рівнянь, інтегральних рівнянь, в чисельних методах при розв'язуванні рівнянь з однією змінною, добування коренів, в теорії диференціальних рівнянь для доказу існування і єдиності розв'язку деяких класів рівнянь. Також теорема знайшла застосування в теорії фракталів. Таким чином широке застосування теореми Банаха дає змогу успішно розв’язувати багато навчально-виховних завдань. Тому цінність і важливість даної теореми беззаперечна.

Література:

1. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М., Вотякова Л.А. Відображення метричних просторів – Вінниця. ВДПУ. – 2009. =161с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анали за. 3. М.: Высшая школа, –1989. =352с.
3. Ковтонюк М.М., Томусяк А.А. Основи функціонального аналізу. Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів – Вінниця: ПП «Едельвейс і К». – 2011. – 574с.

Бойко Вікторія Петрівна
студентка 4 курсу спеціальність «Математика»

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ ДІАГНОСТИКИ УЧНІВСЬКИХ ПОМИЛОК З АЛГЕБРИ

Постановка проблеми. Важливим аспектом в роботі вчителя є організація збору даних для оцінки рівня засвоєння навчального матеріалу і виявлення прогалин у знаннях і уміннях учнів - для цього проводиться діагностика учнівських помилок.

Діагностика процесу і результатів навчання є необхідною умовою ефективності управління процесом навчання і високої якості його результатів. Вона дозволяє коригувати процес навчання з метою підвищення якості його результату. Для досягнення даної мети, в процесі діагностування, визначаються передумови до навчання, а також визначаються умови необхідні для організації планомірного процесу навчання. Педагогічна діагностика дає змогу аналізувати навчальний процес і визначати результати навчання. Вчитель, дотримуючись необхідних наукових критеріїв, діагностує знання учнів, обробляє дані отриманих своїх спостережень, які після проведених досліджень аналізує, і робить висновки.[3,с.8]. Тобто, важливим етапом роботи вчителя є передбачення

результатів процесу навчання учнів, проведення діагностики умінь та здібностей учнів. Але разом з тим існує проблема невміння учнями застосовувати свої знання на практиці, адже наявність знань, нажаль, не означає, що учні здатні застосовувати їх в різноманітних конкретних ситуаціях. Така здатність не з'являється сама, а формується в процесі цілеспрямованого педагогічного впливу, який забезпечує набуття школярами знань, на які вони можуть опиратись у майже всіх сферах життя. Такий рівень математичної підготовки досягається в процесі навчання, орієнтованого на широке розкриття зв'язків математики з повсякденним життям, із сучасним виробництвом. Тому очевидна необхідність підсилення прикладного спрямування шкільної освіти [6, с.172].

Аналіз досліджень. Загальні питання пов'язані з проблемою реалізації прикладної спрямованості навчання математики, знайшли своє відображення в працях таких відомих закордонних та вітчизняних вчених і науковців, як А. Кочеткова, Г. Бевза, Г.Іщенко, З. Слєпкань, О. Андрієнка, О. Дубинчук , Я.Бродського, та ін.

У педагогічних дослідженнях прикладну спрямованість математики розуміють як змістовий та методологічний зв'язок шкільного курсу з практикою, що передбачає формування в учнів умінь, необхідних для розв'язування засобами математики практичних задач. Зокрема, А. Кочетков розглядає діагностування за допомогою прикладних задач як науковий підхід до організації навчальної та виховної роботи, що створює «комплексну орієнтацію у загальній системі педагогічної роботи».

О. Андрієнко зазначає, що мета діагностування складається з кількох напрямків:

- визначення рівня засвоєння учнями знань, умінь і навичок;
- підтвердження успішності результатів навчання та виховання;
- підтвердження подальших етапів діяльності учителя та учнів;
- здійснення корекції на випадок неправильної оцінки одержаних результатів.

Мета статті: полягає в наведенні прикладів задач прикладної спрямованості, які виконують діагностичну функцію навчання.

Постановка завдання. Головне завдання діагностичної діяльності полягає не у виправленні помилок, а у знаходженні причин цих помилок та їх усуненні. Ефективність роботи вчителя математики залежить від того, наскільки своєчасно виявлятимуться помилки та недоліки в знаннях учнів і як оперативно вживатимуться заходи для їх подолання.

Виклад основного матеріалу. Учням у школі найчастіше доводиться розв'язувати задачі з абстрактним змістом, до яких вони не завжди проявляють інтерес. А від цього зменшується їхня активність. Часто в школярів виникає думка, що прикладні задачі потрібні в житті, а всі інші – ні. Щоб в учнів не виникали такі помилкові уявлення, бажано переконувати їх, що майже кожна абстрактна задача може бути математичною моделлю деякої прикладної задачі.
З цього приводу доцільно розкривати практичне значення матеріалу, який вивчають; наближати зміст текстової традиційної задачі до життєвих проблем; пропонувати учням складати і розв'язувати задачі-розповіді; розглядати

прикладні задачі з різними сюжетами, які мають однакову математичну модель; наповнювати абстрактні задачі практичним змістом [8, с. 27].

Завдяки розкриттю практичного значення навчального матеріалу теми учні мають можливість зробити деякі попередні логічні висновки про правильність розв'язання ними задач. В результаті зробити менше помилок і отримати хороші оцінки.

При вивченні теми «Квадратична функція» як правило пропонуються вправи на дослідження конкретної функції. Багато учнів розв'язують такі задачі за певним алгоритмом, добре не усвідомлюючи зміст таких завдань.

Наприклад:

Задача 1. Знайти найбільше значення функції $y = -1{,}5x^2 + 6x$. Зрозуміло, що графіком цієї функції буде парабола вітками вниз, тоді її вершина – це найбільше значення. $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-3} = 2$, $y_0 = -1{,}5 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 6$.

Досить часто учні можуть записати у відповідь абсцису вершини параболи. Також при вивченні цієї теми можна розглянути з учнями таку задачу:

Задача 2. З листа жерсті, що має форму гострокутного трикутника зі стороною а=6*дм* і висотою $h_a = 4$ *дм* (рис. 1), треба вирізати прямокутник з найбільшою площею. Які розміри матиме прямокутник? BC = a = 6 *дм*, AD = $h_a = 4$ *дм*. Нехай ME ∥ BC, MP ⊥ BC і EF ⊥ BC. Позначимо висоту PM утвореного прямокутника MEFP через *x*, а його основу PF – через *y*. Очевидно, що 0 < *x* < 4 і 0 < *y* < 6. З подібності трикутників ABC і AEM випливає, що: $\frac{BC}{AD} = \frac{ME}{AK}$ або $\frac{6}{4} = \frac{y}{4-x}$. Звідси y = 1,5 $\cdot(4-x)$. $S_{MEFP} = x \cdot y = 1{,}5x(4-x)$. Знайдемо найбільше значення S. S(x) = -1,5 x^2+ 6 $x = -1{,}5\,(x-2)^2 + 6 \leq 6$.

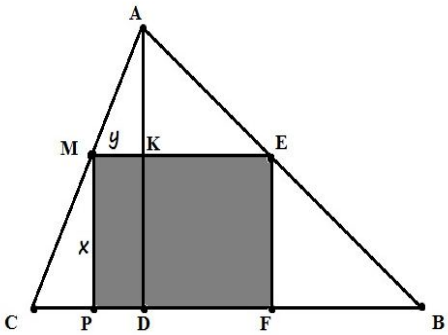


Рис. 1

Найбільше значення площі S дорівнює 6 $дм^2$ при x = 2 дм. Отже, шуканий прямокутник матиме розміри x = 2 дм, y = 3 дм.

Навчальний процес бажано будувати так, щоб учні відчували потребу усвідомлення теоретичного матеріалу, а не тільки запам'ятовували записи готових теоретичних положень. Лише за такої умови вони зможуть відчувати закономірності, які вивчають, і потребу цих знань для практичної діяльності. Осмислені відповідні практичні завдання допомагають учням збагнути цінність вивченого. Теоретичне і практичне значення нового матеріалу допомагають глибше розкрити практичні завдання прикладного змісту.

В 9 класі, під час вивчення теми «Геометрична прогресія», як правило розглядають задачі такого типу:

Задача 3. Число членів геометричної прогресії парне, сума всіх членів цієї прогресії в три рази більша від суми її членів, які стоять на непарних місцях. Знайдіть знаменник прогресії.

Розв'язання: Нехай задано геометричну прогресію $b_1, b_2, \ldots, b_{2k}$, яка має парне число членів. Сума цієї прогресії – $b_1 + b_2 + \ldots + b_{2k}$ в три рази більша від суми членів, які стоять на непарних місцях, тобто в три рази більша від $b_1 + b_3 + \ldots + b_{2k-1}$.

Отже, $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{2k-1} + b_{2k} = 3b_1 + 3b_3 + \ldots + 3b_{2k-1}$;

$b_2 + b_4 + \ldots + b_{2k} = 2b_1 + 2b_3 + \ldots + 2b_{2k-1}$.

Запишемо кожний елемент прогресії через b_1 і q, тоді

$b_1q + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{2k-1} = 2b_1 + 2b_1q^2 + \ldots + 2b_1q^{2k-2}$. Винесемо за дужки спільні множники в обох частинах рівності:

$b_1q\left(1 + q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right) = 2b_1\left(1 + q^2 + \ldots + q^{2k-2}\right) \Rightarrow q = 2$.

Відповідь: 2.

Під час розв'язування задач такого типу учні часто не розуміють що від них вимагається знайти, також роблять помилки в обчисленнях. Наприклад, замість формул геометричної прогресії використовують арифметичну. Також не рідко учні отримавши відповідь не задумуються про її достовірність, тому разом з тим, під час розгляду даної теми, доцільно учням запропонувати таку задачу:

Задача 4. Одна рослина кульбаби (кореневище) займає площу наближено10 $м^2$ і дає за рік 100 летючих насінин. Скільки квадратних кілометрів площі покриють всі нащадки однієї особини кульбаби через 6 років за умови, що вона розмножується без перешкод у геометричній прогресії. Відомо, що площа поверхні суші земної кулі складає 148 млн. кв. км. Чи вистачить цим рослинам на сьомий рік місця на поверхні земної кулі?

Розв'язання. Нехай $S_o = 10м^2$ – початкова площа, яку займає одна рослина кульбаби. Тоді $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – площі, які покриють нащадки однієї кульбаби через 1, 2, ...,n років відповідно за умови, що рослина розмножується без перешкод у геометричній прогресії. При цьому $S_1 = S_0 \cdot 10^2, S_2 = S_1 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^4, S_3 = S_2 \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^6, \ldots, S_n = S_{n-1} \cdot 10^2 = S_0 \cdot 10^{2n}$.

Отже, $S_6 = 10 \cdot 10^{12} = 10^{13}(м^2)$. Оскільки площа поверхні суші земної кулі складає $148 \cdot 10^6 км^2 = 1{,}48 \cdot 10^{14} м^2$, то на сьомий рік на поверхні суші місця для цих рослин не вистачить, тому що $S_7 = 10^{15} м^2$.

Відповідь: За даних умов на сьомий рік місця на поверхні суші земної кулі для кульбаби не вистачить.

Задачі такого типу дають можливість дітям власноруч переконатися в тому, що поняття геометричної дійсно може використовуватися в реальному житті. Учні не тільки переконуються в важливості вивчення даної теми, а й отримують стимул для розв'язання даної задачі.

Прикладне спрямування шкільного курсу математики можна здійснювати й за допомогою окремих традиційних задач, які є в шкільних підручниках. Для цього тексти таких задач наближують до практичних потреб, якими цікавляться і живуть учні, батьки та навколишнє населення. Розглянемо приклади розв'язування задач на складання систем рівнянь, під час розв'язування яких учні досить часто допускають помилки, через невміння уявити суть задачі.

Задача 5. Сума цифр двозначного числа у 6 разів менша від цього числа. Добуток цього числа на число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює 2430. Знайдіть це число.

Розв'язання: Нехай у шуканому числі х десятків і у одиниць. Тоді сума цифр цього числа (х + у) ; маємо рівняння: 6(х + у) = 10х + у .Число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, 10у + х. Тоді, враховуючи умову задачі, маємо рівняння (10х +у)(10у+ х) = 2430 . Одержуємо систему:

$$\begin{cases} 6(x+y)=10x+y, \\ (10x+y)(10y+x)=2430; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x=5y, \\ (10x+y)(10y+x)=2430; \end{cases} \quad \begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$$

Отже, шукане число 54.

Відповідь: 54

Під час обдумування розв'язку даної задачі, учням, як правило важко уявляти абстрактні поняття, а також скласти саму систему рівнянь, та розв'язати її, можливі помилки в обчисленнях, тому під час розгляду даної теми, можна запропонувати задачі з практичним змістом, наприклад таку:

Задача 6. У деякої людини була для продажу олія двох сортів: одна ціною 10 грн. за літр, друга — 6 грн. за літр. Захотілося їй зробити з цих двох сортів олію таку, ціна якої 7 грн. за літр. Скільки літрів олії кожного виду потрібно взяти, щоб одержати літр олії ціною 7 грн.?

Розв'язання. Нехай треба взяти х літрів олії ціною 10 грн. та у літрів олії ціною 6 грн. Розв'язуємо способом підстановки $\begin{cases} x+y=1, \\ 10x+6y=7(x+y), \end{cases}$

10 – 10у + 6у = 7; у = $\frac{3}{4}$ літра , х = $\frac{1}{4}$ літра**.** Отже, олії ціною 10 грн. треба взяти $\frac{1}{4}$ літра , а ціною 6 грн. – літра.

Відповідь : олії ціною 10 грн. треба взяти $\frac{1}{4}$ літра , а ціною 6 грн. – літра.

В основі розв’язання задач прикладного змісту лежить математичне моделювання, тому для реалізації прикладної спрямованості необхідно організувати навчання школярів елементам моделювання, якими, з дидактичної точки зору, є навчальні дії, що виконуються в процесі розв’язання задач. Розвиток в учнів правильних уявлень про характер відображення математикою явищ; та процесів реального світу, ролі математичного моделювання в науковому пізнанні і практиці має велике значення для формування наукового світогляду учнів. Всі засоби і прийоми навчання, які вчитель використовує в ході уроку, а також цільові функції кожного уроку повинні бути орієнтовані на реалізацію прикладної і практичної спрямованості у всіх можливих проявах. На уроках математики доцільно забезпечувати органічний зв’язок теоретичного та практичного матеріалу, що вивчається, формувати в учнів міцні та усвідомлені математичні навички, необхідні як для подальшого вивчення математики, так і для розв’язання прикладних задач.

Висновки. Таким чином, ефективне використання прикладних задач при навчанні алгебри в основній школі сприяє поєднанню теорії з практикою, що спонукає їх до самостійної пошукової діяльності, а також позитивних результатів діагностичних, самостійних, контрольних, та інших робіт. Адже, здатність учнів застосовувати свої знання з математики на практиці не з’являється стихійно, вона формується у процесі продуманого педагогічного впливу і прикладні задачі відіграють у цьому одну з основних ролей.

Література:

1. Бензар И. Технология диагностики предметной обученности учащихся. Математика / Бензар И. / Математика. – 2011. - №14. – с. 16-18.
2. Волосюк О. В. Застосування шкільного курсу математики в повсякденному житті its.luguniv.edu.ua/kaf1/sc_work/el_publ/zastosuv_matem.doc.
3. Гарус І., Нідєлько Л., Пилипенко Л. Діагностика навч. досягнень учн. 9 кл. з матем./ Гарус І., Нідєлько Л., метод. пос.- Полтава: ПОІППО, 2008,- 40с.
4. Груденов Л.П психолого – дидактические основы методики обучения математики/ Груденов Л.– М.: Педагогика, 1987
5. Іщенко Г. Діагностика матем. підготовки і розвитку здібностей учнів як один з компонентів системи роботи основної школи з математики / Ингенкамп К. Педагогическая диагностика. / Ингенкамп К. М., 1991.
6. Колягин Ю.М., Пикан В.В. О прикладной и практической направленности обучения математике. – Математика в школе. – 1985. – №6. –С. 27.
7. Соколенко Л. О. Система прикладних задач природничого характеру як засіб формування евристичної діяльності учнів // Дидактика математики: проблеми і дослідження. Збірник наукових праць. –№ 32 – Донецьк, 2009. – С. 24-28.

Власюк Наталя Володимирівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ОПТИМІЗАЦІЮ

Постоновка проблеми. На сьогодні велика увага приділяється питанням підвищення ефективності і якості в усіх сферах господарства. В зв'язку з цим особливого значення набирає вміння розв'язувати так звані задачі на оптимізацію, які виникають там, де необхідно з'ясувати, як, з допомогою наявних засобів досягнути найкращого результату, як отримати потрібний результат з найменшими витратами засобів, матеріалів, часу, праці і т. д. Однією із задач шкільного курсу математики є ознайомлення учнів з деякими задачами на оптимізацію.

Мета статті: показати значення та застосування задач на оптимізацію в шкільному курсі математики.

Виклад основного матеріалу. На уроках математики потрібно виховувати не тільки звичку до логічного мислення, а і математичну інтуїцію, яка дозволяє передбачити кінцевий результат. У розв'язанні цієї проблеми значну роль відіграють творчі задачі, які в математиці є найбільш важливі, оскільки в них відсутній певний алгоритм розв'язання. Вони вимагають від учня нестандартного мислення, спонукають до самостійної роботи над книгою [**8**] .

Процес розв'язування таких задач включає в себе три взаємопов'язані між собою складові процеси: розуміння, формування гіпотези, апробація результатів.

Не слід захоплюватися розв'язанням однотипних задач. Адже, розв'язавши дві-три аналогічні задачі, учні механічно засвоюють спосіб їх розв'язування і далі роблять це механічно, не вникають навіть у зміст. Тому задачі бажано добирати і за характером даних залежностей і відношень, однаковою математичною структурою, але по суті зовсім різні.

При розв'язуванні екстремальних задач на вписані і описані стереометричні фігури особлива увага звертається на виконання малюнка [**9**] , бо від цього значною мірою залежить успішне розв'язування задачі. Зображення виконується методом паралельного проектування, що є необхідною умовою його правильно. Розв'язування екстремальних задач є одним з найцікавіших з теоретичного боку і в той же час має важливе практичне значення. У підручнику з геометрії для середньої школи включені задачі на геометричні екстремуми. Основний спосіб їх розв'язування – широке використання відображень, які є окремими видами функцій. При розв'язуванні екстремальних задач вчитель ставить перед собою мету виділити найважливіші типи їх розв'язування, розглянути доступні учням методи, розробити методику їх розв'язування.

Усі задачі на максимум і мінімум, незважаючи на їх різноманітність, своїм змістом і методами розв'язування зводяться до знаходження умов, за яких дана

функція набуватиме найбільшого або найменшого значення.

При розв'язанні таких задач спочатку умову треба перекласти на мову математики. Створити математичну модель. Для створення математичної моделі можна використати таку послідовність:

1.За умовою задачі виділити величину, яку слід оптимізувати.

2.Вибрати зручну змінну, що може бути аргументом функції, яка описує досліджувану величину.

3.Знайти аналітичний вираз для функції.

4.За умовою задачі визначити проміжок, на якому розглядають отриману функцію.

Дану задачу зведено до знаходження найбільшого або найменшого значення функції на деякому проміжку. За допомогою похідної або іншими засобами розв'язують отриману задачу. Після цього з'ясовується, який реальний зміст має результат, отриманий у термінах функцій.[10]

*Приклад 1.*Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом 250π $см^3$. Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

Розв'язання.

Побудуємо математичну модель. Умову задачі переформулюємо так: знайти розміри прямого кругового циліндра із об'ємом 250π $см^3$, що має найменшу площу поверхні. Величина, яку потрібно оптимізувати, є площа повної поверхні циліндра. Площа повної поверхні циліндра залежить від радіуса основи та висоти циліндра. Отже, визначити радіус основи R і висоту H циліндра так, щоб при заданому об'ємі площа його поверхні була найменшою $S = 2\pi RH + 2\pi R^2$. Найменше значення цієї функції і потрібно обчислити.

$V = \pi R^2 H = 250\pi$. $H = \frac{250\pi}{\pi R^2} = \frac{250}{R^2}$, тоді $S = \frac{500\pi}{R^2} + 2\pi R^2$.

Отже, математичною моделлю даного завдання є задача: знайти найменше значення функції $S = \frac{500\pi}{R^2} + 2\pi R^2$.

1. Область визначення $s > 0$.

2. Знаходимо похідну: $S' = \frac{-500\pi}{R^2} + 4\pi R$.

3. Знайдемо критичні точки: $\frac{-500\pi}{R^2} + 4\pi R = 0$, $4\pi R^3 = 500\pi$, $R^3 = 125$, $R = 5$. Знаходимо другу похідну: $S'' = 1000\frac{\pi}{R^3} + 4\pi$.

4. $S''(5) > 0$, то при $R = 5$ функція досягає мінімуму, який і є найменшим значенням функції S. Тоді $H = \frac{250}{R^2}$, H=10см.

Приклад 2. Число 20 розбити на два доданки так, щоб сума їхніх кубів була найменшою. Визначити добуток цих доданків.

Розв'язання.

Нехай один з доданків дорівнює x, тоді другий доданок буде – $(20-x)$. Сума кубів цих доданків дорівнює:

$S = x^3 + (20-x)^3 = 60x^2 - 1200x + 8000$. $S = 60x^2 - 1200x + 8000$.

Найменше значення цієї функції і потрібно визначити.

1. Областю визначення функції є $\sim$.
2. Знаходимо похідну: $S' = 120x - 1200$, при $S' = 0, 120x = 1200, x = 10$.
3. Знаходимо другу похідну: $S'' = 120, S''(10) = 0$, тобто при $x = 10$ функція S має мінімум, який і є найменшим значенням функції.

*Відповідь.*100.

Приклад 3.

Відома висота конуса H і кут нахилу твірної до площини основи α. Знайти, який максимальний об'єм може мати вписаний в нього циліндр.

Розв'язання.

$ZO = H$, $\angle ZAO = \alpha$ (рис.1). Введемо в циліндрі будь-який лінійний елемент. Нехай, наприклад $FO = r$. Тоді $ZO_1 = rtg\alpha$, $V_ц = \pi r^2 (H - r\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.

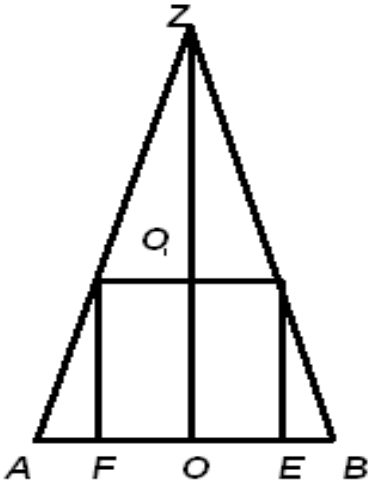


Рис.1.

Розглянемо функцію $y = r^2 H - r^3 \,\mathrm{tg}\,\alpha$. Очевидно, що $V_ц$ приймає максимальне значення при тому ж значенні r, при якому $y = y_{\max}$. Знаходимо похідну: $y = 2rH - 3r^2 \,\mathrm{tg}\,\alpha$, $2rH - 3r^2 \,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$. Оскільки за умовою задачі $r \neq 0$, то $r = \frac{2}{3} H \,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Очевидно, що при знайденому значенні r функція $y(r)$ приймає максимальне значення і $V_ц = V_{ц\max}$. Отже, $V_{ц\max} = \frac{4\pi}{27} H^3 \mathrm{ctg}^2\alpha$.

Приклад 4. Визначити, яку максимальну повну поверхню може мати конус, вписаний в кулю, площа сфери якої рівна Q.

Розв'язання:

Розглянемо $\angle ZAO$ (рис.2), нехай $\angle ZAO = \alpha$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; нехай радіус

кулі рівний R, тобто $ZO_1 = R$. Тоді $AZ = 2R\sin\alpha$ і $AZ = R\sin 2\alpha$ і $S_{\text{бічн}} = \pi R^2 \sin 2\alpha \cdot \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \ldots = 4\pi R^2 \sin 2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

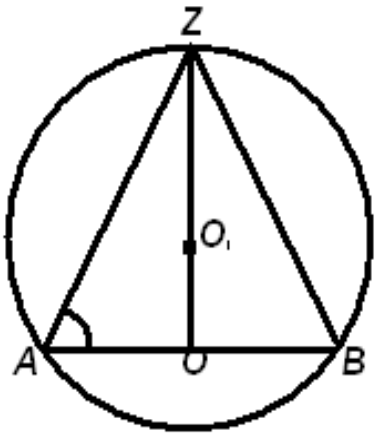


Рис.2.

Так як $Q = 4\pi R^2$, то $S_{\text{бічн}} = Q\sin 2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$. Визначимо тепер $S_{\kappa_{\max}}$. Розглянемо функцію $y = \sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$ і знайдемо її похідну

$$y' = 2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\cos 2\alpha - \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1\right).$$

Так як ті значення α, при яких $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ рівні нулю, не розглядаються в даній задачі, то розв'яжемо рівняння $4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 = 0$, звідси $\cos\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{8}$ і $\cos\alpha_1 = \arccos\frac{1-\sqrt{17}}{8}$ (від'ємний корінь рівняння для даної задачі є стороннім).

Оскільки $\cos\alpha$ – спадна функція на проміжку допустимих в даній задачі значень α, то при переході α через точку α_1 (від менших значень до більших) $\cos\alpha$ змінює значення, більші, ніж $\frac{1-\sqrt{17}}{8}$, на менші. При цьому квадратний тричлен, що стоїть в лівій частині рівняння міняє, свої значення з позитивних на негативні. А це означає, що функція y в точці α_1 має максимум. Обчислимо його. Запишемо вираз для y в дещо іншому вигляді

$$y = \sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin^2\alpha.$$

Тоді $\sin^2\alpha_1 = 1 - \cos^2\alpha_1 = \frac{23-\sqrt{17}}{32}$, $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{9+\sqrt{17}}{8}$.

$$y_{\max} = \frac{9+\sqrt{17}}{8} \cdot \frac{1+\sqrt{17}}{8} \cdot \frac{23-\sqrt{17}}{32} = \frac{107+\sqrt{17}}{512}.$$

Отже, $S_{x\max} = \frac{107\sqrt{17}}{512}Q.$

*Приклад 5.*Навколо кулі радіуса R описана правильна трикутна піраміда, яка має мінімальну бічну поверхню. Визначити кут нахилу бічного ребра піраміди до площини її основи.

Розв'язання.

Нехай $\angle ZDO$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі основи піраміди (рис.3). Відомо, що центр кулі, вписаної в правильну піраміду, лежить на висоті піраміди, куля дотикається до основи піраміди в її центрі, а до бічних граней – в точках, які знаходяться на апофемах піраміди.

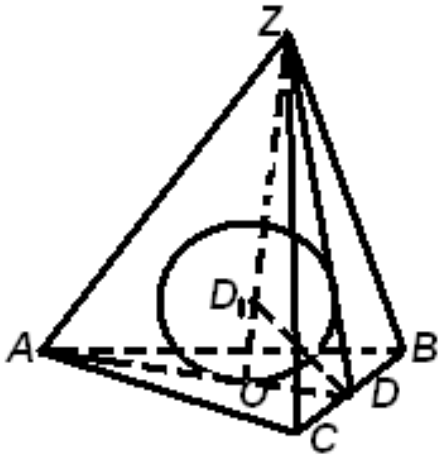


Рис.3.

Покладемо $\angle ZDO = \alpha$ і $\angle ZAO = \varphi$. Тоді $OD = R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $AD = 3R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $CD = R\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $S_{\triangle ABC} = 3R^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; $S_{\text{á}\text{ï}\text{ з}\text{ð}} = 3R^2\sqrt{3}\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Розглянемо функцію $y = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$,

$$y' = \frac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\alpha - \cos\alpha\right).$$

Оскільки по змісту задачі $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то критичні значення α ми знайдемо з рівняння $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\alpha - \cos\alpha = 0$, розв'язуючи яке знаходимо, що

$\cos\alpha_1 = \sqrt{2}-1$ і $\alpha_1 = \arccos(\sqrt{2}-1)$. Неважко показати, що при $\alpha = \alpha_1$ функція y приймає мінімальне значення.

Визначимо тепер φ. З співвідношення між *OA* і *OD* випливає, що $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}5\operatorname{tg}\alpha$.

Отже, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$.

Потрібно врахувати , що задачі шкільного характеру, які розв'язуються за допомогою похідної в деяких випадках виявляється можна розв'язати і іншими, елементарними методами. Порівняння різних способів розв'язання задач на оптимізацію корисне в кількох аспектах: можна порівняти єдиний характер розв'язування задач за допомогою похідної з прийомами, які доводиться шукати, якщо похідною не користуватися; розв'язування задач на оптимізацію елементарними методами зазвичай знаходиться з великою працею, воно включає елементи здогадування і творчості. В той же час використання похідної може виявитися принципово не складним, але пов'язаним з достатньо великими обчисленнями.

Приклад 6. Серед прямокутників, площа яких рівна 10 кв.од., найти прямокутник найменшого периметру.

Розв'язання.

Розв'язання можна отримати різними способами, наприклад з використанням нерівності, що зв'язує середнє геометричне і середнє геометричне. Нехай x і y — сторони прямокутника, тоді $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, при чому, рівність досягається при $x = y = \sqrt{10}$, звідки шуканий периметр рівний $4\sqrt{10}$.

Звернемо увагу на те, що цю ситуацію можна розглядати і як задачу знаходження найменшого значення функції $P(x) = 4\left(x + \frac{10}{x}\right)$ є областю визначення $(0;+\infty)$.

На подібне переосмислення задач, зв'язаних з знаходженням екстремальних значень функції, доцільно звертати увагу учнів як можна частіше, так як це дає можливість зв'язати різноманітні розділи шкільної математики, вказати зв'язок різноманітних методів розв'язування задач.

Висновки. Розв**'**язування оптимізаційних задач сприяє розвиткові просторового уявлення, вмінню орієнтуватись у співвідношеннях, спонукає до самостійної роботи над книжкою. Учні вчаться широко застосовувати зв'язки між даними і шуканими елементами, набувають навичок застосування теоретичних тверджень до вирішення конкретних питань, тобто пов**'**язувати теорію з практикою.

Література:

8. Гарбич-Мошора О. Готовність особистості до розв'язання творчих

математичних задач/ О. Гарбич-Мошора// Науково-педагогічний журнал «Молодь і ринок» – 2007. – №1. – С.126-130.
9. Лемцьо А. Методичні зауваження до розв'язування просторових геометричних задач 10-11 кл / А. Лемцьо// Математика. – 2005. – №10. – С.16-17.
10. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С.,Павлов ., О.Л., Сліпенко А.К. Алгебра і початки аналізу 11 клас / О.М.Афанасьєва, Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Сліпенко// – Тернопіль – 2004.

Калюжко Наталя Миколаївна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»
спеціальність «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ ПЕРЕТВОРЮВАТИ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ВИРАЗИ В ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. Як правило, дієвим засобом закріплення знань, умінь і навичок є їх застосування. Особливе значення при цьому мають міжпредметні зв'язки, зв'язки між різними розділами та темами, вирішення життєвих завдань, коли доводиться використовувати комплекс знань із різних навчальних предметів.

Застосування знань, умінь і навичок можна організувати шляхом виконання вправ, лабораторних робіт, практичної діяльності. Здібність розв'язувати завдання є показником розумового розвитку школярів. Застосування знань підсилює мотивацію навчання, розкриваючи практичну значимість досліджень, робить вміння та навички більш міцними, реально осмисленими. Формування нових умінь і навичок учнів на основі вже набутих можна здійснювати включаючи в добірку вправ завдання підвищеної складності, які пов'язанні з пройденим раніше матеріалом.

Мета статті: розглянути, яким чином можна застосовувати засвоєнні вміння і навички перетворювати тригонометричні вирази при розв'язуванні вправ в курсі алгебри.

Виклад основного матеріалу. Застосування знань тотожно перетворювати тригонометричні вирази, використання набутих вмінь і навичок важливо поєднувати з іншими розділами, темами математики. Вміння перетворювати тригонометричні вирази часто стає в нагоді під час розв'язування геометричних задач. В курсі ж алгебри у підручниках зазвичай відсутні завдання, в процесі розв'язування яких потрібні знання з тригонометрії. Але насправді є значна кількість алгебраїчних рівнянь, нерівностей та їх систем, які можна розв'язати з використанням тригонометричних підстановок. Часто останній спосіб є значно легшим порівняно із традиційним. Розглянемо добірку вправ на розв'язування систем рівнянь, нерівностей з використанням тригонометричних підстановок. Розв'язування вправ даним методом дає змогу показати практичне застосування тригонометрії в інших розділах математики.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 \square 1} \square \frac{5}{2\sqrt{x^2 \square 1}} \square x$.

Розв'язання.

І спосіб.

Зазвичай для розв'язання даного рівняння використовують алгебраїчний спосіб:

$$\sqrt{x^2 \square 1} \square \frac{5}{2\sqrt{x^2 \square 1}} \square x \Rightarrow x^2 \square 1 \square \frac{25}{4(x^2 \square 1)} \square \frac{5x\sqrt{x^2 \square 1}}{(x^2 \square 1)} \square x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \square \frac{25 \square 20x\sqrt{x^2 \square 1}}{4(x^2 \square 1)} \square 25 \square 20x\sqrt{x^2 \square 1} \square 4(x^2 \square 1) \Leftrightarrow 20x\sqrt{x^2 \square 1} \square$$

$$\square 4x^2 - 21 \Rightarrow 400x^4 \square 400x^2 \square 16x^4 - 168x^2 \square 441 \Leftrightarrow 384x^4 \square 568x^2 - 441 \square 0.$$

Розв'язавши біквадратне рівняння, маємо: $x_{1,2,3,4} \square \square \frac{3}{4}$. Перевіривши переконуємося, що $x \square -\frac{3}{4}$ – корінь.

Розв'яжемо це рівняння використавши тригонометричну підстановку.

ІІ спосіб.

Так як змінна x може набувати будь-яких дійсних значень, введемо заміну $x \square tg\alpha, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Рівняння матиме вигляд:

$$\sqrt{tg^2\alpha \square 1} \square \frac{5}{2\sqrt{tg^2 \square 1}} \square tg\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{|\cos\alpha|} \square \frac{5|\cos\alpha|}{2} \square tg\alpha .$$

В силу того, що $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, розкриємо модуль:

$$\frac{1}{\cos\alpha} \square \frac{5\cos\alpha}{2} \square tg\alpha \Leftrightarrow \frac{5\cos^2\alpha \square 2\sin\alpha - 2}{2\cos\alpha} \square 0 \Leftrightarrow \frac{-5\sin^2\alpha \square 2\sin\alpha \square 3}{2\cos\alpha} \square 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \sin\alpha \square 1, \\ \cos\alpha \neq 0; \end{cases} \right.$$

$$\left. \begin{cases} \sin\alpha \square -\frac{3}{5}, \\ \cos\alpha \neq 0; \end{cases} \right. \Leftrightarrow \sin\alpha \square -\frac{3}{5}.$$ Так як $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$x \square tg\alpha \square \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \square -\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

Приклад 2. Відомо, що $a^2 \square b^2 \square 1, \quad c^2 \square d^2 \square 1$. Доведіть, що $|ac - bd| \leq 1$

Розв’язання.

І спосіб.

Спочатку розглянемо алгебраїчний спосіб розв’язування даного завдання. Алгебраїчне розв’язування в даному випадку буде являти собою піднесення обох частин нерівності до квадрату і виконання тотожних перетворень.

$$|ac-bd|\le 1\Leftrightarrow (ac-bd)^2\le 1\Leftrightarrow a^2c^2-2abcd+b^2d^2\le 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2(1-d^2)-2abcd+b^2(1-c^2)\le 1\Leftrightarrow a^2-a^2d^2-2abcd+b^2-b^2c^2\le 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -a^2d^2-2abcd-b^2c^2\le 0\Leftrightarrow (ad+bc)^2\ge 0.$$

ІІ спосіб.

Оскільки сума квадратів a і b рівна одиниці, то кожне з чисел a і b не перевищує одиниці, тобто їх можна розглядати як синус і косинус деякого кута. Тому введемо таку заміну: $a=\cos\alpha,\quad b=\sin\alpha,\quad \alpha\in[0;2\pi]$.

Аналогічно $c=\cos\beta,\quad d=\sin\beta,\quad \beta\in[0;2\pi]$. Підставивши в нерівність, вона набуде такого вигляду:

$$|ac-bd|=|\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta|=|\cos(\alpha+\beta)|\le 1.$$

Нерівність доведена.

Як бачимо доведення даної нерівності з використанням тригонометрії значно простіше

Приклад 3. Довести що $(a+b)^4\le 8(a^4+b^4)$ [3].

Розв’язання.

І спосіб.

Доведемо нерівність за означенням. Для цього розглянемо різницю:

$$8(a^4+b^4)-(a+b)^4=8a^4+8b^4-(a^2+2ab+b^2)^2=$$
$$=8a^4+8b^4-a^4-4a^2b^2-b^4-4a^3b-2a^2b^2-4ab^3=$$
$$=7a^4+7b^4-6a^2b^2-4a^3b-4ab^3=3(a^4+b^4-2a^2b^2)+4(a^4+b^4-a^3b-ab^3)=$$
$$=3(a^2-b^2)^2+4a^3(a-b)+b^3(a-b)=3(a^2-b^2)^2+4(a-b)(a^3-b^3)=$$
$$=3(a^2-b^2)^2+4(a-b)^2(a^2+ab+b^2)\ge 0.$$

ІІ спосіб.

При $a+b=0$ нерівність вірна. Використаємо тригонометричну підстановку. Для будь-яких $a,b\ne 0$ знайдеться кут α, що $b=atg\alpha,\quad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Вихідна нерівність матиме вигляд:

$$a^4(1+tg\alpha)^4\le 8a^4(1+tg^4\alpha)\Leftrightarrow\left(\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^4\le 8\left(\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}\right).$$

Так як $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos^4\alpha\ne 0$. Помножимо обидві частини нерівності на $\cos^4\alpha$, отримаємо $(\sin\alpha+\cos\alpha)^4\le 8(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^2 \le$$
$$\le 8(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha)\Leftrightarrow$$
$$(1+\sin 2\alpha)^2 \le 8\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right) \Leftrightarrow 1+2\sin 2\alpha+\sin^2 2\alpha \le 8-4\sin^2 2\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 5\sin 2\alpha - 7 \le 0 \Leftrightarrow (\sin 2\alpha - 1)(5\sin 2\alpha + 7) \le 0.$$

Другий множник завжди додатний, а перший не перевищує 0, тому весь добуток не додатній.

Приклад 4. При яких *a* нерівність: $3xy - 4x^2 \le a(x^2 + y^2)$ матиме розв'язок.

Розв'язання.

І спосіб.

Розглянемо алгебраїчний спосіб розв'язування нерівності з параметром. Якщо $y^2 \ne 0$, то нерівність набуде вигляду: $-4x^2 \le ax^2$. Отже, при $a \ge -4$ нерівність матиме розв'язок. Виконаємо деякі перетворення:

$$3xy - 4x^2 \le a(x^2 + y^2) \Leftrightarrow \frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2} \le a.$$

Поділимо чисельник і знаменник дробу $\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$ на $y^2 \ne 0$,

отримаємо $\frac{3\frac{x}{y} - 4\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$. Введемо заміну $\frac{x}{y} = t$, тоді

$$\frac{3t - 4t^2}{t^2 + 1} = \frac{-4t^2 - 4 + 3t + 4}{t^2 + 1} = -4 + \frac{3t + 4}{t^2 + 1}.$$

Знайдемо найменше значення виразу: $\frac{3t + 4}{t^2 + 1}$.

$$\frac{3t + 4}{t^2 + 1} \ge b \Leftrightarrow 4 + 3t \ge bt^2 + b \Leftrightarrow bt^2 - 3t + b - 4 \le 0 \Leftrightarrow D \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9 - 4b(b - 4) \ge 0 \Leftrightarrow -4b^2 + 16b + 9 \ge 0 \Leftrightarrow b \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right].$$

Тобто найменше значення виразу $\frac{3t + 4}{t^2 + 1}$ рівне $-\frac{1}{2}$. Тоді, найменше значення виразу $\frac{3t - 4t^2}{t^2 + 1}$, а отже найменше значення виразу $\frac{3\frac{x}{y} - 4\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}$ рівне $-\frac{9}{2}$. Тому

нерівність $3xy - 4x^2 \le a(x^2 + y^2)$ має розв'язок при a більшому найменшого значення виразу $\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$.

II спосіб.

Використаємо тригонометричну підстановку:

$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad r \in R, \quad r \neq 0, \quad \alpha \in [0; 2\pi)$. Тоді

$$A = \frac{3r^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 4r^2\cos^2\alpha}{r^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 4\cos^2\alpha = \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha - 2 =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\sin 2\alpha - \frac{4}{5}\cos 2\alpha\right) - 2 = \frac{5}{2}\sin(2\alpha - \varphi) - 2, \text{ де } \cos\varphi = \frac{3}{5}, \quad \sin\varphi = \frac{4}{5}.$$

Оцінимо вираз: $\frac{5}{2}\sin(2\alpha - \varphi) - 2$; $\quad -1 \le \sin(2\alpha - \varphi) \le 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le \frac{5}{2}\sin(2\alpha - \varphi) \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \le \frac{5}{2}\sin(2\alpha - \varphi) - 2 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \le A \le \frac{1}{2}.$$

Найменше значення виразу $\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$ рівне $-\frac{9}{2}$. Отже, при $a \ge -\frac{9}{2}$ нерівність має зміст.

Відповідь: при $a \ge -\frac{9}{2}$ нерівність матиме розв'язок.

Для даного завдання найбільш вдалий метод розв'язання – розв'язання за допомогою тригонометричної підстановки. В першому випадку виникає проблема зі знаходженням найменшого значення виразу $\frac{3t + 4}{t^2 + 1}$. Оскільки учні не вміють ще знаходити найбільше значення функції за допомогою похідної, то це завдасть неабияких труднощів при розв'язуванні.

Висновки. Оскільки практичне застосування набутих знань формує нові вміння та навички, то важливо під час уроків, а також позакласних занять надавати учням змогу виконувати якнайбільше різноманітних вправ, розглядати різні способи розв'язування завдань. При вивченні тотожних перетворень тригонометричних виразів варто показати застосування тригонометрії при розв'язуванні інших алгебраїчних завдань. Подібними вправами ми не тільки покажемо застосування тригонометрії, а й формуватимемо нестандартне мислення учнів.

Література:

1. Алєксєєв А. Тригонометричні підстановки / А. Алєксєєв, Л. Курляндчик // Квант. – №2. – 1995. – С. 40–42.
2. Горнштейн П. Тригонометрия помогает алгебре / П. Горнштейн. – М.: Бюро Квантум, – Квант, - №3. - 1995.- 68-69с.
3. Смоляков А. Н. Тригонометричні підстановки в рівняннях і нерівностях / А. Н. Смоляков // Математика в школі. – №1. – 1996. – С.4.

Крайнічук Галина Василівна
викладач кафедри інформаційних технологій ВСЕІ, Університет «Україна»

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ЛАТИНСЬКИХ КВАДРАТІВ

Постановка проблеми. З історії науки відомо, що часто деякі поняття, які мають розважальний характер, не приваблюють широкого кола дослідників. Хоча потім виявляється, що вони стають значними і корисними як для розвитку інших галузей знань, так і для безпосереднього практичного застосування. До таких понять відносять і латинські квадрати. Тому постає питання, *скільки таких квадратів є?, як конкретно вони можуть застосовуватися в тій чи іншій галузі? які існують методи побудови таких квадратів?* і таке інше. Математики з різних напрямків досліджень в деякій мірі дають відповіді на такі питання. Для загального бачення про дослідження латинських квадратів необхідно описати понятійний апарат, який сформувався в процесі історії творення теорії латинських квадратів.

Мета статті: описати короткий історичний екскурс про дослідження латинських квадратів та проаналізувати їх розвиток на сучасному етапі.

Виклад основного матеріалу. Протягом двох віків латинськими квадратами займалися з точки зору математичних розваг. Вперше латинські квадрати (*4-го* порядку) були опубліковані в книзі «Шамс аль Мааріф» («Книга про Сонце Гнозис»), написаної Ахмадом аль-Буні в Єгипті приблизно в 1200р. Пари ортогональних латинських квадратів вперше були згадані в 1975р. [1] в «задачі про розміщення 16 гральних карт».

Важливим етапом в історії досліджень латинських квадратів стала робота Ейлера [2]. Він займався в ній методами побудови магічних квадратів і запропонував метод, заснований на парі ортогональних латинських квадратів. Досліджуючи такі пари, Ейлер з'ясував, що проблема їх побудови поділяється на три випадки, в залежності від остачі від ділення числа n на 4. Він запропонував способи побудови пар ортогональних квадратів для n, що діляться на 4 і для непарних n. Очевидно, що при $n=2$ таких пар не існує. Йому не вдалося побудувати пари ортогональних латинських квадратів для $n=6,10$ і він висловив гіпотезу про те, що не існує пар ортогональних квадратів для $n=4t+2$. Для $n=6$ він сформулював «задачу про 36 офіцерів».

У 1890р. Келі [3] вивів формулу для числа латинських прямокутників з двох рядків (окремий випадок класичної комбінаторної «задачі про зустрічі», поставленої P. Montmort в 1708р.).

У 1900р. гіпотеза Ейлера для $n=6$ була підтверджена G.Tarry [4]. Він побудував усі 9408 нормалізованих латинських квадратів, розбив їх на 17 типів і показав, що при будь-якому їх поєднанні неможливо побудувати пару ортогональних квадратів. Таким чином, він розв'язав «задачу про 36 офіцерів».

У 1922р. MacNeish вперше застосував теоретико-груповий підхід до вирішення завдань щодо латинських квадратів [5]. Зокрема, він запропонував

метод конструювання латинських квадратів, при якому властивість ортогональності зберігається.

У 1925р. Fisher запропонував використовувати ортогональні латинські квадрати для планування сільськогосподарських експериментів [6].

У 1920-1930рр. розпочалося інтенсивне вивчення неасоціативних алгебричних структур, що призвело, зокрема, до створення теорії квазігруп [7], тісно пов'язаної з вивченням латинських квадратів, оскільки між латинськими квадратами і таблицями Келі квазігруп існує взаємно-однозначна відповідність.

У 1959р. Bose і Shrikhande [8] побудували 2 ортогональних латинських квадрати для *n=22*, а в 1960р. вони ж і Parker побудували з використанням ЕОМ мінімальний контрприклад для *n=10*. Таким чином, через 177 років гіпотеза Ейлера була спростована.

Точна формула для числа *L(n)* латинських квадратів *n-го* порядку невідома. Деяка оцінка для *L(n)* описана в [9]. Кожному латинському квадрату можна поставити у відповідність *нормалізований* (редукований) латинський квадрат, в якого перший рядок і перший стовпець заповнені у відповідності з порядком на множині *M*. Число *R(n)* нормалізованих латинських квадратів *n-го* порядку в *n!(n-1)!* разів менше, ніж *L(n)*. Точні значення величини *L(n)* відомі для *n* від 1 до 11 (див. табл.1).

n	*R(n)*	*L(n)*	*Автор, рік*
	1	1	
2	1	2	
3	1	12	
4	4	576	
5	56	161280	Euler (1782)
6	9408	812851200	Frolov (1890)
7	16942080	61479419904000	Sade (1948)
8	535281401856	108776032459082956800	Wells (1967)
9	377597570964258816	5524751496156892842531225600	Bammel і Rothstein(1975)
10	7580721483160132811489280	998243765821303987172506475692032000 0	McKay і Rogoyski(1995)
11	5363937773277371298119673540771840	776966836171770144107444346734230682311065600000	McKay і Wanless (2005)

Таблиця 1. *Число латинських квадратів*

Два латинських квадрати називаються *ізотопними*, якщо один з другого можна отримати в результаті *ізотопії*, тобто композиції з перестановки рядків, перестановки стовпців і заміни елементів множини *M* за підстановкою із симетричної групи *S(M)*. Ізотопія є відношенням еквівалентності, тому множина латинських квадратів *n-го* порядку розбивається на неперехресні ізотопні класи. Із одного латинського квадрату можна за допомогою ізотопії отримати *n!* еквівалентних, але деякі з них при цьому можуть збігатися з початковим. Це називається *автопаратопією*. Частка латинських квадратів з нетривіальною групою автопаратопій прямує до нуля із збільшенням *n*.

Латинські квадрати можна розглядати як *ортогональний масив*. Змінюючи порядок елементів в кожній впорядкованій трійці цього масиву, можна отримати 6 латинських квадратів, які називаються *парастрофами.* Зокрема, парастрофом є латинський квадрат, отриманий в результаті транспонування.Композиція ізотопії та парастрофії називається *ізострофією*. Це ще одне відношення еквівалентності (див. табл.2), його класи називаються *головними класами.* Кожен головний клас містить 1, 2, 3 або 6 ізотопних класів. Коли початковий латинський квадрат збігається з ізострофним до нього, то говорять про *автострофії.* З ростом *n* майже всі латинські квадрати мають тривіальну групу автострофій.

n	Кількість головних класів	Кількість ізотопних класів
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	2	2
5	2	2
6	12	22
7	147	564
8	283657	1676267
9	19270853541	115618721533
10	34817397894749939	208904371354363006
11	203602955258288313419609 9	122161773153692292614825 40

Таблиця 2. *Число класів еквівалентності.*

Два латинських квадрати $L=(l_{ij})$ і $K=(k_{ij})$ *n-го* порядку називаються *ортогональними*, якщо всі впорядковані пари (l_{ij}, k_{ij}) різні. *Група (система)* з m латинських квадратів *n-го* порядку називається *групою (системою) взаємно (попарно) ортогональних квадратів*, якщо будь-які два квадрати цієї групи ортогональні. Латинський квадрат *n-го* порядку має ортогональний до себе квадрат тоді і тільки тоді, коли в ньому існує *n* неперехресних *трансверсалей* (діагоналей). Приклад двох ортогональних латинських квадратів *3-го* порядку:

1	2	3		1	2	3
2	3	1		3	1	2
3	1	2		2	3	1

Ейлер називав такі квадрати «повними». В науковій літературі раніше такі квадрати називали *«ейлеровими»* чи *«греко-латинськими»* (тому що Ейлер використовував букви грецького алфавіту для квадрата, ортогонального до латинського). Відомо, що для будь-якого порядку *n* існує не більше, ніж *n-1* попарно ортогональних квадратів. Крім того, доведено, що для будь-кого порядку *n*, яке є простим числом чи степенем простого числа, існує точно *n-1* попарно ортогональних квадратів. Така система з *n-1* попарно ортогональних квадратів називається *повною.* Ортогональні латинські квадрати існують для будь-якого *n,* яке не дорівнює 2 і 6. Систему трьох попарно ортогональних латинських квадратів *3-го* порядку можна знайти в книзі В.Д. Білоусова та Г.Б. Білявської [7]. Приклад системи з трьох попарно ортогональних латинських

квадратів 4-*го* порядку:

1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4
4	3	2	1		3	4	1	2		2	1	4	3
2	1	4	3		4	3	2	1		3	4	1	2
3	4	1	2		2	1	4	3		4	3	2	1

В книзі Гарднера наведено приклад системи із чотирьох попарно ортогональних латинських квадратів 5-*го* порядку:

1	2	3	4	5		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
2	3	4	5	1		3	4	5	1	2		4	5	1	2	3		5	1	2	3	4
3	4	5	1	2		5	1	2	3	4		2	3	4	5	1		4	5	1	2	3
4	5	1	2	3		2	3	4	5	1		5	1	2	3	4		3	4	5	1	2
5	1	2	3	4		4	5	1	2	3		3	4	5	1	2		2	3	4	5	1

Із цих чотирьох квадратів можна скласти 6 пар ортогональних латинських квадратів. У всіх наведених системах квадрати отримуємо один з одного перестановкою рядків. Системи ортогональних латинських квадратів (СОЛК) для порядків, які є простим числом чи степенем простого числа можна будувати в пакеті математичних програм Maple, що й робили автори статей. Їм вдалося побудувати СОЛК з шести квадратів *7-го* порядку, СОЛК із семи квадратів *8-го* порядку, СОЛК із восьми квадратів *9-го* порядку, СОЛК з трьох квадратів *10-го* порядку та багато інших.

Висновки. Сьогодні теорія латинських квадратів набуває все ширшого застосування, зокрема, в алгебрі, геометрії, комбінаториці, дискретній математиці, криптографії, теорії кодування, а також в економіці, статистиці та багатьох галузях народного господарства.

Література:

1. Ozanam J. Récréations mathématiques et physiques. – Paris. − 1725.
2. Euler L. Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. – Middelburg. − 1782.
3. Cayley A. On Latin Squares// Messenger of mathematics. − 1890. − T.XIX. − C.135–137.
4. Tarry G. Le problème des 36 officiers// Comptes Rendus Assoc. France Av. Sci. − 1900. − T.29, part 2. − C.170–203.
5. MacNeish, Harris F. Euler Squares// Annals of Mathematics. − 1922. − T.23. − C.221–227.
6. Fisher R.A. Statistical methods for research workers. − Edinburg, London: Oliver & Boyd. − 1925.
7. Белоусов В.Д., Белявская Г.Б. Латинские квадраты, квазигруппы и их приложения.// Издательство Штиинца. – 1989.
8. Bose R. C., Shrikhande S.S. On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal Latin squares of order 4t+2// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. − 1959. − T.45. − C.734–737.
9. McKay B. D., Wanless I. M. On the number of Latin Squares// Ann. Combin. − 2005. − T.9. − C.335-344.

Кузьменко Мар'яна Дмитрівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КУБІЧНИХ РІВНЯНЬ

Постановка проблеми. Теорія многочленів – один з найдавніших розділів математики, що розвивається в безпосередньому зв'язку з теорією алгебраїчних рівнянь. Суттєвими для розвитку цих теорій стали три важливих події в світі математики:

– у1799 році німецький математик К. Гаус (1777-1855) довів теорему, яка носить назву "Основної теореми алгебри многочленів";

– у кінці XVIII ст. французький математик Е. Безу (1739-1783) сформулював і довів теорему про ділення многочленів з остачею.;

– французький математик Ф. Вієт (1540-1603) встановив співвідношення між коренями та коефіцієнтами алгебраїчного рівняння. Завдяки простоті аналітичного виразу многочлени знайшли широке застосування в наближених обчисленнях, оскільки будь-яку неперервну функцію на заданому відрізку можна наблизити многочленом так, щоб їх значення відрізнялось як завгодно мало.

Отже, починаючи ще з середини XVI ст. почалось грунтовне вивчення многочленів [1].

Мета статті: узагальнення відомих зі шкільного курсу формул Вієта для коренів квадратного тричлена та характеристика рівнянь, під час розв'язування яких, необхідне застосування формули Кардано.

Зауважимо, що розв'язання будь-якого алгебраїчного рівняння виду

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

за допомогою заміни $x = y - \frac{a_1}{n}$ зводиться до розв'язання «неповного» рівняння

$$y^n + b_2y^{n-2} + ... + b_{n-1}y + b_n = 0,$$

яке не має невідомого $(n-1)$-го степеня. Справді, за формулою бінома Ньютона

$$\left(y - \frac{a_1}{n}\right)^n = y^n - n\frac{a_1}{n}y^{n-1} + ... = y^n - a_1y^{n-1} + ...,$$

де три крапки позначають члени степенів, менших, ніж $n-1$. Тому при підстановці $y - \frac{a_1}{n}$ замість x в ліву частину початкового рівняння члени з y^{n-1} знищуються. Саме цей прийом приводить до розв'язання квадратного рівняння; однак для рівнянь вищих степенів одного цього прийому недостатньо.

Теорема Вієта [5]. Якщо $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – корені многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in P[x]$, то

$$\alpha_1 \square \alpha_2 \square \ldots \square \alpha_n \square -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\alpha_1\alpha_2 \square \alpha_1\alpha_3 \square \ldots \square \alpha_1\alpha_n \square \alpha_2\alpha_3 \square \ldots \square \alpha_2\alpha_n \square \ldots \square \alpha_{n-1}\alpha_n \square \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\sum_{C_n^k} \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}..\alpha_{j_k} \square (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \quad \alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\alpha_n \square (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Символ $\sum_{C_n^k}$ слід тут розуміти так, що сума береться по всіх C_n^k комбінаціях з n індексів 1, 2, 3, …, n по k.

Для доведення вказаних формул досить виконати множення у правій частині рівності $a_n x^n \square a_{n-1}x^{n-1} \square \ldots \square a_1 x \square a_0 \square a_n \square x-\alpha_1 \square\square x-\alpha_2 \square \ldots \square x-\alpha_n \square$,

Звести подібні члени і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах.

Вказані вище формули називають формулами Вієта. Вони узагальнюють відомі із шкільного курсу формули Вієта для коренів квадратного тричлена.

Розглянемо неповне кубічне рівняння

$$x^3 \square px \square q \square 0 \tag{1}$$

з довільними комплексними коефіцієнтами p, q.

Покладемо $x \square u \square v$. Ліва частина рівняння буде мати вигляд

$$(u \square v)^3 \square p(u \square v) \square q \square u^3 \square v^3 \square (3uv \square p)(u \square v) \square q. \tag{2}$$

Звідси слідує, що якщо $(u_0; v_0)$ – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} u^3 \square v^3 \square q \square 0, \\ 3uv \square p \square 0, \end{cases} \tag{3}$$

то $x_0 \square u_0 \square v_0$ буде розв'язком рівняння (1).

Навпаки, якщо x_0 – розв'язок рівняння (1), то існує такий розв'язок $(u_0; v_0)$ системи (3), що $x_0 \square u_0 \square v_0$. Дійсно, нехай u_0 і v_0 – корені квадратного рівняння

$$t^2 - x_0 t - \frac{p}{3} \square 0.$$

Тоді за формулами Вієта маємо: $u_0 \square v_0 \square x_0,\ u_0 v_0 \square -\frac{p}{3}.$

Остання рівність показує, що $3u_0v_0 \square p \square 0$, тільки якщо пара $(u_0; v_0)$ задовольняє другому рівнянню системи (3).

Підставляючи u_0 і v_0 в рівність (2) і враховуючи, що $x_0 \square u_0 \square v_0$ є коренем рівняння (1), знаходимо, що $u_0^3 \square v_0^3 \square q \square 0$, тільки якщо пара $(u_0; v_0)$ задовольняє і першому рівнянню системи (3).

Отже, всі корені рівняння (1) можна отримати наступним чином: знайти всі розв'язки системи (3) і для кожного з них взяти суму складових його чисел.

Для розв'язання системи (3) подамо її у вигляді

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ uv = -\dfrac{p}{3}. \end{cases} \tag{4}$$

Звівши друге рівняння до кубу, отримаємо

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

Отже, u^3 і v^3 – корені квадратного рівняння $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$, розв'язуючи яке знаходимо:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \tag{5}$$

(Знаки «+» і «-» перед квадратними коренем мають тільки той сенс, що при знаходженні u^3 слід взяти одне із значень квадратного кореня, а при знаходження v^3 – інше.)

Із формул (5) отримуємо наступну формулу розв'язання рівняння (1), яку називають формулою Кардано[4]:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ . \tag{6}$$

Значення кубічних коренів у формулі (6) не можуть обиратись незалежно, оскільки в системі (4) є рівняння

$$uv = -\frac{p}{3},$$

яке ми поки що повністю не врахували.

Значення кубічних коренів у формулі Кардано варто вибирати так, щоб їх добуток дорівнював $-\frac{p}{3}$. Оскільки куб цього добутку завжди дорівнює $\left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$, то сам добуток може відрізнятись від $-\frac{p}{3}$ лише множником, який є коренем кубічним з одиниці. Тому, вибравши довільно значення одного з кубічних коренів у формулі (6), ми завжди можемо підібрати значення другого кореня таким чином, щоб їх добуток дорівнював $-\frac{p}{3}$. Таким чином знаходяться всі три корені рівняння (1).

Нехай u_1 і v_1 – деякі значення кубічних коренів із $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ і

$-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$, добуток яких рівний $-\frac{p}{3}$. Двома іншими значеннями першого кубічного кореня будуть $u_1\omega$ і $u_1\omega^2$, де $\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ – кубічний корінь із одиниці. Аналогічно двома іншими значеннями другого кубічного кореня будуть $v_1\omega$ і $v_1\omega^2$. При цьому $u_1\omega$ буде комбінуватись з $v_1\omega^2$, а $u_1\omega^2$ – $v_1\omega$. Таким чином, коренями рівняння (1) будуть числа

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1+v_1,\\ x_2 &= u_1\omega+v_1\omega^2,\\ x_3 &= u_1\omega^2+v_1\omega. \end{aligned} \qquad (7)$$

З'ясуємо, при якій умові числа x_1, x_2, x_3 різні. Згідно теореми, це буде тоді і тільки тоді, коли дискримінант многочлена x^3+px+q відмінний від нуля. Для многочлена x^3+px+q він рівний

$$D=-27q^2-4p^3. \qquad (8)$$

З точністю до сталого множника – 108 цей вираз співпадає з тим, який стоїть під знаком квадратного радикалу в формулі Кардано.

Таким чином, рівняння (1) має кратний корінь тоді і тільки тоді, коли $D=0$.

У випадку, коли $D=0$, для розв'язання рівняння (1) немає необхідності вдаватися до формули Кардано. Справді, нехай x_1,x_2,x_3 – корені рівняння (1), причому $x_2=x_3$. За формулою Вієта $x_1+x_2+x_3=0$, звідки слідує, що $x_1=-2x_2$. Дві формули Вієта, які залишились, запишуться так:

$$\begin{aligned} -2x_2^2-2x_2^2+x_2^2&=-3x_2^2=p,\\ -2x_2^3&=-q. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо:

$$x_2=x_3=-\frac{3q}{2p},\qquad x_1=\frac{3q}{p}. \qquad (9)$$

(Якщо $p=0$, то і $q=0$; в такому випадку $x_1=x_2=x_3=0$).

Приклад 1 [2]. Розв'язати рівняння

$$x^3-4x^2-3x+18=0.$$

Зробивши заміну $x=y+\frac{4}{3}$, отримаємо неповне рівняння

$$y^3-\frac{25}{3}y+\frac{250}{27}=0,$$

в якому $p=-\frac{25}{3}$, $q=\frac{250}{27}$. Його дискримінант рівний

$$D = -\frac{250^2}{27} + \frac{4 \cdot 25^3}{27} > 0.$$

За формулами (9) знаходимо корені: $y_1 = -\frac{10}{3}$, $y_2 = y_3 = \frac{5}{3}$. Корені початкового рівняння дорівнюють: $x_1 = -2$, $x_2 = x_3 = 3$.

Висновки. Теорія многочленів розвивається з кожним днем, тому і з'являються нові способи розв'язування рівнянь, але більшість з них ґрунтується на давніших, вже відомих, алгоритмах. Ми прийшли до висновку, що використовувати теорему Вієта доцільно для розв'язування і рівняння третього степеня, що значно спрощує алгоритм розв'язування рівнянь даного типу у вищій школі. Також, чітко продемонстрували умови використання формули Кардано.

Література:

1. Балк М. Б. и др. Реальные применения мнимых чисел. – К.: Рад. шк., 1988. – 255 с.
2. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов: Учеб. пособие для студ.-заоч. III-IV курсов физ-мат фак-тов пединст. – М.: Просвещение, 1980. – 175с.
3. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики: Навч. посібник. – 2-ге вид., доп. – К.: Либідь, 1993. – 344с.
4. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел, ч. 2. – К.: Вища шк., 1976. – 384 с.

Лавренюк Альона Іванівна
студентка 4курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО ТА НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Постановка проблеми. Розділ алгебри та початків аналізу "Похідна та її застосування" займає значне місце у шкільному курсі математики, в першу чергу тому, що має велике прикладне значення.

Програма з математики для загальноосвітньої школи відводить на вивчення теми "Похідна та її застосування" приблизно, 26 годин (загальноосвітньої школи), 46 годин (ліцеї і гімназії з поглибленим вивченням математики).

Основна складність полягає в тому, щоб навчити школярів застосувати похідну для розв'язання прикладних задач алгебри та геометрії.

Мета статті: прикладні задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення функції.

Виклад основного матеріалу. Екстремум функції. Точка x_0 називається точкою локального максимуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-яких досить малих $|\Delta x| \neq 0$ виконується нерівність

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0).$$

Точка x_0 називається точкою локального мінімуму функції $y = f(x)$, якщо для будь-яких досить малих $|\Delta x| \neq 0$ виконується нерівність

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0).$$

Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функції $y = f(x)$, а значення функції в екстремальних точках – її екстремальними значеннями.

Необхідну ознаку локального екстремуму дає така теорема:

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум, то або $f'(x_0) = 0$, або $f'(x_0)$ не існує.

Проте виявляється, що цього недостатньо, бо може $f'(x_0) = 0$, а функція $y = f(x)$ в цій точці екстремуму не має.

Точки, в яких функція $y = f(x)$ визначена та неперервна, і в цих точках $f'(x) = 0$ або не існує, називаються критичними для функції.

Проте не в кожній критичній точці функція $y = f(x)$ має екстремум. Тому потрібні достатні ознаки існування екстремуму для функції *f*. Їх дають такі теореми:

Теорема 2. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в деякому інтервалі, який містить критичну точку x_0, і диференційована у всіх точках цього інтервалу (за винятком, можливо, самої точки x_0).

Якщо для $x<x_0$ $f'(x) > 0$, а для $x_0<x$ $f'(x) < 0$, то для $x=x_0$ функція $y = f(x)$ має максимум.

Якщо для $x<x_0$ $f'(x) < 0$, а для $x_0<x$ $f'(x) > 0$, то для $x=x_0$ функція $y = f(x)$ має мінімум.

Теорема 3. Нехай функція $y = f(x)$ два рази диференційована в околі точки x_0 і $f'(x_0) = 0$. Тоді в точці $x=x_0$ функція має локальний максимум, якщо $f''(x) < 0$, і локальний мінімум, якщо $f''(x) > 0$.

Якщо ж $f''(x_0) = 0$, то точка $x=x_0$ може й не бути точкою екстремуму.

Звідси випливає такий план знаходження екстремальних точок:

1. Знаходять критичні точки функції $y = f(x)$, тобто точки, в яких $f'(x) = 0$, або $f'(x)$ не існує;
2. Знаходять другу похідну $f''(x)$ і обчислюють значення другої похідної в цих точках.

Якщо значення другої похідної в критичній точці від'ємне, то така точка є точкою максимуму, а якщо значення другої похідної додатне, то точка є точкою мінімуму.

Якщо $f''(x) = 0$ в критичній точці, то нічого конкретного сказати не можна, бо в цій точці може бути екстремум, а може й не бути.

Розглянемо тепер дослідження функції на екстремум на конкретному прикладі.

Приклад 1. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x - 10$

Розв'язання. Функція $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x - 10$ визначена і диференційована на R. Знайдемо її похідну:

$f'(x) = 12x^2 - 12x - 24$.

Знайдемо нулі похідної:

$x^2+x-2=0$, $x_1=-2$ $x_2=1$.

Отже, функція *f* має дві критичні точки $x_1=-2, x_2=1$.

Оскільки похідна є квадратним тричленом з додатним коефіцієнтом при x^2, то на інтервалах $(-\infty;-2), (1;\infty)$ $f'(x) > 0$, а на інтервалі (-2;1) $f'(x) < 0$.

Похідна неперервна на R і при переході через критичну точку змінює знак на протилежний.

Оскільки при переході через критичну точку x=-2 похідна змінює знак з плюса на мінус, то в цій точці функція має локальний максимум.

$f_{max}(x) = f(-2) = -32 + 24 + 24 - 10 = 6$.

При переході через точку x=1 похідна змінює знак з мінуса на плюс. Тому в цій точці функція *f* має локальний мінімум.

$f_{min}(x) = f(1) = 4 - 6 - 24 - 10 = -24$.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію $f(x) = 2 + \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$

Розв'язання. Функція $f(x) = 2 + \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$ визначена. Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}} * \frac{3x^2(x-6)-x^3}{(x-6)^2} = \frac{2x^3-18x^2}{2(x-6)\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}}.$$

Критична точка x=9. при переході через цю точку похідна змінює знак з мінуса на плюс. Отже, в цій точці функція *f* має локальний мінімум:

$f_{min}(x) = f(9) = 2 + \sqrt{\frac{729}{3}} = 2 + \sqrt{243}$.

Крім того, похідна дорівнює нулю в точці x=0. оскільки справа від цієї точки(до x<6) функція не визначена, то в точці x=0 функція набуває найменшого значення $f(0) = 2$.

Найбільше та найменше значення функції. Розв'язання багатьох практичних задач зводяться до знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції, тобто знаходження екстремумів.

Загальний метод розв'язування задач на екстремум за допомогою похідної складається з трьох етапів:

- *формалізація* (задача „перекладається" мовою функцій, для цього обирається зручний параметр x, через який шукану величину виражають як функцію *f(x)*;
- *розв'язання* одержаної математичної *задачі;*
- *інтерпретація* знайденого *розв'язку* („переклад" його з мови математики у терміни первинної задачі).

Нехай дано функцію $y = f(x)$, яка неперервна на відрізку [a;b], диференційована в інтервалі (a;b), за винятком можливо скінченого числа точок, де вона не існує. Необхідно ж знайти найбільше та найменше значення функції на цьому відрізку. А як відомо з математичного аналізу, функція, яка неперервна на відрізку, набуває на ньому свого найбільшого і найменшого значення.

Чим викликана необхідність знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку?

Справа в тому, що в практичних задачах, де процес, явище, закон, величина описуються певною функцією, зміст самої задачі накладає певні обмеження на аргумент, тобто аргумент має певні межі.

Так, наприклад, кут трикутника може змінюватися лише від 0 до П, швидкість тіла доводиться розглядати в проміжку часу від t_0 до t_1 та інше. Тому й необхідно досліджувати поведінку функції на конкретному проміжку [a;b] або на його кінцях, то чинять так:

1. Знаходять критичні точки в інтервалі (a;b) (точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує), обчислюють значення функції в цих точках;
2. Знаходять значення функції на кінцях відрізка, тобто $f(a), f(b)$;
3. Серед усіх значень вибирають найбільше і найменше значення.

У випадку, коли функція монотонна на відрізку [a;b], то найбільшого і найменшого значення вона досягає на кінцях відрізка. У цьому випадку обмежуємось обчисленням значень $f(a), f(b)$.

По-іншому складається ситуація, якщо необхідно знайти найбільше та найменше значення функції, неперервної в інтервалі (a;b).

Зрозуміло, що функція у цьому випадку не може досягати найбільшого і найменшого значення на кінцях інтервалу. Наприклад, функція $f(x) = x^2 - 5x + 6$ в інтервалі (3;6) не має ні найбільшого, ні найменшого значення у внутрішніх точках інтервалу. У цьому випадку чинять так:

1. Знаходять критичні точки, що належать цьому інтервалу, і обчислюють значення функції в цих точках;
2. Знаходять ліву та праву границі відповідно в точках a і b , тобто $\lim\limits_{x \to a+0} f(x), \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$. Якщо ці границі існують, то їх порівнюють із значеннями функції в критичних точках. Якщо виявиться, що значення в критичних точках більші(менші) за знайдені границі, то це і буде найбільшим(найменшим) значенням функції на інтервалі.

*Приклад 3***.** Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку [a;b]

$$f(x)\frac{1}{x\square 3}-\frac{1}{x-3}$$

Розв'язання. На даному відрізку функція визначена і неперервна, диференційована в інтервалі(-2;2). Знайдемо похідну, критичні точки:

$$f'(x)\square-\frac{1}{(x\square 3)^2}\square\frac{1}{(x-3)^2},\ (x-3)^2\square(x\square 3)^2 \quad x=0$$

знайдемо значення функції в критичній точці і на кінцях відрізка:

$$f(0)\square\frac{2}{3},f(-2)\square\frac{6}{5},f(2)\square\frac{6}{5}$$

Отже, $\min\limits_{\square-2;2\square} f(x)\square f(0)\square\frac{2}{3}$, $\max\limits_{\square-2;2\square} f(x)\square f(-2)\square f(2)\square\frac{6}{5}$.

Приклад 4. Знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку [a;b]

$$f(x)\square\frac{1}{5}x^5\square 4x^2$$

Розв'язання. Функція визначена і неперервна на відрізку $\square-1;1\square$, диференційна в інтервалі (-1;1). Тому вона набуває на даному відрізку найбільшого і найменшого значення. Знайдемо критичні точки даної функції. Для цього знайдемо похідну

$f'(x)\square x^4\square 8x$

і прирівняємо її до нуля:

$x^4+8x=0$; $x=0$; $x=-2$.

Отже, на інтервалі (-1;1)функція має лише одну критичну точку x=0. знайдемо значення функції в цій точці $f(0)\square 0$.

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка

$$f(-1)\square-\frac{1}{5}\square 4\square 3\frac{4}{5},\qquad f(1)\square\frac{1}{5}\square 4\square 4\frac{1}{5}.$$

Отже, $\min\limits_{\square-1;1\square} f(x)\square f(0)\square 0$, $\max\limits_{\square-1;1\square} f(x)\square f(1)\square 4\frac{1}{5}$

Відповідь: $\min\limits_{\square-1;1\square} f(x)\square f(0)\square 0, \max\limits_{\square-1;1\square} f(x)\square f(1)\square 4\frac{1}{5}$

Висновки. Мета даної статті розкрити деякі питання застосування похідної: для дослідження функцій на монотонність та екстремум, знаходження найбільшого та найменшого значення функцій, розглянути прикладні задачі на дослідження функцій.

Роботу побудовано таким чином: спочатку наведені всі необхідні теоретичні відомості, далі розглянуто алгоритми розв'язання кожного типу задач, після чого наводиться приклади, які розв'язані з повним поясненням.

Приклади розташовані у порядку зростання складності, що дає можливість поступово засвоювати викладення матеріалу. Всі розглянуті приклади взяті із збірника задач з математики для середньої загальноосвітньої школи. Дана стаття буде корисною для учнів 10, 11 класів загальноосвітніх шкіл, ліцеїв та гімназій.

Література:

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: підруч. – 2-ге вид., допов. і переробл. / Слєпкань З.І. – К. : Вища школа., 2006.- 582с.: іл.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посіб. – 3-тє вид., допов. і переробл. / Бевз Г.П. – К. : Вища школа., 1989.- 367с.: іл..
3. http//uk.m.wikipedia.org/

Макух Ірина Станіславівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ДОБІРКА ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ДО ТЕМИ «ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ»

Постановка проблеми. Іноді можна почути, що математика складна, суха і нецікава наука. Проте відомо, що математика, як ніякий інший шкільний предмет, виховує логічне мислення, а воно потрібне всім людям. Вивчення математики, особливо геометрії, сприяє розвитку просторової уяви, а вона потрібна не лише математикам. Завданням вчителя полягає в тому, щоб розкрити перед учнями її красу і глибину, показати зв'язок із реальним життям. Учнів треба переконати, що математика виникла і розвивається для задоволення практичних потреб людини.

Основні математичні положення здобуті з дійсного світу за допомогою абстракції. У науці вони дістають самостійний логічний розвиток, а потім знову знаходять застосування в трудовій діяльності людей. Цей процес знаходить певне відображення і в методиці викладання математики. Учням бажано під час вивчення кожної теми показувати застосування математики в житті, в трудовій діяльності людини; тренувати в застосуванні математичних знань для виконання обчислювальних, розрахункових, графічних і вимірювальних робіт. Завдяки цьому підвищується інтерес школярів до вивчення математики, закладаються основи правильного розуміння значення математики в житті людей.

Таким чином, обумовлена необхідністю у прикладній спрямованості змісту курсу «математика».

Мета статті: показати значимість прикладних задач в процесі вивчення математики та дібрати систему таких задач на тему «Лінійна функція».

Виклад основного матеріалу. Існує необхідність так організовувати вивчення математики, щоб воно було корисним і водночас захоплюючим, цікавим. Тому потрібно розкрити роль математики в пізнанні навколишнього світу через зв'язок з іншими шкільними предметами та життям.

Прикладне спрямування включає вміння учнів засобами математики досліджувати реальні явища, складати математичні моделі задач та співставляти знайдені результати з реальними. Розв'язування задач практичного змісту сприяє підвищенню ефективності навчання математики.

У педагогічній літературі поняття прикладної задачі трактується по-різному, а саме як:

- задача, що потребує перекладу з природної мови на математичну;
- задача, яка близька за формулюванням і методами розв'язування до задач, що виникають на практиці [2, с.215];

• сюжетна задача, сформульована у вигляді задачі-проблеми [3, с.328];

• це задача, що виникла поза математикою, але розв'язується математичними засобами [6, с.153].

Аналіз науково-методичної літератури дає можливість виділити ряд вимог до прикладних задач, які використовуються у навчанні математики. Зокрема:

1. Задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань.
2. Задачі повинні відповідати шкільним програмам і підручникам за формулюванням і змістом методів і фактів, які будуть використовувати в процесі їх розв'язування.
3. Задачі повинні бути сформульовані доступною і зрозумілою мовою.
4. Числові дані в прикладних задачах повинні бути реальними, відповідати існуючим в практиці.
5. У змісті задачі по можливості повинен бути відображений особистий досвід учнів, місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання математичних знань і викликати в учнів пізнавальний інтерес.
6. Прикладні задачі повинні відображати ситуації промислового і сільськогосподарського виробництва, економіки, торгівлі, ілюструвати застосування математичних знань у конкретних професіях людей.
7. При розв'язанні прикладних задач у класах з поглибленим вивченням математики їх формулювання може бути розширене і являти собою деяке теоретичне зведення до проблеми, що вивчається. Сама проблема може мати багатоступеневе розв'язання, при якому кожний наступний етап розвиває і доповнює попередній.

Використання прикладних задач дозволяє вдало створювати проблемні ситуації на уроці (наприклад, чому вигідніше будувати одноповерхові будинки з квадратною основою, ніж з основою у вигляді іншого прямокутника з таким самим периметром тощо). Такі задачі стимулюють учнів до здобуття нових знань, збагачують їх теоретичними знаннями з технічних та інших дисциплін [6, с.4].

Для створення проблемної ситуації під час вивчення нового матеріалу можна використовувати окремі фрагменти прикладних задач, а повністю задачі розглядати при закріпленні та поглибленні знань учнів.

Розглянемо добірку прикладних задач, яку можна розглянути в процесі вивчення лінійної функції.

При введенні поняття лінійної функції можна запропонувати таку задачу.

Задача 1. Основний місячний заробіток робітника заводу становить 2000 грн. За виробництво одиниці понаднормової продукції, вартістю 1 грн., йому доплачують 19 к. Який вигляд має залежність загального місячного заробітку робітника від ціни виготовленої ним продукції?

Розв'язання.

Якщо позначити ціну виробленої робітником понаднормової продукції через x грн., то додаткова доплата становить $0,19x$ грн., а загальний місячний заробіток y виражатиметься формулою: $y = 2000 + 0,19x$.

Задача 2. Трактор коштує 20 000 грн., а річна амортизація становить 2800 грн. Виразити вартість трактора в залежності від часу її експлуатації.

Розв'язання.

Якщо позначити час експлуатації трактора через t років, а його ціну через y грн., то вартість трактора в залежності від часу його експлуатації виражається формулою: $y = -2800t + 20000$.

Розглянувши ще декілька прикладів, вчитель вводить означення лінійної функції і розглядає її властивості. Важливо підкреслити, що всі розглянуті вище приклади є конкретними моделями лінійної функції і мають ті самі властивості, які має ця функція. Такий підхід до введення математичних понять дозволяє обумовити необхідність їх у житті.

При закріпленні та поглибленні знань учнів також доцільно використовувати прикладні задачі. Наведемо приклади.

Задача 3. Витрати при перевезенні вантажу двома видами транспорту обчислюються за формулами: $y_1 = 100 + 30x$, $y_2 = 150 + 20x$, де x – відстань перевезень у сотнях кілометрів, y_1 і y_2 – транспортні витрати при перевезенні вантажу першим і другим видами транспорту в сотнях гривень. Визначте, на якій відстані й яким видом транспорту дешевше перевозити багаж.

Задача 4. Витрати виробництва на 200 одиниць продукції становлять 100 грн., а на 2000 одиниць продукції – 800 грн. Знайдіть графічно витрати на виробництво 400, 1000, 1200 одиниць продукції, вважаючи, що функція витрат лінійна.

Задача 5. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару $(2x + 50)$ грн., якщо продано товару менше ніж 40 одиниць, і доплачує йому 20% комісійних, якщо товару продано 40 одиниць і більше. Описати залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою продавця і побудувати графік цієї залежності.

Задача 6. У початковий момент часу велосипедист перебував на відстані 60 м до фінішу. На рисунку 1 зображено графік зміни відстані від велосипедиста до фінішу відповідно до зміни часу.

А) Через який час велосипедист досяг фінішу?

Б) З якою швидкістю рухався велосипедист?

В) Який шлях проїхав велосипедист за останні дві секунди?

Задача 7. На рисунку 2 зображено графік руху двох автобусів, що вирушили з однієї станції.

А) Через який час після відходу першого автобуса вирушив другий?

Б) З якими швидкостями рухалися автобуси?

В) На якій відстані від станції другий автобус наздогнав перший?

Г) Якою формулою задається шлях, пройдений першим автобусом, залежно від часу?

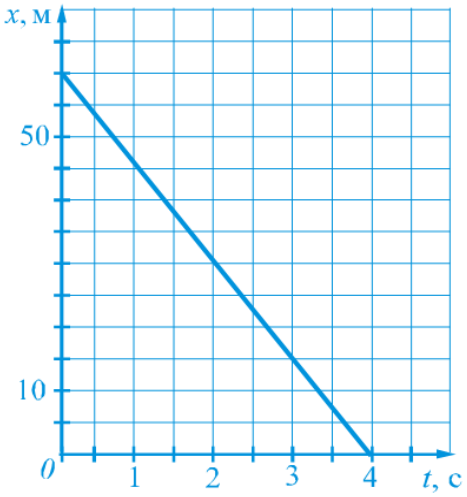


Рис. 1

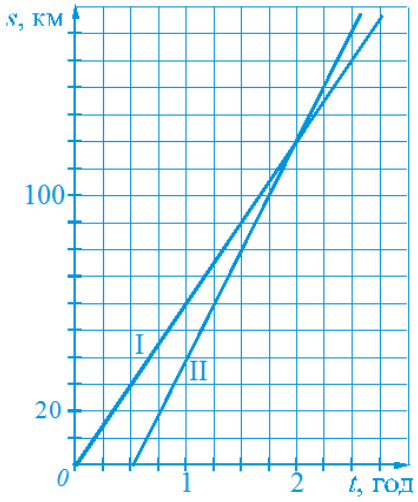


Рис. 2

Задача 8. Олег і Петро змагались у плаванні на дистанції 200 м у 50-метровому басейні. На рисунку 3 зображено графіки зміни відстані від хлопців до місця старту.

А) Скільки часу витратив кожен із хлопців на подолання перших 50 м дистанції?

Б) Хто переміг у змаганні?

В) На скільки секунд відстав переможений від переможця?

Г) Яка середня швидкість руху кожного із хлопців на першій стометрівці?

Д) Що означають точки перетину графіків?

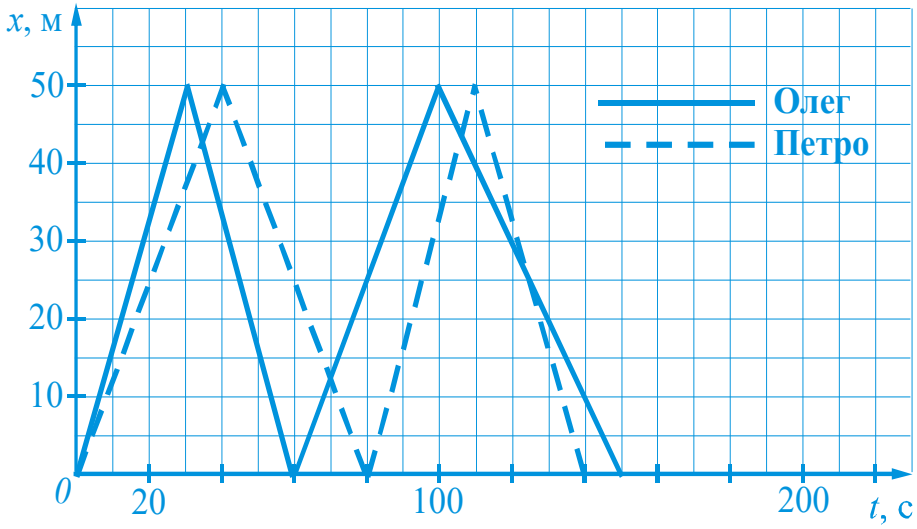


Рис. 3

Задача 9. Вартість телеграми визначається так: кожне слово коштує 5 к., додають ще 5 к. і до одержаної суми додають 20% податку на додану вартість. Запишіть формулу для знаходження вартості телеграми, що складається з n слів. Знайдіть вартість телеграми, що складається з 21 слова.

Задача 10. Абонентна плата за телефон становить 7 грн. 34к. Вартість однієї хвилини розмов становить 2к., до того ж, вартість 100 хв розмов входить до абонентної плати. Запишіть формулу для знаходження плати за телефон за місяць, якщо протягом місяця абонент здійснював лише місцеві розмови, загальна тривалість яких дорівнює n хв, де $n>100$. Знайдіть плату за телефон, якщо $n = 320$.

Висновки. Якщо сучасний вчитель математики у процесі навчання шкільного курсу акцентує увагу учнів на зв'язок математики з життям, то він викликає у дітей інтерес до навчання, демонструє значимість математики у житті кожної людини. Розв'язування прикладних задач сприяє ознайомленню учнів з роботою підприємств і галузей народного господарства, що є умовою орієнтації інтересу учнів до певних професій. Використання прикладних задач дозволяє вдало створювати проблемні ситуації на уроці. Такі задачі стимулюють учнів до здобуття нових знань. Збагачують учнів теоретичними і практичними знаннями з технічних та інших дисциплін.

Література:

1. Бевз Г.П. Алгебра: Підручник для 7 класу / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз – К.: Зодіак-ЕКО, 2007. – 304 с.
2. Возняк Г. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики./ Г. Возняк, М. Маланюк — К.: Рад. шк., =1989.
3. Гете И. В. Избранное. В 2-х ч., Ч. 2./ И. В. Гете – М.: Просвещение, 1985.
4. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Математика в школі — 2004.
5. Кравчук В. Алгебра: Підручник для 7 класу / В. Кравчук, Г. Янченко Тернопіль: Підручники і посібники, 2007. – 224 с.
6. Терешкин Н. Прикладная направленность школьного курса математики / Н. Терешкин — М.: Просвещение. - 1990.

Мартинюк Тетяна Сергіївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

МЕТОДИКА РОЗВЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ

Постановка проблеми. На сьогоднішній день в Україні вивчають різні способи розв'язування текстових задач. Кожний із способів має свої переваги та недоліки, але виділити один головний – неможливо. Кожний спосіб раціонально застосовувати в окремих класах та ситуаціях.

Мета статті: проаналізовано методику розв'язування текстових задач алгебраїчним методом. Розглянути та проілюструвати методику розв'язування текстових задач за допомогою складання рівнянь.

Виклад основного матеріалу. Наприклад, згідно з діючою програмою з математики, розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь передбачено

вже в першій темі 5 класу. Проте, в 5-6 класах захоплюватися алгебраїчним методом розв'язування таких задач не варто. Пов'язано це з віковими особливостями розвитку мислення учнів. Уміння абстрактно мислити у більшості учнів цієї вікової групи ще не сформоване, а тому, у них переважає конкретно-понятійне мислення над абстрактно-понятійним. Більшого розвитку досягла практична компонента мислення порівняно зі словесно-логічною. Крім того, у п'ятикласників і шестикласників ще не сформовані навички, необхідні для якісного опанування алгебраїчного методу розв'язування задач. А саме: вираження невідомих величин через відомі, бачення двох однакових величин, виражених по різному, виконання тотожних перетворень виразів зі змінною.

Взагалі, метод рівнянь ефективно застосовувати при розв'язуванні таких задач, де невідоме в рівнянні фігурує хоча б у двох місцях, наприклад: $x-(40-x)=26$ і т.п. Однак, такі рівняння важко розв'язати, спираючись на залежність між компонентами і результатом арифметичних дій.

Отже, розв'язувати задачі складанням рівняння в 5 класі варто лише в окремих випадках, як демонстрацію ще одного способу розв'язування текстової задачі і відповідну пропедевтику алгебраїчного методу.

З огляду на вище сказане, в 5-6 класах має переважати арифметичний спосіб розв'язування задач, а вже з 7 класу – метод рівнянь. Зрозуміло, що в сучасній школі не варто повертатися до застарілих способів розв'язування арифметичних задач, досить обмежитися двома-трьома типами:

- ✓ на пропорційний поділ;
- ✓ на знаходження чисел за їх сумою та різницею;
- ✓ на знаходження чисел за їх сумою (різницею) та кратним відношенням [2].

У 5-6 класах варто цілеспрямовано формувати навички, що є важливими для успішного оволодіння алгебраїчним методом розв'язування текстових задач, а саме: записувати у вигляді виразу словесно сформульовані залежності та складати рівності.

Формуванню навички записувати у вигляді виразу словесно сформульовані залежності сприятимуть вправи такого типу:

- У класі x хлопчиків, а дівчаток на 4 більше. Скільки дівчаток у класі? Запиши це у вигляді буквеного виразу.
- У парку x дубів, а берізок у 3 рази більше. Скільки берізок у парку? Склади вираз для розв'язування задачі.
- Пшеницею засіяно x га, а житом – 40% цієї площі, тобто житом засіяно …. га.
- Сума двох чисел дорівнює 17. Одне з цих чисел x. Запишіть буквеним виразом друге число.
- В одному ящику a кг груш, а в другому – на 4 кг менше. Яка маса груш в обох ящиках?
- Власна швидкість човна - x км/г од, швидкість течії річки 2 км/год. З якою швидкістю човен рухається за течією? Яку відстань при цьому він долає за 4 г од?

Формувати навички складати рівності варто за етапами:

На *першому етапі* необхідно навчити учнів розуміти зміст уже складених рівностей. Цьому можуть сприяти такі вправи: сформулювати словами як співвідносяться числа a і c:

1) $a \square c \square 2$

Міркування повинні бути такими: - a на 2 більше від c, - c на 2 менше від a, - різниця чисел a і c дорівнює 2.

2) $a \square 3 \cdot c$;

3) $a \square c \cdot 2$;

4) $a \square \frac{2}{3} c$;

5) $a - c \square 4$;

6) $a \square c \square 5$ і т.д.

На *другому етапі* учні мають самі складати відповідні рівності, де співвідношення між числами, що порівнюються, мають бути подані у явному вигляді. Наприклад: записати за допомогою рівності такі співвідношення між числами x та y:

1) x на 3 менше y

Міркування мають бути такими: щоб з даних чисел утворювати рівні між собою числа, можна:

- менше число x збільшити на 3, тобто записати $y \square x \square 3$;

- більше число y зменшити на 3, тобто записати $x \square y - 3$;

- третій варіант запису може бути таким: $y - x \square 3$.

2) Число x більше від числа y в 3 рази

Також маємо три варіанти рівностей: $x \square 3y$; $y \square \frac{x}{3}$; $\frac{x}{y} \square 3$.

3) y становить 25% від x;

4) різниця чисел x і y в 2 рази менша за суму цих самих чисел;

5) y на 15% менше x і т.д.

Третій етап. Учні виконують вправи на використання відомих формул, записують неявно подані рівності. Наприклад: периметр квадрата рівний $(x \square 12)$ см, а довжина його сторони - x см. Скласти рівняння периметра квадрата та визначити довжину сторони квадрата.

Розв'язування сюжетної задачі має починатися з усвідомлення її змісту. Для цього, як правило, учням недостатньо прочитати умову задачі або навіть її переказати. Зміст задачі необхідно усвідомити та осмислити, а для цього проаналізувати. Якщо учні розв'язують задачу самостійно, то їм доцільно дати такі рекомендації щодо засвоєння змісту.

1. Прочитайте не менше, ніж два рази текст задачі так, щоб могли його повторити;

2. Визначте величини, про які йдеться в умові задачі;

3. Розмежуйте в умові задачі дані і шукані величини;

4. Встановіть залежність між даними і шуканими величинами;

5. Визначте головне запитання задачі;

6. Виберіть невідому величину, яка зазвичай позначається x;

7. Результат аналізу змісту задачі відобразіть у скороченому (схематичному) записі умови задачі.

Якщо вчитель організовує колективну роботу із засвоєння змісту, то доцільним є діалог, який відбудеться після прочитання умови задачі.

Наведемо приклад:

Задача 1. Насос може викачати з басейну $\frac{2}{3}$ води за 7,5 хв. Пропрацювавши 0,15 г од, насос зупинився. Знайти об'єм басейну, якщо після зупинки насоса в басейні ще залишилося 25 м ^{3} води.

Діалог з учнями може бути такий:

- Про що йдеться в задачі? (про роботу насоса);
- Про які величини йдеться в умові задачі? (про об'єм басейна та час роботи насоса);
- Скільки води може викачати насос за 7,5 хв.? ($\frac{2}{3}$ об'єму води);
- Скільки пропрацював насос до зупинки? (0,15 г од);
- Скільки води залишилося в басейні після зупинки насоса? (25 м ^{3} води);
- Що запитується в задачі? (який об'єм басейну).

Засвоєнню умови задачі, особливо учнями, які краще сприймають інформацію візуально, сприяє *скорочений схематичний запис* умови задачі, який може виконуватися навіть під час читання задачі. Форма його має бути компактною, досить наочною і зручною для сприйняття, в ній відображається тільки те, що необхідне для розв'язування. Мета таких записів - полегшити учням розуміння умови задачі, допомогти усвідомити залежність між даними і шуканими величинами. Скорочений запис умови може бути подано у вигляді *графічної схеми, малюнка, ілюстрації, графіка, таблиці, графа тощо*. Але короткий запис не може зводитися до переписування умови за допомогою скорочення кожного слова. Скорочений запис не самоціль, а допоміжний засіб у засвоєнні змісту та розв'язуванні задач, тому не варто насаджувати штучно певні форми коротких записів і вимагати обов'язкового їх виконання. Не до кожної задачі взагалі варто робити схематичний запис умови. Це не може бути обов'язковою вимогою до розв'язування.[1]

Засвоєння змісту та його скорочений (схематичний) запис необхідний для того, щоб усвідомивши умову задачі, ефективно здійснити пошук рівняння (системи рівнянь). Навчаючи учнів розв'язувати сюжетні задачі складанням рівнянь, варто знайомити їх з певною системою орієнтирів, необхідних для ефективного пошуку рівняння. Ця система орієнтирів може бути представлена у вигляді евристичної схеми пошуку, яку вчитель надає учням у вигляді зразка дій, одночасно показуючи процес розв'язання задачі на основі цієї схеми. Учні можуть також скласти схему самі під керівництвом учителя, проаналізувавши розв'язання вже розв'язаної колективної задачі [4].

У методиці навчання математики відомі *дві евристичні схеми пошуку* рівняння до сюжетної задачі, з якими варто ознайомити учнів. Першу застосовують до розв'язування нескладних задач, і вона має такий вигляд:

1) позначте через x шукану величину (або одну із шуканих величин);

2) виразіть через x інші величини, про які йдеться в задачі;

3) складіть рівняння, спираючись на залежність між відомими і невідомими величинами.

Друга евристична схема зручна для розв'язування складніших задач. Вона передбачає такі етапи:

1) виберіть основне невідоме і позначте його буквою (як правило х);

2) виразіть через х інші невідомі, про які йдеться в задачі;

3) утворіть два вирази, які відповідно до умови задачі перебувають у відношенні „більше ", „менше " або „дорівнює ";

4) запишіть це відношення за допомогою рівняння.

Звичайно, не до кожної сюжетної задачі можна скласти рівняння, діючи відповідно до цих евристичних схем. Але для більшості задач з шкільних підручників вони є ефективними. Для задач, розв'язання яких потребує суто евристичних методів пошуку, підготовленішим учням необхідно показати інші прийоми пошуку, а саме: цілеспрямованих проб; складання графів різного рівня; складання серії допоміжних задач тощо.

Ефективне розв'язування більшості задач залежить від вдалого *вибору невідомих.* Учнів потрібно зорієнтувати на те, що:

- за основне невідоме, як правило, зручніше вибирати меншу з шуканих величин, тоді інші невідомі виражаються через основне за допомогою дій додавання або множення;
- вибрана невідома величина не обов'язково має збігатися з величиною, яку потрібно знайти;
- невідомі треба вводити так, щоб через них було легко записати умову задачі;
- ключова фраза, з якої починається розв'язування сюжетної задачі, має бути така: „Нехай x —...".

Проілюструємо другу евристичну схему пошуку рівняння на прикладі задачі 1.

1. Виберіть основне невідоме і позначте його буквою х Нехай x м^3 - об'єм басейну,

2. Виразіть через x інші невідомі, про які йдеться в задачі:

$\frac{2}{3}x$, м^3 – кількість води, яку викачає насос за 7,5 хвилини, отже, продуктивність насосу дорівнює $\frac{2}{3}x \div \frac{15}{2} = \frac{4x}{45}$ м^3 /хв. (перед розв'язуванням цієї задачі варто нагадати учням поняття *продуктивності).*

3. Утворіть два вирази, які відповідно до умови задачі перебувають у відношенні „більше", „менше" або „дорівнює":

1) За 0,15 год, що дорівнює 9 хв, тобто до зупинки, насос викачав - $\frac{4x}{45} \cdot 9 = \frac{4x}{5} м^2$ води,

2) після зупинки насоса в басейні залишилось 25 м^3 води, отже, до зупинки насос викачав *(x* - 25) м^3.

4. Запишіть це співвідношення за допомогою рівняння:

Оскільки за умовою задачі утворені вирази $\frac{4x}{5}$ і *(x – 25)* позначають однакову кількість викачаної води до зупинки насоса, то це можна записати у вигляді рівняння: $\frac{4x}{5} = x - 25$ [3].

Обґрунтовування складеного рівняння — обов'язковий і досить важливий момент при розв'язуванні текстової задачі. У класі, де переважають підготовлені учні, одну і ту саму задачу бажано розв'язувати, складаючи різні рівняння, вибираючи за невідомі різні величини, що входять в умову задачі. Це допомагає учням краще усвідомлювати та мотивувати складене рівняння. Дуже важливі при. цьому зразки міркувань, які наводить сам учитель.

Важливим при навчанні розв'язувати сюжетні задачі є засвоєння учнями певних рекомендацій, яких варто дотримуватися, розв'язуючи певні типи задач, наприклад на рух, сумісну роботу, сплави і суміші тощо.

Висновки. У статті проаналізовано методику розв’язування текстових задач алгебраїчним методом, а саме за допомогою складання рівнянь.

Література:

1. Бевз Г.П. Методика розв’язування алгебраїчних задач у 6-8 класах. – К.: Рад.школа, 1975. - 238с.
2. Фридман Л.М., Турецький Е.Н. – Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1984.-175с.
3. Оганесян В.А. и др. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. – М., =1980
4. Математика: Учебник для 6 кл. общеобразоват. учреждений / Н.Я.Виленкин, В.И. Жохов, А.С.Чесноков, С.И.Шварцбурд. – 6-е изд.– М.: Мнемозина, 1999. – 304 с.

Масняк Ольга Сергіївна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ФУНКЦІЯ В КОНТЕКСТІ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ АЛГЕБРИ

Постановка проблеми. В основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії. Необхідною умовою формування компетентностей є діяльнісна спрямованість навчання, яка передбачає постійне включення учнів до різних видів педагогічно доцільної активної навчально-пізнавальної діяльності, а також практична його спрямованість. Необхідно, де це можливо, не лише показувати виникнення математичного факту із практичної ситуації, а й ілюструвати його застосування на практиці. □програма□

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Про важливість реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики свідчать праці А. Адигозалова, Г. Бевза, О.Волосюк, І. Глейзера, Б. Гнеденка, А. Колмогорова, Ю. Колягіна, А. Прус, А. Файзуллаєва, А. Фетисова, В. Фірсова, Л.Філон, В.Швеця та ін.. Поняття прикладної спрямованості шкільного курсу математики, розкривають по різному, зокрема, А. Прус [1] під поняттям прикладної спрямованості шкільного курсу математики розуміє орієнтацію цілей, змісту та засобів навчання математики в напрямі здобуття учнями у процесі математичного моделювання знань, умінь і навичок, які використовуватимуться ними в різних сферах життя.

У педагогічній літературі поняття прикладної задачі трактується по-різному, а саме як: задача, що потребує перекладу з природної мови на математичну; задача, яка близька за формулюванням і методами розв'язування до задач, що виникають на практиці; сюжетна задача, сформульована у вигляді задачі-проблеми. Отже, прикладна задача — це задача, що виникла поза математикою, але розв'язується математичними засобами. Прикладна задача повинна задовольняти такі умови: 1) питання задачі формулюється так, як воно зазвичай формулюється у житті; 2) розв'язок задачі має практичну значимість; 3) дані та шукані величини задачі мають бути реальними, взятими з життя.

Мета статті: проілюструвати реалізацію прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри на прикладі теми «Функція».

Виклад основного матеріалу. Введення поняття функції у шкільних підручниках алгебри 7 класу ([3], [4], [5]) приблизно однакове. Орієнтовно можна виділити 6 етапів:

1. Приклади залежності між різними величинами
2. Поняття незалежної, залежної змінної
3. Означення функціональної залежності
4. Поняття області визначення та області значень функції
5. Способи задання функцій
6. Розв’язування вправ

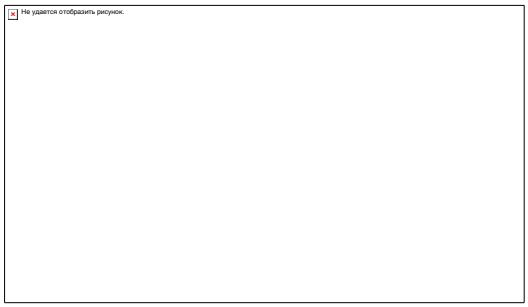


Рис. 1

Приклади залежності між різними величинами. У кожному із перерахованих шкільних підручників наведені приклади відповідності, серед яких є кілька прикладної спрямованості. Нами підібрані такі приклади залежності між різними величинами:

Приклад 1. Нехай існує певна кількість квитків на проїзд у трамваї, кожен із яких має свій номер. Кожному пасажиру цього трамвая поставимо у відповідність номер квитка, придбаного у кондуктора. Таким чином, ми встановимо взаємно-однозначну відповідність між пасажиром та номером його квитка.

Приклад 2. На графіку (рис. 1)показано залежність потужності вітрогенератора від швидкості вітру для вітряка потужністю 240 Вт.

Приклад 3. Залежність температури кипіння води від висоти над рівнем моря визначена у такій таблиці:

Висота над рівнем моря, м	0	1500	2000	3000	4500	6000	7500	9000
Температура кипіння води, °С	100	95	93	90	85	80	75	70

Приклад 4. Відстань від спостерігача до місця спалаху розряду блискавки залежить від часу між побаченим спалахом та почутим громом. Нехай s – шукана відстань. Тоді її можна знайти за формулою:

$$s \approx \frac{1}{3}t.$$

Поняття незалежної, залежної змінної. Ці поняття у всіх підручниках вводяться однаково, виходячи із наведених прикладів.

Введемо поняття незалежної та залежної змінної для наших прикладів.

Зрозуміло, що в прикладі 1 незалежною змінною є номер квитка, а залежною – пасажир, що купує квиток. У другому прикладі незалежною змінною буде швидкість вітру, а залежною – потужність вітряка. У прикладі 3 незалежна змінна – висота над рівнем моря, залежна – температура кипіння, що відповідає цій висоті. У прикладі 4 незалежною змінною є час, а залежною - відстань від спостерігача до місця спалаху блискавки.

Означення функціональної залежності. Функціональна залежність розглядається як певний закон, у відповідності до якого кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної. Після цього означення незалежній і залежній змінним дають назви аргументу та функції відповідно та визначають їх у розглянутих вище прикладах.

Але таке введення функції є неповним, оскільки в учнів може скластися враження, що будь-яка відповідність між величинами є функціональною. Щоб цього не сталося, необхідно навести контрприклади. Лише в підручнику [5] є такий приклад, причому він належить до задач прикладної спрямованості.

Ми пропонуємо використати такі контрприклади:

Приклад 5. У таблиці наведена шкала оцінювання знань згідно з ECTS[7]:

За шкалою університету	За шкалою ECTS
90 – 100	A (відмінно)
82 – 89	B (дуже добре)
75 – 81	C (добре)
67 – 74	D (задовільно)
60 – 66	E (достатньо)
35 – 59	FX (незадовільно з можливістю повторного складання)
1 – 34	F (незадовільно з обов'язковим повторним курсом)

Така залежність не є функціональною, оскільки, знаючи оцінку студента за шкалою ECTS, ми не зможемо однозначно визначити, яку кількість балів за шкалою університету він набрав.

Приклад 6. Більшість учнів навчається в загальноосвітніх школах трьох ступенів: I – початкова школа (1 – 4 класи), II – основна школа (5 – 9 класи), III – старша школа (10 – 11 класи). Таким чином, встановлена відповідність між класом, де навчається учень, та освітнім ступенем, який він здобуває. Проте, так само, як і в прикладі 1, ми не можемо встановити, в якому класі навчається учень, якщо відомо ступінь освіти.

Приклад 7. У краєзнавчому музеї проводиться екскурсія. Вартість відвідування цієї екскурсії встановлена таким чином: вхід для дітей віком до 6 років безкоштовний, віком від 6 до 18 років – 15 грн., дорослим – 30 грн. Встановлена таким чином залежність також не є функціональною, оскільки не дає можливості однозначно визначити вік людини, виходячи з оплаченою нею вартістю квитка.

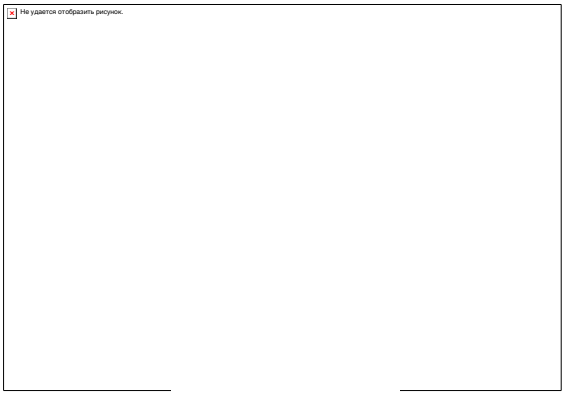


Рис. 2

Приклад 8. У фізиці існує поняття циклу Карно, який є циклом ідеальної теплової машини. Нехай один моль ідеального газу знаходиться в циліндрі з рухомим поршнем (рис. 2). На графіку показано залежність тиску від об'єму у цьому циклі у різних проміжних станах ідеального газу.

Зрозуміло, що така залежність не є функціональною, оскільки неможливо однозначно визначити тиск, знаючи об'єм газу (це можна зробити лише тоді, коли ми знаємо, у якому проміжному стані перебуває газ).

Поняття області визначення та області значень функції. Спосіб введення цих понять, у різних шкільних підручниках, суттєво не відрізняється: дають означення області визначення та області значень, після чого шукають їх множини у попередніх прикладах.

З'ясуємо область визначення та область значень для прикладів 1 – 4.

Так, у першому прикладі область визначення – множина усіх шестицифрових чисел (оскільки номер квитка – шестицифрове число), а область значень – множина людей – пасажирів трамвая.

У другому прикладі область визначення – множина невід'ємних чисел, область значень також є множиною невід'ємних чисел.

У прикладі 3 область визначення функції – множина всіх дійсних чисел, область значень – теж множина всіх дійсних чисел.

У прикладі 4 областю визначення є всі невід'ємні дійсні числа, так само і з множиною значень.

Способи задання функцій. У підручниках [3], [4] при введенні поняття функції показано всього два способи задання функції – таблично та аналітично, оскільки теорія з побудови графіків указана в наступному параграфі. У підручнику [5] присутній приклад графічного задання функції.

У запропонованих прикладах 1 – 4 присутні всі способи задання функції.

Розв'язування вправ. У підручнику [3] перед задачами наведено чотири приклади розв'язування вправ, два з яких прикладної спрямованості. Усього пропонуються учням для розв'язання 30 задач, серед яких 4 – усні, 10 – початкового рівня (А), 7 – середнього рівня (Б), 4 – підвищеної складності (В) та 5 вправ на повторення. Задач прикладної спрямованості всього чотири.

У підручнику [4] пропонується 37 задач різного рівня складності: 5 – початкового рівня, 17 – середнього рівня складності, 11 – достатнього, 4 – високого та жодної задачі підвищеного рівня складності. Прикладних задач - три.

У підручнику [4] запропоновано 35 задач різного рівня складності: 13 – початкового і середнього рівня навчальних досягнень, 16 – достатнього рівня, завдання, що відповідає високому рівню навчальних досягнень, 4 задачі для повторення та задача з розвитку нестандартного мислення. У цьому підручнику нараховується 20 задач прикладної спрямованості.

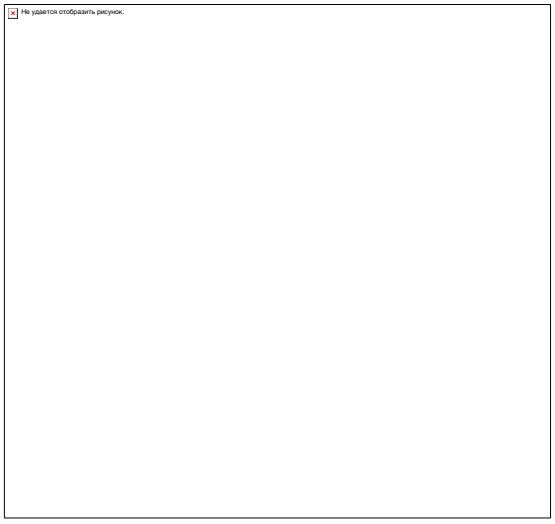


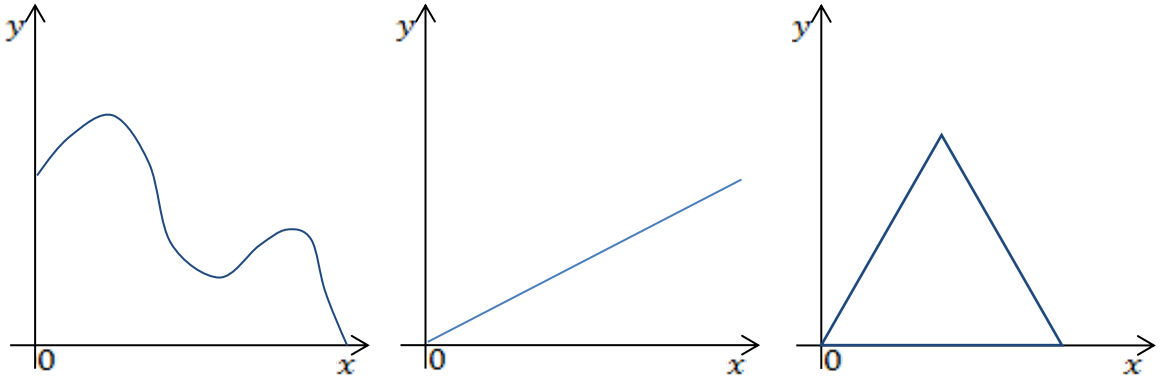
Рис. 3

Пропонуємо п'ять різнорівневих задач прикладного спрямування.

1. Чи є показана на рис. 3 залежність температури проростання насіння від виду рослини функціональною? Якщо так, то яка зі змінних є незалежною, а яка – залежною?

2. Щорічно промислові підприємства викидають в атмосферу 250 млн. тонн пилу. Задайте формулою залежність кількості пилу, викинутого підприємством, від кількості років функціонування цього підприємства (за умови незмінної технології виробництва).

3. Один кілограм моркви коштує 4 грн. На якому із графіків показано залежність вартості моркви y від її маси x кг?



а) б) в)

4. Відомо, що відносна атомна маса визначається як відношення маси атома елемента до $\frac{1}{12}$ маси Карбону (маса Карбону – $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ г).

1) Задайте формулою залежність відносної атомної маси від атомної маси елемента.

2) Якими є область визначення та область значень отриманої функції?

3) Знайдіть відносну атомну масу для Магнію (атомна маса Магнію – $4{,}34 \cdot 10^{-23}$ г).

4) Знайдіть атомну масу Хрому, якщо його відносна атомна маса дорівнює 52.

5. Для випічки одного торта-медовика потрібно 100 г меду. Як визначити необхідну кількість меду, маючи лише мірний стакан (відомо, що густина меду – 1,42 г/мл)?

Висновки. Отже, врахувавши сучасні суспільні умови і пов'язані із ними вимоги до знань та вмінь учнів, ми робимо висновок, що задача реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри є актуальною. Погодимось із твердженням А. Прус, що розв'язання цієї задачі значною мірою залежить від знань і вмінь учнів застосовувати метод математичного моделювання для розв'язання спочатку навчальних, а потім і реальних проблем.

Література:

1. Прус А. Піраміда в контексті прикладної спрямованості шкільного курсу геометрії / А. Прус // Методика, досвід, пошук. - 2005. – №2. – С. 11 – 15.
2. Гнеденко Б. В. Статистическое мышление и школьное математическое образование / Б. В. Гнеденко // Математика в школе. – 1968. – №1. – С. 8 – 15.
3. Кравчук В., Янченко Г. Алгебра. Підручник для 7 класу / В. Кравчук, Г. Янченко. – Тернопіль : Підручники і посібники. – 2007 р. — 240 с.
4. Істер О. С. Алгебра, 7 / О. С. Істер. – К. : Освіта. – 2007 р. – 230 с.

5. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. Підручник для 7 класу / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія. – 2008 р. – 147 с.
6. Ігор Соларов. Вітрогенератор своїми руками [Електронний ресурс]. – Режим доступу : URL : http://ibud.ua/ua/statya/vetrogenerator-svoimi-rukami-100873. – Назва з екрана.
7. Ковтонюк М. М., Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. Нормовані і гільбертові простори. Міра та інтеграл Лебега. – Вінниця : ДП «Державна картографічна фабрика». – 2013. – 44 с.
8. Галузяк В. М. Педагогіка: навчальний посібник / В. М. Галузяк, М. І. Сметанський, В. І. Шахов. – 4-е вид., випр. і доп. – Вінниця : ДП «Державна картографічна фабрика». – 2007. – 400 с.
9. Соболь В. І. Біологія : Підруч. для 7 кл. загальноосв. навч. закл. – К. : Грамота. – 2007. – 294 с.
10. Бойко В. М. Географія материків і океанів. Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів / В. М. Бойко, С. В. Міхелі. – Харків : Зодіак-ЕКО. – 2007. – 289 с.
11. Буринська Н. М. Хімія. Підруч. для 7 кл. загальноосв. навч. закл. – К. : Ірпінь. – 2001. – 113 с.

Нікуляк Тетяна Вікторівна
студентки освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»
спеціальність «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ВІЄТА ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ

Постановка проблеми. Вміння швидко знаходити корені квадратного рівняння має велике практичне значення не тільки в 5-8 класах, де учні ще тільки освоюють і закріплюють необхідні формули, але в старших класах, де квадратне рівняння виникають як допоміжні при розв'язуванні значно більш складніших задач і де особливо важливо, щоб учні максимально швидко справлялися з розв'язуванням цих рівнянь [1].

Мета статті: показати застосування теореми Вієта до розв'язування рівнянь загального вигляду та нестандартних задач.

Виклад основного матеріалу. Ми досить часто стикаємося з рівняннями, вирішення яких вимагає довгих обчислень, а іноді і ці обчислення не приносять успіху. І як наслідок, виникає питання: а чи не можна для цього рівняння знайти просте, раціональне і коротке рішення. Необхідно пам'ятати, що кожна математична задача вимагає індивідуального підходу. Не завжди корисно слідувати загальним алгоритмам, відхилення від них іноді призводить до більш раціонального вирішення.

Теорема Вієта відіграє величезну роль при вирішенні квадратних рівнянь. І все-таки користь від формул - систем рівностей, що зв'язує корені рівнянь з їх

коефіцієнтами, є. Є хоча б тому, що вони містять одну «підказку», що допомагає вирішувати деякі рівняння взагалі без всяких формул (і справа вже не тільки в розумі, тут потрібно чимало уяви та кмітливості). Отримані Вієтом системи рівностей, що зв'язують корені рівнянь довільного (не тільки другого!) ступеня з їх коефіцієнтами, тепер називаються теоремою Вієта, і кожен учень сьогодні знає це ім'я. Яка висока честь для вченого! Яка по-справжньому вічна пам'ять і слава! Варто поміркувати про це ...

Дослідження Вієта дали абсолютно новий напрямок роботи своїх сучасників, а алгебраїчні ідеї його зробили сильний вплив на європейську науку, він прославився узагальненням алгебри. Відомо, що в більшості «шкільних» квадратних рівнянь з цілими коренями ці корені без особливої праці знаходяться підбором, заснованим на теоремі, оберненій теоремі Вієта. Ми в своїй практиці вважаємо досить важливим і навіть необхідним добиватися від учнів саме такого способу розв'язування рівнянь [3].

Проте цей спосіб стає практично непридатним, якщо рівняння має дробові корені: то не так легко підібрати два числа, сума яких дорівнює $-\frac{b}{a}$, а добуток $\frac{c}{a}$. Для подолання виникаючої трудності ми використовуємо відомий прийом, що дозволяє звести задачу до знаходження цілих коренів допоміжного рівняння.

Використовуваний нами спосіб заключається в наступному. Нехай потрібно розв'язати квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (для нього $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$).

Помноживши обидві частини даного рівняння на a, перепишемо його у вигляді $(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$. В отриманому рівнянні $y^2 + by + ac = 0$. $y_1 + y_2 = -b$, тобто $y_1 + y_2 = (x_1 \cdot x_2)a$. Тепер бачимо, що для рішення вихідного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ достатньо розв'язати допоміжне квадратне рівняння $y^2 + by + ac = 0$ і його корені розділити на a.

Для практичного застосування цього способу ми формуємо як алгоритм: «перекинути» коефіцієнт a в вільний член, знайти корені нового рівняння і поділити на a. Покажемо це на конкретних прикладах.

Для розв'язання, наприклад, рівняння $6x^2 + x - 15 = 0$ запишемо допоміжне рівняння $y^2 + y - 90 = 0$, яке має корені $y_1 = -10$, $y_2 = 9$. Отже, вихідне рівняння має корені $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Наведемо ще деякий приклад. Щоб розв'язати рівняння $12x^2 + 13x + 3 = 0$, запишемо допоміжне рівняння $y^2 + 13y + 36 = 0$, корені якого $y_1 = -4$, $y_2 = -9$. Тепер вже легко знайти корені даного рівняння: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{3}{4}$.

В подальшому, по мірі накопичення учнями досвіду в застосуванні указаного способу можна відмовитися від явного виписування допоміжного рівняння і запропонувати їм проводити приблизно наступні «уявні» міркування: «Щоб розв'язати рівняння $3x^2 - 11x + 6 = 0$, потрібно підібрати два числа, сума

яких дорівнює 11, а добуток дорівнює 18. Зрозуміло, що ці числа 2 і 9, значить, корені даного рівняння $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3$ ». При цьому ми вважаємо правомірним не вимагати від учнів ніяких докладних записів, так що в зошитах після вихідного рівняння можуть бути зразу записані знайдені вище корені рівняння.

Відмітимо, що розглянутий спосіб дозволяє розв'язати і в деякому сенсі обернену задачу: по заданому квадратному рівнянню записати нове, корені якого б в k раз більше чи менше коренів даного рівняння.

Наприклад, щоб записати рівняння, корені якого в 5 раз менше коренів рівняння $x^2 + 7x + 10 = 0$, треба «перекинути» множник 5 із вільного члена в більший коефіцієнт, після чого отримаємо шукане рівняння $5x^2 - 7x + 2 = 0$. Якщо потрібно щоб корені нового рівняння були, скажемо в 2 рази більше коренів даного рівняння, то слідує, відповідно, провести «зворотне перекидання»: тоді, наприклад, із рівняння $3x^2 - 7x + 1 = 0$ отримаємо рівняння $\frac{3}{2}x^2 - 7x + 2 = 0$, або $3x^2 - 14x + 4 = 0$. Однак враховуючи, що задачі такого типу викликають в учнів вже значні труднощі, пов'язані з необхідністю кожен раз міркувати, в якому випадку яке «перикидання» потрібно робити, і оскільки з практичної точки зору ці задачі не відіграють великої ролі, то більшої уваги ми їм не приділяємо [4].

Щоб відчути всю силу теореми Вієта розглянемо деякі задачі [2].

Задача 1. Із пункту A в пункт B, відстанню між якими 30 км, одночасно виїхали автомобіліст і велосипедист. За годину автомобіліст проїжджає на 55 км більше, ніж велосипедист. Визначити швидкість велосипедиста, якщо відомо, що він прибув в пункт B на 1 год. 6 хв. Пізніше автомобіліста. Відповідь дайте в км/год.

Розв'язання.

Це текстова задача. Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x, тоді швидкість автомобіліста дорівнює $x + 55$. Відстань одна і таж сама – 30 км, тому задача до дробово-раціонального рівняння:

$$\frac{30}{x} - \frac{30}{x + 55} = 1\frac{6}{60}$$

Ця конструкція зводиться до простого квадратного рівняння: $x^2 + 55x - 1500 = 0$. Як бачимо, коефіцієнти отримали досить нелегкими.

Розв'язуємо квадратне рівняння за теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -55$; $x_1 \cdot x_2 = -1500$. Добуток коренів від'ємний, то це означає, що від'ємний корінь по модулю більший додатного. Неважко вгадати ці числа: -75 і 20.

За умовою задачі, x - це швидкість велосипедиста, а швидкість не може бути від'ємною. Тому нас цікавить лише число 20.

Відповідь. 20 км/год.

Задача 2. Для одного із підприємців – монополіста залежність об'єму попиту на продукцію q (одиниць в місяць) від його ціни p (тис. руб.) задається формулою: $q = 75 - 5p$. Визначте максимальний рівень ціни p (в тис. руб.), при якому значення прибутку підприємця за місяць $r = q \cdot p$ складає не менше 270 тис. руб.

Розв'язання.

Підставимо значення змінних $q = 75 - 5p$ і $r = 270$ в формулу $r = q \cdot p$. Отримаємо рівняння:

$$270 = p(75 - 5p) \Rightarrow 270 = 75p - 5p^2 \Rightarrow 5p^2 - 75p + 270 = 0 \Rightarrow p^2 - 15p + 54 = 0;$$

В результаті неважких перетворень отримали наведене квадратне рівняння. Використаємо теорему Вієта: $p_1 + p_2 = -(-15) = 15$; $p_1 \cdot p_2 = 54$. Добуток додатній – корені однакового знака. Сума додатна – значить, обидва корені додатні. А саме: $p_1 = 6$; $p_2 = 9$.

Оскільки в задачі потрібно визначити максимальний рівень, виберемо число 9.

Відповідь. 9 тис. руб.

Розгляне ще декілька прикладів.

Приклад 1. При яких значеннях параметра a різниця найбільшого і найменшого коренів рівняння $2x^2 - (a+1)x + (a-1) = 0$ рівна їх добутку.

Розв'язання.

Це квадратне рівняння. Воно буде мати два різних кореня, якщо $D > 0$. Іншими словами $(a+1)^2 - 8(a-1) > 0$ або $(a-3)^2 > 0$. Звідси, ми маємо два кореня при всіх a, за винятком $a = 3$.

Для визначеності будемо вважати, що $x_1 > x_2$ і отримаємо $x_1 + x_2 = (a+1)/2$ і $x_1 \cdot x_2 = (a-1)/2$. Виходячи з умови задачі $x_1 - x_2 = (a-1)/2$. Всі три умови повинні виконуватися одночасно. Розглянемо перше і останнє рівняння як систему. Вона легко розв'язується методом алгебраїчного додавання.

Отримаємо $x_1 = a/2$, $x_2 = 1/2$. Перевіримо при яких a виконається друге рівняння: $x_1 \cdot x_2 = (a-1)/2$. Підставимо отримане значення і будемо мати: $a/4 = (a-1)/2$. Тоді, $a = 2$. Очевидно, що $a \neq 2$, то всі умови виконанні.

Відповідь. При $a = 2$.

Приклад 2. Чому дорівнює найменше значення a, при якому сума коренів рівняння $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ дорівнює сумі квадратів його коренів.

Розв'язання.

Перед усім, приведемо рівняння до канонічного вигляду: $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$. Воно буде мати корені, якщо $D/4 \geq 0$. Отже, $a^2 - (2a-1) \geq 0$. Або $(a-1)^2 \geq 0$. А ця умова справедлива при будь-якому a. Застосуємо теорему Вієта: $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1 \cdot x_2 = 2a - 1$. Порахуємо $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$. Або після підстановки $x_1^2 + x_2^2 = (2a)^2 - 2 \cdot (2a-1) = 4a^2 - 4a + 2$. Лишилося скласти рівняння, яке відповідає умові завдання: $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$. Отримаємо: $2a = 4a^2 - 4a + 2$. Це квадратне рівняння має два кореня: $a_1 = 1$ і $a_2 = 1/2$. Найменший із них - $1/2$.

Відповідь. $1/2$.

Висновоки. Дуже прикро, коли теорема Вієта не знаходить широкого застосування в середній школі, зокрема це відноситься і до властивостей квадратного рівняння. Використання ж зазначених властивостей для швидкого отримання відповіді при вирішенні деяких квадратних рівнянь дає значні переваги. Завжди потрібно полегшувати свою працю, якщо це можливо.

Література:

1. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др. Алгебра:учеб. Для 8 кл. общеобразоват. Учреждений- М.:Просвещение,= 2007. 272стр.
2. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И., «Сборник задач по алгебре для 8-9 класса » учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.:Просвещение,=2006
3. Матеріали http://ru.wikipedia.org
4. Курляндчик Л.,Фомин С. Теорема Виета и вспомогательный многочлен.-Журнал «Квант» №12. =1984, стр. 14-16.

Приходько Ніна Василівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ ДІРІХЛЕ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ РІЗНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. Дуже часто буває так, що при розв'язуванні складних математичних задач використовують уже відомі методи, прийоми, принципи, теорії тощо. Завдяки цьому, деякі класи задач стають алгоритмічними, і їхні розв'язки – доступними широкому загалу. Одним із таких принципів є широковідомий принцип Діріхле. За традицією в літературі принцип Діріхле пояснюється на прикладі "зайців і кліток": якщо п'ятьох зайців розсадити в чотири клітки, то принаймні в одній із них опиниться більше одного зайця.

Принцип Діріхле, не зважаючи на його надзвичайну очевидність і простоту, часто використовується при розв'язувані задач і доведенні теорем у різних галузях математики. Більш загальне формулювання принципу Діріхле звучить так: якщо $nk + 1$ предмет розкладено в n ящиків, то принаймні в одному з ящиків знаходиться не менше ніж $k + 1$ предмет.

Продемонструємо приклади застосування принципу Діріхле до розв'язування математичних задач.

Аналіз попередніх досліджень. При доведенні багатьох теорем, розв'язуванні різноманітних задач використовується схема міркувань, відома як метод доведення від супротивного. Одна з його форм формулюється як принцип Діріхле – метод розв'язування нестандартних задач. Принцип названий на честь німецького математика Діріхле (1805-1859), який успішно застосовував його до доведення арифметичних тверджень. Його вивченням займалися В.Г.Болтянський, В.А. Вишенський, О.М. Вороний, М.Й. Ядренко.

Цим принципом у наявному вигляді користувався також Ферма в XVII столітті, але широко застосовуватися в доведеннях він став лише з минулого століття.

Мета статті: ввести основне поняття принципу Діріхле і показати можливість використання цієї теми для вирішення різних завдань підвищеної складності.

Виклад основного матеріалу. *1.Формулювання принципу Діріхле.*

Найпоширеніше формулювання принципу Діріхле звучит так.

Означення 1. Якщо в n клітках сидить $n+1$ чи більше зайців, то знайдеться така клітка,в якій по меншій мірі сидить два зайця.

Зазначимо, що в ролі зайців можуть виступати різні предмети і математичні об'єкти – числа, відрізки,місця в табличці і т.п.

Принцип Діріхле можна сформулювати на мові множин і відображень.

Означення 2. При будь-якому відображенню множини P, яка містить $n+1$ елементів, в множину Q, яка містить n елементів, знайдуться два елемента множини P, які мають один і той самий образ.

Незважаючи на очевидність цього принципу, його застосування є ефективним методом розв'язування задач, які в багатьох випадках дають просте розв'язок. Але в усіх таких задачах часто нелегко догадатися, що приймати за «зайців», що за «клітку», і як використовувати наявність двох «зайців», потрапивши в одну «клітку». За допомогою принципу Діріхле часто доводять існування якогось об'єкта, не вказуючи, загалом, алгоритм його постановки чи знаходження. Це дає неконструктивне доведення – не можемо говорити, в якій конкретно клітці сидять два зайця, а знаємо тільки, що така клітка існує.

Нижче наведемо приклади де покажемо, що природа «зайців» і «кліток» може значно відрізнятися один від одного.

Приклад 1. Довести, що пряма l, розміщена в площині трикутника ABC, не проходить через жодну з його вершин, то вона не може перетинати всі три сторони трикутника.

Розв'язання. Півплощини, на які пряма l розбиває площину трикутника ABC, позначимо через q_1 і q_2; ці півплощини будемо вважати відкритими (тобто не містять точок прямої l). Вершини даного трикутника (точки A, B, C) будуть «зайцями»,а півплощини q_1 і q_2 - «клітками». Кожен із «зайців» потрапляє в яку-небудь «клітку» (адже пряма l не проходить через жодну із точок A, B, C). так як «зайців» троє, а «кліток» тільки дві, то знайдуться два «зайця», розташовані в одній «клітці»; по іншому кажучи, знайдуться такі дві вершини трикутника ABC, які належать одній півплощині (рис.1).

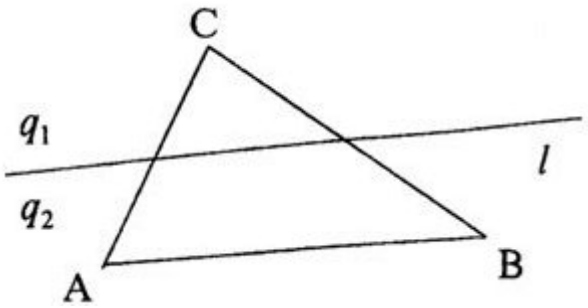


Рис. 1

Нехай, точки A і B знаходяться в одній півплощині, тобто лежать по одну сторону від прямої l. Тоді відрізок AB не перетинається з l. Отже, в трикутнику ABC знайшлась сторона, яка не перетинається з проямою l.

Приклад 2. По краях круглого столу на однаковій відстані один від одного, розташовані n прапорів країн, за столом сидить n послів цих країн, причому кожен посол сидить біля чужого прапору. Довести, що існує такий оберт столу, після якого хоча б два посла опиняться біля прапору своєї країни.

Розв'язання. Існує $n-1$ обертів стола, після кожного з них взаємне розташування прапорів і послів змінюється. Кожному послу прикріплюємо оберт, після якого він опиниться біля свого прапору. Згідно з принципом Діріхле при будь-якому оберті два (і більше) посла опиняться біля своїх прапорів. В розв'язку задачі роль «зайців» будуть виконувати посли,а роль «кліток» - положення столу при різних обертах. Посол потрапляє в «клітку», якщо при відповідному цієї «клітки» оберту стола він опинеться біля прапору своєї країни. Таким чином, «кліток» у нас $n-1$, а «зайців» - n.

Зауваження. Умова того,що з початку жоден з послів не знаходився біля свого прапору, є суттєвою. Дійсно початкове положення також є «кліткою», але ця «клітка» за умовою буде порожньою. Отже, можна вважати, що всього кліток $n-1$.

2.Принцип Діріхле в теорії чисел

Теорема, яка сформульована П. Ферма, являється із найфундаментальніших фактів в теорії ділення цілих чисел і знаходить широке застосування як теоретичних дослідженнях,так і в арифметичних задачах.

Теорема 1. (Мала теорема Ферма). Якщо p – просте число, a – ціле число, яке не ділиться на p, то $a^{p-1}-1$ при діленні на p дає остачу 1,

$a^{p-1}-1 \equiv 1 (mod\, p)$.

Доведення. Кожне з $p-1$ чисел $a, 2a, \dots, (p-1)a$ («зайців») дає при діленні на p не нулева остача (адже a не ділиться на p):

$$a = k_1 p + r_1, \qquad (*)$$

$2a = k_2 p + r_2,$

$\dots\dots\dots\dots\dots$

$(p-1)a = k_{p-1} p + r_{p-1}.$

Якщо число остачі («кліток») менше $\mathrm{p}-1$, то серед них знайдеться принаймні два однакових (принаймні два «зайця» в одній «клітці»). Але це не можливо, так як при $r_n = r_m$ число $(n-m)a = (k_n - k_m)p$ ділиться на p, що є суперечністю, адже $|n-m| < p$ і a взаємно просте з p. Це означає, що всі остачі $r_1, \dots, r_{p-1}$ різні між собою і утворюють перестановку чисел $1, 2, \dots, \mathrm{p}-1$. Перемножуючи всі рівності (*), отримуємо

$$(p-1)!\,a^{p-1} = Np + r_1 r_2 \dots r_{p-1} = Np + (p-1)!,$$

де N – ціле число. Звідси випливає, $(p-1)!\,(a^{p-1} - 1)$ ділиться на p, тоді і $(a^{p-1} - 1)$ ділиться на p. Теорема доведена.

Наслідок. Якщо p – просте число, то при будь-якому цілому a різниця $ap - a$ ділиться на p.

Крім малої теореми Ферма застосування принципу Діріхле до остачі при діленні зустрічаються в багатьох інших задачах елеменетарної теорії чисел. Принцип Діріхле можна переформулювати наступним чином.

*Означення 3.*Серед $p+1$ цілих чисел знайдуться два числа, які при діленні на p дають одну і ту ж остачу.

При діленні з остачею на p може зустрічатися скінченне число різних остач: $0, 1, 2, \dots, p-1$. Вони відіграють роль «кліток», а самі числа являються «зайцями». Так як чисел («зайців») більше, ніж остач («кліток»), то принаймні два числа «сидять в одній клітці», тобто мають однакові остачі при діленні на p. Розглянемо кілька класичних прикладів.

Приклад 3. Дано 11 різних цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати два числа, різниця яких ділиться на 10.

Розв'язання. Принаймні два числа з 11 матимуть однакову остачу від ділення на 10 (принцип Діріхле). Нехай це будуть $A = 10a + r$ і $B = 10b + r$. Тоді їхня різниця ділиться на 10: $A - B = 10(a-b)$.

Приклад 4. Першокласник Роман знає тільки цифру 1. Довести, що він може написати число, яке ділиться на 1997.

Розв'язання. Розглянемо послідовність чисел $a_1 = 1, a_2 = 11, \dots,$ $a_n = 11\dots1, \dots,$ десятковий запис яких складається з одниць. Оскільки, існує лише кінцеве число остач від ділення на 1997, а послідовність містить нескінченно багато членів, то згідно принципу Діріхле, серед них знайдуться два, які дають однакові остачі: a_k і a_l $(k > l)$. Їхня різниця $a_k - a_l = 10^l a_{k-l}$ ділиться на 1997. Так як 10^l і 1997 – взаємно прості , то a_{k-l} ділиться на 1997. Це число Роман зможе записати.

3.Принцип Діріхле для довжин і площ

Застосування до нескінчених множин (відрізків, фігур, об'ємів і т.д.) можна сформулювати твердження, ідентичне до принципу Діріхле.

Означення4. Якщо на відрізку довжиною L розміщено декілька відрізків з сумою довжин більшою за L, то принаймні два з них мають спільну точку.

*Означення 5.*Якщо в середині фігури площею S знаходиться декілька фігур, які мають площу більшу S, то принаймні дві з них мають спільну точку.

Означення 6. Якщо на відрізку довжиною L розташовано декілька відрізків, сумма довжин яких більша Lk, то принаймні одна точка покриває не менше ніж $k+1$ з цих відрізків.

*Означення7.*Якщо сума площ декількох фігур менша S, то ними не можна покрити фігуру площею S.

Приклад 5. В квадраті площею S розташовані 100 фігур, сума площ яких більша $99S$. Довести, що у всіх цих фігур існує спільна точка.

Розв'язання. Нехай $S_1, S_2, \dots, S_{100}$ – площі даних фігур, а $S_1', S_2', \dots, S_{100}'$ – площі фігур, що доповнюють їх до квадрата. Очевидно, що $S_k + S_k' = S$. За умовою $S_1, S_2, \dots, S_{100} > 99S$, тому:

$$S_1', S_2', \dots, S_{100}' = (S - S_1) + (S - S_2) + \dots + (S - S_{100}) =$$
$$= 100S - (S_1 + S_2 + \dots + S_{100}) < 100S - 99S = S.$$

Таким чином, сума площ доповнюючи фігур менша площі квадрата, і це означає, що вони не можуть покрити весь квадрат (за принципом Діріхле),тобто знайдеться точка, яка не належить жодній із них. Тоді ця точка належить кожній із цих фігур і є шуканою.

4.Неперервний принцип Діріхле

Як правило, цей принцип застосовується для декількох чисел і їх суми. В загальному вигляді для чисел він виглядає так.

*Означення 8.*Якщо сума n чисел більша S, то принаймні одне із цих чисел більша S/n.

*Означення 9.*Якщо середнє арифметичне декількох чисел більша a, то принаймні одне із цих чисел більше a; або в термінах із «зайцями»:

*Означення 10.*Якщо кролики з'їли m кг трави, то якийсь кролик з'їсть не менше m/n кг трави.

Крім цього, існує проста геометрична інтерпретація неперервного принципу Діріхле:

Означення 11. Нехай із деякої точки на площині проведено N різних променів; тоді кут між деякими двома із них не менше $\frac{360^\circ}{N}$.

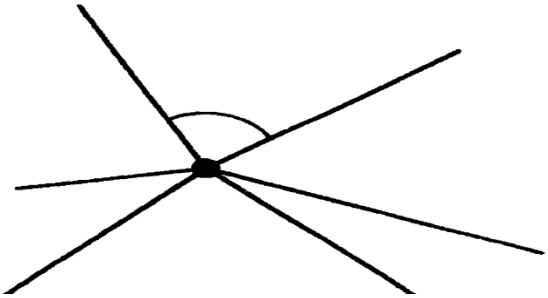


Рис. 2

Зрозуміло, що якщо розглядати тільки кути між сусідніми променями,то всього вийде N кутів (рис.2). В сумі вони складають повний кут, рівний 360°. За неперервним принципом Діріхле, випливає, що градусна міра одного з цих кутів не менша $\frac{360^\circ}{N}$ (в іншому випадку їх сума буде меншою 360°).

Розглянутий принцип називається неперервним оскільки, тут числа (або градусна міра кутів) можуть приймати будь-яке значення із деякого проміжку, в той час як принцип Діріхле в звичайному розумінні оперує з дискретним набором об'єктів («зайців») – було б абсурдно припускати, що в клітці може опинитися, наприклад, два з половиною зайця.

Приклад 6. На площині дано n попарно не паралельних прямих. Довести,що знайдуться дві з них, кут між якими не менший $180^\circ/n$.

Вказівка. Достатньо перенести прямі паралельно один до одного так, щоб всі вони проходили через одну точку. Із цієї точки буде виходити $2n$ променів і після цього можна застосувати принцип Діріхле.

Висновки. Практичні завдання переконливо допомагають оволодіти принципом Діріхле, розвивають гнучкість математичного мислення, логічне міркування, визивають інтерес до процесу розв'язування задач за допомогою принципу Діріхле. Принцип Діріхле часто застосовується до розв'язування багатьох видів математичних задач. Також принцип Діріхле застосовується в теорії діофантових наближень при аналізі систем лінійних нерівностей.

Література:

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975. – 418 с.
2. Болтянський В. Г. Шість зайців у п'яти клітках / В. Г. Болтянський// Квант. – 1977. – №4
3. Вишенський В.А., Ядренко М. Й. Вибрані математичні задачі.-К.: Вища школа, 1974. - 218 с.
4. Генкін С.А., Ітенберг І.В., Фомін Д.В. Ленінградські математичні гуртки. - К.:ТВіМС, 1997. – 395 с.
5. Прасолов В. В. Завдання з планіметрії. Ч. 2. М.: Наука, 1991. – 411 с.
6. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. - Вінниця. 1998. – 208 с.

Струк Світлана Миколаївна

студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРУ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ

Постановка проблеми. Система освіти в нашій країні вступила в період фундаментальних змін, що характеризуються новим розумінням цілей освіти, новими концептуальними підходами до розробки і використання навчальних технологій і т. ін. Тому поставлені перед школою завдання щодо поєднання навчання з подальшою продуктивною працею, підвищення ефективності навчання можуть бути реалізовані за умови підвищення рівня шкільної математичної освіти, посилення її прикладного та практичного спрямування.

Нові суспільні умови та нові завдання освітньої галузі «математика» потребують корекції існуючих шляхів досягнення мети та вирішення зазначеної проблеми шкільного курсу математики.

Мета статті: проаналізувати можливості посилення прикладного та практичного спрямування шляхом застосування задач прикладного характеру в шкільному курсі математики.

Виклад основного матеріалу. Існує необхідність так організовувати вивчення математики, щоб воно було корисним і водночас захоплюючим, цікавим. Саме прикладне спрямування включає вміння учнів засобами математики досліджувати реальні явища, складати математичні моделі задач та співставляти знайдені результати з реальними. Практичне спрямування шкільного курсу математики передбачає формування в учнів умінь використовувати здобуті знання під час вивчення як самої математики, так і інших дисциплін.

Ефективним є навчання, яке в єдності з вихованням забезпечує активізацію мислення учнів і свідоме засвоєння ними системи знань, спонукає у них бажання та потребу в цих знаннях і викликає інтерес до предмета, допомагає розвитку здібностей кожного учня, розвиває вміння та навички застосовувати отримані знання на практиці, а також самостійно здобувати ці знання.

Підвищенню ефективності навчання математики сприяє розв'язування задач практичного змісту. Звернення до прикладів із життя і навколишньої дійсності полегшує вчителю організацію цілеспрямованої навчальної діяльності учнів.

У педагогічній літературі поняття прикладної задачі трактується по-різному, а саме як:

- задача, що потребує перекладу з природної мови на математичну;
- задача, яка близька за формулюванням і методами розв'язування до задач, що виникають на практиці;[1,с.215]
- сюжетна задача, сформульована у вигляді задачі-проблеми.

Прикладна задача повинна задовольняти такі умови:

1) питання задачі формулюється так, як воно зазвичай формулюється у житті;
2) розв'язок задачі має практичну значимість;
3) дані та шукані величини задачі мають бути реальними, взятими з життя.

Прикладна задача — це задача, що виникла поза математикою, але розв'язується математичними засобами.[3,с.153]

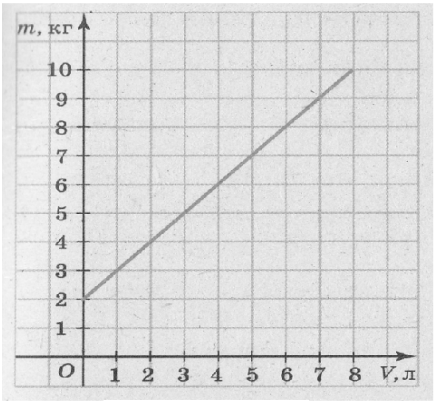
Кожна прикладна задача виконує різні функції, що за певних умов виступають явно або приховано.

Деякі задачі ілюструють запозичений у природи принцип оптимізації трудової діяльності (діставати найбільший ефект з найменшими затратами), інші — розвивають здібності учнів до технічної творчості (геометричні задачі на побудову тощо). Розв'язування прикладних задач сприяє ознайомленню учнів з роботою підприємств і галузей народного господарства, що є умовою орієнтації інтересу учнів до певних професій.

Задачі з практичним змістом в шкільних підручниках представлені переважно у вигляді стандартних текстових алгебраїчних та геометричних задач, або задач на функціональні залежності.

Частина задач, які містяться в діючих нині шкільних підручниках з алгебри (7-9 кл.), з алгебри та початків аналізу (10-11 кл.), геометрії може відноситись до задач з практичним змістом. Так, наприклад:

Задача 1. На малюнку 1 зображено графік залежності маси m (у кг) відра з водою від об'єму води V (у л). Знайдіть за графіком:



Мал. 1

1) масу порожнього відра;
2) масу відра з 4 л води;
3) масу одного літра води;
4) об'єм води у відрі, якщо маса відра з водою дорівнює 8 кг.

Розв'язання:

Якщо відро порожнє, об'єм води дорівнює 0.

1) $m = 2$ кг;

Якщо об'єм води у відрі дорівнює 4 л.

2) $V = 4$ л, $m = 6$ кг;

Якщо об'єм води у відрі дорівнює 1 л.

3) $V = 1$ л, $m = 3$ кг;

Якщо маса відра з водою дорівнює 8 кг.

4) $V = 6$ л, $m = 8$ кг.

Дана задача допомагає формувати вміння орієнтуватись за поданим графіком функції, тобто встановлювати відповідність між графічним зображенням функціональних залежностей і процесами реального життя, які вони зображають.

Зміст використаних в шкільному навчанні задач прикладного характеру з теми «Функції» можна збагатити, включивши в їх перелік наступні різновиди задач:

1) на обчислення значень величин, які зустрічаються в практичній діяльності;
2) на складання розрахункових задач;
3) на побудову найпростіших номограмм;

4) на застосування і обгрунтування емпіричних формул;
5) на виведення формул залежностей, які зустрічаються на практиці.

Наведемо деякі задачі прикладного характеру, які відповідають вище згаданому.

Задача 2. Вклади населення України в комерційних банках з 2005 року в національній валюті кожного року збільшуються приблизно в 2 рази, а у іноземній валюті – в 1,5 рази. В 2005 році вклади населення в комерційних банках в національній валюті становили 505 млн. грн., а в іноземній – 111 млн. грн. Побудуйте графік залежності суми вкладу від року, коли цей вклад було зроблено.

Розв'язання:

Розглянемо один з можливих варіантів її розв'язання. Пропонуємо учням заповнити таблицю 1 наближених даних по вкладам населення України в комерційних банках з 2005 до 2010 року. Після чого будуємо графік за даними таблиці. Також можна запропонувати учням задати функцію аналітично за даними таблиці.

Таблиця 1

Вклади населення України в комерційні банки, млн. грн.	2005	2006	2007	2008	2009	2010
В національній валюті	505					
В комерційній валюті	111					
Всього						

Для активізації пізнавальної діяльності учнів варто заповнення таблиці організувати у вигляді змагання на кращого фінансиста. Далі учням пропонується проаналізувати отримані числа та зробити потрібні висновки.

Заповнення таблиці проводиться кожним учнем самостійно, але аналіз отриманих даних потрібно зробити колективно та звернути увагу учнів на важливість математичних закономірностей у реальному житті. Обов'язково треба звернути увагу учнів на те, що данні про вклади в іноземній валюті наведені в гривнях. Чому? (Оскільки гривня являється національною валютою, то дані подано саме в гривнях.)

Застосування задач прикладного характеру на уроках геометрії сприяє розвитку просторвої уяви та здібностей учнів до технічної творчості.

Задача 3. Ви пливете на лодці по озеру і хочете дізнатись його глибину. Чи можливо для цього скористатися очеретом, що виглядає із води, не вириваючи його?

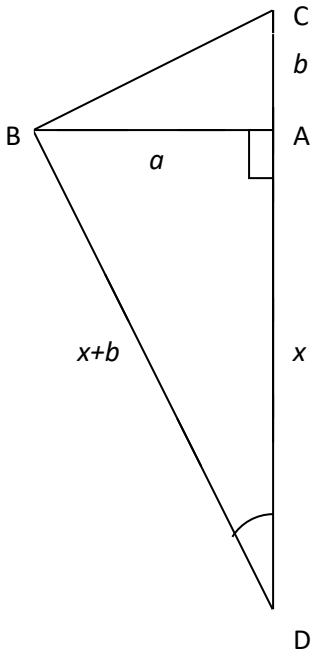
На основі цієї задачі можна створити проблемну ситуацію, заохотити учнів висловлювати свої думки, а потім спільно з учнями, аналізуючи всі гіпотези прийти до потрібного висновку.

Розв'язання:

Виявляється, що можна. На мал. 2 нашу очеретину позначимо CD. Злегка відхиливши очерет і тримаючи його в натягнутому стані, заміряємо відстань a

між точками А і В, в яких очерет перетинає поверхню води відповідно у вертикальному і нахиленому положенні.

Повернемо очерет в початковий стан і визначимо висоту b над водою, на яку підніметься при цьому точка В нахиленого очерету, зайнявши початкове положення С.



Мал. 2.

Тоді, позначивши через х - шукану глибину AD, з прямокутного трикутника ABD знаходимо невідомі сторони за теоремою Піфагора:

$$a^2 = x^2 + (x + b)^2;$$

звідки маємо шукану відстань:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2b}.$$

І подібних задач можна знайти досить багато. Тим самим зацікавити учнів, продемонструвати всю красу і необхідність застосування математики в реальному житті.

Висновки. Отже, сучасний вчитель математики у процесі навчання повинен акцентувати увагу учнів на зв'язок математики з життям, таким чином викликати в дітей інтерес до навчання, формувати критичне ставлення до своєї роботи, увагу, кмітливість, наполегливість, акуратність, чесність, любов до праці.

Також розв'язування прикладних задач сприяє ознайомленню учнів з роботою підприємств і галузей народного господарства, що є умовою орієнтації інтересу учнів до певних професій. Використання прикладних задач дозволяє вдало створювати проблемні ситуації на уроці. Такі задачі стимулюють учнів до здобуття нових знань. Збагачують учнів теоретичними і практичними знаннями з технічних та інших дисциплін.

Література:

1. *Возняк Г., Маланюк М.* Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики. — К.: Рад. шк., =1989.
2. *Волосюк О.В*. Застосування шкільного курсу математики в повсякденному житті its.luguniv.edu.ua/kaf1_u/sc_work/el_publ/zastosuv_matem.doc
3. *Терешкин Н.* Прикладная направленность школьного курса математики. — М.: Просвещение,= 1990.
4. *Шапіро І.М.* Застосування задач з практичним змістом у викладанні математики. — М.: Просвещение,= 1990.

РОЗДІЛ ІІ. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ ГЕОМЕТРІЇ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ РІЗНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Вергелес Наталя Василівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ НА ДОСЛІДЖЕННЯ В КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ СТАРШОЇ ШКОЛИ

Постановка проблеми. Актуальною проблемою сучасної школи є формування дослідницької діяльності учнів на уроках математики. Відомо, що ефективним є навчання, яке в єдності з вихованням забезпечує активізацію мислення учнів і свідоме засвоєння ними системи наукових знань, спонукає у них бажання та потребу в цих знаннях і викликає інтерес до предмета, допомагає розвитку здібностей кожного учня, розвиває вміння та навички застосовувати отримані знання на практиці, а також самостійно здобувати ці знання. Підвищенню ефективності навчання математики сприяє розв'язування задач прикладного змісту. Звернення до прикладів із життя і навколишньої дійсності полегшує вчителю організацію цілеспрямованої навчальної діяльності учнів.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. У педагогічних дослідженнях прикладну спрямованість математики розуміють як змістовний та методологічний зв'язок шкільного курсу з практикою, що передбачає формування в учнів умінь, необхідних для розв'язування засобами математики практичних завдань. Дослідженням різних сторін проблеми сприйняття матеріалу з математики та його прикладної орієнтації займалось багато науковців. Зокрема, відзначимо роботи Н. Артеменко [1], К. Бардак, В. Бевз [3], В. Боровської [4], Г. Возняк [5], О. Волосюк [6], С. Онопченко, А. Прус [7], І. Сверчевської, В. Швеця та інші.

Вони здійснили аналіз проблеми прикладної спрямованості змісту курсу математики, шляхом демонстрації та реалізації світоглядних і соціально-педагогічних функцій. Розкрили прикладний потенціал шкільного курсу стереометрії. Запропонували форму використання прикладного матеріалу та прикладних задач протягом вивчення. Також розглядали визначні задачі про геометричні тіла, які є доступними для розв'язання учнями в шкільному курсі стереометрії. Аналізують можливості посилення міжпредметних зв'язків фізики й математики за допомогою прикладних задач фізичного змісту.

Мета статті: продемонструвати організацію дослідницької діяльності учнів при розв'язанні прикладних задач на уроках геометрії в старшій школі.

Виклад основного матеріалу. Дослідницька діяльність учнів відіграє важливу роль при навчанні математики у сучасній школі. Однією із головних задач, яку вона вирішує – це розкриття творчого, інтелектуального потенціалу школярів. Тому, при організації дослідницької діяльності на уроках геометрії задачі прикладного змісту мають увійти у практику роботи вчителя, оскільки саме вони зможуть допомогти зрозуміти старшокласникам, що, вивчаючи цей курс, вони пізнають реальний світ, а розв'язуючи прикладні задачі, вчаться правильно, раціонально вирішувати питання, що будуть виникати у їх житті.

У педагогічній літературі поняття прикладної задачі трактується по різному, а саме як:

- ✓ задача, що потребує перекладу з природної мови на математичну;
- ✓ задача, яка близька за формулюванням і методами розв'язування до задач, що виникають на практиці [4];
- ✓ сюжетна задача, сформульована у вигляді задачі-проблеми.

Отже, прикладна задача – це задача, що виникла поза математикою, але розв'язується математичними засобами.

У доборі задач прикладного характеру доцільно дотримуватись певних вимог. Задача має демонструвати практичне застосування математичних ідей і методів та ілюструвати матеріал, що вивчається на певному уроці, містити відомі або інтуїтивно зрозумілі учням поняття й терміни, а також реальні числові дані, що не призводять до складних обчислень.

У діючих шкільних підручниках з геометрії для 10-11 класів прикладних задач міститься біля 10 %. За висновками сучасних методистів, їх має бути близько 20%. Такі задачі пропонуються не до всіх тем, тому вчителі повинні «відшукувати» необхідну кількість задач прикладного змісту із збірників прикладних задач.

Серед запропонованих задач прикладного змісту, задач на дослідження дуже мало. Такі задачі сприяють формуванню правильних уявлень про характер відображення математичних явищ і процесів реального світу, розкривають роль математичного моделювання у науковому пізнанні і в практиці, формують науковий світогляд.

Розглянемо приклади задач прикладного характеру на дослідження.

Задача 1. М'яч, радіус якого дорівнює 15 см, лежить: 1) біля стіни; 2) у куті кімнати. Чи поміститься в утвореному просвіті кулька для настільного тенісу, радіус якої дорівнює 1,5 см?

Розв'язання.

1) М'яч з центром O лежить біля стіни, A і C відповідно точки дотику до стіни і підлоги. OB - відстань від центра м'яча до ребра прямого кута між стіною і підлогою, OM - радіус м'яча, $M \in OB$.

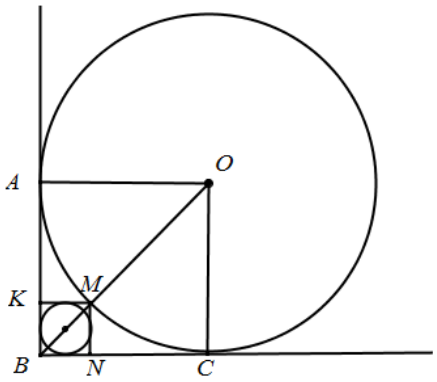


Рис. 1.

Із трикутника BOC, $BO = OC\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ см;

$BM = BO - OM = 15\sqrt{2} - 15$ (см), де BM - максимальна діагональ квадрата в який можна буде вписати кульку.

Радіус кульки для настільного тенісу 1,5 см, $KB = KM = 3$ см, тоді $d = 3\sqrt{2}$, де d - діагональ квадрата у який можна вписати дану тенісну кульку.

Якщо $BM - d < 0$, то тенісна кулька не поміститься; якщо, $BM - d \geq 0$ то тенісна кулька поміститься.

$BM - d = 15\sqrt{2} - 15 - 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} - 15 = 3(4\sqrt{2} - 5) = 3(\sqrt{32} - \sqrt{25}) > 0$.

Отже, кулька поміститься.

2) Нехай B - вершина кута, у якому розміщено м'яч; C, E, D - точки дотику з підлогою та стінами, $OC = OD = OE = 15$ см. Відстань від центру м'яча до вершини кута OB дорівнює діагоналі куба з вершинами E, O, D, A, C.

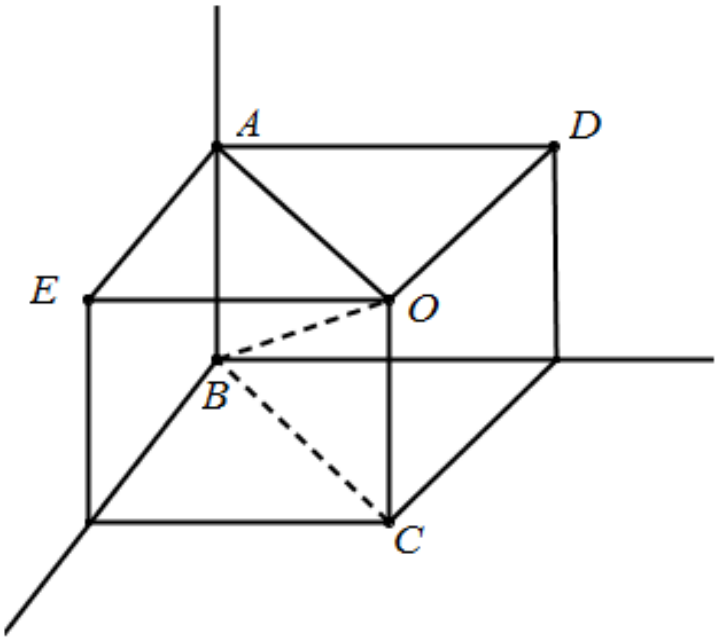


Рис. 2.

$OB^2 = 3OC^2$,

$OB = OC\sqrt{3} = 15\sqrt{3}$ см.

Відстань, що залишиться від поверхні м'яча до вершини кута: $BM = OB - OM$, OM - радіус м'яча;

$BM = 15\sqrt{3} - 15$ (см).

$d = 1{,}5\sqrt{3}$.

$BM - d = 15\sqrt{3} - 15 - 1{,}5\sqrt{3} = 13{,}5\sqrt{3} - 15 = 1{,}5(9\sqrt{3} - 10) = 1{,}5(\sqrt{243} - \sqrt{100}) > 0$.

Отже кулька поміститься.

Відповідь. 1) так; 2) так.

Задача 2. Уявимо, що дві кулі – одна велика, як Земля, а друга, як футбольний м'яч, - по екваторах обтягнуті обручами. Якщо кожний обруч подовжити на 1 м, вони відійдуть від поверхонь куль (рівномірно) на деякі відстані. Де ця відстань буде більшою: у більшої чи меншої кулі?

Розв'язання.

Нехай R - радіус Землі, тоді довжина обруча дорівнює $2\pi R$, нова довжина обруча $2\pi R_1$ або $2\pi R \square 1$, тоді $2\pi R \square 1 \square 2\pi R_1$, звідси

$2\pi R_1 - 2\pi R \square 1$;

$2\pi(R_1 - \mathrm{R}\ ) \square 1$;

$R_1 - R \square \frac{1}{2\pi}$

Нехай r - радіус футбольного м'яча, тоді довжина обруча дорівнює $2\pi r$, нова довжина обруча $2\pi r_1$ або $2\pi r \square 1$, тоді $2\pi r \square 1 \square 2\pi r_1$, звідси

$2\pi r_1 - 2\pi r \square 1$;

$2\pi(r_1 - r) \square 1$;.

$r_1 - r \square \frac{1}{2\pi}$.

Отже, відстані однакові.

Відповідь. Відстані однакові.

*Задача 3.*Відомо що швидкість охолодження тіла, тим більша, чим більшою є площа його поверхні. У якому випадку швидше охолоне відливок з масою m: якщо надати йому форму куба чи кулі?

Розв'язання.

Об'єм відливка $V \square \frac{m}{\rho}$.

Для куба $V_{куб.} \square a^3$,

де a - ребро куба, $a \square \sqrt[3]{V} \square \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$; площа поверхні куба $S_{куб.} \square 6a^2 \square 6\sqrt[3]{\frac{m^2}{\rho^2}}$.

Для кулі $V_{кул.} \square \frac{4}{3}\pi r^3$, $r \square \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$; площа поверхні $S_{кул.} \square 4\pi r^2$, $S_{кул.} \square 4\pi r\sqrt{\frac{9m^2}{16\pi^2\rho^2}}$.

Порівняємо $S_{куб.}$ і $S_{кул.}$.

$$S_{куба} - S_{кулі} \square 6\sqrt[3]{\frac{m^2}{\rho^2}} - 4\pi\sqrt[3]{\frac{9m^2}{16\pi^2\rho^2}} \square \sqrt[3]{\frac{216m^2}{\rho^2}} - \sqrt[3]{\frac{36\pi m^2}{\rho^2}}.$$

Порівняємо $\frac{216m^2}{\rho^2} - \frac{36\pi m^2}{\rho^2} \square \frac{36m^2(6-\pi)}{\rho^2} \square 0$, оскільки $6 \square \pi$.

Отже, $S_{куба} \square S_{кулі}$, тому можна сказати, що поверхня куба охолоджуватиметься швидше.

Відповідь. Куб.

*Задача 4.*У схилі гори треба зробити виїмку для прокладання залізниці на ділянці, що підіймається під кутом φ до горизонту. Кут укосу боків виїмки α, ширина виїмки внизу b, глибина посередині h. Скільки кубічних метрів землі припадає на 1 лінійний метр виїмки?

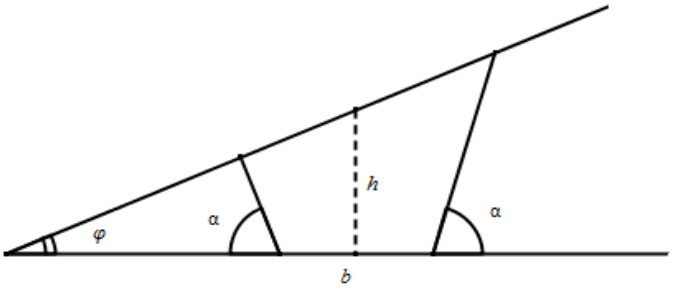


Рис.3.

*Задача 5.*Циліндричний бак, який лежить горизонтально і на третину вкопаний в землю, треба пофарбувати. Як визначити обсяг роботи і необхідну кількість фарби?

Задача 6. Ціна діаманта пропорційна квадрату його об'єму. Як вигідніше продавати діамант: цілим чи розпиляним на частини?

Висновки. Отже, розв'язання прикладних задач на дослідження сприяють формуванні дослідницької діяльності в учнів. Такі задачі стимулюють учнів до здобуття нових знань та збагачують учнів теоретичними та практичними знаннями. Тому, якщо вчитель математики в процесі навчання геометрії старшої школи акцентує увагу учнів на зв'язок математики з життям, то він викликає у дітей інтерес до навчання. Відповідно формуються такі важливі риси характеру як наполегливість, охайність, увага, послідовність у роботі, критичне ставлення до своєї роботи й роботи своїх товаришів, кмітливість, чесність.

Література:

1. Артеменко Н.М. Задачі прикладного змісту. Стереометрія. 11 клас / Н.М. Артеменко // Математика в школах України. – 2008. – №5. – С. 6-12.
2. Афанасьєва О.М. Математика 11 клас. Рівень стандарту: Підручник для загальноосв. навч. закл. / О.М. Афанасьєва, Я.С.Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль. Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.
3. *Бевз* В. Г. А. Геометричні тіла у визначних геометричних задачах / В.Г. Бевз, І.А. *Сверчевська* // Математика в школі. – 2002. – №5. – С. 6-9.
4. Боровська В.П. Об'єм, площа поверхні многогранників та тіл обертання. Задачі прикладного змісту. 11 клас / В.П. Боровська // Математика в школах України. – 2007. – №9. – С. 8-12.
5. Возняк Г. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики. / Г. Возняк, М. Маланюк. – К.: Рад. шк., 1989.
6. Волосюк О. Педагогічні аспекти прикладної спрямованості шкільного курсу математики / О. Волосюк, С. Онопченко // Вісник ЛНУ імені Тараса Шевченка. – 2010. - № 17 (204). – С. 36-40.
7. Прус А. Прикладна спрямованість стереометрії / А. Прус, В. Швець. – К.: Світ., 2007. – 127с.

Жбанкова Анна Леонідівна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»

спеціальність «Математика»

ЕВРИСТИЧНІ ПРИЙОМИ ПРИ РОЗВЯЗУВАННІ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ НА ТЕМУ: «ПІРАМІДА»

Постановка проблеми. Сучасне суспільство знаходиться у стані політичних, соціальних та економічних змін. Щоб бути успішним у сучасному мінливому суспільному житті, кожній людині необхідно бути мобільною, адаптивною; вміти бачити проблему, чітко формулювати та всебічно підходити до її розв'язування; здобувати необхідну інформацію тощо.

При навчанні математики в основній школі основна увага приділяється не лише засвоєнню математичних знань, а й виробленню вмінь застосовувати їх до розв'язування практичних і прикладних задач, оволодінню математичними методами, моделями, що забезпечить успішне вивчення й інших предметів. При цьому зв'язки математики з іншими предметами посилюються за рахунок розв'язання задач прикладного змісту, ілюстрацій застосування математичних понять, методів і моделей у шкільних курсах хімії, біології, фізики, технологій.

Вивчаючи математику, старшокласники мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування прикладних задач розподіляється на три етапи: 1) формалізація (перехід від ситуації, описаної в задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, і від неї до чітко сформульованої задачі); 2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі; 3) інтерпретація одержаного розв'язання задачі та застосування його до вихідної ситуації.

Мета даної статті: ознайомитись з такими евристичними прийомами, як аналіз і синтез, «постановка задачі» та евристична бесіда при розв'язуванні прикладних задач, що сприяють формуванню практичної компетентності учнів.

Виклад основного матеріалу. Використання евристичних прийомів при розв'язуванні прикладних задач має на меті прищепити учням інтерес до вивчення стереометрії, розвинути їхнє логічне мислення і просторову уяву, навчитись висловлювати й обґрунтовувати гіпотези.

Існує дуже багато різноманітних евристик за допомогою яких розв'язують геометричні задачі, деякі з них - аналіз і синтез; евристична бесіда або сократична бесіда; перебір, вибір найкращого варіанта; метод «проб і помилок», «постановка задачі», використання софізмів тощо. Ми детальніше зупинимося на розгляді евристичної бесіди, аналізу і синтезу під час розв'язування прикладних задач.

Процес розв'язання кожної задачі прийнято поділяти на чотири основних етапи: осмислення умови задачі, складання плану розв'язання задачі, реалізація плану розв'язання задачі, вивчення знайденого розв'язання (аналіз і перевірка плану розв'язання задачі). На кожному із цих етапів потрібно керуватися визначеними правилами. Ці правила не можуть носити обов'язків характер, вони лише вказують можливі шляхи пошуку, тому вони називаються *евристичними правилами* або просто *евристиками*.[4]

Перш ніж приступити до розв'язування задач на знаходження невідомих елементів піраміди, слід прослідкувати за тим, щоб учні добре засвоїли дане поняття та його елементи. А для цього варто використовувати евристичні бесіду, у вигляді запитань: «Що означає термін піраміда?», «З чим асоціюється у вас піраміда?», «Як часто можна спостерігати тіла пірамідальної форми у природі, побуті, архітектурі, тощо? Чим це зумовлено?». Даючи відповіді на поставленні запитання, в учнів уже сформується деяке уявлення про піраміду. Крім цього зробити короткий екскурс в історію і дізнатися звідки походить термін «піраміда» - це може зробити і вчитель, і учні. Варто відмітити, що такої інформації у книгах мало, тому доречно розглянути інформацію такого типу.

Розглянемо застосування евристичних прийомів при розв'язуванні прикладних задач, які представлено в шкільних підручниках.

Задача 1. Славетна піраміда Хеопса в Єгипті до пошкоджень мала форму правильної чотирикутної піраміди з ребром основи 230 м і бічним ребром 213 м. Знайдіть висоту піраміди Хеопса (відповідь округліть до метрів).[5]

Розв'язання

Для розв'язання цієї задачі використаємо аналіз і синтез. Але для початку зобразимо рисунок, використавши наочність (рис. 1):

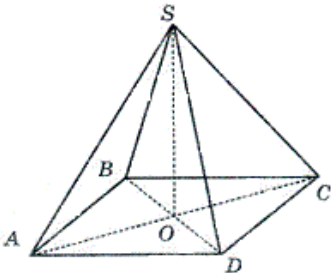


Рис. 1

Аналіз. На рис. 2 подано зображення піраміди $SABCD$, SO - її висота. Для розв'язання задачі потрібно знайти цю висоту, це дуже легко зробити, скориставшись теоремою Піфагора для $\Delta AOS, \angle O = 90°$. У нас лише невідомо AO, але так як в основі правильної чотирикутної піраміди квадрат, то ми можемо знайти половину його діагоналі.

Синтез. 1. Оскільки AO - половина діагоналі квадрата зі стороною 230м, то: $AO = \frac{230\sqrt{2}}{2} = 115\sqrt{2}\,(м)$.

2. Розглянемо $\Delta AOS, \angle O = 90°$,звідси $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2}$,

$SO = \sqrt{213^2 - (115\sqrt{2})^2} = \sqrt{18919} \approx 137{,}5\,(м)$.

Таким чином ми знайшли висоту піраміди Хеопса.

Відповідь: $137{,}5\,м$.

Задача 2. Дах башти має форму правильної чотирикутної піраміди. Сторона основи піраміди дорівнює 1,8 м, висота -1,2 м. Скільки листового заліза потрібно для покриття даху, якщо на суміщення листів припадає 10% площі поверхні покрівлі?[2]

Розв'язання

Для розв'язання задачі використаємо такий евристичний прийом як «постановка задачі», суть якого полягає в переформулюванні умови на зрозумілу, доступну для учнів мову. Так як у нас перша умова є зрозумілою, звернемо увагу на те, що потрібно знайти, адже на перший погляд важко зрозуміти чого від нас хочуть. Отже, нам потрібно знайти кількість листового заліза для покриття даху, врахувавши, що на суміщення листів припадає 10% площі поверхні покрівлі. А так як дах є бічною поверхнею нашої піраміди то від нас вимагають знайти $S_{біч}$ і ще плюс 10% від цієї площі. Отже, ми можемо перекласти нашу задачу на математичну мову, переформулювавши так:

Сторона основи правильної чотирикутної піраміди 1,8 м, висота -1,2 м. Знайти площу бічної поверхні, врахувавши що на суміщення листів припадає 10% площі поверхні покрівлі.

1. $SABCD$ - правильна чотирикутна піраміда, О – точка перетину діагоналей. Проведемо $OM \perp DC$, M - середина DC, тоді $SM \perp DC$, SM – апофема (рис. 2).

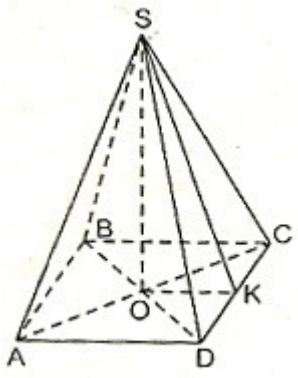


Рис. 2

2. $S_{біч} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot SM = 2DC \cdot SM$. За умовою $DC=1,8$ *м*, тоді $OM = \frac{1}{2} DC = 0,9\,(м), SO = 1,2\,(м)$.

3. Із $\Delta SOM, \angle SOM = 90°$, $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2}$,
$SM = \sqrt{1,2^2 + 0,9^2} = 1,5\,(м)$.

4. $S_{біч} = 2 \cdot 1,8 \cdot 1,5 = 5,4\,9\,(м)$.

Площа листового заліза $S = 1,1 S_{біч} = 1,1 \cdot 5,4 = 5,94\,(м^2)$.

Відповідь: $5,94\,м^2$.

Розглянемо на конкретному прикладі методику розв'язування прикладної задачі, використовуючи аналіз у вигляді евристичної бесіди і синтез.

Задача 3. Томатна паста «Чумак» розфасована у пачки, що мають форму правильної трикутної піраміди, сторони основи якої становлять 4 см, а висота цієї піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$. Скільки матеріалу йде на виготовлення однієї пачки? Який об'єм пасти в одній пачці?

Розв'язання задачі

Аналіз у вигляді евристичної бесіди.

Вчитель. Що нам дано в задачі?

Учні. Правильна трикутна піраміда, основи якої 4 см і висота $6\sqrt{3}$.

Вчитель. Яку піраміду називають правильною?

Учні. Піраміда називається правильною, якщо її основа – правильний многокутник.

Вчитель. Нам дано яку піраміду? Що це означає?

Учні. Трикутну, це означає, що в основі правильний трикутник (рівносторонній).

Зрозуміло, що перш ніж перейти до розв'язання задачі, треба зобразити рисунок, це дуже добре продемонструвати за допомогою комп'ютера (Рис. 3).

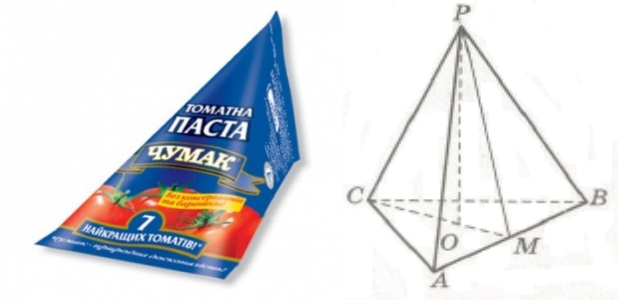


Рис. 3

Продемонструвавши рисунки томатної пасти у формі правильної трикутної піраміди можна і зобразити рисунок для розв'язання задачі. Коли учні це усвідомили і переклали на мову математики, то ставимо їм запитання:

Вчитель. Що потрібно знайти, щоб відповісти на запитання задачі?

Учні. Потрібно знайти скільки матеріалу йде на виготовлення однієї пачки та об'єм пасти в цій пачці.

Вчитель. Якщо врахувати те, що наша паста має форму правильної трикутної піраміди то ми приходимо до такої, дещо модифікованої задачі, тобто нам потрібно знайти…

Учні. Площу повної поверхні та об'єм піраміди.

Вчитель. Пригадаймо формули обчислення площі та об'єму піраміди.

Учні. $S_п = S_{біч} + S_{осн}$; $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.

Вчитель. Що ми можемо знайти одразу, за умовою задачі?

Учні. Можемо знайти $S_{осн}$, так як в основі правильний трикутник скористаємось формулою знаходження площ для правильного трикутника, і звідси вже об'єм піраміди.

Вчитель. Щоб знайти площу повної поверхні піраміди, що ще потрібно?

Учні. $S_{біч} = P_{осн} \cdot \frac{l}{2}$, $l - апофема$.

Вчитель. Що таке апофема? Що ми знаємо про апофеми?

Учні. Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають *апофемою піраміди*. Неправильні піраміди апофем не мають.

Вчитель. $P_{осн}$ зможемо знайти, а як апофему знайдемо?

Учні. Так, адже периметр – це сума всіх сторін, з рис. 1 видно, що PM – апофема. Скористаємось теоремою Піфагора.

Вчитель. Що тепер потрібно зробити?

Учні. Знайти $OM = r$, і за відомими даними знайдемо $S_{біч}$, а звідси і $S_п$.

Тапер, знаючи розв'язання, учні за допомогою синтезу зможуть самостійно і чітко записати розв'язання цієї задачі.

1. Знаходимо площу основи $S_{осн}$ скориставшись формулою знаходження площ для правильного трикутника, а саме $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a – сторона трикутника.

2. Площу бічної поверхні $S_{біч}$. Для цього нам потрібно знайти $P_{осн}$ та апофему *PM*.

3. Далі знайдемо площу повної поверхні піраміди $S_n = S_{біч} + S_{осн}$.

4. Знайдемо об'єм піраміди.

Щоб відповісти на запитання прикладної задачі необхідно обчислити площу повної поверхні та об'єм піраміди. Розв'яжемо задачу покроково:

1. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a – сторона трикутника; $S_{осн} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\,(см^2)$.

2. $P_{осн} = 12\,см$. Знайдемо апофему скориставшись теоремою Піфагора: $PM = \sqrt{PO^2 + OM^2}$, знайдемо $OM = r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Звідси $PM = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{108 + 4} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}\,(см)$. За вище вказаними елементами знайдемо $S_{біч} = 6 \cdot 4\sqrt{7} = 24\sqrt{7}(см^2)$.

3. $S_n = 4\sqrt{3} + 24\sqrt{7} \approx 71(см^2)$.

4. $V = \frac{1}{3} 4\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 24(см^3)$.

Дві останні стрічки вказують на відповідь до математичної задачі. Далі міркуємо таким чином. На виготовлення однієї пачки матеріалу йде $71\ см^2$, а в одній пачці міститься пасти об'ємом $24\,см^3$.

Відповідь: $71\,см^2$, $24\,см^3$.

Задача 4. Скільки квадратних метрів парусини пішло на виготовлення намету, який має форму правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 4,5 м і висотою 2,5 м? (Витрати матеріалу на шви складають 8% бічної поверхні піраміди). [3]

Розв'язання

Для розв'язання задачі використаємо евристичний прийом «постановка задачі». Щоб знайти скільки квадратних метрів пішло на виготовлення намету, що має форму правильної чотирикутної піраміди потрібно знайти площу бічної поверхні цієї піраміди, але слід ще врахувати умову, що на шви йде ще 8% бічної поверхні піраміди. Отже, можна сформулювати задачу наступним чином: знайти площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 4,5 м і висотою 2,5 м, врахувавши, що на витрати на шви складають 8% бічної поверхні піраміди.

Розв'язання задачі аналогічне до попередньої, лише відмінністю є те, що у нас дано чотирикутну піраміду, а не трикутну.

Задача 5. Скільки літрів води вміщує яма, яку вирили у вигляді зрізаної піраміди, якщо глибина ями 1,5 м, сторона нижньої квадратної основи 0,8 м, а верхньої 1,2 м.[1]

Розв'язання

Аналіз. Нам дано зрізану чотирикутну піраміду з висотою 1,5м і сторонами основ $a_1 = 0{,}8\,м$, $a_2 = 1{,}2\,м$. Потрібно знайти скільки літрів води вміщує яма, яка має вигляд зрізаної піраміди. Переклавши на мову математики, зрозуміло, що потрібно знайти об'єм цієї піраміди. І в учнів виникне запитання: «А як знайти об'єм зрізаної піраміди?». Вчитель: «Для цього існує формула: $V = \frac{H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)}{3}$, H – висота, а S_1 і S_2- площі основ». Знаючи формулу, ніяких проблем при розв'язуванні цієї задачі не виникне.

Синтез. 1. Знайдемо площі основ піраміди:

$S_1 = a_1^2$, $S_1 = 0{,}8^2 = 0{,}64\,(м^2)$. $S_2 = a_2^2$, $S_2 = 1{,}2^2 = 1{,}44\,(м^2)$.

2. $H = 1{,}5\,м$, $V = \frac{1{,}5(0{,}64 + \sqrt{0{,}64 \cdot 1{,}44} + 1{,}44)}{3} = 1{,}52\,(м^3)$.

Отже, яма вміщує 1520л води.

Відповідь. 1520л.

У наведених прикладах чітко виділяються евристичні прийоми розв'язання прикладних задач. На практиці дуже корисним є такий процес розв'язування задач, адже він дозволяє пробуджувати в учнів інтерес до навчання і спонукає до самостійного осмислення матеріалу. Існує необхідність саме так організовувати вивчення математики, щоб воно було корисним і водночас захоплюючим, цікавим.

Висновки. Розв'язування прикладних задач у шкільному курсі математики сприяє ознайомленню учнів із роботою підприємств і галузей народного господарства, викликає інтерес до різних професій. Використання евристичних прийомів при розв'язуванні прикладних задач на уроках стереометрії сприятиме підвищенню ефективності математики, розвитку просторової уяви та логічного мислення учнів.

Література:

1. Артеменко Н.М. Задачі прикладного змісту. Стереометрія. 11 клас. / Н.М. Артеменко // Мат. в шк. Укр. – 2008. – №5. – С.6-10.
2. Афанасьєва О.М. Математика. 11 клас: підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту / О.М. Афанасьєва, Я.С.Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль: навч. книга «Богдан». – 2011.
3. Боровська В.П. Задачі практичного змісту. 11 клас. / В.П. Боровська // Математика в школах Укр. – 2007. – №9. – С.8-11.
4. Гончарова І.В. Евристики в геометрії: факультативний курс / І.В.Гончарова, О.І. Скафа. – Харків: «Основа». – 2004.

5. Єршова А.П. Геометрія 11/ А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф Крижановський, С.В. Єршов. – Харків: «Ранок». – 2011.

Зелена Ірина Олександрівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Постановка проблеми. Ця теорема яка має за мету надати учням не тільки теоретичні знання в області геометрії, але й навчити їх вільно застосовувати здобуті знання до розв'язання нестандартних задач середньої та підвищеної складності.

Мета статті: Вивчення теореми Менелая на площині, доведення нетривіальних наслідків цих теорем та розв'язання задач двома способами: традиційним і за допомогою теорем Менелая.

Виклад основного матеріалу. Теорема Менелая дійшла до нас в арабському перекладі книги «Сферика» грецького математика та астронома Менелая Олександрійського (I-II століття нашої ери). Теорема Менелая дозволяє в деяких випадках знаходити відношення відрізків, а також доводити належність трьох точок одній прямій.

Теорема Менелая. Нехай задано трикутник ABC і три точки A_1, B_1, C_1 на прямих BC, AC і AB відповідно. Точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = 1 \qquad (1)$$

Зауваження. Іноді добуток відношень в теоремі Менелая записують так:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1$$

Тут всі відношення, що перемножуються – це відношення орієнтованих відрізків.

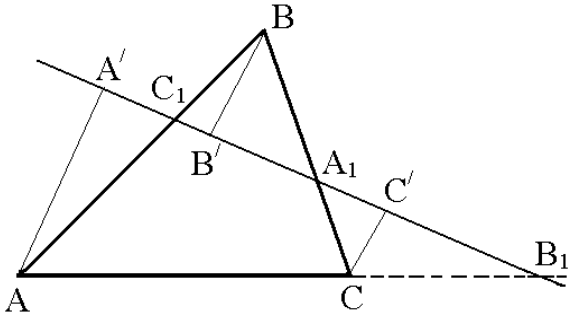


Рис. 1

Доведення.

Необхідність. Нехай пряма l перетинає прямі AB, AC та BC в точках C_1, B_1 і A_1 відповідно (див. рис. 1) і AA', BB', CC' – перпендикуляри, які опущено з точок A, B, C на пряму l. Як було доведено раніше,

$$\frac{C_1A}{C_1B}\square\frac{A'A}{B'B},\quad \frac{B_1C}{B_1A}\square\frac{C'C}{A'A},\quad \frac{A_1B}{A_1C}\square\frac{B'B}{C'C}.$$

Перемножуючи записані відношення, маємо

$$\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\square\frac{A'A}{B'B}\cdot\frac{C'C}{A'A}\cdot\frac{B'B}{C'C}\square 1.$$

Достатність. Проведемо пряму A_1B_1. Ми повинні довести, що ця пряма перетинає AB в точці C_1. Насамперед доведемо, що A_1B_1 дійсно перетинає AB. Припустимо, що A_1B_1 паралельна AB (див. рис. 2). Але тоді

$$\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{A_1C}{A_1B}\square 1$$

Звідси та з рівності (1) випливає $\frac{C_1A}{C_1B}\square 1$, що неможливо.

Нехай $\widetilde{C}$ – точка перетину прямих A_1B_1 та AB. По вже доведеному

$$\frac{\widetilde{C}A}{\widetilde{C}B}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\square 1$$

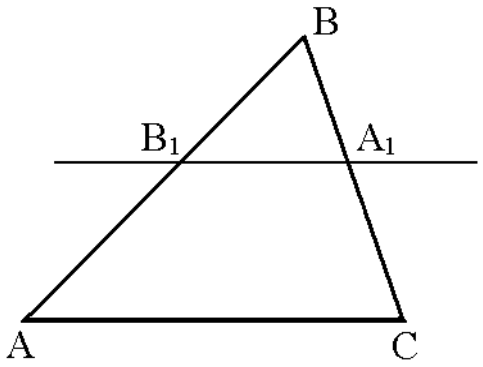


Рис. 2

Порівнюючи з умовою, одержуємо, що $\frac{\widetilde{C}A}{\widetilde{C}B}\square\frac{C_1A}{C_1B}$.

Оскільки мова йде про відношення орієнтованих відрізків, то $\widetilde{C}\square C_1$, що потрібно було довести. Отже, теорема Менелая повністю доведена.

Зауваження 1. При розв'язанні конкретних обчислювальних задач, якщо відомо, що точки C_1, B_1 і A_1 лежать на одній прямій, можна не турбуватися про запис відношень орієнтованих відрізків в формулі (1), а обмежитися відношеннями їх довжин.

Зауваження 2. Якщо замінити в (1) орієнтовані відношення відношеннями довжин, обернена теорема перестає бути вірною, тобто точки C_1, B_1 і A_1, для яких виконується (1), не повинні лежати на одній прямій.

Наприклад, нехай точки A_1, B_1 взяті на сторонах BC, CA трикутника ABC так, що $\frac{BA_1}{A_1C}\square 2$, $\frac{CB_1}{B_1A}\square\frac{1}{2}$ і C_1 – середина сторони AB, тоді

$$\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1,$$

але точки A_1, B_1, C_1 не лежать на одній прямій.

Задача 1. У трикутнику ABC відрізок AK (K належить стороні BC) ділить медіану BM у відношенні 3:4, починаючи від вершини B. У якому відношенні точка K ділить сторону BC ?

Розв'язання.

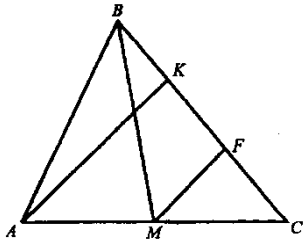


Рис. 3

1-й спосіб

Проведемо $MF \parallel AK$.

За умовою $AM = MC$. За теоремою Фалеса $KF = FC$. Нехай $BO = 3x, OM = 4x$, тоді

$$\frac{BK}{KF}=\frac{BO}{OM}=\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4},\quad KF=\frac{1}{2}KC,\quad \frac{BK}{\frac{1}{2}KC}=\frac{3}{4},\quad \frac{BK}{KC}=\frac{3}{8}$$

Відповідь: 3:8.

2-й спосіб

Запишемо теорему Менелая для трикутника MBC і прямої AK:

$$\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MO}{OB}=1$$

Тоді $\frac{BK}{KC}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=1,\quad \frac{BK}{KC}=\frac{3}{8}$.

Відповідь: 3 : 8 .

Задача 2. Довести, що пряма, яка проходить через середини основ трапеції, проходить через точку перетину її діагоналей та точку перетину прямих, які містять бокові сторони (див. рис. 4.а).

Доведення.

1 спосіб.

Нехай M - точка перетину прямих, що містять бокові сторони AB і CD трапеції $ABCD$, P - середина основи BC, Q – точка перетину прямої PM з основою AD (див. рис. б). Доведемо, що Q – середина відрізку AD, тобто точка M лежить на прямій, яка проходить через середини основ трапеції.

Оскільки трикутник AQM подібний до трикутника BPM за першою ознакою подібності ($\angle AMQ$ – спільний, $\angle MAQ = \angle MBP$), то відношення

$\frac{AQ}{BP} = \frac{QM}{PM}$. Аналогічно, трикутник DQM подібний до трикутника CPM, тому $\frac{DQ}{CP} = \frac{QM}{PM}$. З цих рівностей одержуємо, що $\frac{AQ}{BP} = \frac{DQ}{CP}$. Так як $BP = CP$, то $AQ = DQ$, тобто Q – середина основи AD.

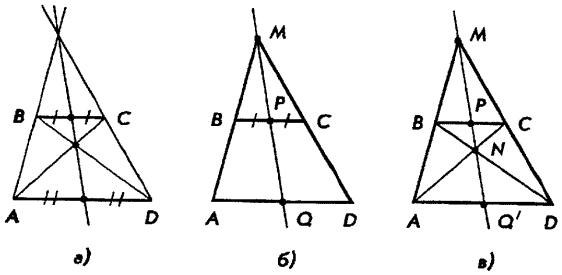


Рис. 4

Позначимо через N точку перетину BD і AC, а через Q' – точку перетину PN і AD (див. рис. в). Аналогічно, використовуючи подібність: $\Delta BNP \sim \Delta DNQ'$ і $\Delta CNP \sim \Delta ANQ'$, доводиться, що Q' – середина основи AD. Тобто точка N лежить на прямій, що проходить через середини основ трапеції.

2 спосіб.

Нехай $ABCD$ задана трапеція з основами AD і BC. Застосуємо теорему Менелая до ΔADB і трьом точкам Q' (середина основи AD), N (точка перетину діагоналей AC і BD), M (точка перетину AB і CD) (див. рис. 4.в).

$$\frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'D}} = 1,\ \frac{\overline{DN}}{\overline{NB}} = \frac{AD}{BC},\ \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = -\frac{BC}{AD},$$

так як трикутник ADM подібний до трикутника BCM. Звідси випливає, що

$$\frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'D}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = -1,$$

тому точки Q', M, N лежать на одній прямій. Аналогічно доводиться, що середина P відрізка BC лежить на прямій MN.

Висновки. Теорема Менелая дозволяє знаходити відношення відрізків, а також доводити належність трьох точок одній прямій. В статті наведено дві задачі, розв'язаних двома способами: традиційним і за допомогою теореми Менелая, при цьому останній спосіб розв'язання задач виявляється більш раціональним. Зазначимо, що при розв'язку задач найскладнішою справою є пошук трикутника, до якого слід застосувати теорему Менелая.

Література:

1. Буник І. Теорема Менелая / І. Буник // Математика. – 2005. – №15(315). – С.17-21.

2. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные/ Э.Г. Готман.– К.: Рад. шк, 1988. – 173с.
3. Егоров А. Теоремы Чевы и Менелая / А. Егоров // КВАНТ. – 2004. – №3. – С.35-38.
4. Орач Б. Теорема Менелая / Б. Орач// КВАНТ. – 1991. – №3. – С. 52-55.
5. Скопец З.А., Жаров В.А. Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия)/ З.А. Скопец. – М., 1962. – 162 с.
6. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии: Планиметрия / И.Ф. Шарыгин. – М.: Наука, 1986.

Кремінська Анна Сергіївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ВИКОРИСТАННЯ ПРЯМИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІЗНИХ ТІЛ ЗАДАНОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФОРМИ

Постановка проблеми: Останнім часом спостерігається значний інтерес до методів, що ґрунтуються на використанні потенціальних полів . Тому є доцільним також розглянути використання прямих задач для тіл різної геометричної форми.

Мета даної статті: розглянути прямі задачі для різних тіл заданої геометричної форми.

Виклад основного матеріалу. *1. Пряма задача для вертикального циліндра.*

Наведемо ще один приклад, коли рішення прямої задачі не може бути отримано в кінцевому вигляді.

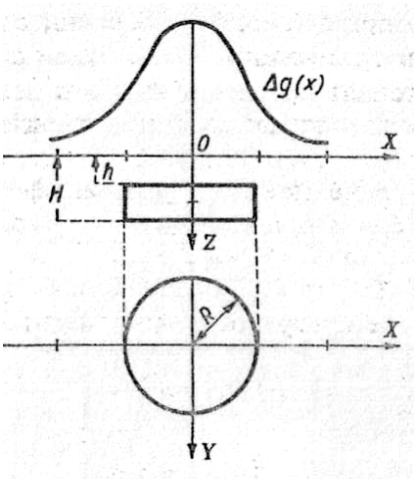


Рис. 1.1

Нехай заданий вертикально стоїть циліндр. Його положення щодо обраної системи координат показано на рис. 1.1. Надлишкові маси, які заповнюють циліндр, однорідні. В силу симетрії тіла зовнішню точку можна вибрати так, що її координати будуть $(x,0,0)$. Опишемо це формулою:

$$V_z(x) = k\sigma \iiint_D \frac{\zeta d\tau}{[(\xi - x)^2 + \eta^2 + \zeta^2]^{3/2}}.$$

Перейдемо до циліндричним координатам і покладемо

$$\xi = \rho\cos\alpha, \eta = \rho\sin\alpha, \zeta = z, d\tau = \rho d\rho d\alpha dz.$$

Тепер легко записати межі інтегрування, остання формула буде мати вигляд:

$$V_z(x) = k\sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_h^H \frac{z\rho d\rho d\alpha dz}{[(\rho\cos\alpha - x)^2 + \rho^2 sin^2\alpha + z^2]^{3/2}} =$$

$$= k\sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_h^H \frac{z\rho d\rho d\alpha dz}{[\rho^2 - 2\rho x\cos\alpha + x^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Це вираз приводиться до еліптичних інтегралів, які в кінцевому вигляді не мають рішення.

У точках на осі OZ $(x = 0)$ можна отримати кінцеве значення

$$V_z(0) = k\sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_h^H \frac{z\rho d\rho d\alpha dz}{[\rho^2 + z^2]^{3/2}} = 2\pi k\sigma \int_0^R \int_h^H \frac{z\rho d\rho dz}{[\rho^2 + z^2]^{3/2}} =$$

$$= -2\pi k\sigma \int_h^H \frac{zdz}{[\rho^2 + z^2]^{1/2}} \Bigg|_0^R = 2\pi k\sigma \int_h^H \left[1 - -\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right] dz =$$

$$= 2\pi k\sigma \left[H - h - \sqrt{R^2 + H^2} + \sqrt{R^2 + h^2}\right].$$

2. Пряма задача для вертикального уступу.

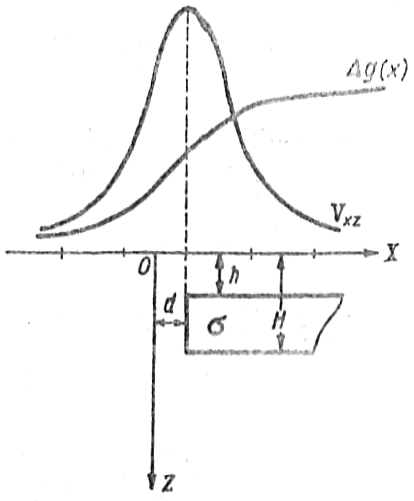


Рис. 2.1

Серед двомірних тіл певне місце займають уступи. Положення уступу характеризують його параметри: σ - надлишкова щільність, d - положення вертикальної грані в прийнятій системі координат, h і H - глибини закладання верхньої та нижньої кромок уступу. Уступ і параметри, що його визначають, наведено на рис. 2.1. Аномалія сили тяжіння, яка викликана надмірними масами, укладеними в тілі уступу, може бути записана за формулою

$$V_z(x) = 2k\sigma \int_h^H \int_d^\infty \frac{\zeta d\xi d\zeta}{(\xi - x)^2 + \zeta^2}.$$

Інтегрування по змінної ζ, виконується легко:

$$V_z(x) = k\sigma \int_d^\infty ln\frac{(\xi - x)^2 + H^2}{(\xi - x)^2 + h^2} d\xi.$$

Тепер проінтегруємо по частинах:

$$V_z(x) = k\sigma\left\{\xi ln\frac{(\xi-x)^2+H^2}{(\xi-x)^2+h^2}\Big|_d^\infty + 2(H^2 - h^2)\int_d^\infty \frac{\xi(\xi-x)d\xi}{[(\xi-x)^2+H^2][(\xi-x)^2+h^2]}\right\}.$$

При підстановці верхньої межі необхідно усунути невизначеність виду $\infty \times 0$. Ця похідна прямує до нуля. У другому доданку раціональний дріб розкладається на два доданки:

$$\frac{\xi(\xi-x)}{[(\xi-x)^2+H^2][(\xi-x)^2+h^2]} = \frac{-x\xi+H^2+x^2}{(H^2-h^2)[(\xi-x)^2+H^2]} + \frac{x\xi-h^2-x^2}{(H^2-h^2)[(\xi-x)^2+h^2]}.$$

Тепер аномалія сили тяжіння запишеться

$$V_z(x) = k\sigma\left[-dln\frac{H^2+(x-d)^2}{h^2+(x-d)^2} + 2\int_d^\infty \frac{-x(\xi-x)+H^2}{(\xi-x)^2+H^2}d\xi + 2\int_d^\infty \frac{x(\xi-x)-h^2}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi\right]$$

У двох інтегралі легко виділити логарифмічну частина і проінтегрувати залишилася функцію:

$$V_z(x) = k\sigma\left[-dln\frac{H^2+(x-d)^2}{h^2+(x-d)^2} - xln[(\xi-x)^2+H^2]\Big|_d^\infty + 2Harctg\frac{\xi-x}{H}\Big|_d^\infty + xln[(\xi-x)^2++h^2]\Big|_d^\infty - 2harctg\frac{\xi-x}{h}\Big|_d^\infty\right].$$

Після підстановки меж і угрупування членів отримаємо рішення прямої задачі:

$$V_z(x) = k\sigma\left[\pi(H-h) + 2Harctg\frac{x-d}{H} - 2harctg\frac{x-d}{h} + (x-d)\ln\frac{H^2+(x-d)^2}{h^2+(x-d)^2}\right].$$

Продиференціювавши даний вираз отримаємо:

$$V_{xz} = k\sigma\ln\frac{H^2+(x-d)^2}{h^2+(x-d)^2}.$$

Графічно вище описані функції наведено на рис. 2.1. Цікаві особливості цих функцій. Для аномалії сили тяжіння виділяються дві асимптоти: ліва $\Delta g = 0$ і права $\Delta g = 2\pi k\sigma(H-h)$. У точці над вертикальним контактом, де $x = d$, аномальне поле $\Delta g(d) = \pi k\sigma(H-h)$. Ця точка знаходиться на однаковій відстані між лівою і правої асимптотами. Як би не розташовувалися різні

виступи, якщо їх вертикальна потужність $(H-h)$ однакова, то асимптоти збігаються. Градієнти цих функцій будуть досить різними. Для неглибокозалягаючого уступу аномалія сили тяжіння має великий градієнт. Якщо ж уступ занурений на значну глибину, то аномалія сили тяжіння змінюється плавно, її градієнт невеликий.

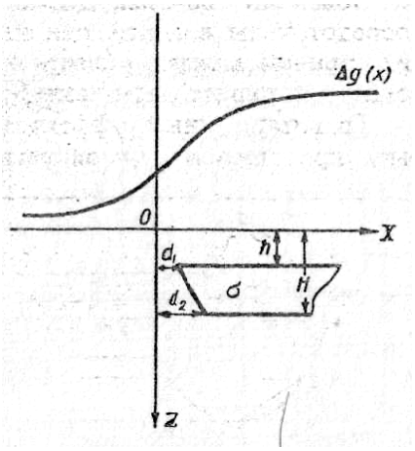


Рис. 2 .2.

Аномалія горизонтального градієнта сили тяжіння буде парною функцією, якщо $d=0$ і початок координат вибрано над вертикальною гранню уступу. Максимум цієї функції буде на початку координат.

Завдання ускладниться, якщо контактна грань буде похилою (рис. 2.2). У цьому випадку у формулі межа інтегрування d потрібно вибрати як функцію ζ, і записати

$$d(\zeta)=d_1+\frac{d_2-d_1}{H-h}(\zeta-h).$$

Аномальне поле декілька ускладниться і остаточно матиме вигляд:

$$V_z(x)=k\sigma\left\{\pi(H-h)+2Harctg\frac{x-d_2}{H}-2harctg\frac{x-d_1}{h}\right.$$
$$+\frac{(H-h)T(x)}{P}\ln\frac{T^2(x)+H^2P-2H(d_2-d_1)T(x)}{T^2(x)+h^2P-2h(d_2-d_1)T(x)}$$
$$+\frac{2(d_2-d_1)T(x)}{P}\left(arctg\frac{PH-(d_2-d_1)T(x)}{(H-h)T(x)}\right.$$
$$\left.\left.-arctg\frac{Ph-(d_2-d_1)T(x)}{(H-h)T(x)}\right)\right\}.$$

Тут $P=(H-h)^2+(d_2-d_1)^2; T(x)=x(H-h)-d_1H+d_2h.$

Формули, отримані вище, можуть бути використані для обчислення прямої задачі, коли модель гравітуючих тіл досить складна. Припустимо, що обурюють маси зосереджені в одній або декількох однозвязнихо областях, причому кожна область добре апроксимується кусково-прямолінійним контуром.

Гравітаційний ефект кожної такої області може бути представлено сумою гравітаційних ефектів від похилих і прямих ступені.

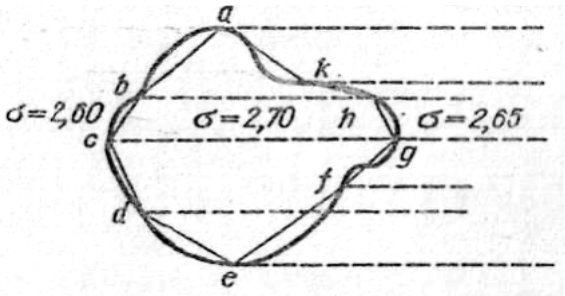


Рис. 2. 3.

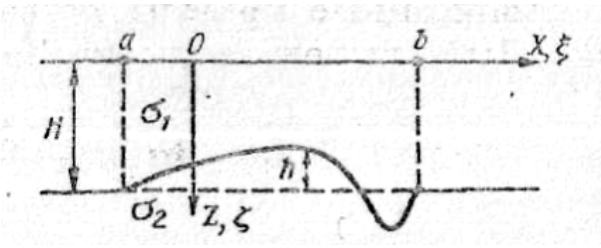


Рис. 2. 4.

Так, область S, вміщує маси з надлишковою щільністю σ (рис. 2.3), може бути апроксимована кусково-прямолінійним контуром $abc\ldots hka$. Гравітаційне поле, яке створюється масами, можна замінити сумою полів, викликаних ступенями з похилими гранями $ab, bc, \ldots, de$ і $ak, kh, \ldots, fe$. Для першої групи уступів надлишкова щільність вибирається рівною $\sigma = 0{,}1$, для другого - вона буде негативною: $\sigma = -0{,}05$ (рис. 2.5). Природньо, якщо вміщують породи були б однорідні відносно щільності, то для другої групи уступів $\sigma = -0{,}1$.

Якщо зовнішня межа області апроксимується кусково-прямолінійним контуром, то рішення прямої задачі зводиться до визначення гравітаційного ефекту від набору похилих ступенів.

3. Гравітаційна аномалія.

Припустимо, що задано куля з надмірною масою M, центр якої знаходиться на глибині h відносно горизонтальної земної поверхні. Початок координат виберемо на земній поверхні в епіцентрі кулі. Вісь OZ спрямована вертикально вниз. Осі OX і OY можуть бути обрані на земній поверхні довільно так, щоб будь-яка зовнішня точка P мала б координати $(x, 0, z)$

У такій системі центр кулі визначається координатами $(0, 0, h)$.

$$V(x,z) = \frac{kM}{[x^2 + (h-z)^2]^{1/2}}.$$

Диференціюючи вираз по змінній z, знайдемо поле сили тяжіння в довільній точці:

$$V_z(x,z) = \frac{kM(h-z)}{[x^2 + (h-z)^2]^{3/2}}.$$

На земній поверхні, в площині $z = 0$, ця функція буде такою:

$$V_z(x) = \frac{kMh}{(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

У практиці інтерпретації використовується аномалія горизонтального градієнта. Диференціюючи функцію, отримаємо

$$V_x(x) = \frac{-3kMhx}{(x^2+h^2)^{5/2}}.$$

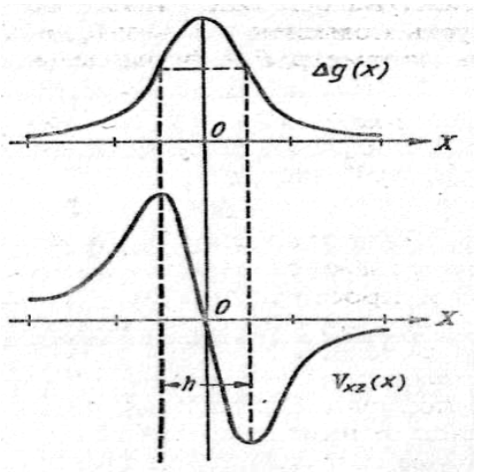


Рис. 3.1

Подані функції наведено на рис. 3.1. Аномалія сили тяжіння - функція парна. Вона має один екстремум - максимум на початку координат. Із зростанням координати аномалія убуває і асимптотично прагне до нуля, як функція $1/x^3$. Горизонтальний градієнт - функція нечітка, на початку координат дорівнює нулю, симетрична щодо початку і по різні боки від нього приймає екстремальні значення. Із зростанням координати функція асимптотично наближається до нуля, як $1/x^4$.

Література:

1. Булах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теория поля/ Е.Г Булах.− К.: Наукова думка, 1998. – 359 с.
2. Ткаченко Ю.Ф., Федоришин Д.Д., Федорів В.В., Лизун С.О. Терія поля / Ю.Ф. Ткаченко. – Ів.-Франківськ.: Факел, 2006. – 106 с.
3. Альпин Л.М., Даев Д.С., Каринский А.Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике / Л.М. Альпин. – М.: Недра, 1985. – 407 с.
4. Альпин Л.М. Практические работы по теории поля / Л.М. Альпин. – М.: Недра, 1971. – 304 с.
5. Овчинников И.К. Теория поля / И. К. Овчинников. – М.: Недра, 1979. – 352 с.
6. Баскаков С.И. Основы электродинамики / С. И. Басквков. – М.: Сов. Радио, 1973. – 248 с.

Луценко Віктор Юрійович
студент магістратури, спеціальність «Математика»

ОПОРНІ ЗАДАЧІ З ТЕМИ «КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ»

Постановка проблеми. Навчання учнів розв’язуванню геометричних задач – одна із важливих складових частин вивчення шкільного курсу геометрії. Під час розв’язування задач закріплюються теоретичні знання, виробляються навички застосування цих знань у практичній діяльності, розвивається творча активність.

Ефективний метод навчання розв’язувати геометричні задачі ґрунтується на використанні під час побудови плану розв’язування задачі деяких висновків, отриманих за рахунок розв’язування так званих базисних, або опорних, задач.

Такий підхід до відшукання плану розв'язування тієї чи іншої конкретної задачі допомагає швидше скласти такий план і успішно реалізувати його.

Базисними називаються задачі на доведення співвідношень або залежностей, що використовуються під час розв'язування багатьох інших геометричних задач. [1]

Задачі на комбінації геометричних тіл традиційно є одними із найскладніших у шкільному курсі геометрії. Тому знання учнями опорних задач і вміння їх застосовувати під час розв'язування конкретних задач на комбінації многогранників і тіл обертання значно полегшить і прискорить процес розв'язування геометричних задач такого типу. [4]

Мета статті: розробити добірку опорних задач з теми «комбінації геометричних тіл».

Виклад основного матеріалу. *Опорна задача 1.* У кулю радіуса R вписано конус, твірна якого дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Доведіть, що для такої комбінації тіл справедливі співвідношення:

$$l = 2R\sin\alpha \quad (1)$$

$$l^2 = 2RH \quad (2)$$

де H – довжина висоти конуса. [2]

Розв'язання. Розглянемо переріз кулі площиною осьового перерізу конуса (*рис. 1*). У перерізі утворюється круг, в який вписано рівнобедрений трикутник ABC ($AC=BC$). Висота CO_1 трикутника є висота конуса з вершиною C.

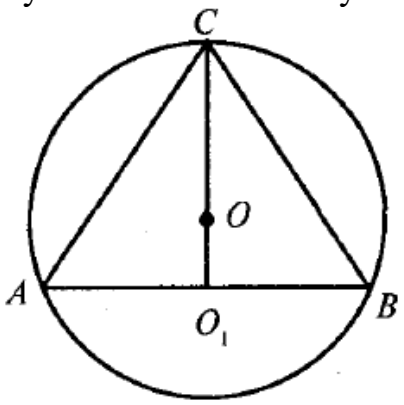


Рис. 1

Центр описаної навколо конуса кулі лежить на висоті конуса або на її продовженні за площиною основи (у тому випадку, коли кут нахилу твірної конуса до площини його основи менший за 45^O). Покажемо це.

Нехай твірна конуса утворює з площиною основи кут, більший за 45^O на (рис. 1). Якщо із центра кулі опустити перпендикуляр на площину основи конуса, то основою цього перпендикуляра буде точка O_1 – центр основи конуса. У цій самій точці перетинаються основа конуса і його висота. Оскільки через довільну точку площини можна провести до неї лише один перпендикуляр, то з цього випливає, що центр кулі, описаної навколо конуса, належить висоті конуса.

Аналогічно можна довести, що центр кулі, описаної навколо конуса, лежить на продовженні висоти конуса за площину основи, якщо кут нахилу твірної до площини основи конуса менший за 45^O.

За умовою в трикутнику ABC, $AC=BC=l$ і $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. За наслідком із теореми синусів маємо $l = 2R\sin\alpha$. ■

Оскільки із трикутника ACO_1, $H = l\sin\alpha$, то помноживши обидві частини останньої рівності на l, дістанемо $l^2 = 2RH$. ■

Опорна задача 2. Куля радіуса R вписана в конус, радіус основи якого дорівнює r, а твірна нахилена до площини основи під кутом α. Доведіть, що для такої комбінації тіл правильні співвідношення:

$$R = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \tag{3}$$

$$R = \frac{Hr}{l - r}, \tag{4}$$

де H і l – довжини висоти та твірної конуса відповідно. [3]

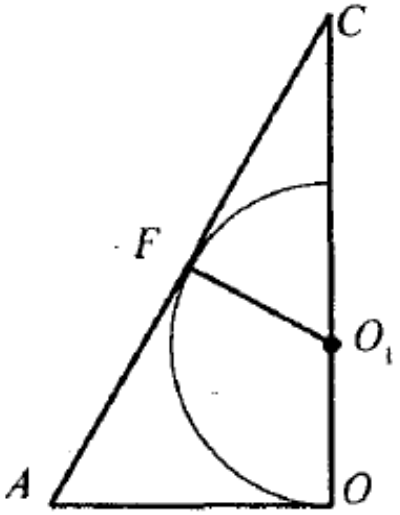


Рис. 2

Розв'язання. Центр кулі, вписаної в конус, лежить на висоті конуса. Покажемо це. Розглянемо прямокутний трикутник COA ($\angle COA = 90°$), в який вписано півколо так, що його центр – точка O_1 – належить катету CO. Це півколо дотикається до гіпотенузи в точці F, а до катета AO – у точці O (*рис*. 2). Під час обертання даної комбінації фігур навколо катета CO утворюється конус із вписаною в ньому кулею. З наведеного опису побудови даної комбінації тіл випливає, що центр вписаної в конус кулі лежить на висоті конуса і куля дотикається до основи конуса в її центрі.

Розглянемо переріз даної комбінації тіл площиною осьового перерізу конуса. У перерізі утворюється рівнобедрений трикутник ABC, в який вписано коло з центром в точці O_1, що належить висоті трикутника CO (*рис.* 3)

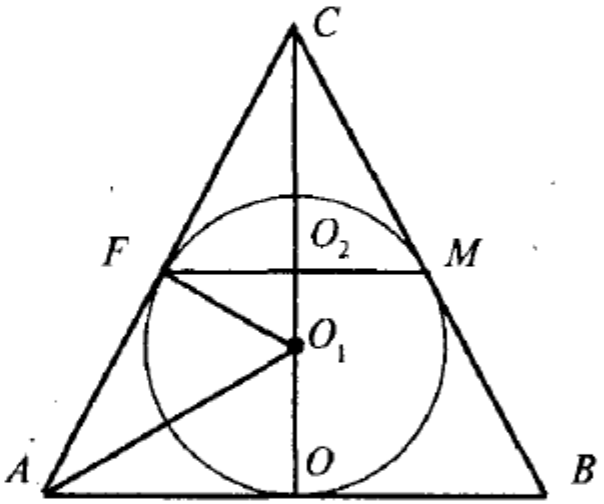


Рис. 3

Дане коло є більшим колом вписаної в конус кулі, тому його радіус O_1O дорівнює R. Центр O_1 є точкою перетину бісектрис кутів ACB і CAO трикутника ABC. Оскільки за умовою $\angle CAO = \alpha$, то $\angle O_1AO = \frac{\alpha}{2}$. AO – радіус основи конуса, $AO=r$.

Із ΔO_1AO, $OO_1 = AO \cdot \operatorname{tg}\angle O_1AO = R \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Із ΔCAO за властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо: $\frac{AC}{AO} = \frac{CO_1}{OO_1}$ або $\frac{l}{r} = \frac{H-R}{R}$, звідки $lR = Hr - rR$, $R = \frac{Hr}{l+r}$. ■

Опорна задача 3. Піраміда, в якої всі бічні ребра дорівнюють l і нахилені до площини основи під кутом α, вписана в кулю з радіусом R. Доведіть, що для даної комбінації тіл правильні співвідношення:

$$l = 2R\sin\alpha \quad (5)$$

$$l^2 = 2RH \quad (6)$$

де H – довжина висоти піраміди. [1]

Розв'язання. Оскільки піраміда вписана в кулю, то всі її вершини належать поверхні кулі. Площа основи піраміди перетинає поверхню кулі по колу, описаному навколо основи піраміди. Ця властивість є необхідною для піраміди, вписаної в кулю. Вона також є достатньою умовою. Тобто якщо навколо основи піраміди можна описати коло, то таку піраміду можна вписати в кулю (або навколо неї можна описати кулю, що теж саме). Доведемо це твердження.

Нехай $MABCD$ – піраміда, навколо основи якої можна описати коло (*рис.* 4). Хоча для визначеності ми розглядаємо чотирикутну піраміду, загальність наведених далі міркувань дозволить вважати одержаний нижче висновок правильним для довільної n-кутної піраміди, навколо основи якої можна описати коло.

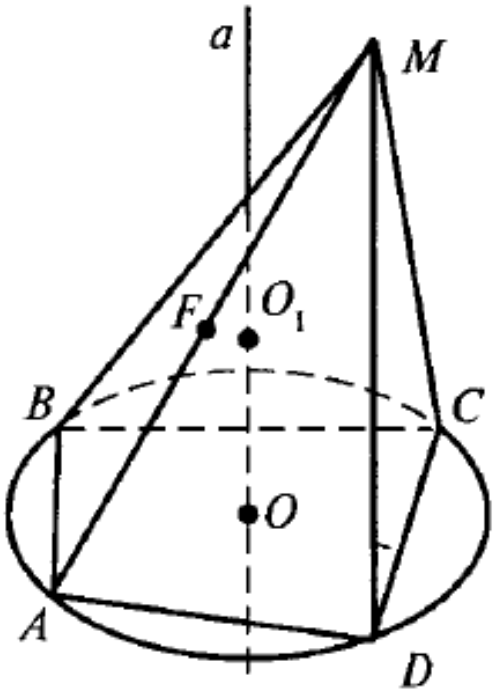


Рис. 4

Нехай O – центр кола, описаного навколо основи ABC. Через точку O проведемо пряму a, перпендикулярну до площини основи. Очевидно, що пряма є геометричним місцем точок, рівновіддалених від усіх вершин основ піраміди.

Через точку F – середину ребра MA піраміди перпендикулярно до нього проведемо площину γ (не зображено на рисунку), яка перетинає пряму a в деякій точці O_1. Така точка завжди існує.

Дійсно, ребро MA і пряма a можуть бути або паралельними, або перетинатися, або бути мимобіжними. У перших двох випадках, якщо площина перетинає перпендикулярно одну із прямих (MA), то вона перетинає і інші (a).

В останньому випадку площина, яка перетинає одну із двох мимобіжних прямих під прямим кутом, не перетне іншу пряму тільки у випадку, якщо ці мимобіжні прямі перпендикулярні.

Проте пряма a не може бути перпендикулярною до жодного бічного ребра піраміди. Тому площина γ обов'язково перетне пряму a. Отже, необхідність існування точки O_1 обґрунтована.

Із побудови видно, що площина γ є геометричним місцем точок, рівновіддалених від вершин A і M піраміди $MABCD$. Тому точка O_1, що належить площині γ, рівновіддалена від цих вершин. Але оскільки точка O_1 належить також прямій a, то вона рівновіддалена від усіх вершин даної піраміди. Звідси випливає, що точка O_1 рівновіддалена від усіх вершин піраміди, отже є центром описаної кулі.

Отже, доведено, що якщо навколо основи піраміди можна описати коло, то таку піраміду можна вписати в кулю (або навколо неї описати кулю).

Розглянемо піраміду в якої всі бічні ребра рівні (або рівно нахилені до площини основи, що те ж саме). У такої піраміди висота перетинає основу піраміди в центрі описаного навколо неї кола. Тому таку піраміду можна вписати

в кулю. При цьому центр описаної кулі буде лежати на висоті піраміди, якщо кут нахилу бічного ребра до площини основи піраміди більший за 45°, або на її продовженні за площину основи, якщо кут нахилу бічного ребра менший від 45°.

Нехай $MABCD$ – піраміда, в якій усі бічні ребра дорівнюють l і нахилені до площини основи під кутом α (рис. 5). MO – висота даної піраміди. Розглянемо ΔMAO, за умовою $\angle MAO = \alpha$.

Нехай $\alpha < 45^{\circ}$. Тоді точка O_1 – центр описаної кулі, належить висоті піраміди (в іншому випадку на продовженні висоти за площину основи чи на основі піраміди).

Проведемо $O_1F \perp MA$. Дістанемо прямокутний трикутник MO_1F, в якому $\angle MO_1F = \angle MAO = \alpha$. Оскільки O_1F – висота рівнобедреного трикутника MO_1A, то точка F – середина ребра MA. Тому $MF = \frac{l}{2}$.

Із ΔMO_1F, $MF = MO_1 \cdot \sin \angle MO_1F$, тобто $\frac{l}{2} = R \cdot \sin\alpha$ і $l = 2R\sin\alpha$.

Помножимо обидві частини останньої рівності на l і, врахувавши, що $l\sin\alpha = H$, маємо: $l^2 = 2RH$.

Здобуті співвідношення правильні зокрема для будь-якої правильної піраміди, вписаної в кулю. ■

Твердження та висновки отриманні при розв'язуванні цих задач можна використати в низці задач з теми «комбінації геометричних тіл». Крім цього методи розв'язання цих задач є загальними і можуть використовуватися при розв'язуванні задач на комбінації геометричних тіл.

Висновки. Розв'язування і записування учнями опорних задач є дуже важливим. Адже завдяки їм учні розуміють загальні принципи розв'язання задач з даної теми, та можуть використовувати висновки отримані при їх розв'язанні в інших подібних задачах.

Література:

1. Габович И. Г. Алгоритмический поход к решению геометрических задач / И. Г. Габович. – М. : Просвещение, 1996.
2. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: підруч. для 10-11 кл. серед. Шк. / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2001.
3. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии / В. Б. Полонский. – К.: Магистр-S, 1996. – 256 с.
4. Фискович Т. Т. Геометрия без репетитора / Т. Т. Фискович. – УНЦ ДО МГУ, 1998. – 152 с.

Масняк Ольга Сергіївна
студентка 3 курсу, напрям підготовки «Математика»

ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩІ ПОВЕРХНІ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Постановка проблеми. Нехай задана деяка криволінійна поверхня і нам потрібно обчислити її площу. Як це зробити? Відомо, що довжина (незамкненої) дуги визначається як границя периметра ламаної, вписаної в дугу, при умові, що довжини всіх її сторін прямують до нуля. У випадку криволінійної поверхні (теж незамкненої) природно було б розглядати вписану в неї багатогранну поверхню і визначати площу криволінійної поверхні як границю площі цієї багатогранної поверхні – при умові, що діаметри всіх граней прямують до нуля.

Однак, у кінці XIX століття була виявлена недоцільність цього означення. Саме Шварц (H. A. Schwarz) у 1890 році показав, що згаданої границі не існує навіть для простого випадку поверхні прямого кругового циліндра!

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Проблему визначення площі поверхні у тривимірному просторі досліджували багато вчених. Зокрема, задача на обчислення площі криволінійної поверхні розглядається у працях Б. Гелбаума, Дж. Олмстеда, Б. М. Будака, С. В. Фоміна та Г. М. Фіхтенгольца.

Мета статті: показати, що поняття площі багатогранної поверхні є значно складнішим, ніж поняття довжини дуги, а також вказати, як можна визначати площу поверхні у тривимірному просторі.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо циліндр радіуса R і висоти H (рис. 1).

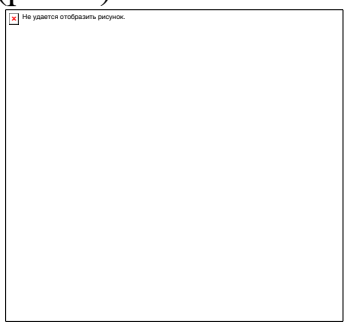


Рис. 1

1. Впишемо в нього багатогранну поверхню таким чином:

1.1. Поділимо висоту циліндра на m рівних частин (рис. 2).

1.2. Проведемо через точки поділу площини, перпендикулярні до осі циліндра так, що на його поверхні отримаємо m □1 кіл (включаючи сюди і кола обох основ циліндра), які утворюють m шарів (рис. 3).

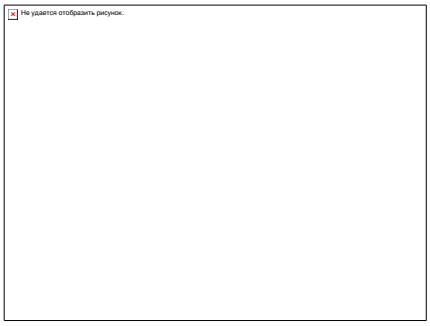


Рис.2

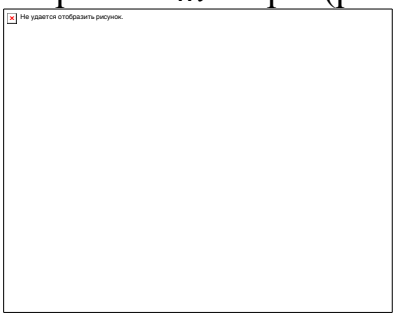


Рис.3

1.3. Кожне з цих кіл поділимо на n рівних частин так, щоб точки поділу кола, розташованого вище, знаходилися над серединами дуг тих кіл, що розташовані нижче (рис. 4).

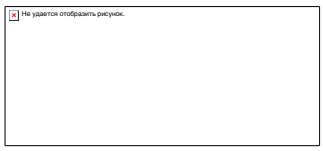


Рис.4

1.4. У кожному шарі візьмемо трикутники, утворені хордами усіх цих дуг і відрізками, які з'єднують кінці хорд з тими точками поділу вище- і нижчерозташованих кіл, які знаходяться якраз над або під серединами відповідних дуг (рис. 5).

Рис.5

1.5. Кожен із m шарів містить по $2n$ трикутників (оскільки з кожної хорди на колі можна утворити по трикутнику, а кожен шар, у свою чергу, складається з двох кіл).

1.6. Отже, за допомогою цих $2mn$ рівних трикутників ми і побудували потрібну багатогранну поверхню $E_{m,n}$ (рис. 6). Вона нагадує халяву чобота, зібрану в гармошку. Саме тому її називають «чоботом Шварца» [2].

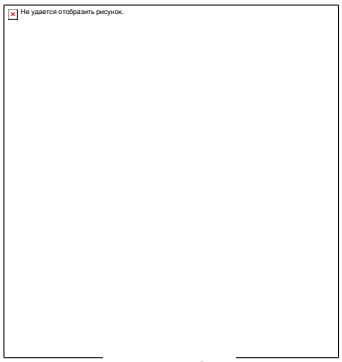


Рис.6

2. Обчислимо тепер площу σ кожного з $2mn$ трикутників.

2.1. Розглянемо один із m шарів розбиття циліндра і в ньому один із утворених у п.1.4 трикутників (рис. 7). Нехай це ΔBKL, де KL – відповідна хорда на нижньому колі, B – відповідна точка на верхньому колі. B_1 – проекція точки B на нижнє коло. Проведемо до сторони KL висоту AB. Оскільки ΔBKL – рівнобедрений (за побудовою), то AB є також медіаною (за властивістю рівнобедреного трикутника). Тобто $AK = AL$.

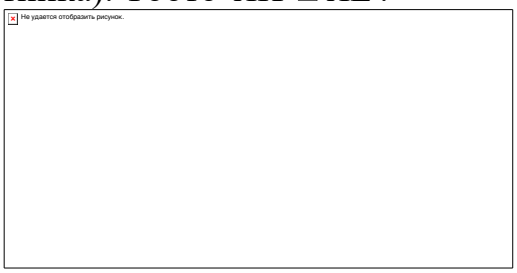


Рис.7

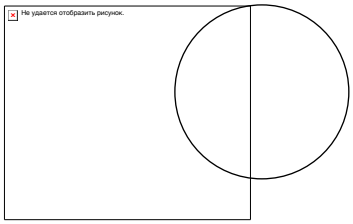


Рис.8

2.2. Тепер розглянемо нижнє коло (рис. 8). Побудуємо ΔKOL, де точка O – центр даного кола, $\angle KOL = \frac{2\pi}{n}$ (за побудовою). Оскільки $KO = OL = R$, то ΔKOL – рівнобедрений, а, отже, медіана AO (з п. 2.1) є також висотою і

бісектрисою (за властивістю рівнобедреного трикутника). Перейдемо до ΔAOL ($\angle AOL = \frac{1}{2}\angle KOL = \frac{\pi}{n}; AL = \frac{1}{2}KL; \angle OAL = 90^\circ$):

$AL = OL \cdot \sin\angle AOL = R \cdot \sin\frac{\pi}{n}$, тоді $KL = 2AL = 2R \cdot \sin\frac{\pi}{n}$,

$OA = OL \cdot \cos\angle AOL = R \cdot \cos\frac{\pi}{n}$,

$AB_1 = OB_1 - OA = R - R \cdot \cos\frac{\pi}{n} = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$.

2.3. Тепер розглянемо ΔABB_1:

$AB_1 = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)$; $BB_1 = \frac{H}{m}$; $\angle AB_1B = 90^\circ$.

З теореми Піфагора випливає, що

$$AB = \sqrt{AB_1 \cdot BB_1^2} = \sqrt{R^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{H^2}{m^2}}.$$

Таким чином, площа одного трикутника дорівнює:

$\sigma = \frac{1}{2}LK \cdot AB = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{H^2}{m^2}}$, а площу всієї багатокутної поверхні запишемо у такому вигляді:

$$E_{m,n} = 2mn\sigma = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2m^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + H^2}.$$

Коли m і n нескінченно зростають, то діаметри всіх трикутників прямують до нуля, але площа $E_{m,n}$ границі не має. Дійсно:

$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \pi$ (перша чудова границя), з іншого боку:

$\lim\limits_{m,n\to\infty} m\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = \lim\limits_{m,n\to\infty} m \cdot 2 \cdot \sin^2\frac{\pi}{2n} = \lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{\pi^2 m}{2n^2} = \frac{\pi^2}{2}\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{m}{n^2}$,

отже,

$$\lim_{m,n\to\infty} E_{m,n} = 2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4R^2}{4}\left(\lim_{m,n\to\infty}\frac{m}{n^2}\right)^2 + H^2} \qquad (*)$$

Проаналізуємо вираз (*). Бачимо, що границя $\lim\limits_{m,n\to\infty} E_{m,n}$ (за припущенням, площа нашої криволінійної поверхні) суттєво залежить від величини $\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{m}{n^2}$, тобто від способу одночасного зростання m і n. При $\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{m}{n^2} = 0$, і тільки в цьому випадку, описана вище границя дорівнює $2\pi RH$ (величині площі

поверхні циліндра, відомої з шкільного курсу геометрії), але, разом із $\lim\limits_{m,n\to\infty}\frac{m}{n^2}$, вона може дорівнювати навіть нескінченності. Таким чином, при незалежному одне від одного зростанні чисел m і n до нескінченності для площі $E_{m,n}$ визначеної границі не існує, і поверхня циліндра, з точки зору згаданого вище означення, площі не має.

Важливо зрозуміти, як відрізняється випадок ламаної, вписаної в криву, від випадку багатогранної поверхні, вписаної в криву поверхню (для спрощення вважатимемо криву та криволінійну поверхню, про які йде мова, гладкими). Тоді для утворення ламаної візьмемо лише ті хорди, що є достатньо малими та напрямок кожної з яких як завгодно мало відрізняється від напрямку дотичної у будь-якій точці відповідної дуги. Така нескінченно мала хорда може зі зростаючою точністю замінити відповідний елемент дуги. А от нескінченно мала многокутна площина, вершини якої лежать на криволінійній поверхні, навпаки, може виявитися зовсім не близькою за своїм розміщенням у просторі відносно площини , дотичної до поверхні; у цьому випадку замінити елемент поверхні вона, зрозуміло, не може. Ця обставина яскраво відображена у щойно розглянутому прикладі: дотичні до циліндричної поверхні площини всі вертикальні, а трикутні грані вписаної поверхні при великому значенні q стають майже горизонтальними, утворюючи дрібні згини.

Отже, слід наперед вимагати від вписаної в дану криволінійну поверхню багатогранної поверхні того, щоб:

1) діаметри її граней прямували до нуля,

2) розміщення цих граней в просторі нескінченно наближалось до розміщення дотичних площин до поверхні.

З попередніх висновків випливає, що можна побудувати вписані багатогранні поверхні, площі яких наперед прямують до площі даної криволінійної поверхні.

Покажемо, як можна будувати вписані багатогранні поверхні, площі яких наперед прямують до площі даної криволінійної поверхні [1].

Розглянемо, в основному, випадок, коли область Δ є прямокутником зі сторонами, паралельними координатним осям (рис. 9).

Виберемо деяку сторону поверхні S і тим самим встановимо додатній напрям обходу його контура. Можна вважати, що цей напрям відповідає додатньому обходу прямокутника Δ. Ми знаємо, що за цих умов напрямні косинуси нормалі до поверхні задаються формулами:

$$\cos\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\nu=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

з додатнім значенням радикала.

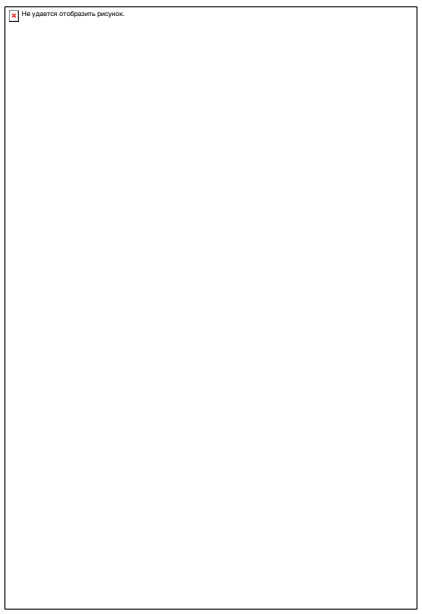


Рис.9

Розіб’ємо тепер прямокутник Δ за допомогою паралелей до його сторін на частинні прямокутники, потім кожен із них діагоналлю розіб’ємо ще на два прямокутних трикутника. Таким чином ми здійснимо триангуляцію області Δ. Нехай одним із елементарних трикутників буде $\Delta m_0 m_1 m_2$ з вершинами в точках $m_0(u_0, v_0)$, $m_1(u_0 + h, v_0)$, $m_2(u_0, v_0 + k)$ де h і k – числа одного знаку. На поверхні S їм відповідають точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, які визначають у просторі деякий $\Delta M_0 M_1 M_2$. З усіх таких трикутників складеться багатогранна поверхня Σ, вписана в S; її ми і будемо розглядати. Якщо обхід контура кожного такого трикутника здійснювати саме в напрямку $M_0 M_1 M_2 M_0$, що відповідає додатньому обходу трикутника $\Delta m_0 m_1 m_2$, то цим визначиться сторона багатогранної поверхні Σ.

Якщо $\Delta M_0 M_1 M_2$ спроектувати на площину xy, то отримаємо $\Delta N_0 N_1 N_2$ з вершинами в точках $N_0(x_0, y_0)$, $N_1(x_1, y_1)$, $N_2(x_2, y_2)$.

Площа цього (останнього) трикутника за величиною і знаком (із врахуванням його орієнтації!) буде виражений, як відомо з курсу аналітичної геометрії, визначником

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}.$$

За формулою кінцевих приростів

$$x_1 - x_0 = x(u_0 + h, v_0) - x(u_0, v_0) = x_u(u_0 + \theta h, v_0) \cdot h = \left[x'_u(u_0, v_0) + \varepsilon_1\right] \cdot h,$$

де величина ε_1 довільно мала разом з h, незалежно від розміщення точки (u_0, v_0)*. Аналогічно: $y_1 - y_0 = (y'_u + \varepsilon_2) \cdot h$,

$$x_2 - x_0 = (x'_v + \varepsilon_3) \cdot k,$$

$$y_2 - y_0 = (y'_v + \varepsilon_4) \cdot k,$$

де всі похідні обчислені при $u = u_0$, $v = v_0$, а буквою ε зі значками тут (і надалі) позначаються величини, довільно малі разом із h і k, незалежно від розміщення точки (u_0, v_0). Тепер величина σ_{xy} може бути переписана у вигляді

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2}hk\begin{vmatrix} x'_u + \varepsilon_1 & y'_u + \varepsilon_2 \\ x'_v + \varepsilon_3 & y'_v + \varepsilon_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}hk(C + \varepsilon_\varsigma) = (C + \varepsilon_\varsigma) \cdot \delta \qquad (1)$$

де δ – площа $\Delta m_0 m_1 m_2$. Аналогічно отримаємо і для проекцій на інші координатні площини:

$\sigma_{yz} = (A + \varepsilon_6)\cdot\delta$, $\sigma_{zx} = (B + \varepsilon_7)\cdot\delta$. (2)

Площа σ самого $\Delta M_0M_1M_2$ обчислюється тепер за формулою

$\sigma = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2}$,

і для неї легко отримати вираз

$$\sigma = (\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + \varepsilon_8)\cdot\delta, \quad (3)$$

Неважко здогадатися, що відношення $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma}$, $\frac{\sigma_{yz}}{\sigma}$, $\frac{\sigma_{zx}}{\sigma}$ виражатимуть напрямні косинуси нормалі до площі трикутника $\Delta M_0M_1M_2$ відповідно його орієнтації. Зважаючи на (1), (2) і (3), вони при h і $k \to 0$ прямують до напрямних косинусів нормалі до поверхні, причому рівномірно для всіх граней. Очевидно також, що при вказаному граничному переході і діаметри всіх граней поверхні $(\sum)$ рівномірно прямують до нуля, що і треба було довести.

І нарешті, просумувавши рівності виду (3), легко побачити, що площа багатогранної поверхні $(\sum)$:

$\sum = \sum\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\delta + \sum\varepsilon_8\cdot\delta$

при h і $k \to 0$ прямує саме до до площі криволінійної поверхні.

Ці побудови природно поширюються на випадок, коли область (Δ) складена з прямокутників. Триангуляція же довільної області вимагала б досить копітких (хоч і цілком елементарних) міркувань.

Висновки. Отже, спроба визначити площу криволінійної поверхні за допомогою вписаної багатогранної поверхні, аналогічно до хорд кривої, виявилася невдалою навіть для кругового циліндра. Натомість, спосіб визначення площі поверхні, представлений у другій частині цієї статті, є загальним для поверхонь у тривимірному просторі. Усі формули знаходження площі поверхні зі шкільного курсу геометрії є частинними випадками з цієї теорії. Інші ж способи визначення площі криволінійної поверхні можуть привести до парадоксальних висновків (розглянутий нами приклад Шварца).

Література:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – том 3. – М.: Наука, 1970. – 662 с.
2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будак, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1965. – 608 с.
3. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. – М.: Мир, 1967. – 587 с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа / С.М. Никольский. – том 2. – 3-изд. доп. и перераб. – М.: Наука, 1983. – 448с.

Окопна Таїса Миколаївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАДАЧА ПРО МЕДІАНИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Постановка проблеми. Трикутник найбільш поширена геометрична фігура, тому надзвичайно важливо навчити учнів знаходити потрібні елементи у трикутнику різними способами. Також, розв'язання однієї задачі допомагає швидко та ефективно повторити та систематизувати уже набуті знання з геометрії.[4]

Мета статті: охарактеризувати 7 способів розв'язання однієї задачі на знаходження медіан рівнобедреного трикутника з використанням знань зі шкільного курсу планіметрії.

Задача

Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона – 10 см. Знайдіть медіани трикутника.[2]

Розв'язання

На рисунку 1 зображено $\triangle ABC$, $AC = 12$ см – основа, $AB = BC = 10$ см – ребра $\triangle ABC$.

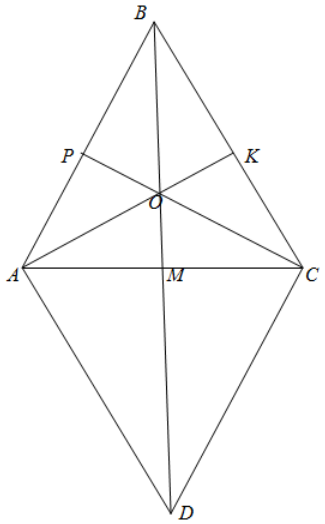


Рис. 1. Трикутник АВС

У даному трикутнику проведемо шукані медіани AK, BM, CP. Точка O – точка перетину цих медіан. Спочатку доведемо, що $AK = CP$.

$\triangle ABK = \triangle CBP$ (за другою ознакою). У них $AB = BC$, $BK = BP = \frac{AB}{2}$, $\angle ABK = \angle CBP$.

Далі задачу ми можемо розв'язувати різними способами. Розглянемо їх.

1-й спосіб [1]

Оскільки BM – медіана, опущена на основу AC і відомо, що $AC = 12$ см, то $AM = MC = \frac{1}{2}AC = 6$ (см).

З прямокутного $\triangle AMB$ ($\angle M = 90^\circ$ бо $BM \perp AC$)

$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ (см).

Виберемо систему координат так, як показано на рисунку 2 і визначимо координати точок A, B і C: $A(-6;0), B(0;8), C(6;0)$.

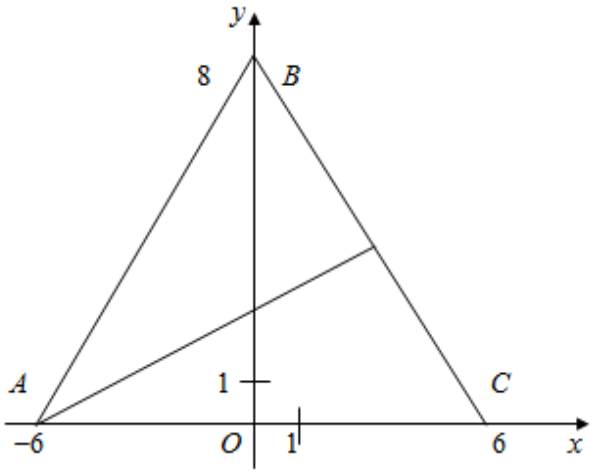


Рис. 2. Система координат

Обчислимо координати точки K:

$$x_K = \frac{x_B + x_c}{2} = \frac{0+6}{2} = 3;\ y_K = \frac{y_B + y_c}{2} = \frac{8+0}{2} = 4. \quad (1)$$

Тоді $AK = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{(3-(-6))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{97}$ *см*.

2-й спосіб [1]

Використаємо відому нам формулу для обчислення медіани трикутника за трьома сторонами:

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, де a, b, c – сторони трикутника.

$BM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 10^2 + 2\cdot 10^2 - 12^2} = 8$ (см).

Для знаходження іншої медіани AK зробимо ще одну добудову (рис.3). Проведемо $KL \perp AC$, тоді $KL \parallel BM$.

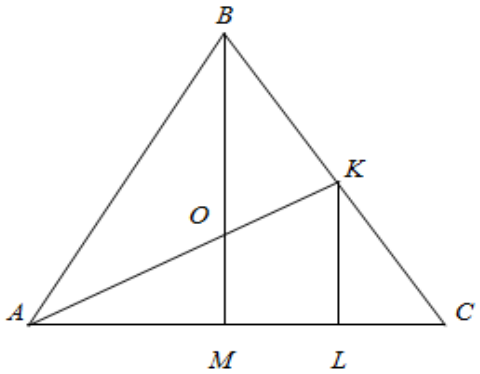


Рис. 3. Добудова до медіани АК

Оскільки $BK = KC$, то $ML = LC$, тобто KL – середня лінія $\triangle MCB$. Тому

$$KL = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4\ см,$$

$$ML = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3\ (см),$$

$$AL = AM = ML = 6 = 3 = 9\ (см).$$

З прямокутного $\triangle ALK$:

$$AK = \sqrt{AL^2 + KL^2} = \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}\ (см).$$

3-й спосіб [2]

За допомогою теореми косинусів у $\triangle ABC$ знайдемо $\cos A$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{10^2 + 12^2 - 10^2}{2\cdot 10\cdot 12} = 0,6$$

Тоді, за тією ж теоремою косинусів

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2 - 2AB\cdot AM\cdot\cos A} =$$

$$= \sqrt{10^2 + 6^2 - 2\cdot 10\cdot 6\cdot 0,6} = \sqrt{64} = 8(см)$$

$\cos C = 0,6\ (\angle C = \angle A)$ або знаходимо $\cos C$ з прямокутного $\triangle BMC$:

$$\cos C = \frac{CM}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

$$CK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5\ (см).$$

$$AK\sqrt{AC^2 + CK^2 - 2AC\cdot CKC\cos C} = \sqrt{12^2 + 5^2 - 2\cdot 12\cdot 5\cdot 0,6} = \sqrt{97}\ (см),$$

$AK = \sqrt{97}\ (см)$.

4-й спосіб [3]

За допомогою теореми косинусів у $\triangle ABC$ знайдемо $\cos A$

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{10^2 + 12^2 - 10^2}{2\cdot 10\cdot 12} = 0,6$$

Використавши основну тригонометричну тотожність і врахувавши, що $\angle A$ – гострий, маємо:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos A} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$$

З прямокутного $\triangle AMB$ ($\angle M = 90^\circ$ бо $BM \perp AC$)

$$BM = AB\cdot\sin A = 10\cdot 0,8 = 8 \text{ (см)}.$$

Очевидно, що $OM = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{3}\cdot 8 = 2\frac{2}{3}\ см.$

З прямокутного $\triangle AMO$:

$$AO = \sqrt{AM^2 + OM^2} = \sqrt{6^2 + \left(2\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{97}}{3}\ (см).$$

Оскільки $AO = \frac{2}{3}AK$, то $AK = \frac{3}{2}AO = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{97}}{3} = \sqrt{97}\ (см)$.

5-й спосіб [1]

Проведемо $AD \parallel BC$, $CD \parallel AB$. Утворений чотирикутник $ABCD$ – ромб, оскільки його сторонами є рівні сторони трикутника $\triangle ABC$. AC і BD – його діагоналі, M – точка перетин діагоналей.

Використавши властивість діагоналей паралелограма, маємо:

$$AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + BC^2\right),$$

$$(2BM)^2 = 4AB^2 - AC^2.$$

Оскільки $BM > 0$, то

$$BM = \sqrt{\frac{4AB^2 - AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{4AB^2 - AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 10^2 - 12^2}}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

6-й спосіб [2]

Обчислимо площу $\triangle ABC$ за формулою Герона:

$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16 \text{ (см)}.$$

$$S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = \sqrt{16 \cdot (16 - 10)^2 \cdot (16 - 12)} = 48 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM$, то $BM = \frac{2S_{ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 48}{12} = 8$ (см).

7-й спосіб [2]

Розв'яжемо дану задачу за допомогою векторів.

Очевидно, що $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$.

$$2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$$

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$ (цю векторну рівність також легко отримати, використавши добудову). Тоді

$$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2}.$$

У $\triangle ABC$ обчислимо $\cos B$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{10^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{7}{25}.$$

Отже,

$$BM = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\overrightarrow{BA}\right)^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}\,\Big)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{BA^2 + BC^2 + 2BA \cdot BC \cdot \cos ABC} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{7}{25}} = \frac{1}{2}\sqrt{256} = 8\,(см).$$

Відповідь. $8\,см$, $\sqrt{97}\,см$, $\sqrt{97}\,см$.

Висновки. Отже, дану задачу доцільно розв'язувати у кінці 9 класу для ґрунтовного та ефективного повторення усього навчального матеріалу, який відомий нам за три роки вивчення геометрії в основній школі.

Також, розгляд цієї задачі на початку 10 класу допоможе учням пригадати значну кількість вивченого ними матеріалу з планіметрії та краще систематизувати уже набуті знання.

Література:

1. Гусев В.А. и др. Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учеб. Пособи для студентов физ.-мат. Спец. пед. ин-тов и учителей/ В.А.Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: Просвещение, 1992. – 352 с.
2. Дрозд О. Урок однієї задачі. Геометрія, 9 клас // Математика. – 2006. – №16. – С. 6–7.
3. Роганін О.М., Каплун О.І. Математика: Практичний довідник. – Харків: ФОП Співак Т.К., 2009. С. 212-220.
4. Слєпкань З.І. Про стан шкільної математичної освіти в Україні // Матеріали всеукраїнської конференції «Актуальні проблеми вивчення природничо-математичних дисциплін у загальноосвітніх навчальних закладає України» .– К., 1999. – С. 10-11.

Павлюк Наталя Анатоліївна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»,
спеціальність «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ОПОРНИХ КОНСПЕКТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ»

Постановка проблеми. Для поліпшення професійної освіти молоді, їх підготовки до самостійного життя, подальшої освіти велике значення має розвиток особистості учнів в процесі навчання, виховання самостійності, відповідальності, формування їхньої активної життєвої позиції. навчання у школі та вищому навчальному закладі. Тому перед педагогами постають особливі завдання, які визначаються потребою не лише повідомляти учням готові знання, але й навчити здобувати їх самостійно, спонукати учнів проявляти пізнавальний інтерес. На даному етапі розвитку педагогічної науки і сучасної школи особливе значення набула проблема оволодіння вчителем нових методичних прийомів роботи, за допомогою яких можна значно активізувати розумову діяльність учнів і їх навчальну діяльність на уроці.

Мета статті: Вивчити та теоретично обґрунтувати ефективні шляхи удосконалення технології роботи як вчителя, так і учнів у процесі навчання математики старшої школи. Створити конспекти з теми “Комбінації геометричних тіл”.

Виклад основного матеріалу. Особливого значення в курсі геометрії старшої школи набуває тема “Комбінації геометричних тіл’’, на яку в 11-му класі відводиться мало часу. У процесі вивчення теми суттєво розвивається просторова уява учнів; на моделях комбінованих геометричних тіл учні

ознайомлюються з їх властивостями, вивчають їх можливе взаємне розміщення. Учні навчаються зображати ці комбінації тіл, узагальнюються і систематизуються їхні знання про вписані та описані многогранники. Вивчення цієї теми є важким для учнів через важкість осмислення малюнків до задач та їх особливостей. Серед інших причин, які можуть пояснити це, наступні:

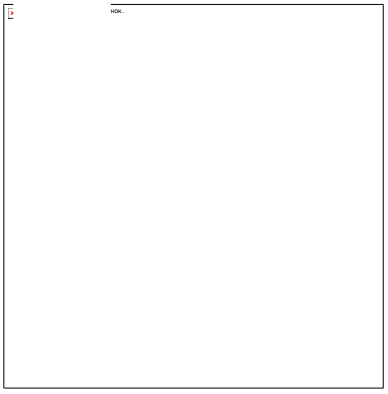
- ✓ у підручниках геометрії 10-11 класів не міститься розділ чи пункт “Комбінації геометричних тіл”;
- ✓ учителям часто не вистачає навчального часу на розгляд цих задач;
- ✓ комбінації навіть двох геометричних тіл нараховують десятки видів;
- ✓ недостатньо розвинута просторова уява учнів;
- ✓ відсутність ефективних методик навчання учнів з цього питання [2].

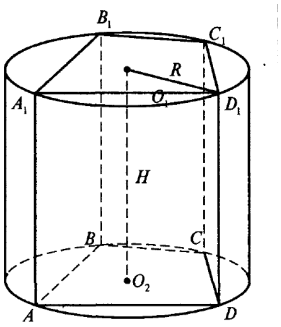
Дійсно, “Комбінації геометричних тіл” - одна з найважчих тем геометрії. Вона є розвитком системи всіх знань, умінь і навичок курсів планіметрії та стереометрії, поглиблює і розширює курс геометрії і показує практичне застосування геометричних знань в реальному житті. Однією з найважливіших задач викладання геометрії є формування і розвиток в учнів просторової уяви, а також здібності та вміння проводити операції над просторовими об'єктами.

В останні роки при викладанні математичних дисциплін у вищій школі почали інтенсивно застосовуватися опорні конспекти. Ми вважаємо,що доцільно застосовувати таку методику також при викладанні теми “Комбінації геометричних тіл” [1].

При вивченні теми “Комбінації геометричних тіл”, вчитель може запропонувати такий опорний конспект учням [4]:

Комбінації “циліндр-призма” Рис. 1

 Циліндр вписано в чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ або призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ описана навколо циліндра.	*Призмою, описаною навколо циліндра*, називається призма, в якій площини основ є площинами основ циліндра, а бічні грані дотикаються до бічної поверхні циліндра.
	Циліндр можна вписати в пряму призму, якщо її основа — прямокутник, в який можна вписати коло. $O_1K = r$ — радіус циліндра. Висота циліндра, вписаного в призму, дорівнює висоті призми.
	Призмою, вписаною в циліндр, називається призма, в якій площинами основ є площини основ циліндра, а бічними ребрами — твірні циліндра.

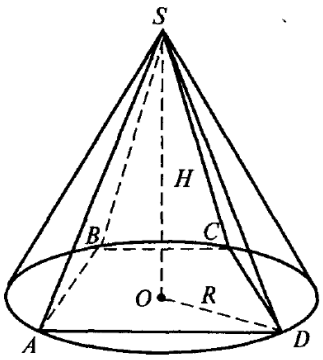
 Призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана в циліндр або циліндр описано навколо призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$.	Призму можна вписати в циліндр, якщо вона пряма та її основа — многокутник, який можна вписати в коло. O_1D_1 □ R – радіус циліндра. Висота циліндра, описаного навколо призми, дорівнює висоті призми.

Опорний конспект дозволяє учням:

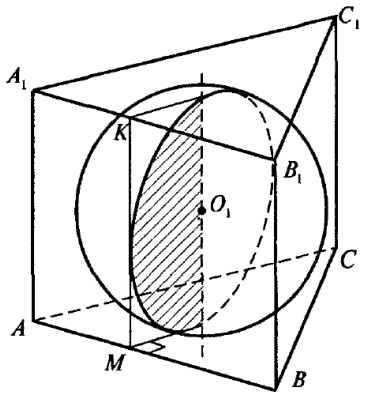
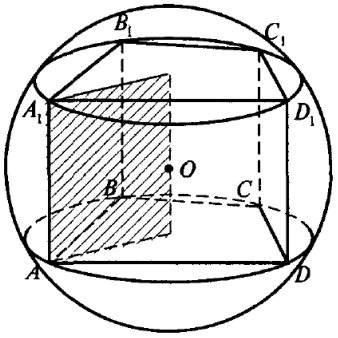
- □ глибше розібратися в матеріалі, що вивчається, виокремити питання, пов'язані з окремою частиною конспекту, і з допомогою вчителя до кінця зрозуміти даний матеріал;
- □ легше запам'ятати новий матеріал;
- □ використовуючи опорний конспект при відповіді, грамотно, точно викласти матеріал;
- □ приводити в систему отримані знання, особливо при повторенні [3,5].

Комбінації "конус-піраміда" Рис. 2

Піраміда $SABCD$ описана навколо конуса. SO □ H – висота конуса і піраміди. OK □ r – радіус конуса.	*Пірамідою, описаною навколо конуса*, називається піраміда, основою якої є многокутник, описаний навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса.
	Піраміду можна описати навколо конуса, якщо її вершина проектується в центр основи конуса і в основу піраміди можна вписати коло.
	Пірамідою, вписаною в конус, називається піраміда, основа якої є многокутник, вписаний у коло основи конуса, а вершиною є вершина конуса.
	Піраміду можна вписати в конус, якщо її основа — многокутник,навколо якого можна описати коло, і бічні ребра піраміди рівні. Бічні ребра піраміди є

 Піраміда *SABCD* вписана в конус.	твірними конуса.

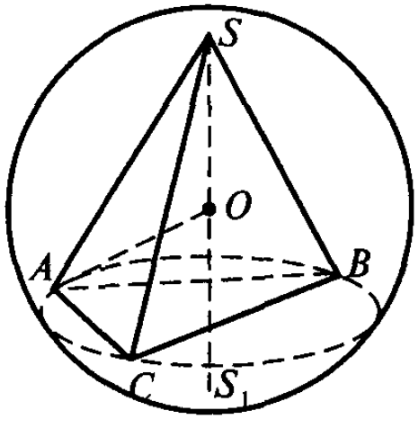
Комбінації "призма-куля" Рис. 3

 Призма $ABCA_1B_1C_1$ описана навколо кулі або куля вписана в призму.	*Призма* називається *описаною навколо кулі*, якщо всі її грані дотикаються до кулі.
	Кулю можна вписати в пряму призму, якщо її основи є многокутниками, описаними навколо кола, а висота призми дорівнює діаметру кола $AA_1 = d$. O_1 — центр кулі. O_1 — середина відрізка, що з'єднує центри кіл, вписаних в основи призми. $V_n = \frac{1}{3} r_{вп} \cdot S_{пп}$
 Призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписана в кулю або куля описана навколо призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$.	*Призма* називається *вписаною в кулю*, якщо всі її вершини лежать на поверхні кулі.
	Якщо призма вписана в кулю, то вона — пряма. О — середина відрізка, що з'єднує центри кіл, описаних навколо основ призми.

Опорний конспект являє собою лист з малюнками, окремими словами, формулами. У них закодована певна інформація. Запам'ятовуючи окремі символи (малюнки, слова), учень фактично запам'ятовує і їх розшифровку. Іноді невелике оповідання, в якому міститься один або кілька абзаців підручника чи додаткової літератури.

Уміння учня з даного символу побудувати цілу розповідь свідчить про ступінь розуміння ним вивченого навчального матеріалу.

Комбінації "піраміда-куля" Рис. 4

Піраміда *SABC* вписана у кулю або куля описана навколо піраміди *SABC*.	*Піраміда* називається *вписаною в кулю*, якщо всі її вершини лежать на поверхні кулі.
	Центр кулі, описаної навколо довільної піраміди, лежить на прямій, перпендикулярній площині основи, яка проходить через центр кола, описаного навколо основи, в точці перетину цієї прямої з площиною, яка перпендикулярна до бічного ребра і проходить через його середину. Якщо вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи, то центр описаної кулі лежить на прямій, яка містить висоту піраміди і є точкою перетину цієї прямої з серединним перпендикуляром до бічного ребра.
	*Піраміда* називається *описаною навколо кулі*, якщо всі грані піраміди дотикаються до кулі.
Піраміда *SABCD* описана навколо кулі або куля вписана в піраміду *SABCD*.	Якщо вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу то центр вписаної кулі лежить на висоті піраміди і є точкою перетину висоти з бісектрисою лінійного кута двогранного кута при основі даної піраміди.

Пояснення до опорних конспектів. Кожен опорний конспект розділений на дві частини: верхню та нижню. У верхній частині конспекту описується

комбінація геометричних тіл, де тіло обертання вписане в інше геометричне тіло, у верхній навпаки — описане.

Кожна з цих частин розділена ще на три блоки. У лівому блоці наведений приклад комбінації геометричних тіл, у правому — означення, умова та властивості [4].

Дані опорні конспекти допомагають учням орієнтуватися в поняттях теми "Комбінації геометричних тіл" та сприяють кращому засвоєнню теми учнями.

Висновки. Використання опорних конспектів при вивченні теми «Комбінації геометричних тіл» значно покращує рівень засвоєння та розуміння учнями матеріалу та допомагає вчителям при вивченні даної теми. Опорний конспект допомагає учню сприймати будь-яку тему цілісно завдяки тому, що зв'язки між окремими елементами після розшифровки вчителя стають зрозумілими.

Створення опорних конспектах на уроках алгебри і початків аналізу, а також стереометрії сприяє досягненню позитивних результатів у навчанні лише за умови цілеспрямованого, усвідомленого впливу з боку вчителя, з урахуванням характеру матеріалу, порівнюваних обсягів, віку і рівня розвитку учнів.

Література:

1. Воспитание детей в школе. Новые подходы и новые технологии / [под ред. Н. В. Щурковой]. – М.: Просвещение, 1998. – 171 с.
2. Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк. – 2008. – С. 150 – 157.
3. Калошин В. Ф. Творче надбання В. Ф. Шаталова в освітню практику / В.Ф. Калошин // Управління школою. – 2007. – № 32 (188). – С. 17-23.
4. С.В. Сержук, А.М. Сержук. Комбініції геометричних тіл. Міні-підручник / С. В. Сержук // Математика в школах України. - 2008. – №7.
5. Шаталов В. Ф. Педагогическая проза: Из опыта работы школ г. Донецка / В.Ф. Шаталов. – М.: Педагогика, 1980. – 323с.

Полянська Катерина Ігорівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАВДАНЬ ПРИКЛАДНОГО ЗМІСТУ З ГЕОМЕТРІЇ ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ З МАТЕМАТИКИ

Постановка проблеми. Зовнішнє незалежне оцінювання — це комплекс тестів закритого та відкритого типу, спрямованих на визначення рівня знань та умінь випускників середніх навчальних закладів з метою їхнього вступу на навчання до вищих навчальних закладів. Метою зовнішнього незалежного оцінювання є підвищення рівня освіти населення України та забезпечення реалізації конституційних прав громадян на рівний доступ до якісної освіти,

здійснення контролю за дотриманням Державного стандарту базової і повної середньої освіти й аналізу стану системи освіти, прогнозування її розвитку. Уже, починаючи з 2004 року в окремих містах України було вибірково проведено зовнішнє незалежне тестування з окремих предметів, до складу яких входила і математика. З 2008 року проходження зовнішнього незалежного оцінювання є обов'язковою умовою в Україні для вступу до вищого навчального закладу.

Мета даної статті: охарактеризувати ті задачі з геометрії збірників завдань ЗНО з математики, які можна віднести до прикладних; вказати основні проблеми підготовленості випускників шкіл до розв'язування цих завдань.

Виклад основного матеріалу. Одне із типових питань вчителя математики, який переймається питаннями формування міцних і глибоких знань та умінь учнів з математики, ефективною їх підготовкою до ЗНО, це питання: які з геометричних задач варто віднести до прикладних? Іноді, вчитель відносить сюди будь-які геометричні задачі з певними видозмінами умови відносно стандартних геометричних задач. Наприклад:

1. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$ площа якою дорівнює $60\ см^2$. Точка M належить стороні BC. Визначте площу фігури, що складається з двох зафарбованих трикутників.

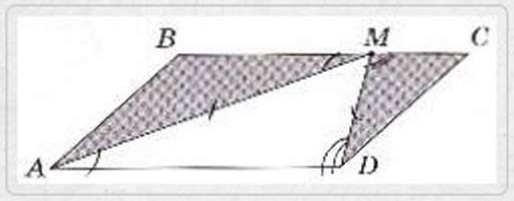


Рис. 1

2. Прямокутний паралелепіпед з довжиною 5 $см$, 7 $см$ і 9 $см$ складено з кубиків з довжиною ребер 1 $см$. Скільки доведеться забрати кубиків, щоб вилучити весь зовнішній шар товщиною в один кубик?

Ми такі задачі не відносимо до прикладних. Під прикладною геометричною задачею будемо розуміти завдання, що має явно виражений побутовий або інший не математичний зміст, однак, засобами моделювання зводиться до розв'язування стандартної геометричної задачі. Наш огляд збірників завдань ЗНО дозволяє виокремити для прикладу такий список прикладних задач:

1. У посудину циліндричної форми, наповненої водою до верху, поклали металеву кулю, яка дотикається дна та стінок. Визначити відношення об'єму води, яка залишилась у посудині до об'єму води, яка вилилась.

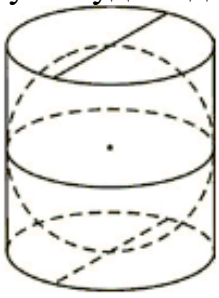


Рис. 2

2. Укажіть номер фужера, у який можна налити НАЙБІЛЬШЕ рідини.

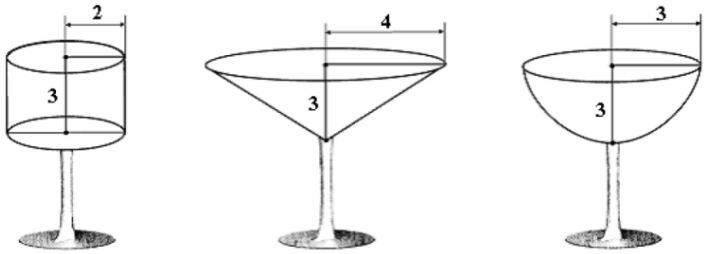


Рис. 3

3. Драбину довжиною 6,5 м приставили до стінки будинку на рівні вікна (див. рис.4). Нижній кінець драбини знаходиться на відстані 2,5 м від будинку. Знайдіть висоту, на якій розташовано вікно.

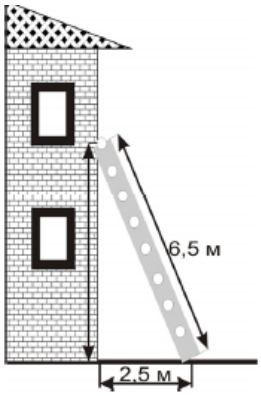


Рис. 4

4. Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори із розрахунку: три одиниці на 50 $м^3$. Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити, якщо новий будинок має форму прямокутного паралелепіпеда розміру $15м \times 18м \times 25м$?
5. На рисунку зображено ємність, у яку налито одну склянку рідини. Обчисліть, на яку кількість повних склянок рідини розрахована ця ємність.

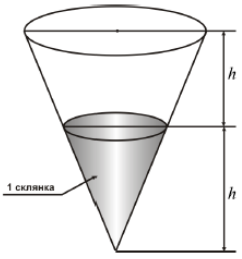


Рис. 5

6. На лузі біля річки треба обгородити ділянку прямокутної форми, що прилягає до прямолінійного берега річки (з боку річки огорожа не встановлюється) (див. рис.6). Завезено 200 погонних метрів огорожі. Якими мають бути розміри відповідного прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

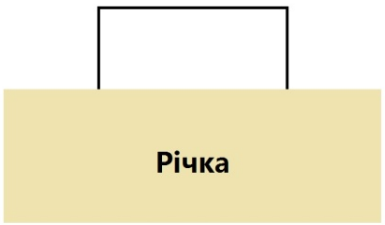


Рис. 6

7. У сонячний день довжина тіні від дерева становить 16 м. У той самий час тінь від хлопчика, який має зріст 1,5 м дорівнює 2 м (див. рис.7). Визначте висоту дерева.

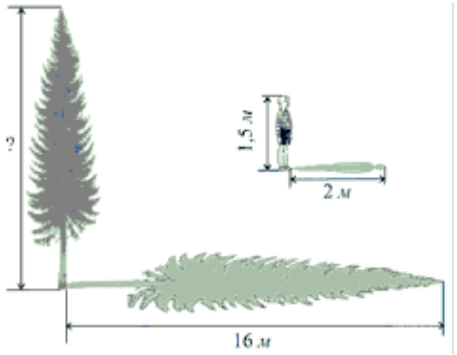


Рис. 7

8. З дерев'яної циліндричної заготовки осьовим перерізом якої є квадрат, виточили більярдну кулю найбільшого об'єму (див. рис.8). Визначте відношення об'єму кулі до об'єму всієї заготовки.
9. Кімната має форму прямокутного паралелепіпеда (ширина кімнати – 4 м, довжина – 5 м, висота – 2,5 м). площа стін кімнати дорівнює 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда. Скільки фарби (у кг) потрібно, щоб повністю пофарбувати стіни і стелю цієї кімнати, якщо на 1 $м^3$ витрачається 0,25 кг фарби?
10. Свинцеву кулю радіуса 5 $см$ переплавили в кульки одного розміру, радіус кожної з яких - 1 $см$. Скільки таких кульок одержали? Втратами свинцю під час переплавлення знехтувати.

Не секрет, що основна проблема, як наприклад, в текстових задачах, перейти від змісту прикладної задачі до геометричної. В нашому випадку з використанням прийому мислення моделювання отримаємо такий список відповідних наведених вище задач:

1. Дано циліндр, в який вписано кулю так, що вона дотикається до нижньої основи та бічної поверхні циліндра. Визначити відношення об'єму частини циліндра без кулі до об'єму кулі.
2. Яке з геометричних тіл, циліндр, конус чи півкуля має найбільший об'єм, якщо їх висоти рівні і дорівнюють 3 $см$, а радіуси основ відповідно 2 $см$, 4 $см$ та 3 $см$.
3. З точки до прямої проведені перпендикуляр та похила, довжиною 6,5 $м$. Проекція похилої має довжину 2,5 $м$. Знайти довжину перпендикуляра.

4. У скільки разів об’єм прямокутного паралелепіпеда з розмірами $15\times18\times25\,м$ більше об’єму $50\,м^3$?
5. Обчислити відношення об’ємів двох конусів, якщо в одному з них паралельно основі конуса проведено переріз. Відстань від вершини конуса до перерізу дорівнює половині висоти конуса.
6. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа набувала найбільшого розміру, а сума трьох його сторін дорівнювала $200\,м$?
7. У ΔABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 16см$. Пряма a, паралельна стороні BC, перетинає сторони CA і AB у точках M і N відповідно. Обчислити BC, якщо $MN = 1{,}5м$, $MA = 2м$.
8. Осьовий переріз циліндра є квадрат, в циліндр вписана куля найбільшого об’єму. Знайти відношення об’єму кулі до об’єму циліндра.
9. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда $4\,м$ і $5\,м$, висота $2{,}5\,м$. Знайти 0,8 площі бічної поверхні цього паралелепіпеда та площу його основи.
10. В скільки раз об’єм кулі радіуса радіуса $5\,см$ більший за об’єм кулі радіуса $1\,см$?

Аналіз задач, отриманих в результаті прийому моделювання до наведених вище десяти прикладних задач свідчить, що задачі, певним чином, втратили свою складність. Розв’язування вказаних задач потребує знань учнів з таких тем планіметрії: перпендикуляр та похила, паралельні прямі, подібні трикутники, прямокутний трикутник, квадрат, прямокутник та його площа. Також, для розв’язування вказаних задач потрібні такі знання з стереометрії: об’єми циліндра, конуса та кулі, об’єм прямокутного паралелепіпеда, осьовий переріз.

Для формування і розвитку здатності учнів використовувати прийом моделювання потрібна відповідна, цілеспрямована діяльність вчителя математики. Наведені вище прикладні задачі, на нашу думку, мають віднайти своє місце на уроках геометрії в школі. Методика розв’язування вказаних задач знаходиться в прямій залежності від методичної компетентності вчителя математики.

Сучасні шкільні підручники надають допомогу вчителеві для розв’язування прикладних завдань. Наведемо приклади одного з найбільш вдалих, з цієї точки зору, підручників з геометрії для старшої школи Геометрія 10, Геометрія 11 (Бурда М.І., Тарасенкова Н.А.)[1]. У підручнику є традиційна рубрика «Застосуйте на практиці». Зокрема, в підручнику «Геометрія, 10» виокремленні (з яскравими малюнками) такі прикладні задачі:

1. Майстриня прикрашає сорочку вишиваними смужками, розміщуючи їх на лівій і правій полах сорочки паралельно лінії ґудзиків. Чому в готовому виробі смужки виглядають паралельними?
2. На певній ділянці автостради її смуги розділені суцільною лінією (її не можна перетинати). Чи можуть на цій ділянці зіткнутись законослухняних водіїв, що рухаються на зустріч один одному? Відповідь поясніть.

3. Щоб естетично розмістити на стіні картину прямокутної форми, один з її горизонтальних країв вирівнюють відносно стику цієї стіни і стелі. На чому ґрунтується такий спосіб?
4. На горі знаходиться башта висотою 70 $м$. Деякий предмет (точка А) (див. рис. 8) на підошві гори видно з вершини башти (точка В) під кутом 60° до горизонту, а з її основи (точка С) – під кутом 30° до горизонту. Знайдіть висоту гори.

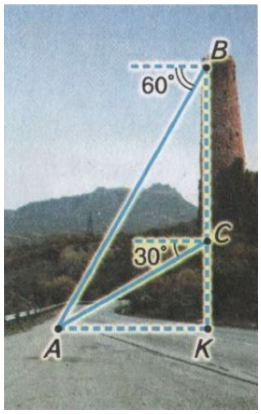


Рис. 8

5. Яке взаємне розміщення книг на повність заповненій полиці, якщо книги щільно прилягають одна до одної? А якщо зняти декілька книг з полиці?
6. Щогла закріплена трьома однаковими тросами так, що нижні кінці тросів віддалені від щогли на 20 $м$, а верхні кінці закріплені на висоті 32 $м$. Які довжини тросів?
7. Канал з трикутним перерізом і глибиною 2,8 $м$ перегороджено щитом, який має форму рівностороннього трикутника. (див. рис. 9) Обчисліть площу трикутника ΔABC, якщо його розміщено вертикально

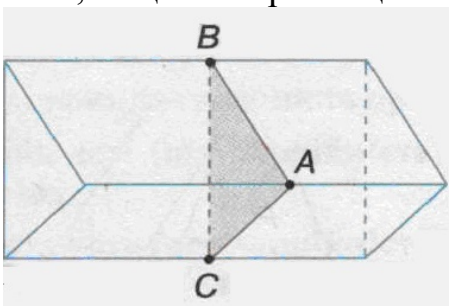


Рис. 9

8. Перпендикулярність осі свердла до площини столу, на якому кріпиться деталь, слюсар перевірив за допомогою кутника. Як він це зробив?
9. Як перевірити паралельність стелі й підлоги кімнати? Скільки кутів треба виміряти при цьому?
10. Потрібно протягнути два електричних дроти від стовпа до будинку(див. рис. 10). На стовпі вони кріпляться на висоті 9 $м$, а на стіні будинку – на висоті 4 $м$. Скільки потрібно дроту, якщо відстань від стовпа до будинку 20 $м$, а на кріплення і провисання потрібно додати 6% знайденої довжини?

Рис. 10

Висновки. Щоб навчити школярів самостійно й більш творчо вчитися, потрібно включати їх в спеціально організовану пізнавальну діяльність, зробити господарями цієї бурхливої діяльності. Одним із способів включення в активну діяльність у процесі розв’язання задач є моделювання. Моделювання є потужним сучасним пізнавальним прийомом і ефективним засобом розв’язування задач.

Навчання математики із застосуванням моделювання підвищує активність мисленнєвої діяльності учнів, допомагає зрозуміти завдання, самостійно знайти раціональний шлях розв'язання, встановити потрібний спосіб перевірки, визначити умови, у яких завдання має розв’язок. Модель дає можливість більш повно побачити залежність між даними і шуканими величинами, уявити завдання в цілому, допомагає узагальнити теоретичні знання.

Література:

1. Бурда М.І. Геометрія : Підруч. для 10.кл загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2011. – 176с.
2. Збірник тренувальних завдань з математики для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання/ О.Ю. Максименко, О.О. Тарасенко та ін. – Харків: Торсінг Плюс, 2007. – 96с.
3. МАТЕМАТИКА. Збірник завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. – Львів: ЛРЦОЯО, 2007. – 51 с.

Романенко Анна Олександрівна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»,
спеціальність «Математика»

ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ»

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку суспільства велике значення має належний рівень математичної підготовки учнів загальноосвітніх шкіл . Це, насамперед, обумовлено тим, що багато спеціальностей потребують високого рівня математичних знань взагалі і геометричних зокрема. Адже саме геометрія є опорним предметом у процесі вивчення фізики, астрономії, географії,

креслення тощо. Важко уявити інженера, конструктора, архітектора, який досконало не володіє відповідним геометричним матеріалом.

Особливого значення в курсі геометрії старшої школи набуває тема «Комбінації геометричних тіл», на яку в 11-му класі відводиться мало часу. У цій темі – вся геометрія середньої школи. У процесі вивчення теми суттєво розвивається просторова уява учнів; на моделях комбінованих геометричних тіл учні ознайомлюються з їх властивостями, вивчають їх можливе взаємне розміщення. Учні навчаються зображати ці комбінації тіл, узагальнюються і систематизуються їхні знання про вписані та описані многогранники. Вивчення цієї теми є важким для учнів через важкість осмислення малюнків до задач та їх особливостей. Тому варто зробити якісь методичні зміни в вивчені цієї темі. [5]

Мета статті: розробити методичні вказівки, щодо особливостей вивчення теми «Комбінації геометричних тіл».

Виклад основного матеріалу. Переважна більшість задач з теми присвячена обчисленню довжин сторін, мір кутів, площ та об'ємів фігур, що сприяє формуванню в учнів практичних навичок. Доцільно також звернути увагу і на задачі, що вимагають від учнів уміння будувати відповідні малюнки комбінованих тіл. У старших класах, особливо в 11- му, доцільно сміливіше використовувати лекційно – семінарські форми проведення занять, як цього вимагають і вікові особливості учнів. Цей спосіб можна застосовувати в процесі вивчення названої теми.

Тема комбінацій тіл у підручнику з геометрії окремо не виділена, а вона є достатньо складною, оскільки вимагає знання багатьох теоретичних питань. Щоб повторити потрібні теоретичні питання, зручно заздалегідь підготувати відповідні опорні конспекти. Їх можна виготовити з допомогою учнів, які цікавляться математикою.

Основними поняттями, що використовуються під час розв'язування задач, є многогранники, циліндр, конус і куля, тому слід відобразити у конспектах відповідні означення, формулювання теорем і формули для знаходження сторін многокутників, радіусів вписаного й описаного кіл, площ, об'ємів тіл. [4]

Це мають бути найпростіші поняття.

Означення многокутника: плоского, правильного, вписаного у коло, описаного навколо кола.

Означення кута: плоского, вписаного у коло, центрального; між двома прямими; між прямою і площиною; між мимобіжними прямими, між площинами; двогранного, тригранного;лінійного кута двогранного кута.

Означення відстані: від точки до прямої (площини); призми, вписаної у сферу, описаної навколо конуса, кулі (сфери); піраміди, вписаної у циліндр, конус, сферу; піраміди, описаної навколо циліндра, конуса, кулі (сфери); площини, дотичної до кульової поверхні. [1]

Формулювання теорем: ознаки паралельності і перпендикулярності: прямих; прямих і площин; площин.

Ознаки паралельності:

1. Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

2. Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині.

3. Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Властивості паралельних прямих:

1. Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.

2. Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

Ознаки перпендикулярності:

1. Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні відповідно двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні.

2. Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині і перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.

3. Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні. [2]

Основні формули:

Для обчислення сторони будь-якого трикутника за теоремою синусів, косинусів; сторони прямокутного трикутника, суми кутів опуклого многокутника, радіуса R описаного кола і r вписаного кола для правильного многокутника зі стороною a і кількістю сторін n.

Обчислення площ: трикутника, чотирикутника, круга.

Для обчислення площ поверхонь та об’ємів призми, піраміди, зрізаної піраміди, циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі (сфери).

Виготовивши такі опорні конспекти в достатній кількості для всього класу і роздавши їх учням, можна за один урок повторити основний теоретичний матеріал, пов'язаний з цією темою. Наступні чотири уроки можна присвятити розв’язуванню відповідних задач. Під час розв’язування комбінованих задач слід звертати увагу на побудову малюнків до задач, їх прикладне застосування. [3]

Давайте розглянемо деякі комбінації геометричних тіл.

а.) Комбінації многогранників

Многогранник називається *вписаним в інший многогранник,* якщо всі вершини першого лежать на поверхні (ребра або гранях) другого многогранника. При цьому другий многогранник називається *описаним* навколо першого.

Більшість задач на вписані і описані многогранники – це задачі на вписані в піраміду призми, зокрема куби. Причому вершини нижньої основи вписаної призми лежать в основі піраміди, а вершини верхньої основи – на ребрах або апофемах бічних граней.

б.) Комбінації «циліндр-призма»

Циліндром, вписаним у призму, називається циліндр, основи якого – круги, вписані в основи призми, а бічна поверхня циліндра дотикається до бічних граней призми, рис. 1. Де Радіус циліндра - r. Вісь циліндра збігається з висотою призми - H.

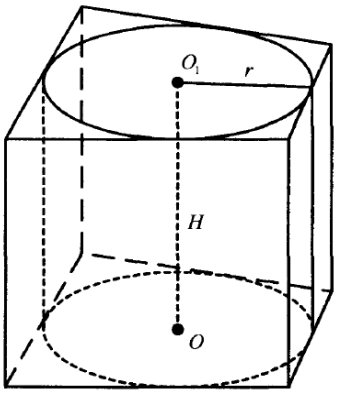


Рис. 1

Циліндр називається *описаним навколо призми,* якщо його основи – круги описані навколо основ призми, а твірні зберігаються з ребрами призми, рис.2. Де радіус циліндра - R, вісь циліндра збігається з висотою призми - H. [4]

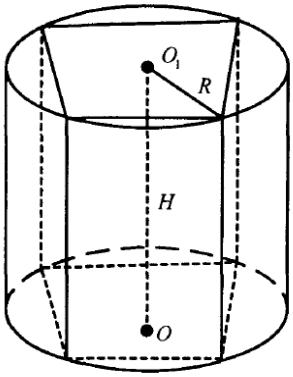


Рис. 2

в.) Комбінації «конус-піраміда»

Конусом, вписаним у піраміду, називається конус, основа якого – круг, вписаний у многокутник основи піраміди, вершина збігається з вершиною піраміди, бічна поверхня конуса дотикається до бічних граней піраміди.

Радіус вписаного в основу піраміди кола (круга), перпендикулярний до сторони многокутника, що лежить в основі піраміди, і є проекцією твірної конуса на площину основи, рис.3. Де r - радіус конуса, H - висота піраміди й конуса.

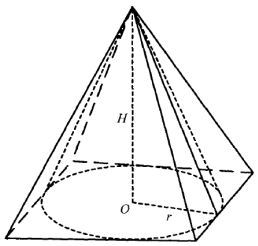


Рис. 3

Конус називається описаним навколо піраміди, якщо його основа – круг, описаний навколо основи піраміди, вершина збігається з вершиною піраміди, а твірні збігаються з ребрами піраміди.

Висоти конуса й піраміди збігаються на основі єдності прямої, перпендикулярної до площини й проведеної через точку, що не лежить у даній площині, рис.4. Де R - радіус конуса, H - висота піраміди й конуса. [2]

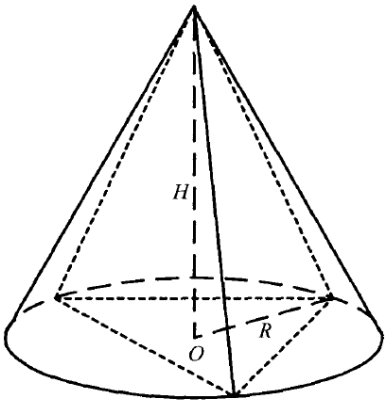


Рис. 4

г.) Комбінації «конус-призма»

Конус називається *вписаним у призму,* якщо його основу вписано в одну основу призми, а вершина лежить у другій основі призми, рис.5.

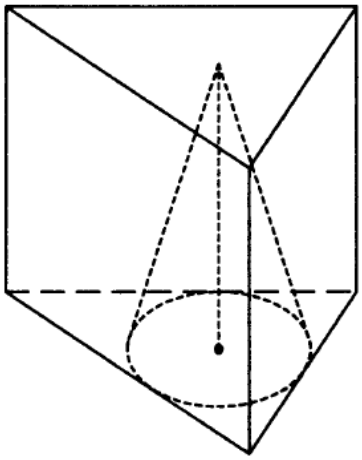


Рис. 5

Призма називається *вписаною в конус,* якщо одна основа її лежить в основі конуса, а друга вписана в переріз конуса площиною, що проходить через цю основу призми паралельно основі конуса, рис.6.

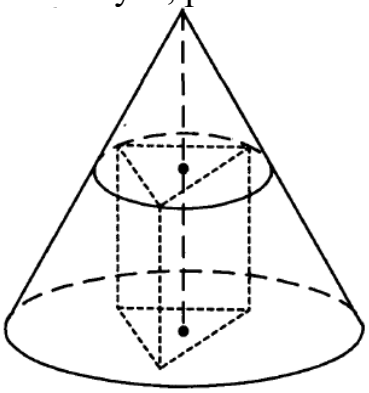


Рис. 6

д.) Комбінації «піраміда - циліндр»

Пірамідою, вписаною в циліндр, називається така піраміда, основа якої вписана в одну основу циліндра, а вершина лежить в іншій основі циліндра.

Циліндром, вписаним у піраміду, називається такий циліндр, одна основа якого лежить в основі піраміди, а друга вписана в переріз піраміди площиною, що проходить через цю основу циліндра паралельно основі піраміди. [4]

Отже, учні мають добре уявляти просторово комбінації геометричних тіл, і відповідно вміти їх зображати, розуміти як розв'язати задачу.

Останній урок слід присвятити тематичній контрольній роботі. Один із можливих її варіантів може бути таким.

1.Знайти радіус кулі, описаної навколо куба зі стороною a.

2. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетами 9 см і12 см. Усі бічні ребра піраміди рівні між собою і утворюють з площиною основи кут 60^0. Знайти площу основи конуса, описаного навколо піраміди.

3. Основа прямої призми – прямокутник зі стороною a і кутом α, який утворює ця сторона з діагоналлю прямокутника. Діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Визначити об'єм циліндра, описаного навколо призми.

Розв'язуючи задачі на комбінації тіл, учні вчаться поводитися в нестандартних ситуаціях, що сприяє розвитку творчого мислення.

Висновки. Використання даних методичних вказівок при вивченні теми «Комбінації геометричних тіл» значно покращує рівень засвоєння та розуміння учнями матеріалу, розвиває просторову уяву та допомагає вчителям при вивченні даної теми. Описані основні поняття та властивості геометричних фігур, наведені основні рисунки комбінацій геометричних тіл.

Література:

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова В.Г. Геометрія: Підруч. для 10-11 кл. з погл. вивч. мат. в заг.-осв. закладах / Г. П. Бевз. – К.: Освіта, 2003.
2. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2001.
3. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии / В. Б. Полонский. – К.: Магистр-S, 1996. – 256 с.
4. Фискович Т. Т. Геометрия без репетитора / Т. Т. Фискович. – УНЦ ДО МГУ, 1998. - 152 с.
5. Чехова А.М. Геометрія в таблицях, 7-11 кл.: Навч. посіб / А. М. Чехова. – Х.: Науково - методич. центр, 2003.

Салямон Катерина Антонівна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»,
спеціальність «Математика»

СТЕРЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ПРАКТИЧНОГО ЗМІСТУ

Постановка проблеми. У Державному стандарті базової та повної середньої освіти зазначено, що складовою основної мети освітньої галузі «Математика» є опанування учнями системи математичних понять, навичок і вмінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти [2]. Саме тому під час вивчення математики, зокрема геометрії, особливу увагу слід звертати на формування в учнів таких якостей як творче мислення, просторова уява, вміння застосовувати та реалізовувати набуті знання та навички на практиці. Важливу роль у набутті цих якостей відіграє вивчення курсу стереометрії, адже під час розв'язування стереометричних задач в учнів формуються навички мислення високого рівня (аналіз, синтез та оцінювання).

Аналіз попередніх досліджень. Проблема реалізації прикладної спрямованості завжди була і є в полі зору методистів, науковців, авторів підручників. Теоретичне обґрунтування її існування проведено в роботах Н. Артеменко, Г. Бевза, О. Астряба, Ю. Колягіна, З. Слєпкань, Б. Гнеденка, В. Пікана, І. Тесленка, В. Фірсова та інших вчених. Зокрема, були сформульовані загальні принципи, які забезпечують шкільному курсу математики прикладну спрямованість (В.Фірсов), розроблені шляхи навчання учнів застосовувати математичні знання на практиці (О. Астряб, О. Дубинчук, З. Слєпкань, Г. Бевз,), визначені умови реалізації прикладної спрямованості математики в школі (Ю. Колягін, В. Пікан). Розроблено комплекс стереометричних задач практичного змісту (С. Дмитришина, Н. Артеменко,) [1], [3].

Мета статті: аналіз поняття прикладна задача та класифікація прикладних задач, визначення умов добору задач прикладного змісту, підбір та розгляд задач практичного змісту на уроках стереометрії.

Виклад основного матеріалу. Відомо, що стереометрію як науку поділяють на теоретичну («чисту») та прикладну (практичну). Результати досліджень «чистої» складової стереометрії часто давали поштовх до розвитку її прикладної частини (і навпаки) [5].

Стереометричні задачі практичного змісту є одним із основних засобів реалізації прикладної спрямованості курсу стереометрії у школі. Під прикладною задачею розуміють таку задачу, яка виникає за межами математики, але розв'язування якої вимагає застосування математичного апарату. Розрізняють наступні види прикладних задач:

- прикладна задача практичного характеру – задача, розв'язування якої передбачає використання реального предмета (його виготовленої моделі), потребує проведення геометричного експерименту, відповідних вимірювальних робіт тощо;
- прикладна задача теоретичного характеру – задача, розв'язування якої не пов'язане з роботою із реальним предметом або його виготовленою моделлю;

якісна прикладна задача – це задача із вимогою пояснити, дослідити або обґрунтувати певний факт або положення дійсності із можливим, але необов'язковим виконанням обчислень, побудов тощо.

Для ефективної організації навчальної діяльності учнів із розв'язування прикладних задач для вчителя визначено методичні прийоми та орієнтовні дії. Перед розв'язуванням прикладних задач доцільно:

1) з'ясувати із учнями, що таке прикладна задача, визначити етапи її розв'язування (на прикладі текстової задачі);

2) познайомити учнів із таблицею застарілих мір;

3) започаткувати ведення словника для полегшення перекладу умови прикладної задачі на мову математики (наприклад, місткість – об'єм);

4) з'ясувати доцільність додержання правил наближених обчислень під час розв'язування прикладних задач, нагадати ці правила учням [4].

Під час добору системи прикладних задач слід враховувати умови:

1) кожна прикладна задача системи має задовольняти вимоги, поставлені до прикладної задачі (відповідати педагогічним вимогам довільної задачі; демонструвати застосування методу математичного моделювання; мати реальний практичний зміст; по можливості відображувати передові досягнення суспільства або містити корисні історичні, географічні, фізичні та ін. відомості; умова не повинна містити незрозумілу термінологію тощо);

2) добірка задач системи має відповідати змісту шкільного курсу стереометрії;

3) прикладні задачі для кожної теми повинні бути розташовані за ступенем зростання складності;

4) відбір прикладних задач системи необхідно здійснювати диференційовано для різних типологічних груп учнів;

Ще один дієвий засіб прикладної спрямованості – це виявити, показати учням та ефективно використати прикладний потенціал теоретичної складової. Зокрема, учні мають знати, що ті знання, вміння та навички, які вони здобувають на уроках стереометрії, їм будуть потрібні для розв'язування реальних задач, що свідчить про активне залучення мотиваційного фактору.

Слід відмітити, що важливу роль у формуванні в учнів вміння застосовувати набуті знання на практиці відіграє організація роботи зі складання прикладних задач: дослідження джерел сюжетів та кількісної інформації для створення прикладних задач; обробка, систематизація та зберігання числових даних; з'ясування із учнями вимог до прикладних задач.

Зауважимо, що систематичне створення учнями прикладних задач, дидактичних матеріалів на основі прикладної інформації та їх застосування у навчальному процесі допомагає здійснювати міжпредметні зв'язки (з біологією, історією та іншими науками), отже, сприяє прикладній спрямованості курсу.

Розглянемо добірку стереометричних задач практичного змісту, які доцільно використати під час вивчення теми «об'єми просторових тіл»:

Задача 1. Із прямокутного листа металу довжиною a (лінійних одиниць) і шириною b (лінійних одиниць) потрібно виготовити ванну для електролізу у формі відкритого прямокутного паралелепіпеда максимального об'єму.

Розв'язання:

Найпростішим із технічних варіантів по виготовленню виробу є такий: варіанти із чотирьох кутів паралелепіпеда по квадрату із стороною x. Загнути боки і заварити шви. Інші варіанти можуть відрізнятися технікою, але розміри паралелепіпеда не змінюються. Отже, маємо:

$V = (a-2x)(b-2x)x$, $V(x) = (a-2x)(b-2x)x$,

$V(x) = (ab-2ax-2bx+4x^2)x = abx-2ax^2-2bx^2+4x^3$,

$V(x) = 4x^3-2ax^2-2bx^2+abx$.

Аналогічно до попередньої задачі знаходимо похідну:

$V'(x) = (4x^3-2ax^2-2bx^2+abx)' = 12x^2-4ax-4bx+ab$.

При $V'(x)$ знайдемо максимальний об'єм V відносно x, тобто,

$12x^2-4ax-4bx+ab=0$, $12x^2-4(a+b)x+ab=0$,

$16(a+b)^2-48 = 16a^2+32ab+16b^2-48ab = 16a^2-16ab+16b^2 = 16(a^2-ab+b^2)$,

$$x = \frac{4(a+b)\pm 4\sqrt{a^2-ab+b^2}}{24} = \frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Відповідь. $\dfrac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$.

Задача 2. Із жерсті вирізали сектор радіусом 20 см, центральним кутом 250° і згорнули в конус. Знайдіть об'єм конуса.

Розв'язання:

За умовою задачі сектор згорнули в конус. Отже, радіус сектора дорівнює твірній – $0,2$ м.

Знайдемо довжину основи конуса за формулою довжини дуги сектора: $l = \dfrac{\pi Rn}{180^\circ}$, де $n = 250^\circ$, $l = \dfrac{0,2\pi\cdot 250^\circ}{180^\circ} = 0,27\pi$ (м).

Отже, радіус основи конуса: $R = \dfrac{l}{2\pi}$, $R = \dfrac{0,27\pi}{2\pi} = 0,135$ (м).

Розглянемо прямокутний ΔSOA, SO – висота, SA – твірна, OA – радіус.

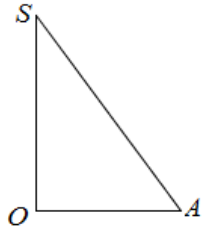


Рис.1

За теоремою Піфагора $SO^2 = SA^2-OA^2$, $SO^2 = 0,2^2-0,135^2$, $SO = 0,14$.

Отже, висота конуса $0,14$ м.

Об’єм конуса обчислимо за формулою $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$,

$V = \frac{3{,}14 \cdot 25 \cdot 0{,}14}{3} \approx 0{,}0028\,(м^3) \approx 2{,}8\,(дм^3)$.

Відповідь. $2{,}8\,(дм^3)$.

Задача 3. Посудина має форму й розміри (у метрах), показані на рисунку. Знайдіть місткість посудини.

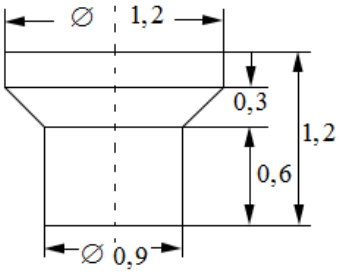


Рис.2

Розв’язання:

Дана ємкість складається з двох циліндрів і зрізаного конуса. Знайдемо об’єм циліндра з радіусом основи $0{,}6$ м і висотою $0{,}3$ м:

$V = \pi R^2 H$, $V = \pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}108\pi\,(м^3)$.

Знайдемо об’єм зрізаного конуса з радіусами основ $0{,}6$ м і $0{,}45$ м та висотою $0{,}3$ м:

$V = \frac{\pi H (R^2 + r^2 + Rr)}{3}$,

$V = \frac{\pi \cdot 0{,}3 (0{,}36 + 0{,}2025 + 0{,}27)}{3} = 0{,}08325\pi\ (м^3)$.

Знайдемо об’єм циліндра з радіусом основи $0{,}45$ м і висотою $0{,}6$ м:

$V = 0{,}45^2 \cdot 0{,}6\pi = 0{,}1215\pi\ (м^3)$.

Отже, дана посудина вміщує: $V = (0{,}108 + 0{,}1215 + 0{,}08325) \cdot 3{,}14 = 0{,}98 \approx 1\ (м^3)$.

Відповідь. $1\ (м^3)$.

Задача 4. Картоплю насипали в купу конічної форми. Довжина кола основи купи 12 м, твірна – 3 м. Скільки тонн картоплі знаходиться в купі? Маса $1\ м^3$ картоплі 800 кг.

Розв’язання:

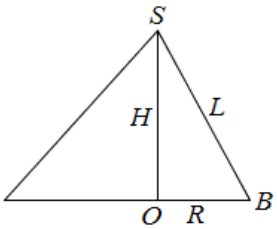


Рис. 3

$C = 12$ м; $L = 3$ м; $\rho = 800$ $кг/м^3$,

$m = V_k \cdot \rho$, $m = \frac{1}{3}\pi R^2 H \cdot \rho$. $C = 2\pi R$, $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{12}{2\pi} = \frac{6}{3{,}14} \approx 1{,}9$ (м).

З ΔSOB: $H = \sqrt{3^2 - 1{,}9^2} = \sqrt{9 - 3{,}61} = \sqrt{5{,}39} \approx 2{,}32$ (м),

$m = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}9^2 \cdot 2{,}32 \cdot 800 \approx 7012{,}8\,[кг] \approx 7\,[т]$.

Відповідь. $\approx 7\,[т]$.

Задача 5. Скільки води вміщує яма, яку вирили у вигляді зрізаної піраміди, якщо глибина ями $1{,}5$ м, сторона нижньої квадратної основи $0{,}8$ м, а верхньої $1{,}2$ м?

Розв'язання:

Нехай дано зрізану піраміду з висотою $H = 1{,}5$ м і сторонами основ $a_1 = 0{,}8$ м і $a_2 = 1{,}2$ м.

Знайдемо площі основ піраміди:

$S_1 = a_1^2$, $S_1 = 0{,}8^2 = 0{,}64$ $[м^2]$. $S_2 = a_2^2$, $S_2 = 1{,}2^2 = 1{,}44$ $[м^2]$.

Обчислимо об'єм за формулою:

$V = \frac{H\,[S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\,]}{3}$. $V = \frac{1{,}5\,[0{,}64 + 1{,}44 + \sqrt{0{,}64 \cdot 1{,}44}\,]}{3} = 1{,}52$ $[м^3]$.

Відповідь. $1{,}52$ $[м^3]$.

Висновки. В даній роботі:

1. проаналізовано поняття прикладна задача та класифікація прикладних задач;
2. визначено умови добору задач прикладного змісту;
3. підібрано та розглянуто задачі практичного змісту на уроках стереометрії.

Література:

1. Артеменко Н.М. Задачі прикладного змісту. Стереометрія. 11 клас / Н.М. Артеменко // Математика в школах України. – 2008. – №5. – С. 6-12.
2. Державний стандарт базової і повної середньої освіти // Математика в школі. – 2004. – №2. – С. 2-5.
3. Дмитришина С. Об'єми і поверхні тіл обертання. Розв'язування прикладних задач / С. Дмитришина // Математика. – 2009. – № 6. – С. 1-8.
4. Прус А.В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії / Алла Володимирівна Прус // Дис. канд. пед. наук, 13.00.02, Київ, 2007. – 230с.
5. Прус А.В. Про засоби здійснення прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії / А. В. Прус // Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2005. – Вип. 20. – С. 100-103.

Слободян Вікторія Петрівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

Постановка проблеми. Прикладну спрямованість розглядають як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів (М.Я.Ігнатенко), виокремлюють як одну із функцій навчання (А.С.Адигозалов), підкреслюють її важливість для формування мотивації навчання (О.Ф.Трепліна). Актуальність прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії необхідна для підвищення результативності навчання та забезпечення інтелектуального розвитку учнів засобами геометрії. Якщо систематично реалізовувати прикладну спрямованість шкільного курсу стереометрії при вивченні теоретичного матеріалу і розв'язуванні задач, то це посилить мотивацію й ефективність навчання.

Мета даної статті: виокремити і обґрунтувати ефективне застосування прикладних задач у процесі вивчення геометричних тіл у старшій школі.

Виклад основного матеріалу. Будь-який методичний прийом може бути ефективним, якщо він реалізується в умовах високого рівня пізнавальної активності учнів. Маємо на увазі певний інтерес учнів до змісту навчання. В цьому відношенні на увагу заслуговують прикладні задачі.

Прикладними називаємо задачі, які виникають за межами математики, але розв'язування яких вимагає застосування математичного апарату. Прикладною задачею практичного характеру називатимемо задачу, розв'язування якої передбачає використання реального предмета (його виготовленої моделі), потребує проведення геометричного експерименту, відповідних вимірювальних робіт тощо. Прикладною задачею теоретичного характеру назвемо задачу, якщо її розв'язування не пов'язане з роботою із реальним предметом або його виготовленою моделлю. Також, залежно від вимоги, поряд із прикладними задачами на обчислення, побудову виділено якісні прикладні задачі. Це задачі із вимогою пояснити, дослідити або обґрунтувати певний факт або положення дійсності із можливим, але необов'язковим виконанням обчислень, побудов тощо. Цінність таких задач, неускладнених обчисленнями, у тому, що вони дозволяють зосередитись учням на ясному та точному з'ясуванні геометричної суті аксіом, постулатів, теорем, понять та уявлень; формують в учнів геометричне мислення та інтуїцію, розуміння процесу математичного моделювання.[3]

Розглянемо добірку прикладних задач на тему «Об'єми геометричних тіл».

Задача 1. Під час торгівлі кавунами на вулиці були відсутні ваги. Однак було знайдено такий вихід: кавун діаметром 30 см прирівнювали за вартістю до трьох кавунів діаметром 10 см. Що б ви взяли? Чи мали рацію продавці?[2]

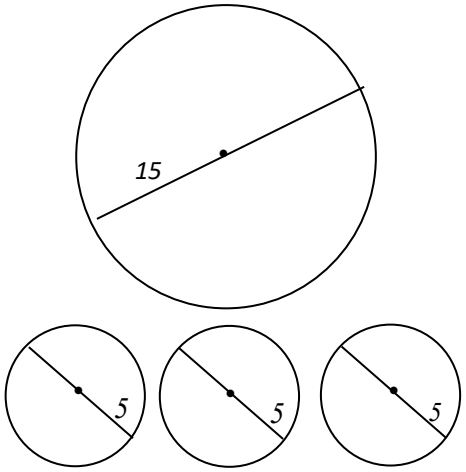


Рис. 1

Розв'язання:

Об'єм першого кавуна:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3 = \frac{4}{3} \cdot 3375\,\pi = 4500\,\pi;$$

Об'єм другого кавуна:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{4}{3} \cdot 125\,\pi = \frac{500}{3}\,\pi;$$

Враховуючи, що кавун діаметром 3 дм прирівнювали до трьох кавунів діаметром 1 дм, отримаємо:

$$3V_2 = \frac{500}{3}\,\pi \cdot 3 = 500\,\pi;$$

Очевидно, що $V_1 > 3V_2$. Тому краще купити один кавун діаметром 3 дм, ніж три діаметром 1дм.

Коментар: об'єм великого кавуна в 27 разів більший за боєм малого. Рівновеликим було б не 3 малих, а 27 малих.

Очевидна значна вигода продавців пропонувати 3 малих, де потрібно 27.

Задача 2. Зовнішній і внутрішній діаметри кільця колодязя відповідно дорівнюють 1,3 м і 1,1 м, а висота – 0,9 м. Скільки кубометрів бетону необхідно для виготовлення 8 таких кілець?[4]

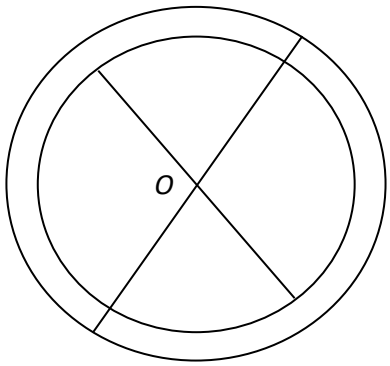


Рис. 2

Розв'язання:

Нехай зовнішній і внутрішній радіуси колодязя відповідно дорівнюють:

$$R_1 = 0{,}65; \qquad R_2 = 0{,}55;$$

Знайдемо об'єм кільця колодязя:

$$V_1 - V_2 = \pi R_1^2 H - \pi R_2^2 H = \pi H(R_1^2 - R_2^2);$$

Обчислимо об'єм кільця колодязя:

$$V_1 - V_2 = \pi H(0{,}65^2 - 0{,}55^2) = \pi \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}12 = 1{,}08\,\pi;$$

Обчислимо скільки кубометрів бетону необхідно для виготовлення 8 таких кілець:

$$1{,}08\,\pi \cdot 8 = 8{,}64\,\pi\ (\text{м}^3)$$

Коментар: майстрам для виготовлення 8 відповідних кілець колодязя необхідно $8{,}64\,\pi$ м^3 бетону.

Задача 3. З краплини мильного розчину діаметром 6 мм хлопчик видув пузир діаметром 30 мм. Знайдіть товщину стінки пузиря.[1]

Розв'язання:

Знайдемо масу краплини мильного розчину діаметром 6 мм:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 27;$$

Знайдемо зовнішній об’єм видутої кулі:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 150^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3375000;$$

Знайдемо внутрішній об’єм видутої кулі:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3,$$

Тоді отримаємо масу видутої кулі:

$$m = \rho\,(V_1 - V_2) = \rho\left(\frac{4}{3}\pi \cdot 3375000 - \frac{4}{3}\pi \cdot r^3\right) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\,(3375000 - r^3).$$

Оскільки маса кулі не змінилася, то маємо:

$$\rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\,(3375000 - r^2);$$

$$27 = 3375000 - r^3;$$

$$r^3 = 3374974; \qquad r = 149,(9).$$

Отже, товщина плівки пузиря:

$$150 - 149,(9) = 0,0001.$$

Коментар: товщина пузиря, який видув хлопчик з краплини мильного розчину діаметром 6 мм до пузиря діаметром 30 мм становить 0,0001 мм.

Варто підкреслити, що при обчисленнях ми також враховували і масу видутої кулі для точності обрахунків.

Задача 4. 122-міліметрова бомба під час вибуху дає вирву діаметром 4 м і глибиною 1,5 м. Яку кількість землі (за масою) видає ця бомба, якщо 1 $м^3$ землі має масу 1650 кг?[4]

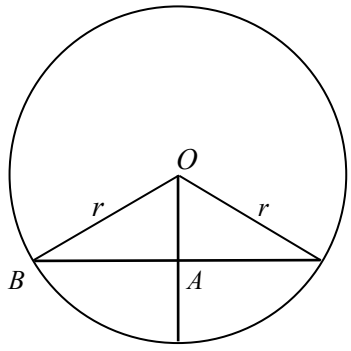


Рис. 3

Розв’язання:

Вирва, яку дає 122-міліметрова бомба під час вибуху, має форму сегмента, об’єм якої обчислимо за формулою:

$$V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right);$$

За умовою глибина сегментна 1,5 м. Нехай радіус кулі r, тоді $OA = r - 1,5$.

Розглянемо ΔAOB - прямокутний:

$$OB^2 = BA^2 + AO^2;$$

$$r^2 = 4 + (r - 1,5)^2;$$

$$3r = 6,25; \quad r = \frac{6,25}{3};$$

Знайдемо об’єм сегменту:

$$V = \pi \cdot 2,25\left(\frac{6,25}{3} - \frac{1,5}{3}\right) = 2,25\,\pi \cdot \frac{4,75}{3} = 3,5625\,\pi;$$

$$3{,}5625\,\pi \cdot 1650 = 5878{,}125\,\pi \approx 18467(\text{кг}).$$

Коментар: під час вибух 122-міліметрова бомба видає **18467 кг** землі.

Задача 5. На родовищі з видобутку алмазів було знайдено камінь такої форми: нижня і верхня грані цього каменю мають форму правильних трикутників і паралельні між собою. Визначити, якого об'єму може бути цілий відшліфований діамант з цього каменю, щоб відходи були найменшими, якщо висота діаманту дорівнює висоті каменю, а форма його - це спільна частина пірамід із спільною висотою; вершина кожної піраміди лежить у центрі основи другої; бічні ребра однієї перетинають бічні ребра другої;бічне ребро нижньої піраміди утворює з висотою кут α, а бічне ребро верхньої піраміди утворює з висотою кут β .

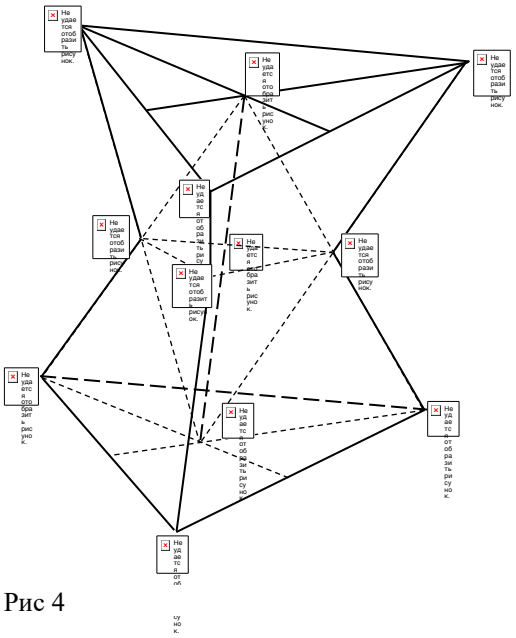


Рис 4

Розв'язання:

Геометричне тіло складається з двох правильних пірамід, висоти яких лежать на одній прямій.

1) Оскільки основи обох пірамід – правильні подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, то трикутник $A_2B_2C_2$, який утворився в перерізі цих пірамід теж правильний, а значить ці трикутники попарно подібні. Висота $H = O_1O$ – спільна.

2) Оскільки ребра даних пірамід однаково нахилені до площин основ цих пірамід під кутами відповідно, α і β то точки O, O_1, а значить і O_2 є центрами описаних навколо трикутників ABC, $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ кіл , де OB, OB_1 та OB_2 - радіуси цих кіл.

3) Трикутники O_1OB і B_1O_1O прямокутні. З них маємо наступні співвідношення:

$$\frac{OB}{H} = ctg\,\alpha; \quad OB = H \cdot ctg\,\alpha; \quad O_1B_1 = H \cdot ctg\,\beta.$$

Тоді сторони трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (оскільки трикутники правильні) відповідно дорівнюють:

$$AB = \sqrt{3} \cdot H \cdot ctg\,\alpha \quad i \quad A_1B_1 = \sqrt{3} \cdot H \cdot ctg\,\beta.$$

$$S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} H^2 ctg^2\alpha \quad i \quad S_1 = \frac{A_1B_1{}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} H^2 ctg^2\beta$$

4) Піраміди O_1ABC і $O_1A_2B_2C_2$ подібні, а також подібні піраміди $OA_1B_1C_1$ і $OA_2B_2C_2$.

Об'єм тіла, утвореного в перерізі, є сумою об'ємів пірамід $O_1A_2B_2C_2$ і $OA_2B_2C_2$, тобто

$$V = \frac{1}{3} S_2 (OO_2 + O_1O_2),$$

де S_2 площа перерізу.

Враховуючи подібність згаданих прямокутних трикутників, маємо:

$AB:A_2B_2 = H:O_1O_2$, $A_1B_1 : A_2B_2 = H:(H - O_1O_2)$. Тоді, виразивши з цих рівностей A_2B_2 , отримаємо

$$O_1O_2 = \frac{AB \cdot H}{A_1B_1 + AB} = \frac{H \cdot ctg\,\alpha}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta}.$$

Враховуючи подібність, маємо: $AB:A_2B_2= H:O_1O2$, звідки

$$A_2B_2 = \frac{H\sqrt{3}}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta} ctg^2\alpha.$$

Тоді площа перерізу

$$S_2 = \left(\frac{H\sqrt{3}}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta} ctg^2\alpha\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4},$$

а об’єм тіла

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{H\sqrt{3}}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta} ctg^2\alpha\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{\sqrt{3}}{4} H^3 \cdot \frac{ctg^4\alpha}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta}.$$

Коментар: таким чином ми отримали об’єм діаманта, який має форму геометричного тіла, що утворене перерізом двох правильних трикутних пірамід.

Висновки. Наведені приклади прикладних задач, які ми вважаємо варто використати у процесі вивчені геометричних тіл в курсі геометрії 11 класу, дозволяють продемонструвати учням використання засвоєних знань та умінь.

Переконливим на нашу думку, з точки зору мотивації навчання геометрії, є такий наведений в літературі цікавий приклад:

Одного разу до відомого математика А.М., Колмогорова звернулися будівельники однієї з гідроелектростанцій за порадою. Вони повідомили, що швидка течія не дає змоги перекрити русло річки звичайним способом. Тому будівельники хотіли знайти форму кам'яних брил, якими можна було б зупинити течію річки. Учені зробили розрахунки і встановили, що річку потрібно перекрити бетонними тетраедрами і їх повинно бути сім з половиною тисяч. Будівельники засумнівалися в правильності розрахунків математиків і, щоб уникнути помилки, спочатку подвоїли кількість пірамід, а потім добавили ще трохи зайвих і приготували аж тридцять п'ять тисяч пірамід. Кинули в річку сім з половиною тисяч, і цього було досить, щоб перекрити течію річки. А решта пірамід залишилася на березі, як пам'ятник тим, хто не вірить в математику.

Література:

1. Бевз Г.П. Геометрія: 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: академ. рівень, профіл. Рівень/ / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. – К. : Генеза, 2011. – 366 с.
2. Кравчук Г.Т. «Блочний метод на уроках геометрії» Вчитель-методист математики// Г.Т. Кравчук м. Хмельницький. – 2010. – 41 ст.
3. Прус А. В. Прикладна спрямованість шкільного курсу стереометрії.: Автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / А. В. Прус. НПУ ім. М.П.Драгоманова. – К. – 2007.
4. Сухарева Л. С. Завдання для усної роботи, математичні диктанти та тести. Геометрія. 10-11 клас / Л. С. Сухарева. – Х.: Основа, 2008. – 126с.

Сторожук Людмила Валеріївна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліст,
спеціальність «Математика»

МІСЦЕ І РОЛЬ АНАЛОГІЙ В ПІЗНАННІ ТА НАВЧАННІ

Постановка проблеми. Аналогія – це один із найбільш розповсюджених методів пізнання, застосування якого є досить результативним у наукових дослідженнях. Використання в навчанні такого методу наукового пізнання, як аналогія, допускає залучення учнів до процесу здобування знань, і як наслідок цього – більш доступне, гнучке та усвідомлене засвоєння навчального матеріалу, бо "часто забезпечує розумове перенесення визначеної системи знань і вмінь від відомого об'єкта до невідомого" Філософи, починаючи з часів античності, ґрунтовно обмірковували питання про сутність та роль аналогії у пізнанні явищ природи, в мисленні і, особливо, в обґрунтуванні філософського знання. Аналогія була домінуючою формою умовиводу, яка полегшувала пізнання, спостереження та експеримент. Більша частина філософських ідей грецьких мислителів базувалась на умовиводах саме за аналогією.

Мета даної статті: розкрити роль і місце аналогії у процесі формування знань та умінь з математики.

Виклад основного матеріалу. Видатні природодослідники (Леонардо да Вінчі, Г. Галілей, Ч. Дарвін, А. Ейнштейн, І. Кеплер, М. В. Ломоносов, Д. К. Максвелл, Д. І. Менделєєв та інші) навели наочні приклади міркувань за аналогією, обґрунтування своїх наукових теорій та відкриттів з її допомогою.

Наприклад, у біології Чарльз Дарвін ввів поняття "природній відбір" виходячи з штучного відбору, яке віками практикувалося людиною для покращення породи домашніх тварин. Галілей відкрив параболічну траєкторію падаючого тіла, знайшов подібність між рухом Місяця навколо Землі і Венери навколо Сонця; у фазах Місяця і Венери він також побачив аналогію їх форм. Планетарна модель атома була навіяна Резерфорду мікроскопічною моделлю Сонячної системи: подібно до того, як планети обертаються навколо

центрального світила, так і електрони можуть обертатися навколо масивного ядра. Це своє припущення Резерфорд потім підтвердив дослідами по відображенню альфа-частин від речовини.

Архімед, не знаючи інтегрального числення знайшов правило обчислення об'єму кулі, а потім і площі поверхні кулі, яке показує блискуче застосування методу аналогії. Про це збереглися його записи: "… виходячи з того, що площа кожного круга дорівнює площі трикутника (основа трикутника дорівнює його периметру, а висота – радіусу круга), я подумав, що таким же чином об'єм кожної кулі буде дорівнювати об'єму конуса, основа якого дорівнює поверхні кулі, а висота дорівнює радіусу" .

Давньогрецький учений міркуючи за аналогією встановив, що об'єм кулі дорівнює об'єму чотирьох конусів з основами, рівними великому кругу кулі πR^2 . Потім на основі цього результату дійшов висновку, що поверхня кулі дорівнює сумі "чотирьох великих кругів кулі" .

Наука епохи Відродження характеризується розвитком абстрактного мислення і широким використанням методу аналогії. Природні явища вивчалися шляхом порівняння та аналогії, і в той же час висновки загального характеру часто ґрунтувалися на знанні аналогії між законами, які лежать в різних сферах природних явищ.

На більш високих етапах розвитку науки аналогія також продовжує відігравати важливу роль. Галілео Галілей поклав початок ери математичного природознавства, виклав не лише математичні методи дослідження законів природи та значення математики для пізнання природи, але вперше в історії науки змістовно застосував метод подібності і моделювання, в основі яких є аналогія. Він виступаючи в захист системи Коперніка, використав аналогію між системою Земля – Місяць і системою Юпітер – його супутники. Аналогія відіграла значну роль у багатьох відкриттях: винайденні закону всесвітнього тяжіння, законів Кеплера тощо. Значення її в науковому пізнанні високо оцінювалось вченими. Про метод аналогії із захопленням відгукувався відомий природодослідник Кеплер: „Я особливо люблю ці аналогії, моїх найвірніших учителів, співучасників таємниць природи; переважно ж в геометрії повинні їм наслідувати, бо вони стійкими своїми термінами охоплюють незліченні випадки в своїх межах і будь-який зміст і ясно відкривають перед нашими очима суть будь-якої речі" . Кеплер підкреслює творчий характер висновків за аналогією, вважаючи, що цей умовивід є необхідною умовою, яка допомагає відкрити „перед нашими очима суть будь-якої речі".

У дослідженні аналогії, як методу наукового пізнання, видатна заслуга належить Ньютону, Максвеллу, Декарту та іншим природодослідникам. Наприклад, Ньютон сформулював свій метод дослідження у вигляді знаменитих чотирьох „правил філософствування", одне з яких стосується аналогії . У роботах Д. К. Максвелла аналогія трактується як важливий метод фізики. На декількох блискавичних прикладах він показав, що „…визнання формальної аналогії між двома системами ідей приводить до більш глибокого пізнання обох, ніж пізнання, яке можна було б одержали, вивчаючи кожну систему окремо…".

Широко користувалися аналогіями вчені-математики такі, як Стефан Банах, Евклід, Ейлер, Декарт, Лаплас, Ньютон, Піфагор та ін. Стефан Банах писав: „Математик – це той, хто вміє знаходити аналогії між твердженнями; кращий математик – той, хто встановлює аналогії доведення; більш сильний математик той, хто зауважує аналогії теорії; але можна уявити і такого, хто між аналогіями бачить аналогії". Д. Пойя ілюструє роль аналогії на прикладах взятих з творчості, праць і листів Леонарда Ейлера. Він пише: "Ейлер не повертається до дослідження основи свого припущення, свого переходу від кінцевого до безконечного: він лише вивчає його наслідки. Він розглядає підтвердження довільного такого наслідку як арґумент в користь свого припущення... Він вивчає також наслідки, тісно пов'язаних аналогічних припущень і розглядає підтвердження такого наслідку, як арґумент в користь свого припущення".

Аналогію застосовують або як евристичний метод, який наштовхує на здогадки, гіпотези, або для унаочнення явищ, або як метод моделювання, в основі якого лежать умовиводи за аналогією. Аналогія пов'язана з оперуванням так званими ідеальними об'єктами, з „мисленими експериментами" або з побудовою матеріальних моделей. Вона є невід'ємним компонентом процесу моделювання і використовується, як засіб обґрунтування наукової теорії.

Аналогія як філософська категорія знаходить своє відображення у працях відомих вчених-логіків В. Асмуса , Ф. Бекона , Е. Маха , Д. Мілля та інших. Е. Мах під аналогією розумів „абстрактну тотожність", тобто схожість, яка виявляється при порівнянні абстрактних співвідношень між ознаками, коли самі ці ознаки не сприймаються суб'єктом, який оперує поняттям аналогії. Таке означення справедливе лише в окремому випадку, про який Мах пише: „в основі довільного застосування математики в галузі фізики лежить бачення аналогії між фактами природи, з однієї сторони, і операціями над числами – з другої" .

Відомі вчені В. О. Штофф, А. І. Уйомов і Г. Клаус звертають увагу на зв'язок наукової аналогії з методом моделювання. В. О. Штофф підкреслює, що про аналогію слід говорити лише у тому випадку, коли вона є доведеною. Він відзначає: „Аналогія доречна у тих випадках, коли вона є виясненою, тобто коли умови подібності і відмінності чітко сформульовані і точно визначені. Коли це не вдається здійснити, аналогія стає підозрілою. І хоча підозрілість аналогії не зменшує до неї інтересу і деякої цінності, однак у науковому пізнанні особливо корисні вияснені аналогії" .

Аналізуючи роль аналогії в моделюванні, В. О. Штофф дає характеристику існуванню традиційних і модельних аналогій . На його думку різниця між ними полягає у тому, що в модельній аналогії співставляються не просто ізольовані ознаки й властивості моделі та прототипу, а системи, які схожі не лише на рівні елементів, а й на рівні відношень і функцій, тоді як в традиційній аналогії обмежуються співставленням окремих властивостей і характеристик.

Філософами аналогія нерідко розглядається у зв'язку з індукцією, дедукцією, гіпотезою. Про що К. Б. Батороєв пише: „аналогії не так поталанило, як іншим категоріям теорії пізнання і формам мислення. Ніяк не порівняти ту увагу, яка була приділена, і приділяється надалі, систематичній розробці

дедуктивного методу з кількістю публікацій, присвячених спеціальному аналізу аналогії як форми і методу мислення, її логічній структурі....Філософи часто висловлювалися з даного питання дотично, у поєднанні із обговоренням природи гіпотези, індукції або структури наукової теорії" . Але далі, поряд з аналізом логічної будови висновків за аналогією автор наголошує: "Доцільно вивчати евристичну роль методу аналогії в практиці наукового дослідження, в історії науки і техніки. В реальному процесі розвитку наукового мислення умовиводи за аналогією утворюють „міст" між індуктивним і дедуктивним способами мислення" .

Висновки. Аналогія знаходить широке застосування в сучасних умовах розвитку науки. Нею широко користуються у теорії моделювання, в кібернетиці, біоніці, техніці тощо. Сьогодні поняття "системність", "інформація", "пам'ять", "управління", "самоорганізація" стали широко використовуватися в різних галузях людської діяльності. Ці терміни характеризують у чомусь подібні явища, які спостерігаються як у техніці, природі, живому організмі, так і в людському суспільстві. Логічні основи цих понять тісно пов'язані з умовиводами за аналогією. Можна без перебільшення сказати, що аналогія "обслуговує" буквально всі науки і всі професії, навіть обумовлюючи дії й вчинки людини.

Література:

1. Корнейчук І.В. Психологічні засади формування вмінь використовувати аналогію у навчанні математики / І.В.Корнейчук // Дидактика математики: проблеми і дослідження : міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк : Вид. ДонНУ, 2007. – Вип.28. – С. 190–195.
2. Бароев К. Б. Кибернетика и метод аналогий / К. Б. Бароев. – М. : Высшая школа, 1974. – 104 с.

Хомчак Наталія Володимирівна
студентка 1 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ СТЮАРТА ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

Постановка проблеми. Теорема Стюарта є одним з класичних тверджень геометрії трикутника.Найбільшвідомиминаслідками теореми Стюарта є формулидля обчислення довжин бісектрис і медіан трикутника за його сторонами [1].

Однак формулювання теореми Стюарта є дещо «складним»,і можливо тому це твердження майже не висвітлюється в шкільномукурсігеометрії. Навіть в діючомупідручнику з геометрії для класівіз поглибленимвивченням математики [2] теорему Стюарта наведено лише в якостізадачі.

За результатамипопередніх дослідженьможна стверджувати, що практичне значення теореми Стюарта та її наслідків залишаються недооціненими внавчальній літературі з геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів.

В даній статті наведено можливіпідходи до впровадження теореми Стюарта при вивченні відповідних тем шкільного курсу геометрії. Крім низки «ілюструючих» задач (на безпосереднє застосування зазначеного твердження) у статті також наведено і деякі узагальнення теореми Стюарта та їх застосування до обчислення.

Мета статті: аналіз деяких аспектів вивчення теореми Стюарта та її наслідків. Також розгляд узагальнення теореми Стюарта та її застосування до розв'язування метричних задач планіметрії.

Виклад основного матеріалу. *Теорема Стюарта.* Добуток квадрата відстані вершини трикутника до точки, що належить протилежнійстороні, на довжину цієї сторони дорівнюєсумідобутківквадратівіншихсторін на несуміжні з ними відрізки першої сторони без добутку цих відрізків на довжину основи, тобто

$$AD^2 \cdot BC \square AB^2 \cdot DC \square AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC,$$

або

$$AD^2 \square AB^2 \frac{DC}{BC} \square AC^2 \frac{BD}{BC} - BD \cdot DC. \qquad (1)$$

Якщо (1) записати у векторному вигляді, тобто подати відрізки DC , BD і BC як вектори, а добуток $BD \cdot DC$ – як скалярний добуток $\langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC} \rangle$, то твердження є вірним для будь-якої точки D прямої BC [3].

Введемо позначення:

$$a \square BC, \quad b \square AC, \quad C \square AB,$$
$$S \square S_{\Delta ABC}, \; S_b \square S_{\Delta ADC}, \; S_c \square S_{\Delta ABD}.$$

Мають місце відношення:

$$\frac{BD}{DC} \square \frac{S_c}{S}, \; \frac{DC}{BC} \square \frac{S_b}{S},$$

то формулу (1) можна подати у вигляді

$$AD^2 \square c^2 \frac{DC}{DC} \square b^2 \frac{BD}{BC} - a^2 \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{DC}{DC} \square c^2 \cdot \frac{S_b}{S} - a^2 \cdot \frac{S_b \cdot S_c}{S^2}. \qquad (2)$$

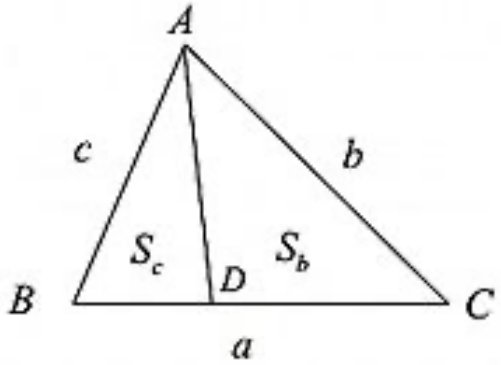


Рис.1

Наслідок 1. Нехай a,b,c – довжини сторін $BC, AC,$ і $AB\,\Delta ABC.$ тоді довжину медіани $m_a,$ проведеної до сторони $a,$ можна знайти за формулою

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}; \qquad (3)$$

довжину бісектриси l_a кута A – за формулою

$$l_a^2 = b \cdot c \cdot \left(1 - \frac{a^2}{(b + c)^2}\right); \qquad (4)$$

довжину висоти h_a, проведеної до сторони a, – за формулою

$$h_a^2 = \frac{(a + b + c)\cdot(a + b - c)\cdot(a - b + c)\cdot(-a + b + c)}{4a^2}; \qquad (5)$$

якщо m_a' – ортогональна проекція медіани m_a на сторону a і $b \geq c$, то

$$b^2 - c^2 = 2m_a \cdot m_a'. \qquad (6)$$

Якщо точка D співпадає з точкою дотику A_1 вписаного у ΔABC коло, то

$$AD^2 = AA_1^2 = b^2 \cdot \frac{p - b}{a} + c^2 \cdot \frac{p - c}{a} - (p - b)\cdot(p - c),\ p = \frac{a + b + c}{2}; \qquad (7)$$

якщо точка D співпадає з точкою дотику A_2 зовнівписаного кола зі стороною BC ΔABC, то

$$AD^2 = AA_2^2 = b^2 \cdot \frac{p - b}{a} + c^2 \cdot \frac{p - c}{a} - (p - c)\cdot(p - b), \qquad (8)$$

$$AA_1^2 = AA_2^2 = b^2 + c^2 - 2(p - b)(p - c). \qquad (9)$$

Зауваження. Помноживши обидві частини рівності (5) на вираз $\frac{1}{4}a^2$, одержимо добре відому формулу Герона для обчислення площі трикутника за довжинами його сторін, а саме

$$S_{\Delta ABC}^2 = \left(\frac{a \cdot h_a}{2}\right)^2 = \frac{(a + b + c)\cdot(a + b - c)\cdot(a - b + c)\cdot(-a + b + c)}{16},$$

але у більш зручному вигляді

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \qquad (10)$$

*Наслідок 2. (Теорема Птолемея)*У будь-якому опуклому чотирикутнику, вписаному в коло, добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін.

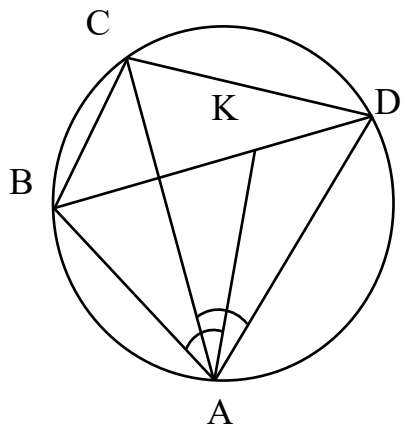


Рис. 2

Нехай $ABCD$ – вписаний в коло чотирикутник (Рис. 2). З вершини A проведемо відрізок AK так, щоб кінець K цього відрізка лежав на діагоналі BD і щоб кут BAK дорівнював куту CAD. Розглянемо спочатку трикутники BKA і CDA. В них кути ABK і ACD рівні як вписані, які спираються на дугу AD. Крім того, кут BAK дорівнює куту CAD тому, що так була вибрана точка K. Трикутники BKA і CDA мають по два рівних кути і, як наслідок, – подібні. Зробимо висновок,що

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BK}$$

або

$$AC \cdot BK = AC \cdot CD. \qquad (11)$$

Розглянемо тепер трикутники AKD і ABC. В них кути ACB і ADK рівні, як вписані, що спираються на дугу. Крім того, з рівності кутів BAK і CAD випливає рівність кутів BAC і KAD. Трикутники AKD і ABC мають по два рівні кути і, як наслідок, подібні. Тоді

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DK},$$

звідки

$$AC \cdot DK = AD \cdot BC. \qquad (12)$$

Склавши рівності (11) і (12), отримаємо:

$$AC \cdot (BK + DK) = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

отже,

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Розглянемо кілька задач які можна розв’язувати за допомогою теореми Стюарта та її наслідків.

Задача 1 (обчислення довжини бісектриси за допомогою теореми Стюарта). Відрізок AD є бісектрисою трикутника ABC, АВ = 14 см, BC = 20 см, AC = 21 см. Знайти AD.

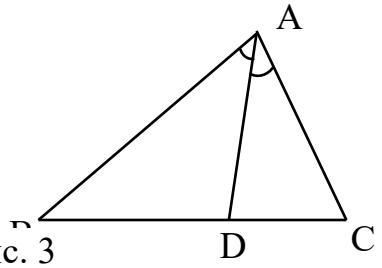


Рис. 3

Розв’язання:

1) За властивістю бісектриси: бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам, маємо: $\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

Нехай $BD = x$, тоді $\frac{x}{14} = \frac{20-x}{21}$, звідки

$21x = 14(20 - x)$,

$35x = 280$,

$x = 8$ (см), тобто $DC = 12$ (см).

2) За формулою обчислення довжини бісектриси, отримаємо:

$AD = \sqrt{AB \cdot AC - BD \cdot CD} = \sqrt{14 \cdot 21 - 12 \cdot 8} = 3\sqrt{22}$ (см).

Відповідь. $3\sqrt{22}$ (см).

Задача 2 (обчислення довжини медіани за допомогою теореми Стюарта). Відрізок AD є медіаною трикутника ABC, AB = 12см, BC = 16 см, AC = 20 см. Знайти AD.

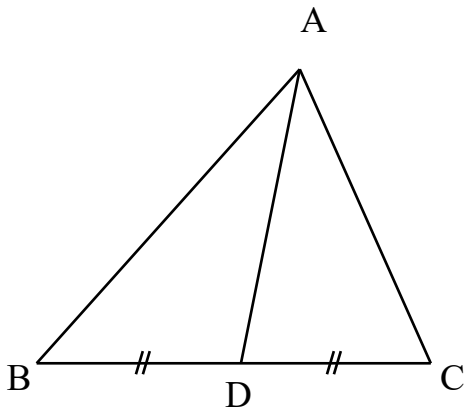


Рис. 4

Розв'язання:

За умовою задачі маємо: $BC = DC = 8$ (см).

За формулою обчислення довжини медіани, отримаємо:

$$AD = \frac{\sqrt{2 \cdot AB^2 + 2AC^2 - BC^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 144 + 2 \cdot 400 - 256}}{2} = \frac{\sqrt{832}}{2} = 4\sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Відповідь. $4\sqrt{13}$ (см).

Задача 3 (доведення за допомогою теореми Птолемея). В рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC і кутом при вершині 36° проведена бісектриса AD. Довести, що трикутники ABC і CDA подібні.

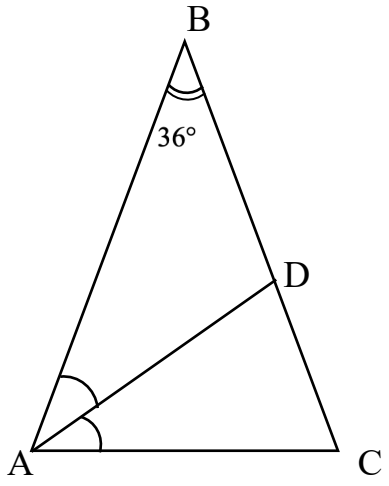


Рис. 5

Розв'язання:

В трикутнику ABC дано: $AB = BC$, $\angle B = 36^\circ$, AD – бісектриса (Рис. 5). Тоді

$$\angle C = \angle BAC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ,$$

звідки $\angle DAC = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 36^\circ$.

В трикутниках ABC і CDA кут C – спільний і кути B і CAD рівні. За другою ознакою рівності трикутників трикутники ABC і CDA подібні.

Задача 4 (розв'язання за допомогою теореми Птолемея). Основи трапеції рівні 2 м і 8 м, бічні сторони – 6 м і 9 м. пряма, паралельна основам, ділить трапецію на дві подібні трапеції. Знайти їх сторони.

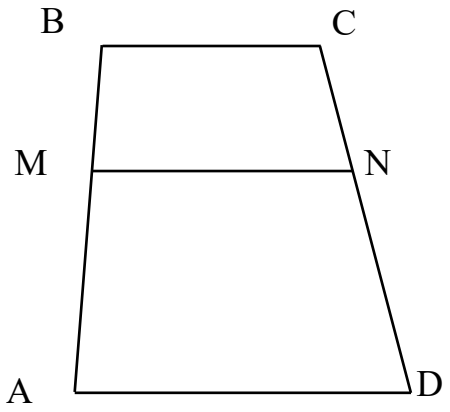


Рис. 6

Розв’язання:

Нехай в трапеції $ABCD$ відомо, що AD=8 м, BC=2 м, AB=6 м, CD=9 м, $MN||AD$, а трапеції $MDCN$ і $AMND$ подібні (Рис. 6).

З властивостей трапеції випливає, що $MN = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4\,(\text{м})$.

Далі з подібності трапеції маємо:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{CN} = \frac{AD}{MN},$$

тобто

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{CN} = \frac{8}{4} = 2.$$

Отже,

$$AM = 2MB,\ DN = 2CN.$$

Звідси слідує,

$$MN = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2\,(\text{м}),\ AM = 4\,(\text{м}),$$

$$CN = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3\,(\text{м}),\ DN = 6\ (\text{м}).$$

Таким чином, утворення прямої MN, паралельної основі, подібні трапеції мають такі сторони: 8 м, 4 м, 4 м, 6 м і 4 м, 2 м, 2 м, 3 м.[4]

Висновки. Застосування теореми Стюарта та її незначних узагальнень є достатньо дієвимпідходом до розв’язування широкого кола метричних задач планіметрії. Також застосування формул для знаходження довжини медіани, бісектриси та висоти, так званих «чудових» відрізків пришвидшує розв’язання задач.

Література:

1. Бутузов В.Ф. Планиметрия. Пособие для углубл. изучения математики./ В.Ф. Бутузов, С.В. Кадомцев и др. – М.: Физматлит, 2005. – 488с.
2. Мерзляк А.Г. Геометрія: Підруч. для 9 кл. шкіл з поглибл. Вивченням математики. / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 272с.
3. Перехойда О. Одна цікава геометрична тотожність / О. Перехойда, Р. Ушаков // Математика в школі. – 1999. – С. 41-42.
4. Никулин А. В. и др. Планиметрия. Геометрия на плоскости: Уч. пос. / Под общ. Ред. Ю. С. Татаренко. – Висагинас: Альфа, 1998. – 592 с.

Ярмолюк Ольга Анатоліївна
студентка 1 курсу, напрям підготовки «Математика»

МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЗАННЯ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. На сьогодні в запасі будь-якого дослідника-вченого, методиста, вчителя або учня, що прагне йти далі, ніж цього потребує програма загальноосвітньої школи, – зібрано достатньо міцний геометричний апарат знань про трикутник і його основні елементи. Цей апарат дає змогу розв'язувати складні як теоретичні, так і практичні задачі, що виникають в процесі професійної діяльності.

Аналіз попередніх досліджень. Протягом 70 – 80-х років XIX сторіччя Лемуан, Брокар, Вігар'є, Нейберг і ряд інших математиків опублікували багато цікавих робіт, присвячених геометрії трикутника. У цих роботах було показано, що із трикутником зв'язане ціле «сузір'я чудових точок», ряд чудових прямих, кіл та інших кривих.

Мета статті: розгляд основних положень вивчення методу координат у школі, аналіз навчальних підручників та розгляд застосування координатного методу для обчислення елементів трикутника, за допомогою якого можна дещо простіше розв'язувати задачі такого типу.

Виклад основного матеріалу. Надаючи геометричним дослідженням алгебраїчний характер, метод координат переносить в геометрію найбільш важливу особливість алгебри – однаковість способів вирішення завдань. Якщо в арифметиці й елементарної геометрії доводиться, як правило, шукати для кожного завдання особливий шлях розв'язання, в алгебрі та аналітичної геометрії рішення проводяться за загальним для всіх завдань плану, легко пристосовується до будь-якого завдання.

Перенесення в геометрію властивих алгебри і тому володіють великою спільністю способів вирішення завдань становить головну цінність методу координат. Інше достоїнство методу координат полягає в тому, що його застосування позбавляє від необхідності вдаватися до наочного поданням складних просторових зображень.

Можна виділити наступні цілі вивчення методу координат у шкільному курсі геометрії:

- дати учням ефективний метод вирішення завдань і докази ряду теорем;
- показати на основі цього методу тісний взаємозв'язок алгебри і геометрії;
- сприяти розвитку обчислювальної та графічної культури учнів.

У школі вивчення координатного методу і навчання його застосування для вирішення різних математичних задач відбувається в кілька етапів.

На першому етапі вводиться основний понятійний апарат, який добре відпрацьовується в 5 - 6 класах і систематизується в курсі геометрії. У 5 класі учні знайомляться з координатним променем, який надалі, при вивченні негативних чисел, доповнюється до координатної прямої. І вже після введення раціональних чисел в 6 класі всі учні починають вивчати координатну площину.

На другому етапі учні знайомляться з рівняннями прямої та кола. Дані поняття вивчаються ними як в алгебрі, так і в геометрії з різною змістовної метою, тому учні часто не бачать зв'язку між ними, а, значить, і погано засвоюють суть методу. Так, в курсі алгебри 7 класу графіки основних функцій вводяться шляхом побудови низки точок, координати яких обчислюються по аналітичному завданням функції. У курсі геометрії рівняння прямої та кола вводиться на основі геометричних характеристичних властивостей, як безліч точок, які мають певною властивістю (рівновіддаленості від 2 точок – для прямої, від однієї точки – для кола).

Навчання застосування самого методу координат для розв’язування різноманітних завдань відбувається в курсі геометрії 9 класу. Для цього спочатку розкриваються основні етапи застосування методу, а потім на прикладі низки завдань показується безпосереднє застосування методу координат.

Добре відомо, що, як би не будувався шкільний курс геометрії, в ньому обов'язково присутні різні методи доказу теорем і вирішення завдань. Серед таких методів важливе місце займають такі методи, як метод геометричних перетворень, метод координат, векторний метод. Самі ці методи тісно пов'язані між собою. Залежно від концепції, що розкривається авторами підручників геометрії для середньої школи, той чи інший метод може займати домінуюче значення. Так у підручнику активну роль відіграє метод координат, який вельми плідний.

У шкільній програмі з математики методу координат приділяється порівняно мало уваги. У розділі «Мета вивчення курсу геометрії» говориться: «При доведенні теорем і розв'язанні задач застосовуються геометричні перетворення, вектори і координати». Отже, програма не ставить за мету вивчення методу координат як методу розв'язання задач. У програмі йдеться, що «в результаті вивчення курсу геометрії учні повинні вміти використовувати координати для вирішення нескладних стандартних завдань». Ні слова не говориться про оволодіння учнями методом координат для доказу теорем і розв'язанні задач. Наголос робиться на «нескладні стандартні завдання», тоді як метод координат краще проявляє свої переваги при вирішенні нестандартних і досить складних (якщо не вирішувати їх іншими способами) завдань.

Відповідно до програми з математики для середньої загальноосвітньої школи координати вперше з'являються в 5 класі. При цьому, хлопці знайомляться із зображенням чисел на прямій і координатами точок. Причому запровадження цих понять у підручниках різному.

Згідно з програмою в геометрії координати вивчаються в такому обсязі: «Координатна площина. Формула відстані між двома точками площини з заданими координатами. Рівняння прямої та кола ».

Для розв’язування задач з геометрії застосовуються різні методи: синтетичний (суто геометричний) метод, векторний, метод координат та інші. Однак основним методом вважається синтетичний метод, але він потребує досить великої інтелектуальної роботи, у тому числі інтуіції, додаткових побудов, здогадок тощо. Так як у процесі навчання це є найважливішими

складовими самого процесу, то в практичній роботі кожен прагне досягти деякого алгоритму обчислень, що найчастіше зустрічаються. Саме в цьому і полягає перевага координатного методу перед синтетичним.

Розглянемо формули трикутника, як базової конструкції багатьох геометричних фігур. Використовуючи уже відомі формули виведемо наступні.

Нехай маємо трикутник ABC з координатами вершин: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Довжини сторін трикутника a, b, c обчислюються за відомими формулами, наприклад

$$a = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}.$$

Рівняння основних елементів трикутника

Рівняння сторони a:

$$(y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y + y_1x_3 - x_1y_3 = 0.$$

Рівняння медіани m_a:

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y + (x_2 + x_3)y_1 - (y_2 + y_3)x_1 = 0.$$

Рівняння бісектриси l_a:

$$(by_1 - y_2) + cy_1 - y_3)x - (bx_1 - x_2) + cx_1 - x_3)y + bx_1y_2 - x_2y_1) + cx_1y_3 - x_3y_1) = 0.$$

Рівняння висоти h_a:

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y - (x_2 - x_3)x_1 - (y_2 - y_3)y_1 = 0.$$

Довжини основних елементів трикутника

Довжина медіани m_a:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 + x_3 - 2x_1)^2 + (y_2 + y_3 - 2y_1)^2}.$$

Довжина бісектриси l_a:

$$l_a = \frac{\sqrt{(b(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_3))^2 + (b(y_1 - y_2) + c(y_1 - y_3))^2}}{b + c}.$$

Довжина висоти h_a:

$$h_a = \frac{|(x_2 - x_3)y_1 - (y_2 - y_3)x_1 - x_3y_2 - x_2y_3|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}}.$$

Радіус вписаного кола:

$$r = \frac{|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)|}{2(a + b + c)}.$$

Радіус описаного кола:

$$R = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}{2|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)|}.$$

Координати деяких точок трикутника

Точка перетину медіан (центр тяжіння):

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Точка перетину висот (ортоцентр):

$$x = \frac{(y_1 - y_2)(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_2 - y_3)(x_2x_3 + y_2y_3) + (y_3 - y_1)(x_1x_3 + y_1y_3)}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)},$$

$$y = \frac{(x_2 - x_1)(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_3 - x_2)(x_2x_3 + y_2y_3) + (x_1 - x_3)(x_1x_3 + y_1y_3)}{x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1)}.$$

Центр вписаного кола (точка перетину бісектрис, інцентр):

$$x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a + b + c}, \quad y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a + b + c}.$$

Центр описаного кола:

$$x = \frac{(y_1 - y_3)(x_2^2 + y_2^2) + (y_2 - y_1)(x_3^2 + y_3^2) + (y_3 - y_2)(x_1^2 + y_1^2)}{2(y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1))},$$

$$y = \frac{(x_3 - x_1)(x_2^2 + y_2^2) + (x_1 - x_2)(x_3^2 + y_3^2) + (x_2 - x_3)(x_1^2 + y_1^2)}{2(y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1))}.$$

Площа трикутника:

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_3)(x_2 - x_3)\right|.$$

Кути трикутника:

$$\cos\alpha = \frac{1}{bc}(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3).$$

Висновки. Аналіз підручників з математики свідчить про достатнє застосування координатного методу у шкільній програмі, тому добірка наведених формул дасть можливість розв'язувати задачі за допомогою координатного більш простіше.

Література:

1. Ефремов Д. Новая геометрия треугольника / Д. Ефремов. – Одесса, 1903. – 351с.
2. Зетель С. И. Новая геометрия треугольника / С. И. Зетель. – М., 1962. – 96с.

Ящук Каріна Ігорівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ФОРМУЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ КРУГА З ВИКОРИСТАННЯМ СУЧАСНИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ

Постановка проблеми. Відповідно до навчальної програми з математики, для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язання практичних задач. Значні вимоги до володіння математикою у розв'язанні прикладних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах.

Вміти розв'язувати прикладні задачі є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.

Формування навичок застосування математики з однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ.

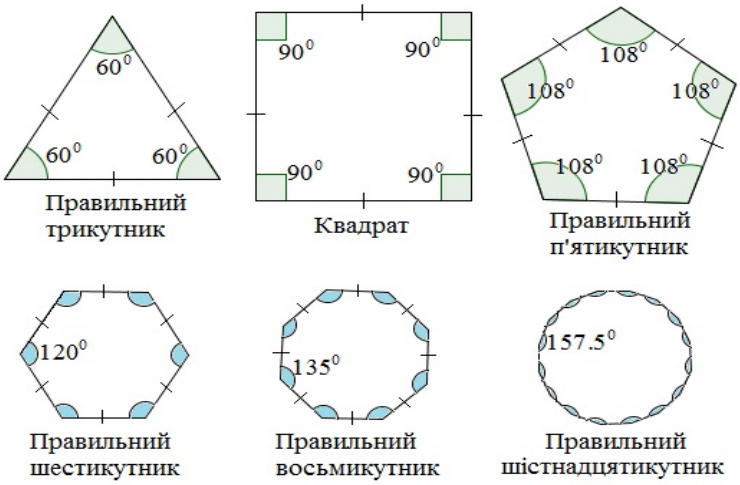
Мета даної статті: розробити матеріал для презентації до теми «Площа круга» з реалізацією прикладної спрямованості.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів**.** Відповідно до державного стандарту, зміст навчання геометрії структурований за темами відповідно до навчальних курсів. Таким чином в 9 класі вивчається тема «Правильні многокутники». Важливим є правильне та зрозуміле для сприйняття учня пояснення та наочне демонстрування означення правильного многокутника. Це легко зробити за допомогою використання програми для створення презентацій Microsoft PowerPoint та продемонструвати її використовуючи проектор.

Слайд 1.

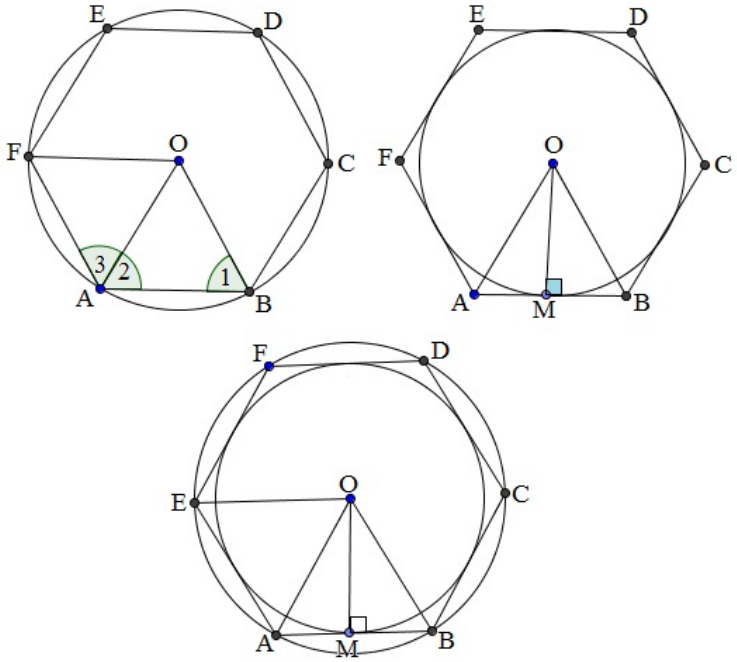
Тобто, зобразимо на першому слайді, де в житті можна житті побачити застосування правильних многокутників, тим самим переконаємо учнів, що вивчення цієї теми є безперечно важливим.

Зобразимо на другому слайді різні правильні многокутники, показавши, що рисунки фігур відповідають сформульованому означенню «правильний многокутник» на якому варто наголосити.



Слайд 2.

На третьому слайді доречно продемонструвати теорему: «Будь – який правильний многокутник є одночасно вписаним і описаним, причому центри описаного і вписаного кіл збігаються». На цьому слайді запропоновано правильний шестикутник та показано, що дана теорема виконується.



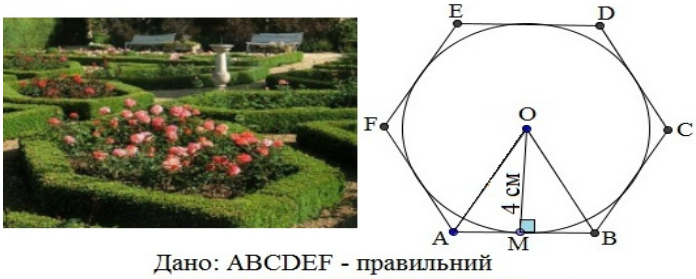
Слайд 3.

Демонстрування таких слайдів на екрані проектора значно спрощує роботу вчителя та є більш простим для сприйняття та запам’ятовування такого матеріалу учнями. Ще одним досить важливим пунктом даної теми є площа круга, крім цього також розглядається площа кругового сектора і кругового сегмента, а також в якості допоміжної виводиться формула площі опуклого многокутника, описаного навколо кола. Виклад матеріалу виконується із звертанням до наочного уявлення учнів.

Вчитель вводить означення круга та переходить до розгляду формули площі опуклого многокутника, описаного навколо кола.

Для її закріплення можна запропонувати учням задачу: «Знайти площу квіткової клумби у формі правильного шестикутника, якщо відстань від центра

клумби до краю клумби дорівнює 4 см.», рисунок до задачі продемонстровано на слайді 4.



Дано: ABCDEF - правильний шестикутник, описаний навколо кола; R = OM = 4 см.
Знайти: S правильного шестикутника
Розв'язання:

Слайд 4.

Для більш чіткого виділення основної ліній виведення формули площі круга доцільно один із його фрагментів, що несе допоміжний характер, розглянути окремо у вигляді задачі, яку запропонуємо на слайді 4.

Навколо кола описаний правильний $n-$кутник P_1 і в те ж коло вписаний правильний $n-$кутник P_2. Периметр трикутника P_2 дорівнює p_2, а радіус кола R. Виразити площу $n-$кутників P_1 і P_2 через радіус R і периметр p_2.

Розв'язання. $S_1 = \frac{1}{2} p_1 R$, $S_2 = \frac{1}{2} p_2 r$ (за формулою площі опуклого многокутника, описаного навколо кола). Подальше розв'язання зводиться до вираження p_1 і r через величини, задані в умові, і підставлення цих виразів в формули S_1 і S_2.

Після такої попередньо проробленої роботи, виведення площі круга зводиться до наступного:

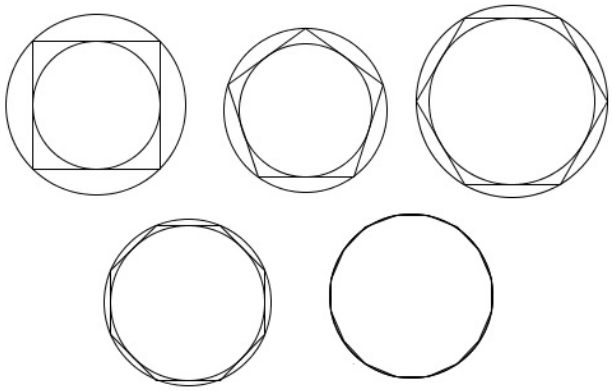
1. $S_2 \le S \le S_1$ (в цій системі нерівностей S_1 і S_2 можна представити як оцінки відповідно по не достатку і надлишку постійної величини S; із збільшенням числа n оцінка уточнюється).

2. $S_1 = \frac{1}{2} p_1 R$, $S_2 = \frac{1}{2} p_2 r$ ($r = OC$, p_1 і $p_2 -$ периметри многокутників P_1 і P_2).

3. $S_1 = \frac{1}{2} p_2 \frac{R}{\sin\alpha}$, $S_2 = \frac{1}{2} p_2 R \cos\alpha$.

4. При достатньо великому n: $S_1 = \frac{1}{2} p_2 \frac{R}{\sin\alpha}$ і $S_2 = \frac{1}{2} p_2 R \cos\alpha$ дуже мало відрізняються від $\frac{lR}{2}$, де $l -$ довжина кола. Тому $S = \frac{lR}{2}$ чи $S = \pi R^2$.

Із збільшенням кількості сторін правильного многокутника, площа многокутника наближається до площі круга, що продемонстровано на слайді 5.

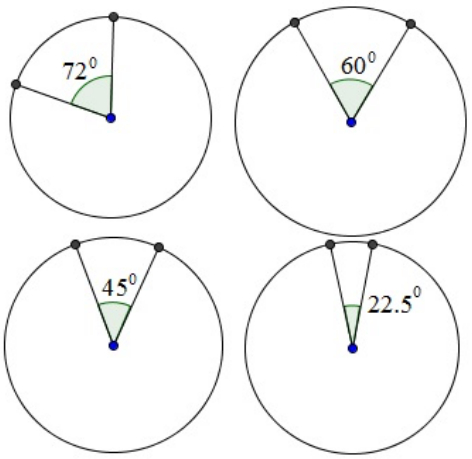


Слайд 5.

Визначення кругового сектора супроводжується представленням класу слайда 6, на якому зображені кругові сектори з різною градусною мірою.

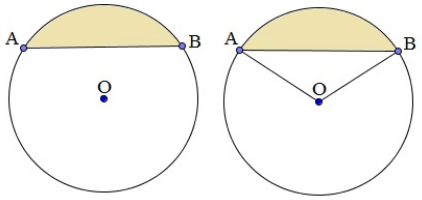
При розгляді формули площі кругового сектора корисно провести з учнями міркування, які легко відтворити у випадку необхідності за допомогою використання комп'ютерних програм, які спрощують роботу вчителя та є доречними при поясненні матеріалу та забезпечують краще засвоєння учнями запропонованої теми.

Площа сектора, відповідного центральному куту в 1^0, рівна $\frac{1}{360}$ частини площі круга, тобто $\frac{\pi R^2}{360}$, звідки площа сектора відповідного центрального кута в α^0, рівна $\frac{\pi R^2}{360}$.



Слайд 6.

При розгляданні кругового сегмента і формули його площі продемонструвати слайд 7. Корисно звернути увагу учнів на те, що при $\alpha \square 180^0$ сегмент є частиною відповідного сектора, при $\alpha \square 180^0$ відповідний сектор є частиною заданого сегмента. Це допомагає виведенню формули площі кругового сегмента.



Слайд 7.

В результаті вивчення цього пункту учні повинні знати означення круга, формулу площі круга, що таке круговий сектор і круговий сегмент, вміти знаходити площу круга, розпізнавати і зображати круговий сектор і круговий сегмент, обчислювати їх площі.

Опрацювавши провідні підручники [1], [2], [3], [4], які відповідають шкільній програмі, помічаємо, що виклад теоретичного матеріалу дещо відрізняється, проте побудова практичної добірки завдань схожа.

Про це свідчить, що в усіх чотирьох підручниках є задачі на обчислення площі круга вписаного або описаного навколо певної фігури. Наприклад, [1]: « Знайдіть площу круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною a ».

Подібні завдання, на визначення площі за малюнком містять підручники [1], [2], [3]. Наприклад, [1]: «Обчисліть площу заштрихованої фігури (рис. 58), якщо довжина клітинки дорівнює a ».

Автори підручників [2], [3], [4], використовують аналогічні задачі прикладного спрямування. Наприклад, [2]: «1. Якої товщини шар треба зняти з круглого мідного дроту, що має площу перерізу 1156 $мм^2$, щоб дріт пройшов крізь отвір діаметром 38,5 $мм$? 2. Навколо кругової клумби, радіус якої дорівнює 3 м, є декоративне кільце завширшки 0,5 м. Скільки треба гальки, щоб посипати доріжку, якщо на 1 $м^2$ кільця потрібно 0,7 $дм^2$ гальки?»

Також у підручниках [1], [4] пропонується «задача про дерево», тобто: «Обчисліть площу поперечного перерізу дерева, якщо його обхват дорівнює: 1) 90 см, 2) 1,5 м.»

До добірки задач можна додати ще таку цікаву задачу: На будівлі МГУ встановлений годинник з круглим циферблатом, який має діаметр 8,8 м. Знайдіть площу циферблата годинника та порівняйте її з площею вашої класної кімнати.

Висновки. Одним із найважливіших засобів забезпечення прикладної спрямованості пояснення досліджуваної теми є встановлення міжпредметних зв’язків математики з іншими предметами, що дозволяє на прикладах з життя продемонструвати важливість вивчення теми «Площа круга». Особливої уваги заслуговує встановлення тісних, взаємовигідних зв’язків між математикою та інформатикою – двома освітніми галузями, які є визначальними у підготовці особистості до життя у постіндустріальному, інформаційному суспільстві. Широке застосування комп’ютерних програм у навчанні математики доцільне для проведення математичних експериментів, практичних занять, інформаційного забезпечення, візуального інтерпретування математичної діяльності.

Література:

1. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія: Підруч. Для 9 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір – Х.: Гімназія, 2009. – 240 с.
2. Апостолова Г. В. Геометрія: Підручник для 9 кл. / Г. В. Апостолова. – К. : Генеза, 2009. – 304 с.
3. Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський С. В., Єршов С. В. Геометрія 9 кл.: Підручник для загальноосвітніх навч. закл. / А. П. Єршова, В. В. Голобородько, С. В. Крижановський. – Х., 2009. – 256 с.
4. Бурда М. І., Тарасенкова Н.А. Геометрія: Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова. К.: Зодіак – ЕКО, 2009.
5. Гусев В. А. К началу обучения геометрии в 8 классе по новому учебному пособию / В. А. Гусев // Математика в школе. – 1985. – №1. – С. 16 – 18.
6. http://www.mon.gov.ua

РОЗДІЛ ІІІ. ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ГУМАНІТАРНІЙ СФЕРІ

Байдацький Олександр Павлович
студент 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ПРОГНОЗІ ПОГОДИ

Постановка проблеми. Сучасні математичні методи дозволяють описати всі природні процеси та передбачити майбутні наслідки. Раніше прогнози ґрунтувалися в основному на зміні атмосферного тиску, поточних погодних умов і стану неба. В наш час для визначення майбутньої погоди застосовуються моделі прогнозування. Математичні моделі дозволяють прогнозувати погоду з незначними похибками.

Мета статті: полягає в розгляді використання математичних моделей в прогнозі погоди.

Виклад основного матеріалу. Основу всіх прогностичних моделей атмосфери становлять рівняння руху, припливу тепла, нерозривності, перенесення вологи та атмосферних домішок, які є математичним виразом законів фізики (закони збереження імпульсу, енергії і маси), а також рівняння стану.

Рівняння для ідеальної атмосфери (без урахування турбулентної в'язкості), записані у відносній системі координат, пов'язаної з обертами Землі і з абсолютною системою координат, вісь яка збігається з віссю обертання Землі (рис. 1), мають наступний вид:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\bar{V}p - 2\omega \times V + g,$$
$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{c_p \rho}(\xi_л + \xi_ф), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \mathrm{V}) = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho}\xi_{\text{п}}, \quad \frac{ds_a}{dt} = \frac{1}{\rho}\xi_a,$$

$$\rho = R\rho T.$$

На рис. 1 зображена абсолютна (інертна) система координат з початком в центрі Землі O_1 і одною з осей (z) прямокутної системи координат, яка співпадає з віссю Землі і напрямлена з півдня на північ, а також відносні системи координат, пов'язані з Землею, яка обертається з кутовою швидкістю ω.

Сферична система координат $O_1 r\theta\lambda (r -$ відстань від центра Землі до даної матеріальної точки $r -$ радіус-вектор, $\theta = \pi/2 - \varphi -$ полярний кут, $\varphi -$ широта місця спостереження (додатна на північ від екватора і від'ємна – на південь); $\lambda -$ довгота місця спостереження, відраховується від грінвицького меридіану на схід; перша декартова прямокутна система координат $O_1 XYZ$ з початком в центрі Землі; перша декартова прямокутна локальна система координат $Oxyz$ з центром в будь-якій точці поверхні O і віссю z, яка напрямлена за місцевим вертикалом. $\mathrm{V} = ui + vj + \omega k -$ тривимірний вектор швидкості; $i, j, k -$ одиничні вектори в декартовій системі координат $x, y, z, u, w -$ проекції вектора швидкості на осі координат; $p, \rho, T -$ тиск, щільність і температура повітря; $\theta -$ потенційна температура: $\theta = T(P/p)^{\gamma}$, $P = 1000$ гПа,

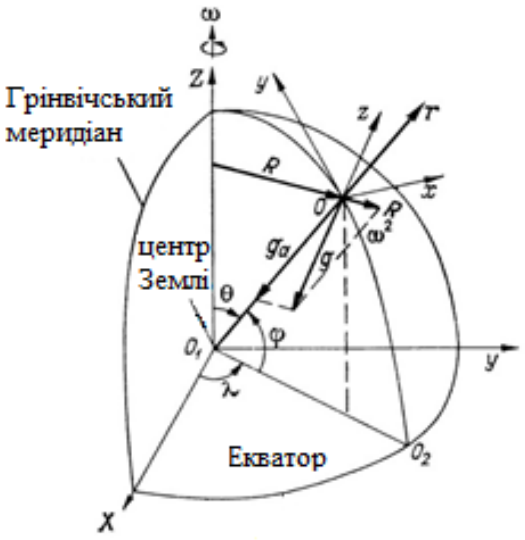


Рис. 1

$\lambda = (c_p - c_v)/c_p$, $c_p, c_v -$ питома теплоємність повітря при постійному тиску і при постійному об'ємі відповідно; $g -$ вектор сили тяжіння, віднесений до одиниці маси, $g_z = -g -$ проекція вектора сили тяжіння на місцеву вертикаль; $\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k -$ вектор кутової швидкості обертання Землі з проекціями на

осі координат $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; $\gamma_a \square g / c_p$ сухоадіабатичний градієнт температури; R – питома газова постійна сухого повітря; S_a – кількість домішок a в одиниці об'єму повітря; $\xi_л$, $\xi_ф$ – швидкості зміни кількості теплоти в одиниці об'єму за одиницю часу (приплив тепла при знаку "плюс" або відплив тепла при знаку "мінус") за рахунок променистого теплообміну і фазових перетворень води; швидкість зміни кількості водяної пари; $\xi_л$ – швидкість зміни кількості домішок в одиниці об'єму (приплив або відплив домішок); $\overline{V}$ – градієнт:

$$\overline{V} \square grand \square i\frac{\partial}{\partial x} \square j\frac{\partial}{\partial y} \square k\frac{\partial}{\partial z},$$

d / dt – індивідуальна похідна:

$$\frac{d}{dt} \square \frac{\partial}{\partial t} \square \mathrm{V} \cdot \overline{\mathrm{V}} \square \frac{\partial}{\partial t} \square u\frac{\partial}{\partial x} \square v\frac{\partial}{\partial y} \square \omega\frac{\partial}{\partial z};$$

$div\ A$ – об'ємна дивергенція вектора $A \square A_x i \square A_y j \square A_x k$:

$$divA \square \frac{\partial A_x}{\partial x} \square \frac{\partial A_y}{\partial y} \square \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

де A_x, A_y, A_z – проекції вектора; $A \cdot B$ скалярний добуток A і B:

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \square A_x B_x \square A_y B_y \square A_z B_z,$$

де $B \square A_x i \square A_y j \square A_z k$ – вектор з проекціями B_x, B_y, B_z, $A \times B$ – векторний добуток векторів.

$$A \times B \square (A_y B_z - A_z B_y) i \square (A_z B_x - A_x B_z) j \square (A_x B_y - A_y B_x) k.$$

У локальній декартові системі координат вісь x спрямована на схід, вісь y – на північ, вісь z – за місцевим вертикалем, а проекції вектора кутової швидкості обертання Землі ω дорівнюють: $\omega_x \square 0$, $\omega_y \square \omega cos\varphi$, $\omega_z \square \omega sin\varphi$ (рис.2), де ω – абсолютна величина кутової швидкості обертання Землі, $\omega \square 2\pi / T$, T – 1 доба, φ – широта місця [1].

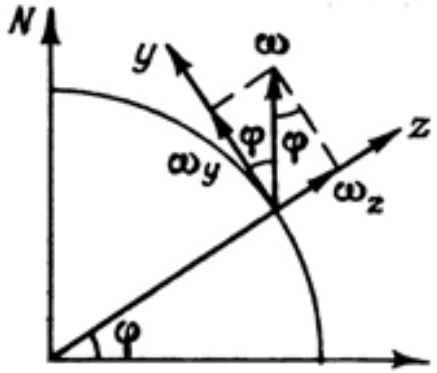


Рис. 2

У цій системі координат рівняння приймають наступний вигляд:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = lv - l_1\omega,$$
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} - lu,$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} - l_1 u - g,$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \frac{\partial \rho \omega}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$
$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{c_p \rho}(\xi_л = \xi_ф),$$
$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho}\xi_n, \frac{ds_a}{dt} = \frac{1}{\rho}\xi_a, \rho = R\rho T.,$$

де $l = 2\omega sin\varphi$ – параметр Коріоліса, $l_1 = 2\omega cos\varphi$, $g = -g_z$.

Далі, поряд з цією системою рівнянь для бароклінної атмосфери, буде використовуватися також система рівнянь баротропної (еквівалентно-баротропной, або однорідної) моделі атмосфери:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial x} = lv,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = u\frac{\partial v}{\partial x} = v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial h}{\partial x} - lu, \qquad (3)$$
$$\frac{\partial h}{\partial t} = u\frac{\partial h}{\partial x} = v\frac{\partial h}{\partial y} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

де h – геометрична висота.

На відміну від бароклінного середовища в баротропному середовищі поверхні постійних значень тиску, щільності і температури або збігаються, або “паралельні” один одному.

Розглянемо тепер рівняння гідротермодинаміки для турбулентного руху. Кожну величину f або φ, що входить в систему рівнянь (2) (крім величини ρ), подамо у вигляді:

$$f(x,y,z,t) = \bar{f}(x,y,z,t) = f'(x,y,z,t), \qquad (4)$$

де риска зверху означає середнє значення за часом або простором (або за часом і простором одночасно), а штрих – відхилення величин від їхніх середніх значень, обумовлених турбулентністю. Для відхилень маємо:

$$\overline{f'} = 0. \qquad (5)$$

Очевидно, що на підставі цього припущення відповідно з правилами Рейнольдса:

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}, \overline{f\varphi} = \overline{f}\,\overline{\varphi} = \overline{f'\varphi'}. \qquad (6)$$

Підставляючи кожну змінну у вигляді (4) в систему рівнянь(2), провівши осереднення отриманих нових рівнянь і врахувавши співвідношення (5) і (6), замість (2) отримуємо систему рівнянь для осереднених величин $\overline{u},\overline{v},\overline{\omega},\overline{T},\overline{q}\,\text{i}\,\overline{s_a}$ (знак осереднення далі опущений):

$$\begin{gathered}
\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + lv - l_1\omega + F_x, \\
\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} - lu + F_y, \\
\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} - l_1 u - g + F_z, \\
\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{c_p\rho}(\xi_л + \xi_ф) + \frac{1}{c_p\rho}\xi_т, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho \omega}{\partial z} = 0, \\
\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho}\xi_п + \frac{1}{\rho}\xi_{пт}, \quad \frac{ds_a}{dt} = \xi_a + \xi_{aт}, \quad \rho = R\rho T,
\end{gathered} \tag{7}$$

де

$$\begin{gathered}
F_x = -\left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'u'}}{\partial z}\right), \\
F_y = -\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'v'}}{\partial z}\right), \\
F_z = -\left(\frac{\partial \overline{u'\omega'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\omega'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'\omega'}}{\partial z}\right),
\end{gathered}$$

є складовими сили турбулентної в'язкості, віднесеними до одиниці маси, або прискоренням складових середніх швидкостей по осях x, y, z, зумовлених турбулентністю, а величини:

$$\begin{gathered}
\xi_т = -c_p\rho\left(\frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'T'}}{\partial z}\right), \\
\xi_{пт} = -\rho\left(\frac{\partial \overline{u'q'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'q'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'q'}}{\partial z}\right), \\
\xi_{aт} = -\left(\frac{\partial \overline{u's_a'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v's_a'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega's_a'}}{\partial z}\right),
\end{gathered}$$

являють собою швидкості приток тепла, водяної пари і атмосферних домішок, віднесених до одиниці об'єму, зумовлених турбулентністю. Всі ці величини ($\overline{F}$ і ξ) визначаються методами параметризації [1].

Для великомасштабних атмосферних рухів система рівнянь гідротермодинаміки має той самий вигляд, що і система рівнянь(7), але у цьому випадку замість рівняння руху по осі *z* використовується рівняння статики

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = g\rho. \qquad (7)$$

Систему рівнянь (7) будемо називати далі вихідною системою рівнянь гідротермодинаміки. У разі якщо всі складові F і ξ вважати відомими, то зазначена система є замкненою.

Системи рівнянь в частинних похідних (2), (3) і (7) є нелінійними. У зв'язку з цим їх рішення в аналітичній формі неможливе і для їх інтегрування застосовуються чисельні методи.

Формулюючи початкові умови, необхідно виходити з того, що число функцій, що задаються в початковий момент часу $t = 0$, повинно бути рівним числу похідних по часу. У системі рівнянь (7) з урахуванням формули (10) це число дорівнює шість. Отже, число функцій, що задаються в початковий момент,також має дорівнювати шість.

Оскільки рівняння містять просторові похідні, то необхідно поставити граничні умови, число яких повинно бути рівним порядку похідних, від кожної змінної по кожній координаті.

В ряді моделей атмосфери замість температури T використовується потенційна температура θ. Рівняння припливу тепла в системі (7) і вираз для ξ_m в системі (9) в цьомувипадку записуються в наступному вигляді:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T}\frac{1}{c_p\rho}(\xi_л - \xi_ф) = \frac{1}{c_p\rho}\xi_m,$$

$$\xi_m = -c_p\rho\left(\frac{\partial \overline{u'\theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'\theta'}}{\partial z}\right). \qquad (11)$$

Система рівнянь гідротермодинаміки (2) адекватно описує всі три види атмосферних коливань – великомасштабні, гравітаційні і акустичні.

Заміна рівняння руху по вертикальній осі на рівняння статики (10) приводить до від фільтрування акустичних хвиль, тому така система рівнянь описує лише великомасштабні та гравітаційні коливання. Ці ж коливання описує і система рівнянь баротропної моделі атмосфери (3) [1].

Висновки. Формування погоди відбувається під впливом всіх типів атмосферних процесів (крім акустичних коливань).

Погода ж у конкретній місцевості і в певний час доби буде визначатися в основному процесами мезомасштаба, які утворюються в результаті великомасштабного процесу. Характерним прикладом є утворення купчасто-дощових хмар і злив в тиловій частині циклонів.

Використання декількох моделей і приведення їх до єдиного результату допомагає знизити похибку і отримати найімовірніший результат, який можна використати у майбутніх дослідженнях.

Література:

1. Белов П.Н. Численные методы прогноза погоды / П.Н. Белов, Е.П.Борисенков, Б. Д. Панин. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1989. – 736 с.
2. Орлов А.И. Статистические методы прогнозирования. Источник: Международная Академия исследований будущего (IFRA). Российское отделение – Академия прогнозирования.
3. Прусов В.А. Моделювання природних і техногенних процесів в атмосфері / В.А. Прусов, А.Ю. Дорошенко. – Київ: Наукова думка, 2006. – 541 с.

Волошанюк Тетяна Анатоліївна
студентка 1курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ ЯК ЗАСОБУ ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ РОЗУМОВОЇ АКТИВНОСТІ УЧНІВ

Постановка проблеми. З кожним роком збільшується розумове навантаження на учнів у школі. В результаті чого вони втрачають інтерес до опрацювання нового матеріалу. Перед вчителем постає непросте завдання активізувати мислення учнів на уроці, стимулювати їх розумову діяльність, спрямувати їх до самостійного пошуку та здобуття знань. З цією метою можна використовувати ігрові задачі, які допомагають повернути інтерес учнів до навчання.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Проблема розвитку розумової активності учнів при розв’язуванні ігрових задач досліджувалась багатьма українськими та вітчизняними математиками, зокрема такими як: О. А. Сарана, Л.М., Лоповок І.М., Конет, В.Г., Паньков В.М., Радченко Ю.В. Теплінський, Д.В., Фомин, І.А. Орлов, А. В. Співак, які у своїх працях розглядали багато методів розв’язування ігрових задач.

Мета статті: дослідити методи розв’язання нестандартних задач, розширити свої знання з математики та спробувати вивести алгоритми розв’язання деяких ігрових задач.

Виклад основного матеріалу. *Логічними*, як правило, називаються нестандартні задачі, які навчають учнів розмірковувати, критично мислити, знаходити правильне розв’язання проблеми. Це задачі, що потребують кмітливості, винахідливості, вимагають проявлення інтуїції, домислу, тощо. Ігрові задачі є підвидом логічних задач.

Що ж таке ігрова задача? Це не зовсім звичайна математична задача, так як, по- перше, в ній зазвичай немає нічого числового, тобто не зрозуміло що потрібно розв'язувати, точніше, що писати в розв'язанні таких задач?

По-друге, інколи у грі неможливо скласти алгоритм виграшу, тобто план дій, які потрібно виконати, щоб здобути перемогу.

По-третє, для розв'язання ігрової задачі важливо правильно записати її. І цей запис залежить від того, хто перемагає у грі.

У математичних іграх припускається, що грають двоє, ходи роблять по черзі (жоден із гравців не може пропустити хід), причому гравці не припускаються помилок. А тому в таких іграх наперед можна визначити кінцевий результат, тобто передбачити, хто із гравців може забезпечити собі виграш. Для розв'язання задачі-гри необхідно сформулювати виграшну стратегію одного з гравців та довести, що така стратегія веде до виграшу.

Якщо виграє той, хто робить перший хід, то в розв'язанні задачі необхідно записати:

1) його перший хід;
2) алгоритм його ходів у відповідь на кожний хід суперника, тобто стратегію перемоги;
3) показати що, незалежно від дій суперника, у нього буде можливість зробити останній виграшний хід.

Якщо ж виграє другий, то в розв'язанні потрібно записати:

1) алгоритм його ходів у відповідь на кожний хід суперника;
2) показати, що у нього, незалежно від дій суперника, буде можливість зробити переможний хід.

Існують різні методи розв'язання ігрових задач, зокрема:

- метод симетрії – симетрично повторювати ходи суперника;
- метод інваріантності – довести, що перемога залежить не від дій гравців, а від початкової позиції: завжди виграє той, хто ходить першим, або навпаки.
- метод розфарбовування – розфарбувати деякі ключові елементи в декілька кольорів, дослідити, що буде відбуватись, якщо виконувати умови задачі.

Розглянемо деякі приклади розв'язання ігрових задач.

Задача 1 [1]. У коробці знаходиться 60 сірників. За один хід можна взяти будь-яку кількість від 1 до 5 сірників. Програє той, хто не може зробити ходу. Хто з гравців (перший чи другий) може забезпечити собі виграш?

Розв'язання. Проаналізуємо кінцівку такої гри. Якщо кількість сірників більша за 6, то гра закінчиться через два або більше ходи. Якщо ж кількість сірників дорівнює 6, то гравець, чий хід передував цій позиції, точно наступним своїм ходом закінчує гру (для цього він на хід суперника в k сірників бере 6- k сірників). Тобто така позиція є виграшною для цього гравця. Очевидно, що позиції 12, 18, 24 (і т. д.) сірників для нього також є виграшними, бо таким самим способом він від позиції «24 сірники» переходить до позиції «18 сірників», від «18» до «12». Отже, початкова позиція виграшна для другого гравця, а його виграшною стратегією є доповнення ним ходів першого гравця до 6 сірників.

Проаналізуємо цей розв’язок**.** Наші міркування під час аналізу кінцівки гри привели до розгляду класу виграшних позицій, що характеризуються такими властивостями:

- за один хід з однієї виграшної позиції не можна перейти до іншої виграшної позиції;
- з будь-якої невиграшної позиції за один хід можна перейти до деякої виграшної (відмінної від попередньої виграшної) позиції.

Знаходження такого класу виграшних позицій для гри рівносильне її розв’язанню. До перемоги веде стратегія – перехід до виграшних позицій. При цьому, якщо початкова позиція виграшна, то виграє той, який починає. Пошук виграшних позицій в більшості випадків доцільно проводити за допомогою аналізу кінцівки гри, іноді до таких позицій можна дійти інтуїтивно.

Задача 2 [5]. Два гравці записують по черзі числа 1 і –1 в одиничні клітинки таблиці розміром 1987 х 1987. Після того, як всі клітинки заповнені, для кожного рядка, стовпця і двох діагоналей таблиці підраховується добуток чисел, які там записані. Довести, що гравець, який робить перший хід, може грати так, щоб серед цих добутків було рівно 1990 додатних.

Розв’язання. Оскільки число 1987 непарне, то існує клітинка, центром якої є центр симетрії даної таблиці. Для кожної іншої клітинки існує клітинка, симетрична з нею відносно центра таблиці. Якщо перший гравець хоче домогтись вказаного в задачі результату, то своїм першим ходом він має записати в центральну клітинку число (–1), а після кожного ходу другого гравця йому слід записувати число протилежного знаку в клітинку, симетричну відносно центра таблиці із клітинкою “суперника”. Якщо, наприклад, другий гравець своїм першим ходом записує число (+1) в клітинку першого стовпця, то перший гравець записує число (–1) в симетричну з нею клітинку 1987-го стовпця. Після цього обміну ходів в кожному із заданих стовпців залишиться по 1986 клітинок, тому в першому стовпцеві буде 993+1 число (+1) і 993 числа (–1), тобто добуток чисел буде дорівнювати –1. В 1987 стовпцеві буде 994 клітинки з числами (–1) і 993 – з числами (+1). Добуток всіх чисел дорівнює (+1). Таким чином, в тому рядку чи в тій діагоналі, де перший запис робить перший гравець, добуток чисел дорівнює (+1). Сюди відносяться, перш за все, обидві діагоналі, той рядок і той стовпець, які містять центральну клітинку (всього 4). В решті рядків і стовпців буде 1986 з додатними добутками і 1986 – з від’ємними.

$$1986 + 4 = 1990$$

Задача 3 [5]. Двоє по черзі ставлять на вільні клітинки шахової дошки коней: один – білих, другий – чорних, роблячи це так, щоб виставлений кінь не міг бути взятий жодним із вже поставлених противником коней. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє при правильній грі: той хто починає гру чи його партнер – і як треба ходити, щоб виграти?

Розв'язання. Нехай другий гравець, роблячи черговий хід, ставить свого коня на клітинку, яка симетрична відносно центра дошки клітинці, на яку тільки що поставив коня його партнер. Доведемо, що вказана стратегія дозволяє другому гравцю завжди добитися перемоги. Для цього покажемо, що якщо

перший гравець може зробити черговий хід, то черговий хід може зробити і його партнер.

В силу вибору стратегії, по – перше, вільна клітинка, на яку другий гравець ставить коня. По – друге, цей кінь не може бути взятий тільки що поставленим конем партнера, бо ці коні знаходяться на клітинках одного кольору. По – третє, цей кінь не може бути взятим жодним з інших виставлених партнером коней: якби він міг бути взятий з клітинки А, то виставлений останнім кінь першого гравця міг би бути взятий конем із клітинки, симетричної А відносно центра.

Зауваження. Існують і інші стратегії, які дозволяють завжди виграти тому, хто ходить другим. Наприклад, він може ставити коня на клітинку, симетричну клітинці, на яку тільки що поставив коня його партнер, відносно вертикальної (горизонтальної) осі симетрії дошки.

Задача 4. Маємо дві купи каменів – по 7 в кожній. За хід дозволяється взяти будь-яку кількість камінців, але тільки з однієї купки. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє?

Розв'язання. Почнемо гру з двох куп, в кожній з яких по одному каменю. Тоді, зрозуміло, що перший програє.

Якщо ми додамо в одну з кучок ще один камінь, тоді зрозуміло, що виграє починаючий: він першим своїм ходом візьме із купки, де два камені, один камінь і отримає позицію, яка розглянута вище, тільки в даному випадку вже він другий.

Якщо в кучках 3 і 1 камінь, тоді знову виграє той, хто першим починає гру: він зрівнює кількість камінців в купах, тобто бере два камені і отримує, що число камінців буде 1 та 1. І ця позиція виграшна для нього.

Якщо у купках по 2 камінці, тоді знову програє починаючий: на будь-який хід, суперник може взяти таку ж кількість каменів із іншої купи.

Таким чином, не важко здогадатись, як діяти гравцеві, який робить другий хід, щоб здобути перемогу: він повинен робити точно такі ж ходи, як і перший гравець, тільки камені, він повинен брати з іншої купки.

Неважко зрозуміти і загальну виграшну стратегію, коли у купках довільна кількість каменів:

- якшо кількість камінців у купках рівна, то необхідно урівнювати число камінців в купках після ходів суперника, виконуючи симетричні ходи;
- якщо ж купки мають різну кількість камінців, тоді починаючий гравець своїм ходом урівнює число камінців в купках і далі діє так само, як у попередньому випадку. Тут перемогу отримує той, хто робить перший хід.

Задача 5. Двоє гравців по черзі розламують шоколадну плитку 6 х 8. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого зі шматків уздовж заглиблення на плитці Програє той, хто не зможе зробити наступного ходу. У котрого з гравців є виграшна стратегія ?

Розв'язання. Перемога першого гравця досягається незалежно від його гри, все ж можна було б запропонувати для нього цілком осмислену стратегію. Припустимо, що своїм першим ходом він розламав плитку на дві однакові частини розмірами 6х4. Тоді, яку б із цих частин не розламав другий гравець, у першого є можливість зробити аналогічний (симетричний) розлом у тотожній їй

другій частині. При цьому одержимо дві пари рівних між собою шматків. Тоді, який би шматок не розламав другий гравець, перший знову має змогу зробити аналогічний розлом шматка, який входить із розламаним в ту ж саму пару. Таким чином, скільки б не продовжувалася гра, ходи першого гравця не зможуть вичерпатися раніше, ніж ходи другого. А оскільки число розломів плитки є скінченним, ми дістаємо, що врешті-решт вичерпаються ходи обох гравців. З попередніх міркувань випливає, що останній хід при цьому буде за починаючим гру, який і здобуде перемогу.

Задача 6. Яка найбільша кількість дамок може бути поставлена на шашковій дошці (8 х 8 кліток) так, щоб кожна дамка була побита тільки однією іншою дамкою?

Розв'язання. Зрозуміло, що жодна дамка не може розміщуватися на краю дошки. Крім того, в двох квадратах дошки, які обведені на рисунку жирною лінією, всі 5 чорних кліток не можуть бути зайняті (центральна дамка не б'ється.).

Тому зайнятими можуть бути не більше 16 кліток.

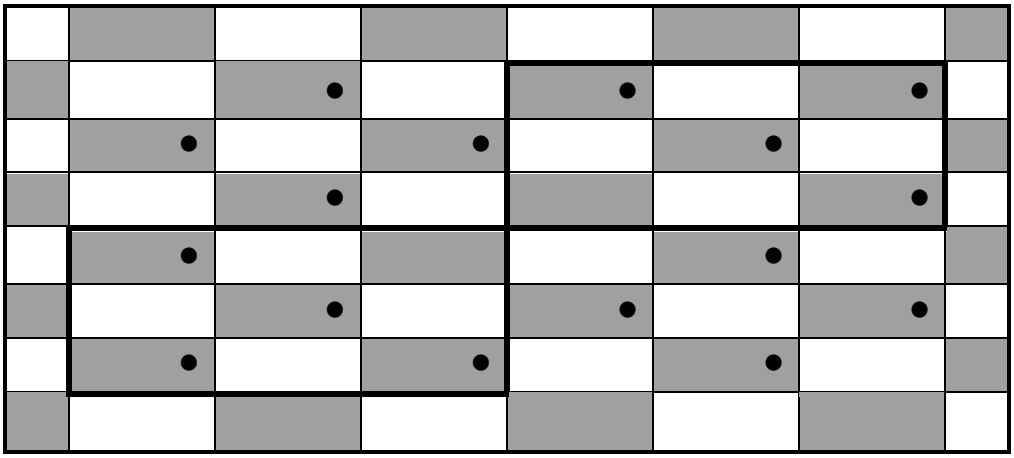


Рис.1

В той же час 16 дамок з отриманням умов задачі можна розставити так, як показано рисунку (рис.1).

Висновки. Отже, ігрові задачі є одним з найкращих методів розвитку інтелекту. Вони розвивають не лише знання, а й вміння логічно мислити, передбачати, добре орієнтуватись у будь-яких ситуаціях та швидко діяти. Ці задачі в невимушеній ігровій формі покращують математичну логіку учнів. Незвичність ситуацій, неочевидність відповідей на поставлені запитання інтригують, та змушують докладати зусиль для пошуку виграшного шляху.

Література:

1. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К. : А.С.К., 2004. – 336с.
2. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: АСА, 1994. – 180с.

3. Гусев В.А., Орлов И.А., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах. – М.: Просвещение, 1984. – 150с.
4. Петров Н.Н. Математические игры. – Ижевск: УДГУ, 1994. –199с.
5. Т. П. Бахтина. Готовимся к олимпиадам, турнирам и математическим боям. – Минск: АВЕРСЭВЬ, 2004. –215с.

Гончарук Вікторія Володимирівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У 5-6 КЛАСАХ

Постановка проблеми. На сьогодні одним із основних завдань сучасної освіти є формування компетентної особистості. Пошук нових можливостей підсилення прикладної спрямованості шкільного курсу математики, засобів формування навичок математичного моделювання є перспективним напрямком досліджень у сфері теорії і методики навчання математики. Проблема модернізації освіти в даний час широко обговорюється в теорії та практиці, особливо з позиції активізації творчої пізнавальної діяльності учнів. Активізація пізнавальної діяльності учнів – один з дидактичних принципів, роль якого істотно зросла в умовах розвиваючого навчання. Проблема активізації включає в себе кошти для здійснення такої діяльності.

Математичне моделювання як метод пізнання в наукових дослідженнях застосовується давно і незалежно розвивається в різних галузях знань. Однак, тривалий час відсутньою була єдина система понять та єдина термінологія. Зламним моментом у розвитку моделювання виявилася середина XX ст. Саме в цей час розширилось коло дослідницьких і прикладних задач, які розв'язувалися науковими методами, а це спричинило необхідність побудови їх моделей. Відтоді моделювання стало невід'ємним інструментом в діяльності науковців, освітян, інженерів та інших громадян [1].

Мета статті: виділення етапів навчання учнів основної школи математичному моделюванню та детальний розгляд пропедевтичного етапу навчання математичного моделювання.

Виклад основного матеріалу. Моделювання – важливий метод наукового пізнання і сильний засіб активізації учнів у навчанні. Відзначається, що однією зі складових математичної освіти є нове уявлення про предмет математики. В основі змісту шкільних підручників має бути передбачено створення та розробка схем, моделей та їх варіантів, створення моделей за відомими схемами, додаток вже розроблених схем безпосередньо в навчанні. Для того щоб краще побачити

загальні риси засвоюваного дії, треба абстрагуватися від непотрібних в даному випадку властивостей предметів, а це і означає, що потрібно перейти до дії з моделями, вільними від всіх інших властивостей, крім потрібних в даному випадку. До основних цілей навчання математики належить формування умінь будувати математичні моделі найпростіших реальних явищ, дослідити явища за заданими моделям, конструювати програми моделей; залучення учнів до досвіду творчої діяльності та формування у них вміння застосовувати його. Але очевидно, що такі вміння повинні починати формуватися не в 8 – 11 класах, а значно раніше, вже в 5 – 6 класах, для чого можуть бути використані сюжетні завдання, що описують реальну або наближену до реальної ситуацію на неформально-математичній мові. В основі рішення сюжетних завдань лежить математичне моделювання, тому необхідно організувати навчання елементам моделювання вже на ранніх етапах навчання, а саме в 5 – 6 класах, коли є можливість додатково пропонувати учням такі завдання, цілеспрямовано сприяють розвитку певних сторін мислення.

Для засвоєння учнями відповідного рівня умінь застосовувати метод математичного моделювання його навчання має бути наскрізним [11]. Пропонується організація навчально-виховного процесу за такими етапами:

1). Пропедевтичний етап (5 – 6 класи), передбачає формування уявлень про математичну модель, її види та деякі властивості; уміння будувати математичну модель до задачі або складати задачу за даною математичною моделлю.

2). Початковий етап (7 – 8 класи), передбачає формування поняття про математичну модель, її види та етапи математичного моделювання; уміння будувати доцільні математичні моделі до задачі.

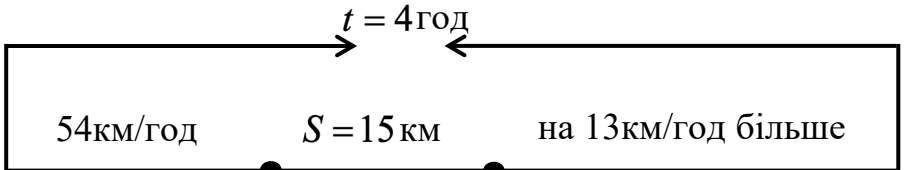
3). Основний етап (9 клас), передбачає узагальнення знань про математичну модель, її види та етапи математичного моделювання; формування уміння використовувати інформаційно-комунікаційні технології при створенні та дослідженні математичної моделі.

4). Дослідницький етап (9 – 11 класи), передбачає більш глибоке вивчення математичного моделювання на гуртках, факультативах; написання наукових робіт в системі діяльності МАН.

Детальніше зупинимося на пропедевтичному етапі навчання учнів математичного моделювання.

Результати аналізу діючих підручників [2, 3, 4, 5] з математики показали, що школярі 5 – 6 класів знайомляться з різними видами моделей, починаючи від знако-символьних (числовий і буквений вираз, рівняння) і закінчуючи образними (схеми, таблиці, малюнки, рисунки геометричних фігур та тіл, діаграми). Формування уявлення про числовий вираз як математичну модель відбувається в процесі складання до прикладної задачі виразу, результат обчислення якого задовольняє вимогу задачі. Наприклад:

Задача 1. З двох пунктів одночасно назустріч один одному виїхали два мотоциклісти. Швидкість одного з них дорівнює 56 км/год, а другого – на 13 км/годбільша. Знайди відстань між пунктами, якщо через 4 год відстань між



мотоциклістами була 15 км [1, с. 106]. Звичайно, слід скласти графічний запис задачі (Рис. 1).

Рис. 1

Потім, проаналізувавши її умову і вимоги, скласти план розв´язання:

1. Знайти шлях, який подолав перший мотоцикліст.
2. Знайти швидкість другого мотоцикліста.
3. Знайти шлях, який подолав другий мотоцикліст.
4. Знайти загальну відстань між пунктами, просумувавши відстані, подолані обома мотоциклістами, і 15 км.

Далі згідно з вище зазначеним планом розв'язати задачу.

1. 56·4 – шлях, подоланий першим мотоциклістом.
2. 56+13 – швидкість другого мотоцикліста.
3. (56+13)·4 – шлях, подоланий другим мотоциклістом.
4. 56·4+(56+13)·4+15 – відстань між пунктами.

Також варто наголосити учням, що складений числовий вираз 56·4+(56+13)·4+15 є знако-символьною моделлю задачі, а побудований на початку її графічний запис є образною моделлю. Обчисливши значення виразу, можна знайти, що відстань між пунктами дорівнює 515 км. Розв'язування задач подібним способом не лише формує у школярів уявлення про модельта її види, а одночасно є пропедевтикою застосування в майбутньому алгебраїчного способу і значно спрощує роботу вчителя у цьому напрямку.

Методика вивчення теми «Числові і буквені вирази. Рівняння» у контексті математичного моделювання має складатися з двох етапів:

1. Формування уявлення про буквений вираз як знако-символьну модель.
2. Формування уявлення про рівняння як знако-символьну модель.

Першим етапом є формування в учнів уміння складати буквені вирази за умовою задачі і знаходити компоненти дій за результатом та іншими компонентами. Причому варто наголосити, що арифметична дія та її результат можуть мати тотожне знакове вираження.

Необхідно звернути увагу на те, що буквений вираз, зокрема формула, дозволяє узагальнити розв'язання різних типів задач і скласти певні правила-орієнтири.

Наведена вище робота дозволяє спростити процес навчання учнів розв'язуванню прикладних задач за допомогою рівнянь. Наприклад:

Задача 2. У трьох ящиках було 70 кгяблук. У другому ящику – вдвічі більше, ніж у першому, а в третьому – на 5 кг менше, ніж у другому. Скільки кілограмів яблук було укожному ящику [1, с.132] ?

Потрібно скласти до задачі образну модель – схему (Рис. 2).

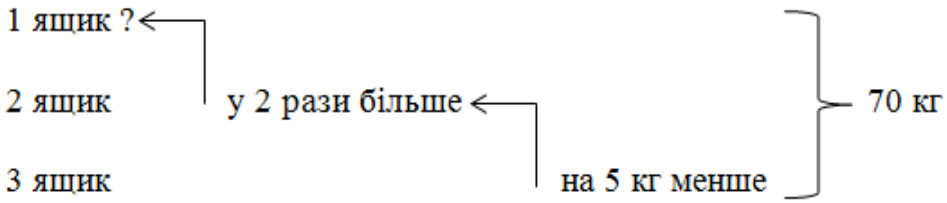


Рис. 2

Хід розв'язання задачі може бути таким:

1. Позначимо за х – кількість яблук у першому ящику.
2. Тоді у другому ящику буде 2х яблук, а утретьому (2х–5) яблук.
3. За умовою задачі у всіх ящиках разом було 70 кг яблук, тому:

Кількість яблук у 1 ящику	+	Кількість яблук у 2 ящику	+	Кількість яблук у 3 ящику	= 70

Маємо х+2х+(2х–5) = 70 – знако-символьну модель задачі.

4. Розв'язавши рівняння, отримаємо, що х = 15.
5. Тоді 2х = 2·15 = 30; 2х–5 = 2·15–5 = 25.
6. Отже, у першому ящику було 15 кг яблук, у другому – 30 кг, а у третьому – 25 кг. Здійснимо перевірку 15+30+25 = 70, 30:2 = 15, 25+5 = 30, що відповідає умові задачі.

На основі розв'язання подібних задач учитель має запропонувати учням пам'ятку (правило-орієнтир) для застосування алгебраїчного способу.

Також, враховуючи психолого-педагогічні особливості учнів 5 – 6 класів [6], при розв'язуванні прикладних задач за допомогою рівнянь, слід використовувати комп'ютерні презентації, оскільки наочне представлення умови задачі допомагає навіть найслабшим школярам правильно здійснити побудову математичної моделі.

Висновки. Отже, навчання учнів 5 – 6 класів математики із врахуванням вище зазначених методичних рекомендацій сприятиме формуванню у них: уявлення про числовий і буквений вираз, рівняння як знако-символьну модель; уявлення про кілька видів образних моделей: схеми, таблиці, малюнки; елементарні навички застосування методу математичного моделювання.

Література:

1. Швець В.О. Еволюція математичногомоделювання як методу пізнання і навчання / В. О. Швець, М. О. Філімонова // Математика в школі. – 2010. – №4. – С. 22 – 25.

2. Бевз Г.П. Математика: Підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П.Бевз, В.Г.Бевз. – К.: Зодіак-ЕКО, 2005. – 352 с.
3. Бевз Г.П. Математика: Підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Зодіак-ЕКО, 2005. – 352 с.
4. Янченко Г.М. Математика: підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.М. Янченко, В.Р. Кравчук. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. – 254 с.
5. Янченко Г.М. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.М. Янченко, В.Р. Кравчук. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. – 278 с.

Дерепащук Людмила Михайлівна
студентка 2 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ КОМБІНАТОРИКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ «ВЕНГЕРСЬКОГО ШАРНІРНОГО КУБИКА» ТА У ЖИТТІ

Постановка проблеми. Вибором об'єктів і розташуванням їх в тому чи іншому порядку доводиться займатися мало не у всіх областях людської діяльності, наприклад конструктору, що розробляє нову модель механізму, вченому-агроному, плануючого розподіл сільськогосподарських культур на декількох полях, хіміку, вивчаючому будова органічних молекул, що мають даний атомний склад. Комбінаторика оточує нас скрізь. Розглянемо детальніше її застосування.

Аналіз попередніх досліджень. Із завданнями, які отримали назву комбінаторних, люди зіштовхнулися в глибокій давнині. Вже кілька тисячоліть тому в Стародавньому Китаї захоплювалися складанням магічних квадратів, в яких задані числа розташовували так, що їх сума по всіх горизонталях, вертикалях і головним діагоналях була однією і тією ж. У Стародавній Греції підраховували кількість різних комбінацій довгих і коротких складів у віршованих розмірах, займалися теорією фігурних чисел, вивчали фігури, які можна скласти з частин особливим чином розрізаного квадрата.

Комбінаторні задачі виникали і в зв'язку з такими іграми, як шашки, шахи, доміно, карти, кістки і т.д. (Наприклад, задача про розстановку восьми ферзів на шахівниці так, щоб жоден з них не виявився під боєм, про обході всіх полів дошки шаховим конем і т.д.).

Комбінаторика стає наукою лише в XVII ст. – в період, коли виникла теорія ймовірностей. Щоб вирішувати теоретико-ймовірнісні завдання, потрібно було вміти підраховувати кількість різних комбінацій, що підпорядковані тим чи іншим умовам. Після перших робіт, виконаних в XVI ст. італійськими вченими Дж. Кардано, Н. Тарталья і Г. Галілеєм, такі завдання вивчали французькі математики Б. Паскаль і П. Ферма. Першим розглядав комбінаторику як самостійну гілку науки німецький філософ і математик Г.Лейбніц, який опублікував у 1666 р. роботу «Про мистецтво комбінаторики», в якій вперше

з'являється сам термін «комбінаторний». Чудові досягнення в області комбінаторики належать Л. Ейлера. Комбінаторними задачами цікавилися і математики, що займалися складанням і розгадуванням шифрів, вивченням давніх писемностей. Тепер комбінаторика застосовується в багатьох областях науки: в біології, де вона застосовується для вивчення складу білків і ДНК, в хімії, механіці складних споруд і т.д.

Мета статті: описати основні поняття з комбінаторики. Дослідити застосування комбінаторики у житті людства та метематиці. Дослідити етапи розв'яку задачі про «венгерський шарнірний кубик».

Виклад основного матеріалу. По мірі розвитку комбінаторики з'ясувалося, що, незважаючи на зовнішню відмінність досліджуваних нею питань, багато з них мають один і той же математичний зміст і зводяться до задач про скінченні множини та їх підмножини. Поступово виявилося кілька основних типів задач, до яких зводиться більшість комбінаторних проблем. Важливу область комбінаторики становить теорія перерахувань. З її допомогою можна підрахувати число розв'язків різних комбінаторних задач. В основі цієї теорії лежить «правило суми» і «правило добутку». Вони говорять: «якщо множина A складається з m елементів, а множина B – з n елементів, причому ці множини не мають спільних елементів, то їх об'єднання $A \cup B$, тобто сукупність всіх елементів з A і B, містить $m+n$ елементів; множина $A \times B$, що складається зі всяких пар (a,b), де елемент a належить множині A, а елемент b належить множині B, містить mn елементів».

За допомогою правила суми легко порахувати і число елементів в $A \cup B$, коли A і B мають спільні елементи. Якщо позначити через $A \cap B$ множину всіх спільних елементів у множин A і B, то воно дорівнює

$$n(A)+n(B)-n(A \cap B),$$

де $n(A)$ – число елементів у множині. Це твердження – окремий випадок так званої формули перекриттів.

Часто приходиться рахувати число послідовностей довжини m, складених з елементів деякої множини A, що складається з n елементів, як у випадку, коли серед елементів послідовності можуть бути повторювані, так і у випадку, коли всі ці елементи повинні бути різними. У першому випадку послідовності називають розміщеннями з повтореннями з n елементів по m і їх число позначають $\overline{A_n^m}$, а в другому – розміщеннями без повторень, їх число позначають A_n^m. Формули для $\overline{A_n^m}$ і A_n^m такі:

$$\overline{A_n^m} = n^m, \;\; A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

Розглянемо різні розміщення без повторень з n елементів по n, очевидно, що вони відрізняються один від одного лише порядком елементів; їх називають перестановками з n елементів. Число P_n таких перестановок дорівнює $n!$

$$P_n = A_n^n = n!$$

Якщо відволіктися від порядку елементів, то виникає завдання: скільки підмножин, що містять m елементів і відрізняються одна від одної хоча б одним елементом, можна витягти з множини A, що містить n елементів. У комбінаториці такі підмножини називають комбінаціями з nелементів по m, їх число позначають C_n^m. Можна довести, що

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Цілий ряд комбінаторних задач виникає при розбитті множин на частини: знайти число таких розбиттів, якщо число частин дорівнює k; знайти, скількома способами можна число n записати у вигляді суми k доданків; знайти, скількома способами можна розкласти n предметів по k ящиках, і т.д. Зазвичай задачі теорії розбиття і розкладок зводяться до формули перекриттів і розібраним вище основним завданням комбінаторики. Такими ж способами розв'язуються комбінаторні задачі з обмеженнями, наприклад підрахунок числа розміщень з повтореннями, в яких жоден елемент не варто двічі поспіль, і т.д.

У розв'язку комбінаторних задач часто використовують графічні методи – зображення розбиттів числа на доданки у вигляді точкових діаграм, так звані графи (геометричні фігури, що складаються з точок і з'єднують їх відрізків) і т.д.

Теорія графів стала в наші дні однією з тих, що найбільш бурхливо розвивається частин комбінаторики. Багато загальних теорем цього розділу математики формулюються на мові графів.

Комбінаторика не зводиться тільки до підрахунку кількості тих чи інших підмножин або послідовностей. При розв'язанні комбінаторних проблем іноді потрібно лише довести, що дана проблема має розв'язок, або переконатися у відсутності його. Наприклад, доведено наступне твердження: для будь-яких чисел m і n знайдеться таке число N, що будь граф, що складається з N точок і всіх з'єднують ці точки відрізків (вони розфарбовані в m кольорів), містить частину, що складається з n точок і відрізків, що з'єднують їх, таку, що всі відрізки мають один і гот же колір (теорема Рамсея).

Якщо заданим умовам задовольняють кілька конфігурацій, тобто якщо комбінаторна задача має кілька розв'язків, то може виникнути питання про вибір з них розв'язк, оптимального за тими чи іншими параметрами. Наприклад, якщо є кілька міст, кожні два з яких з'єднані авіалінією, то виникає задача про те, як мандрівникові побувати по одному разу в кожному місті, налітавши найменшу відстань.

Комбінаторні задачі фізики, хімії, біології, економіки та інших наук, які не піддавалися раніше розв'язкам через трудомісткість обчислень, стали успішно вирішуватися на ЕОМ. В результаті цього комбінаторні методи дослідження все глибше проникають в багато розділів науки і техніки.

У 1970-1980 рр.. комбінаторика добилася нових успіхів. Зокрема, за допомогою ЕОМ розв'язана проблема чотирьох фарб: доведено, що будь-яку

карту можна розфарбувати в чотири кольори так, щоб ніякі дві країни, які мають спільний кордон, не були пофарбовані в один і той же колір.

Венгерський шарнірний кубик.

Задача про «венгерський шарнірний кубик» є однією з тих, що яскраво розкриває застосування комбінаторики.

Надзвичайно популярною головоломкою став кубик Рубик (венгерський шарнірний кубик) (рис. 1), винайдений у 1975 р. викладачем архітектури з Будапешта Ерне Рубиком для розвитку просторової уяви в студентів. Кубик Рубик – це куб, як би розрізаний на 27 однакових кубиків. У вихідному положенні кожна грань куба пофарбована в один з 6 кольорів. Дотепний механізм дозволяє повертати будь-який шар з 9 кубиків, що примикають до однієї грані куба, навколо її центру (на рис. 1 злегка повернутий верхній шар); при цьому кольори граней змішуються. Завдання полягає в тому, щоб повернути різнокольорові грані кубика у вихідне положення.

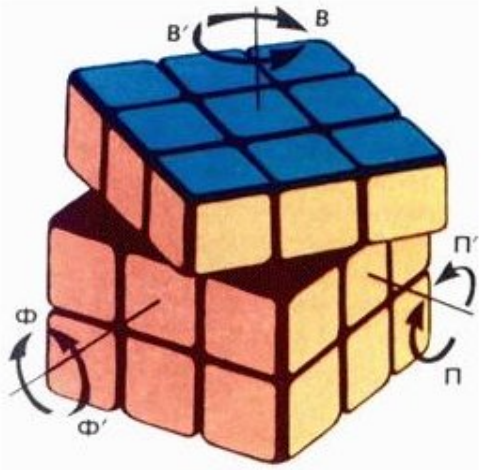


Рис.1

Наведемо один з численних алгоритмів розв’язання цього завдання. Він включає два етапи: на першому збираються кубики, що розташовуються в серединах ребер куба (реберні), на другому – кутові. Кожен кубик може перебувати на одному і тому ж місці в декількох положеннях (реберний – у двох, кутовий – у трьох). У відповідності з цим кожен етап ділиться на два кроки: на першому кубики тільки розставляються на потрібні місця, а на другому вони, якщо це необхідно, розгортаються на своїх місцях так, щоб їх кольори збіглися з «правильними» кольорами граней. Орієнтирами при визначенні правильних положень реберних і кутових кубиків служать квадрати в центрах граней: їх взаємне розташування не змінюється при обертанні граней, а їх кольори задають майбутні кольору граней куба.

Записувати послідовності ходів (операції) будемо, користуючись позначеннями рис. 1; наприклад, $\Phi\Pi'$ – це послідовність з двох поворотів: фасадної (передньої) грані на 90° за годинниковою стрілкою і правої – на 90° проти годинникової стрілки. Весь процес складання заснований на операції $F = \Pi\text{В}\Phi\text{В}'\Phi'\Pi'\Phi$ і зворотної до неї операції $F' = \Phi'\Pi\Phi\text{В}\Phi'\text{В}'\Pi'$.

1-й етап. Збір реберних кубиків.

1. Для розстановки реберних кубиків застосовується операція F (або) F', що міняє місцями рівно два з них. (Дію операції на реберних кубиках показано на рис. 2.)

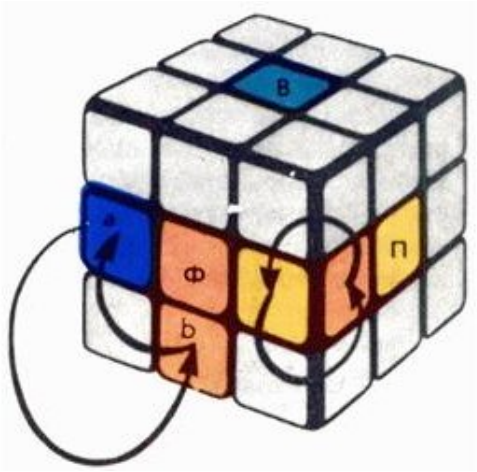


Рис. 2

2. Для розгортання застосовується операція $F^2 = F \cdot F$; в результаті на своїх місцях повертаються два кубика (a і b на рис. 2).

2-й етап. Збір кутових кубиків.

1. Для розстановки кутових кубиків застосовується операція $FB'F'B$, дія якої показано стрілками на рис. 3, і зворотна операція, що переставляти ті ж кубики в зворотньому порядку.

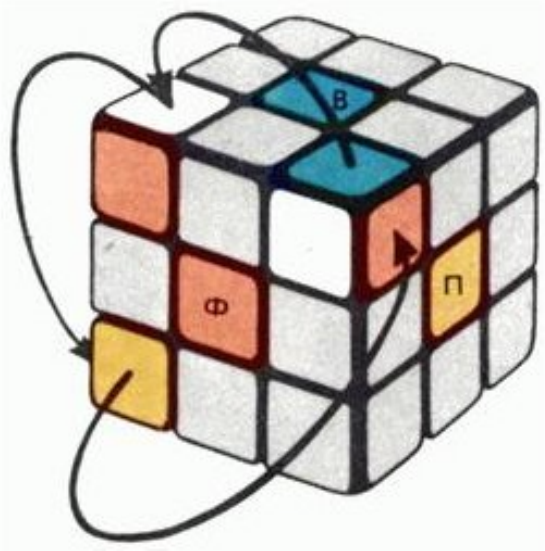


Рис. 3

2. Для розгортання кутових кубиків застосовується операція F^4, дія якої показано на рис. 4, і зворотна до неї операція $(F')^4$, що повертає ті ж три кубики в протилежному напрямку.

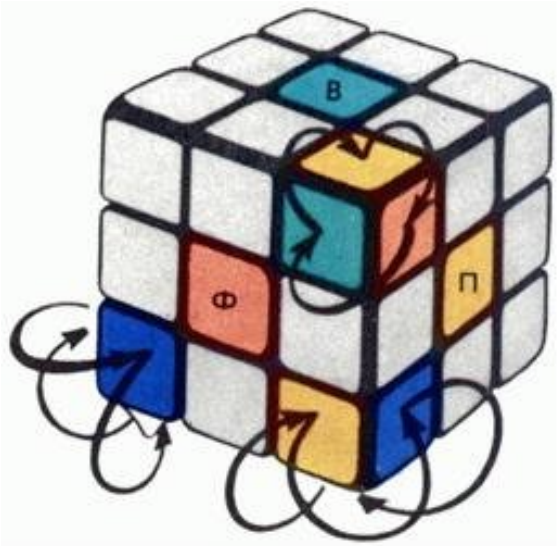


Рис. 4

Зазначені операції можна використовувати і в рамках інших загальних схем. Наприклад, не важко правильно зібрати всі реберні кубики, крім чотирьох, що лежать в одній грані, після чого можна перейти до виконання першого етапу алгоритму. Загальне число ходів при цьому помітно скорочується, але залишається все ще більшим. Подальше скорочення можна отримати, зокрема, за рахунок розширення набору стандартних операцій.

Є й принципово інші схеми складання. Кращі з них дозволяють обійтися приблизно 50 ходами-поворотами, але теоретично з будь-якого стану кубика можна повернутися у вихідне не більше ніж за 23 ходи. Кращий час, на чемпіонаті світу у 1982 р. по швидкісній збірці кубика Рубика, склав всього 22,95 с.

Завдання пошуку оптимального (по числу ходів) алгоритму є найскладнішою і не розв'язаною поки математичною задачею, пов'язаною з кубиком Рубиком. Представляє інтерес також вивчення групи, породженої поворотами граней, та ін. Кубик Рубик служить не тільки цікавою розвагою, але й прекрасним наочним посібником з алгебри, комбінаторики, програмуванню.

Висновки. Комбінаторика – важливий розділ математики, знання якого необхідно представникам різноманітних спеціальностей. З комбінаторними задачами доводиться мати справу фізикам, хімікам, біологам, лінгвістам, спеціалістам по кодам та ін. Комбінаторні методи лежать в основі розв'язку багатьох задач теорії ймовірностей та її застосувань. Зараз комбінаторні методи застосовуються в теорії випадкових процесів, математичній статистиці, математичному програмуванні, обчислювальній математиці, плануванні експериментів і т.д.

В математиці комбінаторика використовується при вивченні кінцевих геометрій, комбінаторної геометрії, представлень груп, неасоціативних алгебр і т.д. Комбінаторика – невід’ємна частина життя сучасної людини.

Література:

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 350с.

2. Андерсон Д. Дискретна математика і комбінаторика. – М.: Вільямс, 2006. – 960 с.
3. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 208 с.
4. Рейнгольд Е., Нівергельт Ю., Део Н. Комбінаторні алгоритми. Теорія і практика. – М.: Світ, 1980. – 476 с.
5. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М: МГУ, 1985. – 385с.
6. Рыбников К.А. Комбинаторный анализ. Очерки истории. – М.: Изд. мехмата МГУ, 1996. – 124 с.
7. Стенли Р.К. Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990. – 440с.
8. Стенли Р.К. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. – М.: Мир, 2009. – 767 с.
9. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М.: Наука, 1989. –267с.
10. Носов В. А. Комбинаторика и теория графов. – М.: Наука, 1999. –475с.

Костюк Дмитро Анатолійович
студент 4 курсу, напрям підготовки «Історія»

МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ІСТОРИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Постановка проблеми. На рівні буденної свідомості зберігається стійке протиставлення історії і математики, думка про їх несумісність. Однак контакти і досить успішна співпраця фахівців цих наук почалися дуже давно.

Що може дати математику історія? Відповідь на це питання дивовижно просте – без історії математик не просунувся б у своїй науці далі елементарного перерахунку предметів, оперуючи, швидше за все, цифрами, відповідними кількістю пальців.

Чи потрібна історику математика? Тут доречно згадати вислів К.Маркса. про те, що "наука тільки тоді досягає досконалості, коли їй вдається користуватися математикою". Заява максималістського характеру, але подивіться навколо – математика сьогодні проникла у всі галузі знання, дала життя новим науковим напрямкам, впроваджується в мистецтво. І в той же час науки не втрачають своєї специфіки, а мистецтво залишається мистецтвом. Дослідимо детальніше застосування математики у різних історичних дослідженнях.

Аналіз попередніх досліджень. Застосування математико-статистичних прийомів в історичній науці має давнє коріння. Перші досліди в цьому напрямку розпочалися в кінці XIX ст. на основі використання даних земської статистики. У роботах А.Кауфмана, І.Лучіцкого, Н.Любовіча, Н.Нордмана, опублікованих на початку XX століття, міститься не тільки приклад використання статистичних методів, але і перші спроби теоретичного осмислення труднощів і переваг

взаємодії історії і математики. Ця традиція не була перервана революційними потрясіннями 1917 р. і різноманітність методичних підходів відрізняє праці істориків 20-х рр. Цікаві роботи були створені Г.Баскіним, Л. Кріцманом, І.Росніцкім по проблемі соціальної диференціації, оригінальні гіпотези висловлені В.Анучівим, Л. Чижевським про циклічність історичних "сплесків" активності (повстань, страйків) у зв'язку з сонячною активністю та ін.

Мета статті: з'ясувати важливість знання математики під час історичних досліджень, а також виявнити які математичні теореми та формули є потрібними у певних історичних ситуаціях.

Виклад основного матеріалу. Певну допомогу історику може надати математика . Під математикою зазвичай розуміється комплекс математичних дисциплін та наукових напрямків, що займаються вивченням абстрактних структур і операціями над об'єктами простішої природи, а значить і кількісними характеристиками соціальних явищ.

В основі сучасних математико-статистичних теорій лежить поняття ймовірності. Під нею розуміється об'єктивна категорія, що виступає мірою можливості того чи іншого результату, що характеризує з кількісною визначеністю можливість появи даної події. За класичним означенням ймовірність – це величина рівна відношенню числа можливих випадків, що сприяє даній події, до числа всіх рівноможливих випадків.

Припустимо, що в студентській олімпіаді беруть участь 50 осіб, з них 6 – студенти ВДПУ. У даному прикладі 50 – величина, що характеризує рівноможливі шанси до перемоги, а 6 - шанси перемоги студентів ВДПУ. Отже, в 6 випадках з 50 можливих можуть перемогти студенти ВДПУ; або 6:50 = 0,12, тобто ймовірність перемоги нашим студентам дорівнює 0,12 (або 12%).

З'ясуємо чи піддаються соціальні явища ймовірнісному (з мате-математичної точки зору) опису? Для ймовірнісних подій необхідно виконання ряду *умов*:

1. Явища, що спостерігаються або можуть бути повторені необмежену кількість раз, або відразу здійснене спостереження за однаковими подіями у великій кількості. Не треба зайвий раз доводити, що експеримент, а значить незліченний повтор подій в історії неможливий. Однак здійснити спостереження за великим числом однакових подій можна при вивченні масових джерел, масових сукупностей однорідних(однотипних за структурою) документів.

2. Незалежність подій. Стосовно до можна говорити про незалежність історичних фактів, між ними існує причинно-наслідковий зв'язок, але в даному випадку мова йде про незалежність документів. Кожен з них повинен формуватися самостійно, а не списуватися один з іншого.

3. Наявність постійних умов при створенні початкової бази.

Відхід від ідеї суворої детермінованості, обов'язковості історичних подій, що відбулися, введення в науковий обіг комплексів масових джерел дозволяє відносити явища історії до імовірнісних, а отже розширити методичний арсенал введенням в нього математичних методів.

Основним завданням вивчення історичних явищ і процесів виступає розкриття внутрішнього механізму та всебічне пояснення їх сутності.

Кінцева мета будь-якого історичного дослідження полягає у виявленні закономірностей. Одні виявляються в одиничних випадках (динамічні закономірності). Характер динамічної закономірності встановлює поведінку кожної ознаки. Інші – тільки в масових, тобто в групі явищ, яка поряд з ознаками, властивими індивідуальним явищам, характеризуються і загальними для всіх (статистичні закономірності).

Суспільне явище складається з маси індивідуальних і виявити історичну закономірність – значить знайти повторюваність всередині всієї маси явищ, де поряд з головним діє і безліч другорядних, нестійких, випадкових факторів. Це призводить до того, що в суспільстві немає строго певних динамічних закономірностей.

Використання в історичному дослідженні методів вивчення статистичних закономірностей дозволяє в масі випадкових факторів виділити основні, головні тенденції, притаманні в цілому розглянутого явища.

Разом з тим не можна відкидати, випускати з поля зору й другорядні фактори, що викликають ті чи інші скачки в основній лінії розвитку суспільства.

Аналізуючи отримані дані, історик на основі змістовного, якісного підходу вирішує, чи відображає знайдена статистична закономірність історичне явище, який ступінь узагальнення несе, які умови її визначили.

Таким чином, мова йде не про придбання історією математичної точності, а про розширення методичного арсеналу історика, про можливість отримання нових відомостей на більш досконалому кількісному і якісному рівні.

Історична наука не втрачає своєї специфіки, тому математичні прийоми не замінюють якісний аналіз і не зачіпає предмет історичної науки.

Не вироблено математичних методик, не пов'язаних з якісною стороною роботи. Не існує універсальних прийомів дослідження для всіх історичних проблем, для всіх історичних джерел. Вихідні теоретико-методологічні принципи історичної науки визначають цілі, шляхи та методи дослідження. На їх основі відбувається відбір, аналіз, а також узагальнення фактичного матеріалу.

У процесі дослідження співвідношення кількісного і якісного аналізу відбувається *чотири етапи*:

1.Постановка проблеми, вибір джерел і визначення суттєвих ознак відбувається при переважанні змістовного, якісного аналізу. Цей етап дуже важливий для всієї подальшої роботи, тому що від правильного виявлення значущих ознак залежить вибір методів аналізу. Тут відбувається деяка формалізація джерела.

Велика роль математики при вирішенні завдань, пов'язаних з підвищенням інформативної віддачі джерел. Сучасники, фіксуючи ті чи інші аспекти історичних явищ, переслідують мету, відмінну від дослідницької. В зв'язку з цим дослідник не завжди може знайти в документах прямих відомостей про аспекти явища, які цікавлять. Практично будь-яке джерело має приховану інформацію,

яка характеризується різноманіттям взаємозв'язку, властиві історичних явищ. Вона виявляється в результаті спеціальної обробки і аналізу даних.

2. Вибір математичних методів в залежності від структури джерела, характеру даних і сутності методів визначається в нерозривній єдності якісного та кількісного аналізу.

3. На третьому етапі спостерігається відносна самостійність кількісного аналізу. Відбувається вияснення чисельних розподілів значень ознак, кількісних показників міри залежності між ними, визначаються показники інтенсивності впливу групи чинників на досліджувану систему. Йде розрахунок показників за формулами.

4. Змістовна інтерпретація отриманих результатів і побудова на їх основі теоретичних висновків вимагають від дослідника знання предмета, його кількісної і якісної сторони. Загальної схеми для такої інтерпретації не вироблено. Тут необхідно враховувати математичний аспект інтерпретації показників, отриманих в результаті розрахунків, виходячи із сутності застосованого методу. У той же час можна випускати з виду змістовний сенс проблеми, відступати від історичної можливості і реальності набутих показників.

Між описаними тут етапами існує найтісніший взаємозв'язок. Кожен попередній етап впливає на подальший і навпаки. Так, характер джерела визначає методику його аналізу, і в той же час сам метод впливає на вибір ознак.

Зазначена вище єдність якісних і кількісних характеристик явища має велике значення при використанні математичних методів та інтерпретації їх результатів.

Зміна кількісних параметрів може відбуватися в рамках однієї якості, а може призводити до придбання явищем нової сутності, нової якості.

В даний час історична наука досить широко користується математико-статистичними прийомами, чому в значною мірою сприяє комп'ютеризація робочого місця дослідника.

Висновки. Математика є засобом, за допомогою якого вирішуються багато найскладніших завдань. Якщо змоделювати ситуацію, то можна запитати – чим зручніше відчинити замкнені на замок двері: ломом або відповідним ключем? Звичайно ключем. Математика і є найчастіше "ключем", здатним розкрити історикам нові факти, нові джерела,створити концепцію, поставити крапку в спірних питаннях, узагальнити накопичену інформацію, змусити більш об'єктивно поглянути на пройдений людством шлях, відкрити нові перспективи та багато іншого.

Література:

1. Бородкин Л.И. Методологические проблемы применения математических методов в историко-гуманитарных исследованиях// Математизация современной науки: предпосылки, проблемы, перспективы. – 1986. – №4 – С.130 – 139.

2. Измайлова М.О., Рахманкулов И.Ш. Категория «средняя величина» и ее методологическое значение в научном исследовании. – Казань.: КГУ, 1982. – 145 с.
3. Математические методы в исследованиях по истории СССР. Библиографический указатель отечественной литературы 60-80-х гг. – Свердловск, 1989. – 198с.
4. Миронов Б.Н., Степанов З.В. Историк и математика, – М.: 1975. –249с.
5. Славко Т. И. Математико-статистические методы в исторических исследованиях. – М., 1981. – С.3 – 29.
6. Устинов В.А., Фелингер А.Ф. Историко-социальные исследования: ЭВМ и математика. – М., 1973.
7. Федорова Н.А. Математические методы в историческом исследовании. – К.: Форт-Диалог, 1996. – 110 с.

Мазай Аліна Яківна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

МАТЕМАТИЧНА ЗАДАЧА ЯК ЗАСІБ ОРГАНІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНО-ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ (НДДС)

Постановка проблеми. Однією з актуальних проблем сьогодення є підготовка вчителя-дослідника. Саме тому в умовах сучасної освіти особливу увагу слід звернути на індивідуальний розвиток особистості студента, пошук і розвиток творчих здібностей, формування навичок самостійного вирішення поставлених завдань. Необхідно формувати у студентів здатність самостійно мислити, застосовувати знання, уміти планувати діяльність, ставити питання й уміти знаходити на них відповіді, уміння ефективно співпрацювати в групах. Важливу роль у досягненні цього відіграє правильно організована система навчально-дослідницької діяльності (НДД) у ВНЗ. Особливе місце тут відводиться навчально-дослідницьким завданням, які спрямовують пошукову діяльність студентів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. До проблем організації НДД у вищих навчальних закладах звертались багато дослідників. Математичну задачу як засіб організації навчально-дослідницької діяльності студентів досліджено в працях Л. Антонюк, А. Енштейна, А. Єсаулова, В. Зінченко, Ю. Мельника, Д. Пойя, І. П'ятницької-Позднякової, Е. Резерфорда, С. Семенець, З. Слєпкань та інших вчених.

Більшість вчених-методистів вказують на те, що використання на заняттях задач дослідницького характеру дозволяє не лише підвищити рівень знань студентів за рахунок активізації їх навчально-пізнавальної діяльності, а й сприяє розвитку їх творчих здібностей. Правильний підбір та методика постановки таких задач надає заняттям природності та досконалості.

Мета статті: аналіз поняття математична задача та існуючих класифікацій математичних задач, розгляд задач дослідницького характеру на заняттях

математичного аналізу під час вивчення теми “Диференціальне числення функції однієї змінної”.

Виклад основного матеріалу. У психології задача розглядається як мета, задана в певних умовах, як особлива характеристика діяльності суб'єкта. Задача тут тлумачиться як суб'єктивне психологічне відображення тієї зовнішньої ситуації, у якій розгортається цілеспрямована діяльність суб'єкта [4].

В. Зінченко зазначає, що задача – це могутній засіб розвитку творчих здібностей суб’єкта, а розв’язування задач – це шлях формування і розвитку творчого мислення (на противагу запам’ятовуванню без належного розуміння). Проте лише ті задачі розвиватимуть творчі здібності студентів, процес розв’язання яких не вкладається в готові схеми чи методи розв’язування. Тобто, минулий досвід студента не містить готових методів дій, які можна було б застосувати під час розв’язування нестандартної ситуаційної задачі. Вона буде джерелом розумової активності, оскільки її вимоги та наявний досвід студента, вступаючи в суперечності, створюють рушійну силу, що викликає активну розумову діяльність, спрямовану на пошуки методів розв’язання задачі [2].

Якщо розглянути та проаналізувати існуючі класифікації задач, то можна дійти висновку, що майже до кожної з них належать задачі, що вимагають творчих та дослідницьких умінь. Так, наприклад: за кількістю невідомих у структурі задач є пошукові та проблемні задачі, за відношенням до теорії – нестандартні задачі, за функціями у процесі навчання – пізнавальні та розвиваючі. Також розрізняють задачі, що: стимулюють, організовують та здійснюють навчально-пізнавальну діяльність.

А. Єсаулов [1] виділяє наступну класифікацію задач:

 задачі, розраховані на відтворення (при їх розв'язуванні спираються на пам'ять та увагу);

 задачі, розв'язування яких приводить до нової, невідомої до цього думки, ідеї;

 творчі задачі.

Зауважимо, що активізує та розвиває мислення розв'язування задач двох останніх видів. Розглянемо деякі з них:

1. Задачі, вправи, що включають елементи дослідження. Найпростіші дослідження при розв'язуванні задач треба пропонувати, починаючи вже з перших занять. Згодом необхідно давати не лише задачі з елементами досліджень, але й задачі, що включають дослідження як обов'язкову складову частину.

2. Задачі на доведення здійснюють суттєвий вплив на розвиток мислення. Саме при виконанні доведень відточується логічне мислення, розроблюються логічні схеми розв'язування задач, в учнів виникає потреба обґрунтувати математичні факти.

Варто відмітити, що виділяють чотири функції задач: навчальна, виховуюча, розвиваюча, контролююча.

Особлива увага, останнім часом, приділяється розвиваючій функції задач. Не випадково Д. Пойа, Е. Резерфорд, А. Ейнштейн та інші зазначали, що задачі

не тільки і не стільки мають сприяти закріпленню знань, тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності, метод підходу до явищ, що вивчаються [3].

Розвиваюча функція задач спрямована на розвиток мислення студентів, на формування в них розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень, уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію тощо [4].

Виходячи з вищесказаного, розвиваюча функція задач значним чином досягається в результаті розв'язування задач дослідницького характеру. Розглянемо більш детально застосування таких задач на практичних заняттях математичного аналізу під час вивчення теми "Диференціальне числення функції однієї змінної".

Ми пропонуємо до практичних занять даної теми включати не лише типові задачі, які розв'язуються згідно з готовими алгоритмами та методами розв'язання, а й задачі дослідницького змісту, які є новими, нестандартними в очах студента. Такі задачі формують і розвивають творчі здібності та мислення, виступають джерелом розумової активності, сприяють формуванню НДД.

Розглянемо задачі дослідницького характеру, які можна запропонувати студентам на конкретних практичних заняттях під час вивчення теми "Диференціальне числення функції однієї змінної". Наприклад:

 тема практичного заняття "Геометричний і механічний зміст похідної".

Задача 1. Знайти геометричне місце вершин прямих кутів, дві сторони яких є дотичними до графіка функції $y = \frac{1}{4}x^2$.

Розв'язання. Нехай точка $A(a;b)$ є вершиною шуканого прямого кута, а x_1 і x_2 – абсциси точок дотику сторін даного кута з графіком функції $y = \frac{1}{4}x^2$ (рис. 1).

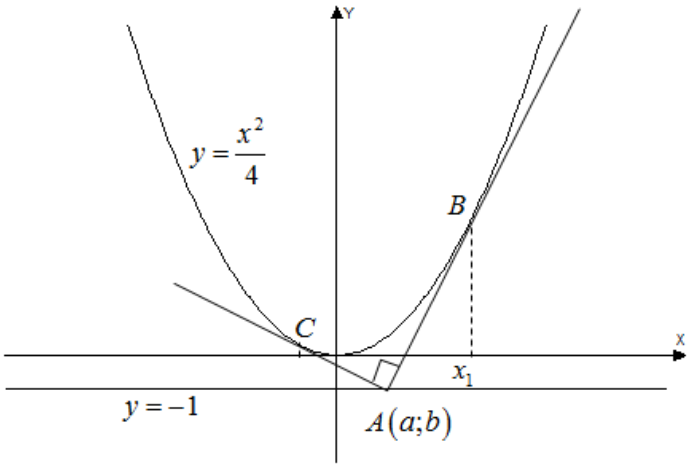


Рис. 1

Відмітимо, що за умовою задачі:

1) дотична до функції $y = \frac{1}{4}x^2$ в точці $B\left(x_1; \frac{1}{4}x_1^2\right)$ повинна проходити через точку $A(a;b)$;

2) дотична до функції $y = \frac{1}{4}x^2$ в точці $C\left(x_2; \frac{1}{4}x_2^2\right)$ повинна проходити через точку $A(a;b)$;

3) ці дотичні повинні бути взаємно перпендикулярними.

Рівняння дотичних до функції $y = \frac{1}{4}x^2$, які проходять через точки B і C, матимуть вигляд: $y = \frac{1}{2}x_1 x - \frac{1}{4}x_1^2, \quad y = \frac{1}{2}x_2 x - \frac{1}{4}x_2^2$.

З умов 1) - 3) отримуємо наступну систему рівнянь: $\begin{cases} b = \frac{1}{2}x_1 a - \frac{1}{4}x_1^2, \\ b = \frac{1}{2}x_2 a - \frac{1}{4}x_2^2, \\ \frac{1}{2}x_1 \cdot \frac{1}{2}x_2 = -1. \end{cases}$

Віднімаючи від першого рівняння системи друге, знаходимо, що

$0 = \frac{a}{2}(x_1 - x_2) - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$, тобто $(x_1 - x_2)(2a - (x_1 + x_2)) = 0$.

Таким чином, $x_1 + x_2 = 2a$. Далі додаємо перші два рівняння системи:

$2b = \frac{a}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)$, тобто $2b = \frac{a}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{4}((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)$.

Звідси, враховуючи, що $x_1x_2 = -4$, $x_1 + x_2 = 2a$ маємо $2b = \frac{a}{2} \cdot 2a - \frac{1}{4}(4a^2 + 8)$, тобто, $b = -1$. Оскільки $b = -1$, то вершина кута, що задовольняє умову задачі, може лежати тільки на прямій $y = -1$. За допомогою перевірки переконуємося, що точка $(a;-1)$, де a – будь-яке дійсне число, задовольняє умову задачі. ■

– тема практичного заняття “Основні теореми диференціального числення”.

Задача 2. Нехай функція $f(x)$ визначена та тричі неперервно диференційовна на R. Довести, що існує точка $x_0 \in R$ така, що

$$f(x_0) + f'(x_0) + f''(x_0) + f'''(x_0) \geq 0.$$

Розв’язання.

1) Якщо існує точка x_0, в якій хоча б одна з функцій $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ або $f'''(x)$ дорівнює 0, то очевидно, що рівність $f(x_0) + f'(x_0) + f''(x_0) + f'''(x_0) \geq 0$ виконується.,

2) Нехай $f(x) \neq 0$, $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$ і $f'''(x) \neq 0$ $\forall x \in \sim$. Тоді $f(x)$, $f'(x), f''(x), f'''(x)$ завдяки своїй неперервності залишають знак на всій числовій осі.

Будемо вважати, що $f(x) > 0$ $\forall x \in \sim$. Доведемо, що й $f''(x) > 0$ $\forall x \in \sim$.

Нехай $x_2 > x_1$. За теоремою Лагранжа існує точка $x_3 \in (x_1, x_2)$ така, що

$$f'(x_3) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Якщо $f'(x) > 0$ $\forall x \in \sim$, то функція $f(x)$ є строго зростаючою на всій числовій осі, тому $f(x_2) > f(x_1)$, а це означає, що $0 < f(x_2) - f(x_1) < f(x_2)$, оскільки $f(x_1) > 0$. Переходячи у (1) до границі при $x_1 \to \infty$, дістаємо:

$$\lim_{x_1 \to -\infty} f'(x_3) = \lim_{x_1 \to -\infty} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

Це означає, що існує точка $x_3^{\cdot} < x_2$, така, що $f'(x_3^{\cdot}) = f'(x_2)$.

Знову за теоремою Лагранжа існує точка $x_4 \in (x_3^{\cdot}, x_2)$ така, що:

$$f''(x_4) = \frac{f'(x_2) - f'(x_3^{\cdot})}{x_2 - x_3^{\cdot}}$$

Тому, що $x_2 > x_3^{\cdot}$ і $f'(x_2) = f'(x_3^{\cdot})$, то $f''(x_4) = 0$. Отже, $f''(x) > 0$ $\forall x \in \sim$.

Аналогічно розглядається випадок
$f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ $\forall x \in \sim$.

Таким чином, якщо $f(x) > 0$ $\forall x \in \sim$, то й $f''(x) > 0$ $\forall x \in \sim$.

3) Використовуючи заміну $g(x) = -f(x)$, неважко довести, що, якщо $f(x) < 0$ $\forall x \in \sim$, то й $f''(x) < 0$ $\forall x \in \sim$.

Отже, якщо функції $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ є неперервними та не дорівнюють 0 в жодній з точок числової осі, то $f(x) f''(x) > 0$ $\forall x \in \sim$.

4) Аналогічно, якщо $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ є неперервними та не дорівнюють 0 в жодній з точок числової осі, то $f(x) f'(x) f''(x) f'''(x) > 0$ $\forall x \in \sim$ і за точку x_0 можна взяти будь-яку точку числової осі.

Твердження задачі доведене. ■

– тема практичного заняття “Формула Тейлора”.

Задача 3. Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[0,1]$ і у кожній точці цього відрізка має першу та другу похідні. Відомо, що $f(0) = f(1) = 0$ і $|f''(x)| \leq 1$ $\forall x \in (0;1)$. Яке найбільше значення може набувати максимум функції $f(x)$ для всіх можливих функцій, що задовольняють ці умови?

Розв'язання. Нехай найбільше значення функція $f(x)$ набуває в точці $x = a \in [0;1]$, тоді $f'(a) = 0$. Використовуючи формулу Тейлора другого порядку, дістаємо:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2, \qquad \text{де} \qquad \xi \in (a;x) (\xi \in (x;a)),$$

$x \in [0;1]$.

Оскільки $f'(a) = 0$, то $f(x) = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$ (1)

Розглянемо 2 випадки.

1) Нехай $0 < a \le \frac{1}{2}$. Підставляючи $x = 0$ у формулу (1), дістаємо $0 \le f(a) = \frac{f''(\xi_0)}{2}a^2$, звідки $f(a) = -\frac{f''(\xi_0)}{2}a^2$ $(\xi_0 \in (0;a))$ й, отже, $|f(a)| = \frac{|f''(\xi_0)|}{2}a^2 \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

2) Нехай $\frac{1}{2} \le a < 1$. Підставляючи $x = 1$ у формулу (1), дістаємо

$$0 \le f(a) = \frac{f''(\xi_1)}{2}(1-a)^2,$$

звідки $f(a) = -\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-a)^2$ $(\xi_1 \in (a;1))$ й, отже, $|f(a)| = \frac{|f''(\xi_1)|}{2}|1-a|^2 \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Таким чином, в обох випадках $f(a) \le \frac{1}{8}$, а це означає, що $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) \le \frac{1}{8}$. Неважко перевірити, що функція $f(x) = 0{,}5x(1-x)$ задовольняє всі умови задачі і набуває найбільше значення, яке дорівнює $\frac{1}{8}$ у точці $x = \frac{1}{2}$.

Отже, найбільше значення, що може набувати максимум функції $f(x)$ для всіх функцій, які задовольняють умови задачі, дорівнює $\frac{1}{8}$. ■

Висновки. В даній роботі: проаналізовано поняття математична задача та існуючі класифікації математичних задач, розглянуто задачі дослідницького характеру на заняттях математичного аналізу під час вивчення теми "Диференціальне числення функції однієї змінної".

Література:

1. Єсаулов А.Ф. Психология решения задач / А.Ф. Єсаулов. – М.: Высшая

школа, 1972. – 216 с.
2. Зінченко В. Студент і науково-дослідна робота / В. Зінченко // Рідна школа. – 2001. – №2. – с. 37
3. Пойа Д. Математическое открытие / Д. Пойа. – М.: Наука, 1976. – 448с.
4. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні основи навчання математики / З.І. Слєпкань. – Л.: Радянська школа, 1983. – 192с.

Ніяка Тетяна Віталіївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ В ЗАДАЧАХ ПОШУКУ НАЙКОРОТШИХ ШЛЯХІВ

Постановка проблеми. Проблема пошуку оптимальних рішень є базовою у різних галузях науки і техніки і потребує розробки засобів ефективного вирішення. Часто оптимізаційні задачі можна звести до простішого вигляду і взаємозв'язок складових частин математичної моделі подати у вигляді графа [1,2]. Такий підхід дозволяє розглядати питання оптимізації як пошук найкоротших шляхів між вершинами графа з урахуванням фізичного значення його вершин та дуг. Розв'язок задачі тоді зводиться до пошуку найкоротших шляхів між вершинами графа, яка є досить актуальною у дискретній математиці.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Дослідженню проблеми пошуку оптимальних маршрутів в наш час присвячені роботи багатьох науковців: О.Ф. Кузькіна, В.М. Вишневского, І.А. Жукова, С.Д. Мартинова, В.А. Погорілого, Ю.В. Мар'яновського, Ф. Харарі, Р. Басакера, Т. Сааті, К.Бержа, О. Оре, Л. Форда, Р. Фалкерсона, А. Меліхова та багато інших. Які у своїх працях наводять алгоритми пошуки найкоротших шляхів у транспортних, сіткових та комп'ютерних мережах та їх застосування на практиці. Проте проблема пошуку оптимальних рішень у різних галузях науки залишається актуальною.

Мета статті: на основі аналізу попередніх досліджень виокремити конкретні алгоритми пошуку найкоротших шляхів та показати їх застосування до розв'язування задач з теорії графів.

Виклад основного матеріалу. Задача пошуку найкоротших шляхів виникає при проектуванні і удосконаленні маршрутних мереж транспорту загального користування у містах, розподілі пасажирських кореспонденцій за шляхами прямування, визначенні завантаження ділянок маршрутних мереж і пасажиропотоків. Слід зауважити, що ця задача є значно складнішою, ніж задача пошуку найкоротшого шляху на транспортній мережі, оскільки при її розв'язанні необхідно враховувати маршрутні обмеження і специфічні особливості.

Під час розробки схем маршрутів та їх оптимізації застосовують математичний апарат теорії графів, тобто графоаналітичні методи. Головне завдання при цьому полягає у побудові графу оптимального маршруту.

Розглянемо на прикладах застосування теорії графів до задач пошуку найкоротших шляхів. Нагадаємо, що «шлях» – це кількість ребер графа.

Задача 1. На рисунку 1.1 зображена схема місцевості. Рухатись із пункта в пункт можна тільки в напрямі стрілок. В кожному пункті можна побувати не більше одного разу. Скількома способами можна потрапити із пункта 1 в пункт 9? У якого із цих шляхів найменша довжина? У якого із цих шляхів найбільша довжина [1]?

Розв'язання. Дати відповідь на це запитання допоможуть дерева. Починаючи з вершини 1, послідовно «розшаровуємо» граф шляхів у дерев. При цьому кожна вершина стільки раз отримує самостійне значення, скільки в неї в початковому графі входило шляхів (рис.1.2).

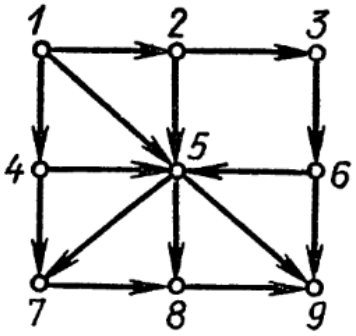


Рис. 1.1

Найкоротший шлях закінчується у меншому «ярусі» висячої вершини дерева, найбільший шлях закінчується в найбільшому «ярусі» (яруси відмічаємо на рисунку штрихованими лініями).

Очевидно що, число шляхів дорівнює число висячих вершин дерева, тобто 14. Довжина найкоротшого шляху (1,5,9) дорівнює два. Довжина найбільш довшого шляху дорівнює 7. Довжину шляху допомагає визначити розміщення кожної вершини дерева у відповідному ярусі.

Цей приклад показує, що поняття «довжина шляху» в теорії графів необов'язково співпадає з поняттям «довжина шляху» в геометрії (або географії).

Рисунок дерева корисний не тільки тим, що дозволяє підрахувати число всіх можливих шляхів, відшукати серед них короткий і найбільш протяжний, а й дозволяє одночасно «побачити» всі шляхи і порівняти їх між собою.

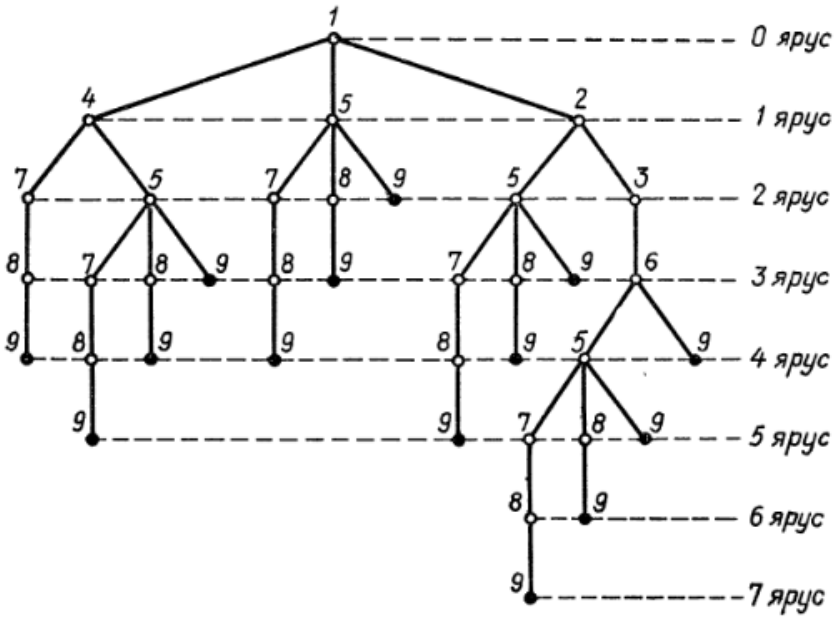


Рис.1.2

Задача 2. Про залізницю у Тернополі відомо, що з кожної станції до будь-якої іншої можна дістатися, проїхавши не більше як через дві інші станції. Крім того, з кожної станції можна виїхати не більше як по трьох різних коліях. Яка найбільша кількість залізничних станцій може бути в Тернополі, якщо відомо, що ця кількість – непарна.

Розв'язання. Зобразимо дану залізницю за допомогою графа, вершини якого – станції, а ребра – лінії залізниць.

Розглянемо станцію 1, з якої виходить парна кількість колій (така станція завжди існує, бо кількість непарних вершин будь-якого графа є парним числом). Знайдемо максимальну кількість станцій, до яких можна проїхати із станції 1 так, щоб виконувалась умова задачі. Для цього будемо добавляти до графа по дві вершини і тоді, враховуючи умову з'єднувати ці вершини ребрами.

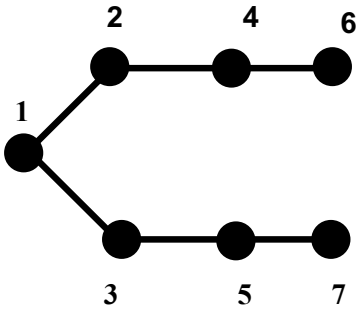


Рис. 2.1

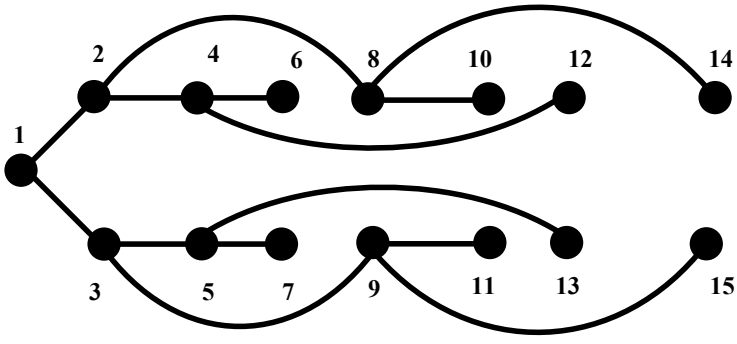


Рис. 2.2

На рис. 2.1 показано, що для семи вершин даний обхід можливий. Додавши вершини 8 і 9, будуємо ребра 2–8 і 3–9. Добавляючи наступні вершини, отримуємо ребра 8–10, 9–11, 4–12, 5–13, 8– 4 і 9–15 (рис. 2.2). За такого розташування ребер з вершини 1 можна пройти до будь якої іншої вершини, проходячи не більше, чим по двох вершинах. Максимальна кількість

вершин даного графа – 15, так як вершини 2, 3, 4, 5, 8, 9 уже мають найбільший степінь 3, тому подальша побудова нових ребер неможлива.

Шляхом логічних міркувань добудуємо решту ребер, враховуючи, що максимальний степінь кожної вершини – 3.

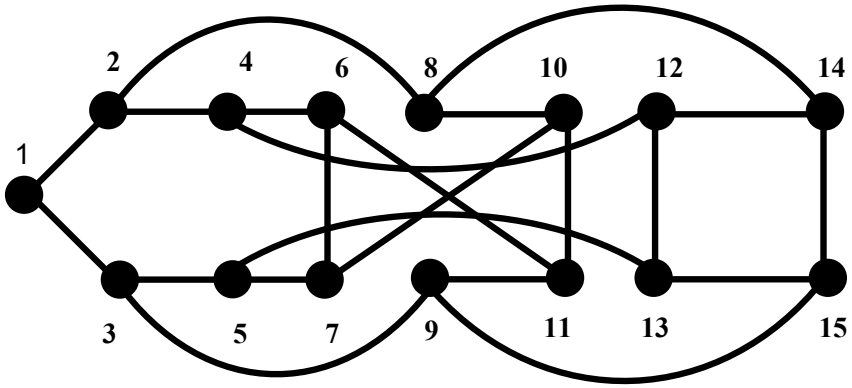


Рис.2.3

На рис. 2.3 зображено схему розташування залізничних ліній в Тернополі, де можлива найбільша кількість станцій – 15.

Розглянемо також задачу про визначення найкоротшої відстані від будь-якого пункту (вершини) в інший у заданій транспортній мережі.

Нагадаємо, що *мережею* називається граф, кожному ребру або дузі якого поставлено у відповідність деяке число, що називається *вагою ребра* або дуги і відбиває певні властивості цього ребра чи дуги. Мережі на практиці, природно, використовуються набагато частіше, ніж графи як такі, тому що ваги ребер чи дуги визначають процес функціонування об’єкта, представленого мережею.

Задача 3. Відшукаємо найкоротші шляхи від усіх точок до точки з номером 1 у такій мережі (рис. 3.1)[3].

Розв'язання.

Початковий крок. Точці 1 ставимо у відповідність характеристику нуль і визначаємо характеристики точок 2, 5, 3. Ці характеристики відповідно дорівнюють 4, 15, 6. На дугах (1, 2), (1, 5), (1, 3) ставимо стрілки, спрямовані в сторону точки 1, а саму точку 1 відмічаємо символом + .

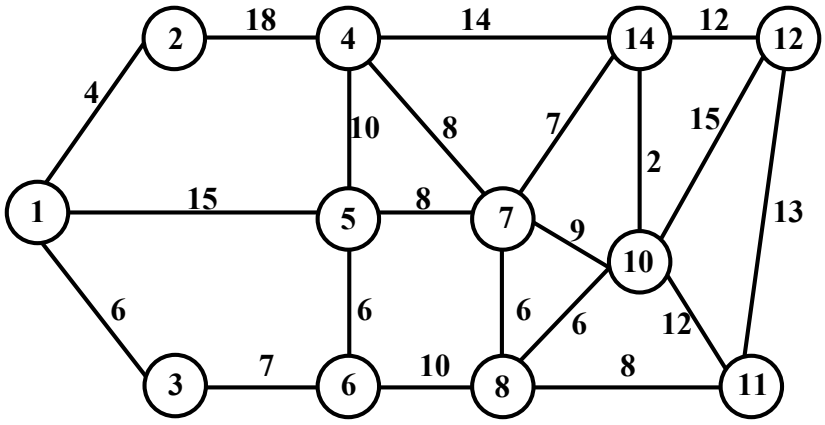


Рис.3.1. Представлення мережі у вигляді графу

Крок 1. Беремо точку 2 і визначаємо характеристику сусідньої до неї точки 4. Вона дорівнюватиме 4 +18 = 22 . Тому на дузі (2, 4) ставимо стрілку, спрямовану до точки 2, а точку 2 відмічаємо символом + .

Беремо точку 5 і визначаємо характеристики її сусідніх точок 4, 6, 7. Вони відповідно складатимуть 25, 21, 23. Нова характеристика точки 4 дорівнює 25. Оскільки 25 > 22, то характеристика точки 4 залишається рівною 22. На дугах (5, 6) і (5, 7) ставимо стрілки, спрямовані до точки 5, а точку 5 відмічаємо символом + .

Далі беремо точку 3 і визначаємо характеристику її сусідньої точки 6. Вона становить 13, але для точки 6 раніше вже була обчислена характеристика, яка дорівнює числу 21. Тому, оскільки 13 < 21, за характеристику точки 6 приймемо 13, а стрілку на дузі (5, 6) замінюємо на стрілку на дузі (3, 6), спрямовану до точки 3, після чого точку 3 відмічаємо символом + .

Крок 2. Беремо точку 4 і визначаємо характеристики її сусідніх точок 5, 7, 9. Вони відповідно рівні 32, 30, 36. Раніше обчислені характеристики точок 5 і 7 становлять, відповідно, 15 і 23. Оскільки 32 > 15 і 30 > 23 , то характеристики точок 5 і 7 залишаємо без змін, тобто 15 і 23 відповідно. Після цього на дузі (4, 9) ставимо стрілку, спрямовану до точки 4, яку відмічаємо символом + .

Беремо точку 7 і визначаємо характеристики її сусідніх точок 4, 8, 9, 10. Вони відповідно дорівнюватимуть 31, 29, 30, 32. Але характеристики точок 4 і 9, які були обчислені раніше, є 22 і 36 відповідно. Оскільки 31 > 22, а 30 <36, то характеристика точки 4 залишається рівною 22, а характеристику точки 9 замінюємо на 30. Відповідно до цього стрілку на дузі (4, 9) замінюємо стрілкою на дузі (7, 9), спрямованою до точки 7. Далі на дугах (7, 8) і (7, 10) ставимо стрілки, спрямовані до точки 7, а саму точку 7 відмічаємо символом + .

Далі беремо точку 6 і визначаємо характеристики її сусідніх точок 5 і 8. Вони, відповідно, становлять 19 і 23. Раніше обчислені характеристики цих точок були, відповідно, 15 і 29. Оскільки 19 > 15 , а 23 < 29 , то характеристика 15 точки 5 залишається без зміни, а характеристику точки 8 замінюємо на 23. Тому стрілку на дузі (7, 8) замінюємо стрілкою на дузі (6, 8), спрямованою до точки 6. Точку 6 відмічаємо символом + .

Крок 3. Беремо точку 9 і визначаємо характеристики її сусідніх точок 4, 10 і 12. Вони, відповідно, дорівнюють 44, 32 і 42. Оскільки раніше обчислені характеристики точок 4 і 10 - це значення 22 і 32 відповідно, то маємо: 44 > 22 і 32 = 32 . Тому характеристики точок 4 і 10 залишаємо без змін. На дузі (9, 12) ставимо стрілку в напрямку до точки 9, після чого точку 9 відмічаємо символом + .

Розглянемо далі точку 10 і визначимо характеристики її сусідніх точок 8, 9, 11, 12. Вони, відповідно, будуть 38, 34, 44, 47. Для точок 8, 9, 12 раніше вже були обчислені відповідні характеристики, а саме: 23, 30, 42. Тому, оскільки 38 > 23, 34 > 30 і 47 > 42, характеристики точок 8, 9, 12 залишаємо без змін, а на дузі (10, 11) ставимо стрілку в напрямку до точки 10. Точку 10 відмічаємо знаком + .

Беремо точку 8 і визначаємо характеристики її сусідніх точок 7, 10 і 11. Вони, відповідно, дорівнюють 29, 29 і 31. Раніше для цих точок уже були

обчислені характеристики: 23, 32 і 44 відповідно. Оскільки 29 > 23 , а 29 < 32 і 31 < 44 , то характеристика точки 7 залишається без зміни, характеристики точок 10 і 11 заміняться, відповідно, на 29 і 31, а стрілки на дугах (7, 10) і (10, 11) заміняться стрілками на дугах (8, 10) і (8, 11), спрямованими до точки 8. Точку 8 відмічаємо символом + . Оскільки при цьому змінилася характеристика точки 10, яка вже була відмічена символом + , то перераховуємо характеристики її сусідніх точок 9, 11, 12. Одержимо, відповідно, значення 31, 41, 44. Однак, для цих точок раніше вже були обчислені відповідні характеристики 30, 31 і 42. Оскільки 31 > 30, 41 > 31 і 44 > 42, то характеристики точок 9, 11 і 12 залишаємо без змін.

Крок 4. Розглянемо точку 11 і визначимо характеристики її сусідніх точок 10 і 12. Вони дорівнюватимуть, відповідно, 43 і 44. Але раніше обчислені характеристики цих точок, відповідно, дорівнюють 29 і 42. Оскільки 43 > 29 і 44 > 42 , то старі характеристики цих точок залишаємо без змін. Точку 11 відмічаємо символом + .

Нарешті, беремо точку 12, для її сусідніх точок 10 і 11 характеристики, відповідно, дорівнюють 57 і 55. Раніше обчислені для них характеристики, відповідно, становлять 29 і 31. Оскільки 57 > 29 і 55 > 31, то обчислені раніше характеристики точок 10 і 11 залишаємо без змін. Точку 12 відмічаємо символом + .

Отже, ми одержали розв'язок задачі, який показаний на графі стрілками (рис. 3.2).

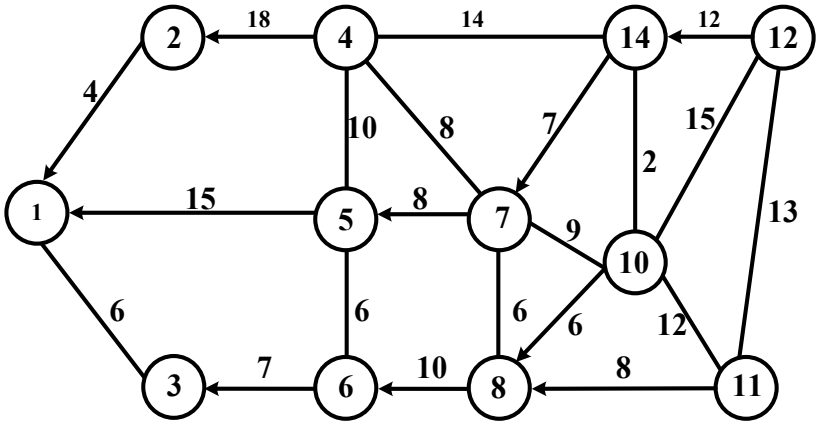


Рис.3.2.

Оптимальні шляхи можна зобразити, вказуючи спочатку значення характеристики вершини (відстань до точки 1) і відповідний шлях:

4: 2 → 1;
6: 3→ 1;
22: 4→2→1;
15: 5→1;
13:6→3→1;
23: 7→5→1;
23: 8→6→3→1;
30: 9→7→5→1;
29: 10→8→6→3→1;
31: 11→8→6→3→1;
42: 12→9→7→5→1.

Перевагою цього алгоритму є те, що він у порівнянні з іншими алгоритмами має більшу швидкодію.

Висновки. Таким чином, широке застосування алгоритмів теорії графів, орієнтованих на пошук найкоротших шляхів між вершинами графа, дає змогу удосконалити маршрутні мережі транспорту, комп'ютерні та сіткові мережі, що буде сприяти значному скороченню економічних витрат країни.

Література:

1. Оре О. Графы и их применение. – ЛКИ, 2008. – 350с.
2. Харари Ф.О. Теория графов. – Едиториал, 2006. – 300с.
3. Ніколаєва К.В., Койбічук В.В. Дискретний аналіз. Графи та їх застосування в економіці: Навчально-методичний посібник. – Суми: УАБС НБУ, 2007. –84 с.

Олексієнко Віталіна Олександрівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК МАТЕМАТИКИ І МУЗИКИ

Постановка проблеми. Світове мистецтво багато в чому зобов'язане математиці. Приклад цьому – численні найдавніші споруди, кремлі, вежі, палаци та інші твори архітектури. Спробуємо знайти спільні точки дотику точної науки математики і прекрасного, витонченого мистецтва – музики.

Мета статті: показати взаємозв'язки математики та музики.

Виклад основного матеріалу. Дослідженню музики присвячували свої роботи багато відомих математиків: Рене Декарт, Готфрід Лейбніц, Християн Гольдбах, Жон Д'Аламбер, Леонард Ейлер, Данило Бернуллі. Перша праця Рене Декарта - "Compendium Musicae" («Трактат про музику»), перша велика робота Леонарда Ейлера – «Дисертація про звук». Ця робота 1727 року починалася словами: «Моєю кінцевою метою в цій праці було те, що я прагнув представити музику як частину математики і вивести в належному порядку з правильних підстав все, що може зробити приємним об'єднання і змішування звуків». Лейбніц в листі Гольдбаху пише: «Музика є прихована арифметична вправа душі, що не вміє рахувати». І Гольдбах йому відповідає: «Музика – це прояв прихованої математики» [4].

Водночас багато видатних музикантів вражали математичною обдарованістю: Ернест Ансерме – професійний математик і кращий виконавець Стравінського, Леонід Сабанєєв – випускник математичного факультету Московського університету, чудовий піаніст, композитор. Композитор Едісон Денисов викладав математику в Томському університеті. Видатний віолончеліст К. Давидов закінчив фізико-математичний факультет, і як згадують сучасники, мав «блискучі здібності до чистої і прикладної математики: в квартирі його довго зберігалася модель залізничного моста, ним винайденого і за словами фахівців цілком гідного уваги» [8].

У Стародавній Греції музика вважалася частиною математики, а ще точніше, розділом теорії чисел. Першим, хто спробував висловити красу музики за допомогою чисел, був Піфагор – той самий, чиїм ім'ям названа знаменита теорема. Піфагор був не лише математиком і філософом, а й теоретиком музики. Він займався пошуками музичної гармонії, оскільки вірив у те, що така музика необхідна для очищення душі і лікування тіла, і здатна допомогти розгадати будь-яку таємницю. Одним з чотирьох предметів у школі Піфагора була музика, і Піфагора по праву вважають творцем акустики і основоположником теорії музики.

Одного разу, проходячи повз кузню, Піфагор випадково почув, як удари молотів створюють цілком певне співзвуччя, і після цього зайнявся експериментами, намагаючись знайти співвідношення між висотою тону і числами. За допомогою чаші з водою і одноструннної арфи він вивчив взаємозв'язок між рівнем води і довжиною струни і виявив, що половина довжини струни піднімає ноту на одну октаву вгору. Вісім звуків – до, ре, мі, фа, соль, ля, сі, до – найдавніша музична гама. В наші дні темперована гамма включає в себе дванадцять нот, включаючи діези і бемолі, але в основі її лежить винахід, за який ми повинні дякувати Піфагору. (Темперóваний стрій – музичний стрій, при якому кожна октава ділиться на певну кількість однакових ступенів.)

Використовуючи особливий інструмент – монохорд, Піфагор вивчав інтервали, відкривав математичні співвідношення між окремими звуками. (Монохóрд – інструмент, призначений для точної побудови музичних інтервалів (звуків заданої висоти) шляхом фіксації різних довжин звучної частини збуджуваної щипком струни.)

Піфагор виявив, що приємні слуху співзвуччя – консонанси, виходять лише в тому випадку, коли довжини струн відносяться як цілі числа першої четвірки, тобто як 1:2, 2:3, 3:4. Консонáнс – співзвуччя двох або більше звуків, що сприймається на слух, як гармонійне, лагідне. В сучасній теорії музики до консонансів відносяться такі інтервали: пріма, мала та велика терції, кварта, квінта, мала та велика сексти та октава.

В основу піфагорійської теорії музики лягли два закони:

З а к о н 1. Дві звучні струни дають консонанс лише тоді, коли їх довжини відносяться як цілі числа, що утворюють трикутне число. *Трикутне число* – число кружків, які можуть бути вписані у формі рівностороннього трикутника. 10 = 1 + 2 + 3 + 4, тобто як 1:2, 2:3, 3:4.

З а к о н 2. Четвірка чисел 1, 2, 3, 4 – тетраедр – лежить в основі побудови різних музичних ладів. Лади складаються з основних ступенів. В основу гами піфагорійці поклали інтервал октава – вісім. Октáва – інтервал між двома тонами, частоти яких співвідносяться як 1:2. Інтервал октави охоплює вісім ступенів діатонічного звукоряду, наприклад, від "до" до наступного "до" або від "ре" до наступного "ре" і т. д. Октава позначається цифрою 8. Далі октаву розділили на милозвучні частини, і Піфагор виявив приємні слуху співзвуччя: квінта – п'ятий ступінь, кварта – четверта, октава – восьма. Ступінь – це будь-який звук музичного звукоряду, гами, ладу. Основа всієї музики – тетрахорд. Тетрахóрд

(греч. τετράχορδον, букв. чотирьохструнник) – чотири ступені звукоряду, розташовані в діапазоні кварти.

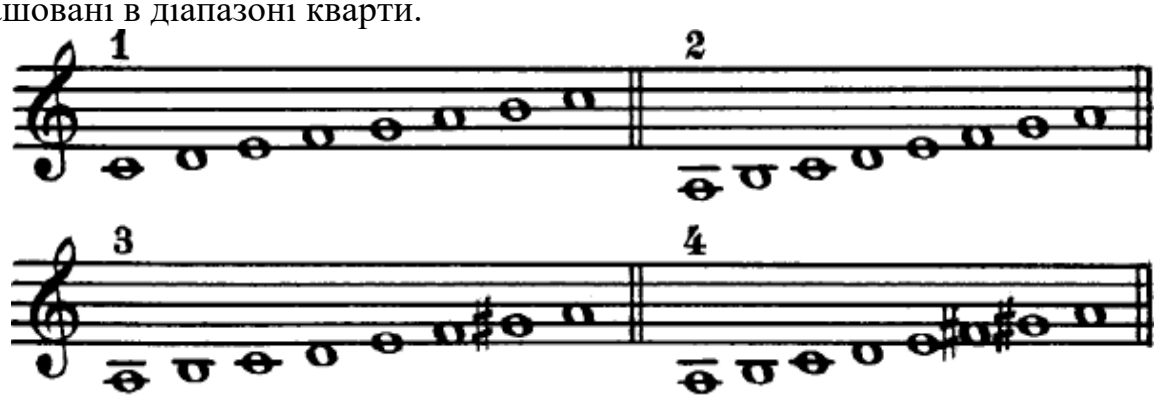


Рис. 1

Піфагор розвинув вчення про лікуванні хвороб за допомогою музики. Він вважав, що певні мелодії можуть позбавити людину від заздрощів, ревнощів, гордині та інших вад.

Навколишній світ повний ритмів – ритмічно звучать кроки, ритмічне наше дихання, ритмічний стукіт коліс потягів. Але варто нам почути слово ритм, як наші думки мимоволі звертаються до музики і це цілком зрозуміло: адже ритм – один з найважливіших елементів музики. У музичному ритмі можливе зміщення ударних складів, так як мають більше значення музичні наголоси – акценти. Ритми можна виявити і серед чисел.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Рис. 2

Перші 100 натуральних чисел розташовані у вигляді витонченої правильної фігури – так званого квадрата Піфагора (рис. 2). У чисел, що стоять в одному рядку збігаються перші цифри, у чисел, що стоять в одному стовпці, збігаються другі цифри. А тепер спробуйте виявити закономірності, приховані в інших таблицях.

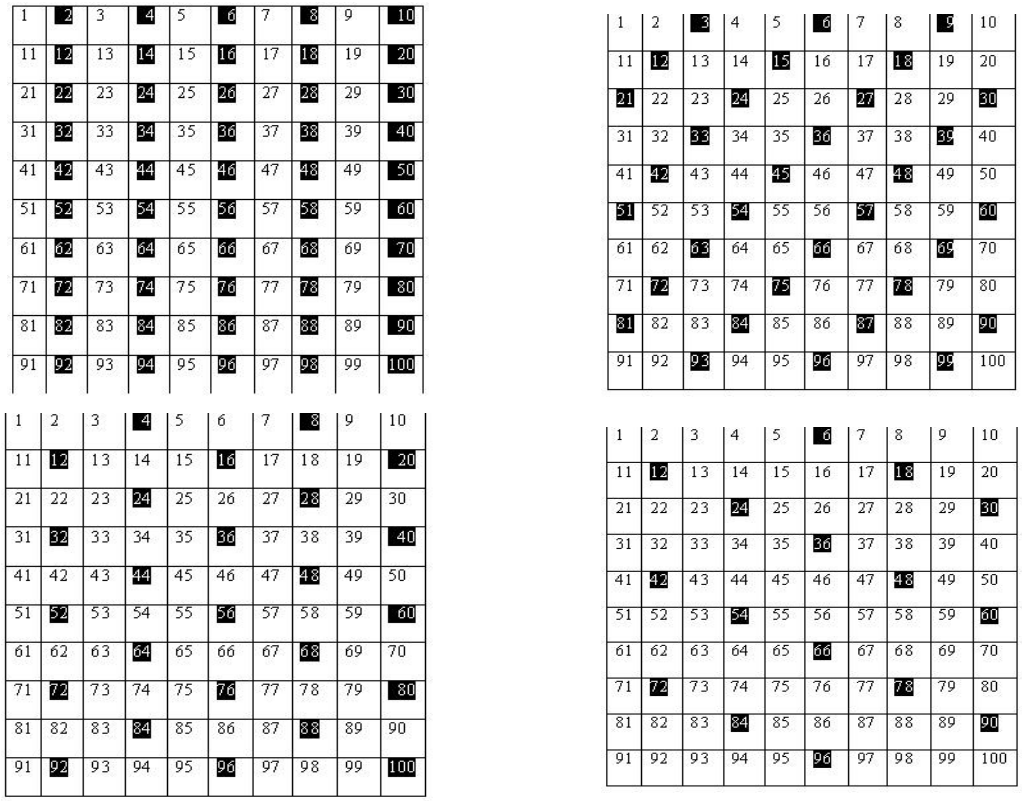


Рис. 3

Ці таблиці є квадратами Піфагора, в них всі числа, кратні 2,3,4,6. – Яким ритмом володіють числа кратні, наприклад, 3? Почнемо з 0 і, збільшуючи кожен раз на 1, будемо акцентувати всі числа, кратні 3. Ось що у нас виходить 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 і т.д. Ми прийшли до красивого, правильного, рівномірного ритму, озвученого як музичний розмір 3/4. Якщо ще раз вдивимося в таблиці, то зауважимо в них правильний рівномірний ритм А що станеться, якщо дві такі таблиці накласти одну на одну? Візьмемо, наприклад, таблицю чисел кратних 4 і накладемо її на таблицю чисел кратних 6.

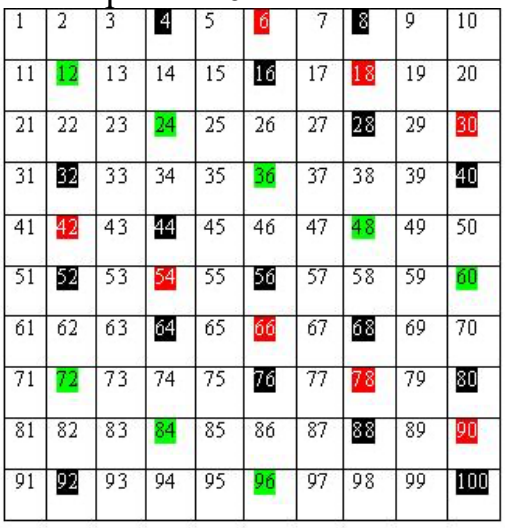


Рис. 4

Виділені числа 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 та 96, розташовуються в правильній послідовності. – Кратні якого числа є перераховані числа? (Кратні числа 12). –

Такий збіг не випадковий. Як Ви думаєте, в чому причина? (Число 12–найменше спільне кратне чисел 4 і 6.)[6].

І в математиці, і в музиці панує ідея числа і відношення. Композитори часто зізнаються, що їх метод трохи відрізняється від математичного. Про те ж пише видатний диригент Ернест Ансерме: «Між музикою і математикою існує безумовний паралелізм. І та і інша являють собою дію в уяві, що звільняє нас від випадковостей в практичному житті» [7]. Він підкреслив абстрактний характер музичної та математичної матерії, її узагальненість.

Ще у 1925 році мистецтвознавець Л.Л. Сабанєєв, проаналізувавши 1770 музичних творів 42 авторів, знайшов 3275 золотих перерізів і показав, що більшість видатних творів можна легко розділити на частини або за темою, або за інтонаційним ладом, які перебувають між собою у відношенні золотого перерізу. Крім того, чим талановитіший композитор, тим у більшій кількості його творів було знайдено золоті перерізи: у Аренського — 95%, Бетховена – 97%, Скрябіна – 90%, Моцарта – 91%, Гайдна – 97%, Шопена – 92%, Шуберта – 91% від усіх творів.

На думку Л. Сабанєєва, золотий переріз призводить до враження особливої стрункості музичного твору. Цей результат дослідник перевірив на всіх 27 етюдах Шопена. Він знайшов у них 178 золотих перерізів. При цьому виявилося, що не тільки великі частини, але й менші, всередині етюдів, діляться у золотому відношенні і симетричні. У Бетховена твори також діляться на дві симетричні частини, всередині якої спостерігаються прояви золотої пропорції.

Зв`язок математики і музики не перестає цікавити дослідників і зараз. Так у 2008 році було проведено дослідження, в якому взяли участь 25000 американських школярів, котрі займаються за арт-програмами. Було відзначено, що діти, які навчалися музиці, з більшою ймовірністю показували в математичних тестах найвищі бали ніж діти, які музику не вивчали. Для дітей з так званих «неблагополучних сімей» прогрес у математичних тестах був особливо помітний: серед восьмикласників, які займаються музикою 21% мали високі математичні бали в порівнянні з 11% тих, які не займаються – музичні діти опинилися в математичному відношенні на 10% краще немузичних. У десятому класі розрив збільшився: вже 33% неблагополучних дітей, що займаються музикою, показали високі математичні результати, а серед тих дітей, що не займаються музикою з таких же сімей, хороших математиків було тільки 16%. Через два роки занять розрив склав 17%. Видатний дослідник таланту і обдарованості Стенлі Стейнберг (Steinberg, Stanley) з Єльського університету опублікував аналогічні результати: учні восьмого класу, які займалися грою на музичних інструментах, показали себе набагато кращими математиками, ніж інші учні. Особливо відзначилися піаністи, які виграли за тестовими балами конкурс з математики.

Висновки. З вище сказаного бачимо, що математика та музика тісно пов’язані. Піфагор створив математичну теорію музики, Л.Сабанєєв показав наявність золотого перерізу в творах відомих митців. Багато відомих математиків присвячували свої роботи дослідженню музики. Значна кількість

видатних музикантів добре знались на математиці. До того ж, сучасні дослідження свідчать, що заняття музикою значно підвищують успішність учнів з математики. Отже, музика математична, а математика музична.

Література:

1. Бендукидзе А.Д. Золотое сечение / Бендукидзе А.Д. // Квант. – 1973. – №8. – С. 22–27.
2. Інтернет ресурс: http://Letopisi.ru [Проект «Музыкальная математика»].
3. Попов Є.Д. Геометричні властивості відношення золотого перерізу / Попов Є.Д. – У світі математики. – К.: Радянська школа, 1982. – Вип. 13. – С. 22.
4. Інтернет ресурс: http://alexfrost.ucoz.ru [Стаття «Математика і музика»]
5. Інтернет ресурс: http://www.goldenmuseum.com
6. Холопов Ю.Н. Консонанс и диссонанс // Музыкальный энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1990. – 592с.
7. Шарапкина Е.П. Гармония математики и музыки / П.Е.Шарапкина. – М.: Наука, 2006. – 192 с.
8. Жмудь Л.Я. Пифагор и его школа / Жмудь Л.Я. – М. : Наука, 1990. – 192 с.

Савченко Маргарита Валеріївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ЗНАННЯ ГЕОМЕТРІЇ ТА КМІТЛИВІСТЬ У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЦІКАВИХ ПОБУТОВИХ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. Кожний навчальний предмет має мету та завдання курсу, які визначені навчальною програмою. Мета та завдання курсу геометрії визначені у пояснювальній записці програми з математики для загальноосвітніх шкіл. Реалізація цих завдань здійснюється на уроках геометрії. Мета вивчення геометрії в школі – систематичне вивчення властивостей геометричних фігур; формування просторових уявлень і уяви; розвиток логічного мислення, розумової активності, пізнавальної самостійності, пізнавального інтересу, потреби в самоосвіті, здатності адаптуватися до умов, що змінюються; розвиток ініціативи, творчості; здатність використання геометричного апарату для вивчення суміжних навчальних предметів.

Мета даної статті: проілюструвати конкретними прикладами можливості застосування геометричних знань у процесі розв’язування цікавих побутових ситуацій.

Виклад основного матеріалу. Наш методичний пошук дозволив віднайти в методичній літературі такі цікаві, на наш погляд, побутові задачі :

1) Які мандарини – великі чи дрібні – вигідніше купувати, якщо товщина шкірки у них однакова?

2) Як виміряти за допомогою лінійки діаметр дуже тонкого дроту?

3) Як, користуючись лише однією лінійкою з поділками, визначити повну місткість пляшки, частково заповненої рідиною?

4) Для того, щоб знайти довжину головної діагоналі цеглини, тобто відстань між найбільш віддаленими її вершинами, можна виміряти лінійкою, наприклад, довжину, ширину і висоту цеглини, а потім скористатися теоремою Піфагора. Запропонуйте спосіб вимірювання лінійкою головної діагоналі цеглини, який не вимагає ніяких обчислень.

5) У вас є циркуль, лінійка, олівець і папір. Чи можете ви з їх допомогою побудувати відрізок, рівний радіусу більярдної кулі, пам'ятаючи, що на сфері прямі лінії малювати неможливо?

6) На папері намальований відрізок прямої, яку ви хочете продовжити в певному напрямі за допомогою лінійки. Однак, на вашому шляху є пляма, яка не дозволяє безпосередньо провести пряму, не забруднивши при цьому лінійку. Запропонуйте спосіб, як, користуючись однією лінійкою, можна "обігнути" пляму і все ж побудувати потрібну ділянку прямої (Рис. 1).

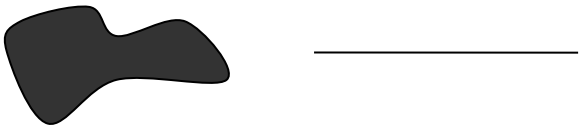


Рис. 1

7) Ви поклали плитку шоколаду на папір, обвели її олівцем і хочете знайти точку перетину діагоналей намальованого прямокутника. Чи можна це зробити, використовуючи як лінійку ту ж плитку шоколаду, незважаючи на те, що її довжини не вистачає для проведення діагоналей?

8) Потрібно з'єднати проводкою стінний вимикач і лампочку в залі довжиною 30 м, шириною і висотою по 12 м (рис. 2). Вимикач знаходиться посеред торцевої стіни на висоті 1м від підлоги, а лампочка знаходиться посеред протилежної стіни на відстані 1 м від стелі. За яким найкоротшим шляхом повинна проходити проводка?

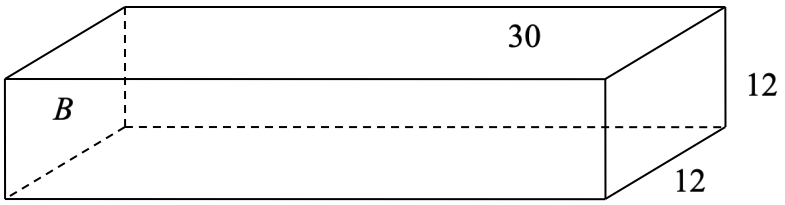
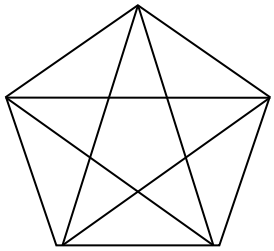


Рис. 2

9) Вам потрібно обробити величезну стопку анкет, кожна з яких містить по кілька пунктів. Як потрібно організувати одночасний підрахунок тих чи інших анкетних даних, щоб, переглянувши всю стопку тільки один раз, можна було надати вичерпну статистику з питань, які цікавлять вас?

10) Вам потрібно прострочити на одязі одну з емблем, зображених на Рис. 3. Чи можна це зробити, не розриваючи нитку в процесі шиття і не проходячи ні по одній лінії емблеми двічі?



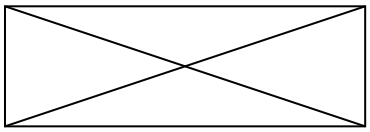


Рис. 3

Наведемо вказівки до розв'язування вказаних десяти задач :

До задачі 1) Вигідніше купувати великі мандарини, тому що, якщо збільшується радіус мандарина, то площа його поверхні пропорційна квадрату радіуса, а це значно меньше, а ніж об'єм мандарина, який пропорційний кубу радіуса.

До задачі 2) Щоб виміряти за допомогою лінійки діаметр дуже тонкого дроту, слід намотати дріт в один шар, наприклад, на лінійку так, щоб сусідні витки дроту були щільно притиснуті один до одного. Тоді, поділивши ширину отриманого шару на кількість витків, ми отримаємо товщину одного витка, яка збігається з діаметром дроту.

До задачі 3) Вимірюємо діаметр d основи пляшки (внутрішній, з урахуванням товщини скла) і висоту h_1 стовпа рідини, а потім перевертаємо пляшку шийкою вниз і вимірюємо висоту h_2 стовпа повітря в пляшці (рис 4.) Тепер залишається зробити підрахунок : $V = \frac{\pi d^2}{4}(h_1 + h_2)$.

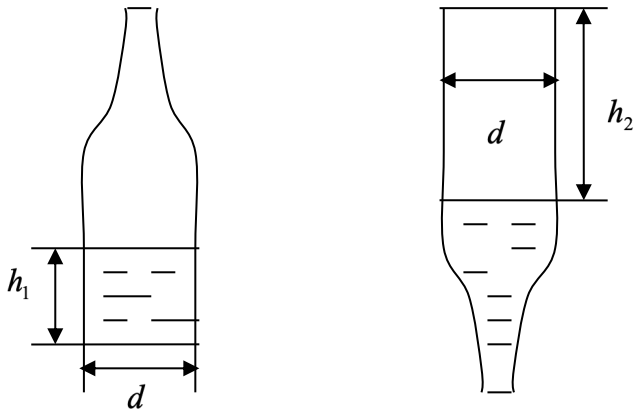


Рис.4

До задачі 4) На рис. 5 показано, як, використавши кілька цеглин, виміряти діагональ однієї з них. Вимірюємо лінійкою відстань між точками A та B вказаними на рисунку.

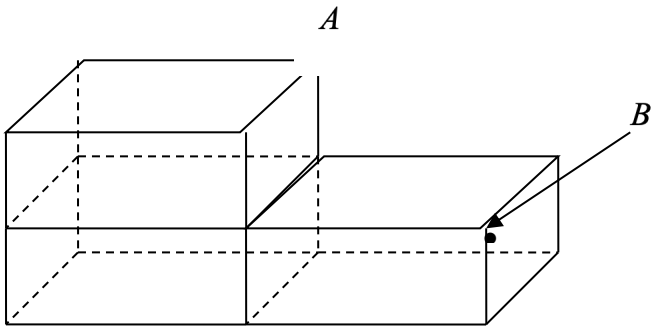


Рис. 5

До задачі 5) Візьмем дві точки A і B на поверхні більярдної кулі і проведемо на ній дуги рівних радіусів з центрами в цих точках. У перетині дуг вийдуть точки C і D, аналогічно побудуємо точку E (рис. 6). Тепер, замірявши циркулем довжини відрізків CD, DE і CE, ми перенесемо ці точки на папір із збереженням вказаних довжин і побудуємо на папері центр O кола, описаного навколо отриманого трикутника. Радіус кулі буде дорівнювати радіусу цього кола.

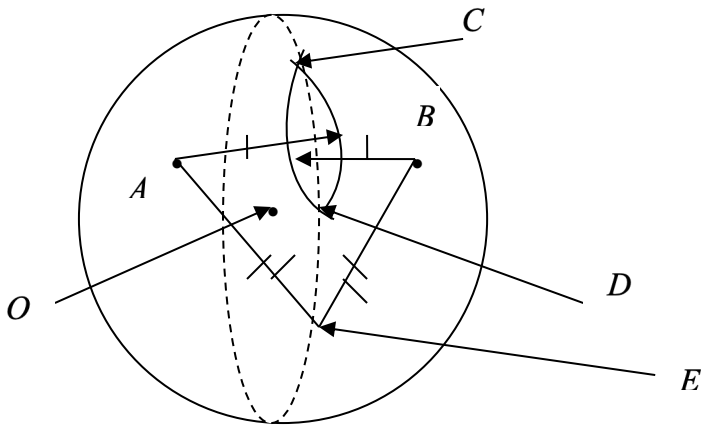


Рис. 6

До задачі 6) Через деяку точку даної прямої проведемо дві прямі 1, 2, а через деяку точку A проведемо чотири прямі 3-6 так, як показано на рис. 7. Вибравши на даній прямій зручну точку B, проведемо послідовно прямі 7–12. Тоді точки перетину прямих 9, 10 і прямих 11, 12 будуть лежати на продовженні даної прямої за пляму.

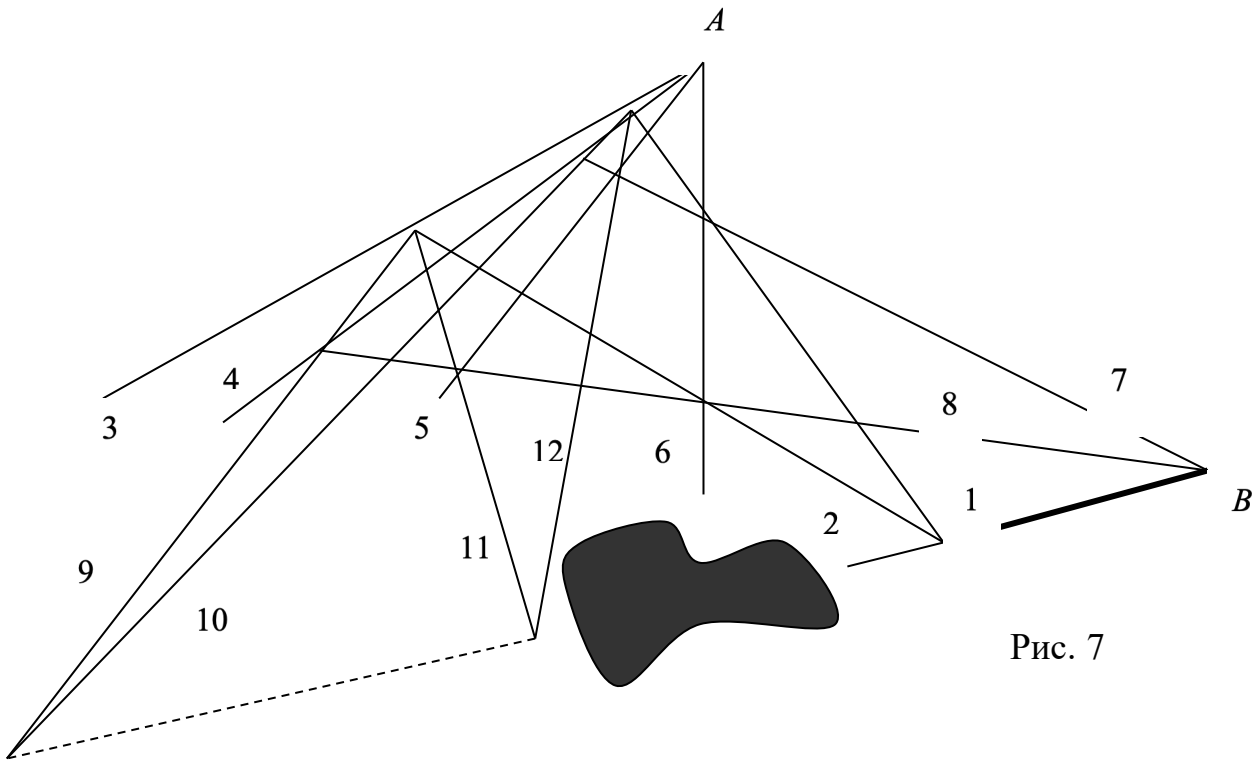


Рис. 7

До задачі 7) Можна наблизити один до одного вершини вихідного прямокутника, перенісши кожну з них уздовж довшої сторони до її середини на ширину шоколадки (рис. 8).

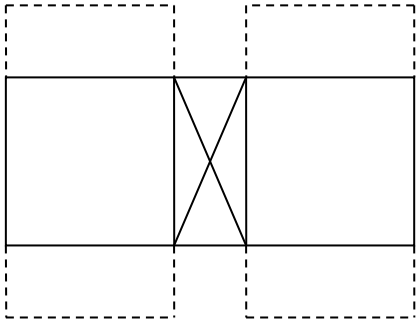


Рис. 8

До задачі 8) Найкоротший шлях від лампочки A до вимикача B буде дорівнює 40 м і пройде він не тільки по стелі і торцевій стіні (такий шлях AB_1 на розгортці, зображеної на рис. 9, має довжину 42 м), а також і по бічній стіні (відповідний шлях на рис. 9 проходить по відрізку AB_2).

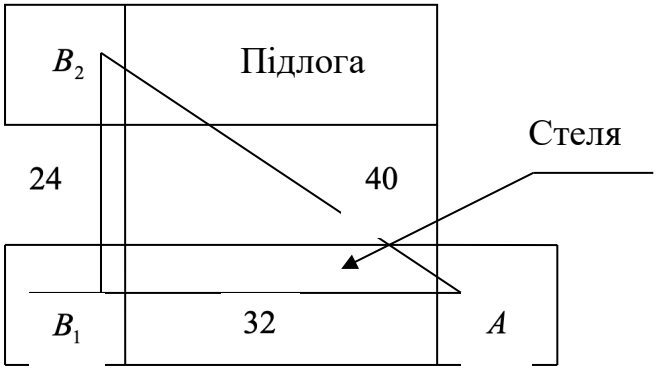


Рис. 9

До задачі 9) Перед переглядом анкет на аркуші паперу записують по одній колонці для реєстрації кожного окремого виду даних, що підлягають збиранню. Потім при зчитуванні цих даних з анкет у відповідні колонки вносяться спеціальні позначки (палички, точки і т. д.), а по закінченні цієї роботи проводиться підрахунок кількості значків у кожній колонці.

До задачі 10) Один з можливих способів прострочити першу емблему показаний на рис. 10. Що ж стосується другої емблеми, то її прострочити з дотриманням умов завдання неможливо.

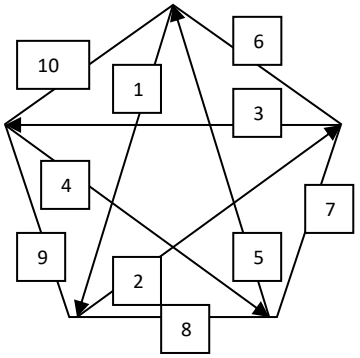


Рис. 10

Як бачимо для розв'язання вказаного списку побутових задач виявились потрібними такі знання учнів з геометрії: радіус кола; об’єм кола, конуса, циліндра.

Висновки. Державне ставлення до освіти, її проблем сьогодні бумерангом відобразилось на якості цієї освіти. Однак, поступово, на різних рівнях, з’являється розуміння незворотніх наслідків навчання, підготовки підростаючого покоління. Тому сьогодні ми зобов'язані шукати шляхи підвищення якості шкільної освіти, зокрема, математичної.

Наведений матеріал свідчить про можливість застосування геометричних знань учнів набутих на уроках геометрії як в основній так і в старшій школі. Представлений матеріал буде корисним кожному вчителю математики.

Література:

1. Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б. Примени математику. – М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 240 с.
2. Пояснювальна записка з програми математика для загальноосвітніх шкіл.

Сапсай Богдан Юрійович
студент 1 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ У МОВОЗНАВСТВІ

Постановка проблеми. Вивчаючи математику, фізику, хімію, біологію, українську мову, літературу та інші предмети не досить часто учнів знайомлять з матеріалом, який демонструє зв’язок теоретичних знань з повсякденним

життям, а також взаємозв’язок між різними предметами, які вони вивчають у школі. Мало уваги приділяється питанню про застосування математики в інших науках, зокрема, у мовознавстві.

Мета статті: показати спосіб використання знань з математичних методів у мовознавстві.

Виклад основного матеріалу. Кожна мова має значну кількість надлишкової інформації. Щоб переконатися в цьому, варто звернутися до феномену телеграми: незважаючи на скорочення слів і усунення деяких службових слів, її зміст залишається зрозумілим. У мовленні, зокрема, в одній фразі повторюється (інколи по п'ять і більше разів) вказівка на рід, число, відмінок, вживаються підряд синоніми, та сама думка часто дублюється (уточнення, що починаються словами тобто, інакше, іншими словами тощо) та ін. Встановлено, що, наприклад, російська мова має 39,8 % надлишкової інформації, англійська – 30,7 %. Різним ступенем надлишковості характеризуються стилі тієї самої мови. Найбільша надлишковість притаманна діловому стилю, менша – публіцистичному і художньо-белетристичному і найменша – непідготовленому усному мовленню. Надлишковість інформації в мові не можна розцінювати як недолік. Часто надлишковість при перешкодах на каналі зв'язку є допоміжним засобом сприйняття повної інформації [4].

З математичної логіки мовознавство запозичило символічну мову. Так, зокрема, знак п означає перетин, и – поєднання, л – і, а, в, с – змінні, > – більше, < – менше. Використання елементів математичної логіки вплинуло на збагачення прийомів дослідження мови – алгоритмізацію, графічні обчислення, матричне визначення істинності функцій складних висловлень тощо. Застосування логіко-математичних методик і прийомів моделювання зумовило появу різних видів логіко-математичного моделювання мови, мисленого експерименту і гіпотетико-дедуктивного способу дослідження [3].

Усе в мові підпорядковується не жорстким, а ймовірнісним закономірностям. Тому цілком природно, що в дослідженні мовних одиниць використовують теорію ймовірностей. Під ймовірністю розуміють відношення в середньому спостережуваного числа вдалих результатів до загального числа експериментів [1].

Найпростіше питання, яке допомагає з'ясувати теорія ймовірностей, – частотність звуків у мовленні.

Якщо огрублено ототожнити звук з буквою, то в будь-якому російському тексті на 1000 букв і пробілів буде 175 пробілів, 90 – о, 62 – а, 53 – т, 45 – с, 40 – р, 38 – в і тільки 2 – ф. Цей тип ймовірності називається середньою ймовірністю. Подібні дослідження використовують для опису особливостей окремих мов, різних стилів однієї мови або індивідуального авторського стилю.

Однак звуки в мовленні розташовуються не як-небудь, а більш-менш визначеними для кожної мови способами (приголосний + голосний + голосний чи приголосний + голосний + приголосний тощо). У більшості мов світу переважає проміжний тип – приголосний + голосний. Знання таких закономірностей дає змогу визначити ймовірність появи в мовленнєвому

ланцюжку голосного чи приголосного. Так, якщо взяти перший тип мов, до яких належать полінезійські, де після приголосного, як правило, йдуть два голосних, то після першого навгад вибраного приголосного ймовірність, що наступним звуком буде голосний, практично дорівнює 1. Знання цих обмежень важливе для дешифрування тексту. Цей тип ймовірності, де у кожному новому експерименті враховується результат попереднього експерименту, називають умовною ймовірністю [6].

Другий тип, як і перший, не відображає суті мовних явищ. При такій інтерпретації виходить, ніби всі приголосні в середньому однаково часто поєднуються з голосними. У мовленні на суто фонетичну сполучуваність накладаються ще й інші обмеження, викликані тим, що деякі можливі звукосполучення мають зміст і є морфемами, а інші не мають змісту і не є морфемами (пор.: смола і жмола, хмола, вмола).

Ймовірність перших різко зростає, а ймовірність других різко знижується, по суті дорівнює нулю. Цей тип ймовірності називається індуктивною ймовірністю. Для функціонування мови саме він має особливе значення, оскільки людина, сприйнявши декілька звуків, очікує певне, а не будь-яке продовження. Індуктивна ймовірність виражає очікування того чи іншого мовного елемента з погляду людини, яка розуміє зміст мовленнєвого ланцюжка [2].

Аспект мови, до якого застосовують теорію ймовірностей, називається теоретико-ймовірнісним.

Теорію множин використовують для дослідження класів мовних елементів, які складають уже не мовленнєвий ланцюжок, а парадигматику мови. Множину трактують як сукупність об'єктів, об'єднаних якоюсь спільною ознакою. Ознака, яка об'єднує об'єкти у складі множини, може бути якою завгодно. Так, скажімо, всі фонеми певної мови, усі словоформи певного тексту, всі тексти української мови можна інтерпретувати як окремі множини. Об'єкти, що складають певну множину, називають елементами. Позначають множину фігурними дужками. Наприклад, запис A = {x, y,..., z} читається так: існує множина A, яка складається з елементів x, y,..., z.

Множину задають двома способами: простим перерахуванням її елементів або вказівкою на ознаку цих елементів. Наприклад: A = {ґ, к, х, ґ, к', х'} або A є множина задньоязикових приголосних української мови.

Множина може складатися не тільки з багатьох, а й з одного елемента (наприклад, множина середньоязикових складається з одного звука [j]), може бути й порожньою (наприклад, множини довгих і коротких голосних в українській мові). Елементом множини може бути інша множина (дзвінкі приголосні –підмножина множини приголосних, а приголосні – підмножина множини звуків). Належність елемента множині записується так: $x \in A$, що читається: "елемент x належить до множини A", а належність підмножини множині записується, як $A \subset M$ (множина A є підмножиною множини M). Дві і більше множин можуть мати спільні елементи. У такому разі говорять, що ці множини перетинаються (наприклад, множини губних приголосних і дзвінких

приголосних). Поділ множин на підмножини, які не перетинаються, є класифікацією елементів [7].

Розглянемо фонеми як множину. В мові кожна фонема протиставлена всім іншим. Для опису системи фонем будь-якої мови достатньо 12 ознак, причому кожна з цих ознак може бути наявною або відсутньою. Таким чином, множина буде складатися з 2i*, тобто 4096 елементів. Кожен елемент – це певне поєднання однієї ознаки з декількома іншими з дванадцяти. Отже, 12 членів однієї множини можуть поєднуватися 4096 різними способами і утворювати таку кількість під множин. Скільки є можливих підмножин, стільки може бути і фонем, оскільки кожна під множина – це певне поєднання ознак фонем.

Аспект мови, до якого застосовують теорію множин, називають теоретико-множинним.

Висновки. Отже, мовознавство як і багато інших наук тісно поєднане з математикою. Тому доцільно знайомити учнів з можливостями застосування знань та вмінь з математики в різних галузях, зокрема під час вивчення різних мов.

Література:

1. Апресян Ю.Д. Идеи и методы современной структурной лингвистики / Ю.Д. Апресян. – М.: Мир, 1986. – 356 с.
2. Апресян Ю.Д. Проблеми та методи структурної лінгвістики / Ю.Д.Апресян. – К.: Рад. шк., 1965. – 234 с.
3. Головин Б.Н. Язык и статистика / Б.Н. Головин. – М.: Мир, 1970. – 254с.
4. Жирмунский В.М. О некоторых проблемах лингвистической географии: Вопр. языкознания № 4 / В.М. Жирмунский. – М.: Мир, 1974. – 125 с.
5. Перебийніс В.С. Статистичні методи для лінгвістів / В. С. Перебийніс. – К.: Рад. шк., 2002. – 254 с.
6. Харрис З. Совместная встречаемость и трансформация в языковой структуре. Новое в лингвистике / З. Харрис. – М.: Мир, 1972. – 200 с.
7. Харрис З. Совместная встречаемость и трансформация в языковой структуре. Новое в лингвистике / З. Харрис. – М.: Мир, 1982. – 276 с.

Серветнік Віталій Віталійович, Томчук Ірина Іванівна
викладачі математики та інформатики,
Вінницький технічний коледж

ПРОБЛЕМНІ СИТУАЦІЇ ЯК ЗАСІБ АКТИВІЗАЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ВНЗ І-ІІ РІВНЯ АКРЕДТАЦІЇ

Постановка проблеми. Однією з актуальних проблем на сучасному етапі розвитку педагогічної теорії та практики є активізація пізнавальної діяльностістудентів. Саме від її вирішення залежить ефективність навчальної діяльності, яка проявляється в міцному засвоєнні знань, стимулюванні та

розвитку інтересу до навчання, формуванні самостійної думки та підготовці до самостійного життя.

У педагогічних дослідженнях найчастіше активізацію пізнавальної діяльності розглядають як організацію сприйняття навчального матеріалу учнями та студентами, коли засвоєння знань відбувається шляхом розкриття взаємозв'язку між явищами, порівняння нової інформації із вже відомою, а також конкретизації, узагальнення та оцінки навчального матеріалу з різних точок зору.

Мета статті: розглянути можливості застосування проблемних ситуацій на заняттях з математики з метою активізації пізнавальної діяльності студентів.

Виклад основного матеріалу. Прояв активності студента в процесі навчання пов’язаний з пізнанням світу. Пізнавальна активність – складне інтегральне утворення особистості, що має мотиваційні, операційні та результативні компоненти. Ознаками пізнавальної активності в будь-якій діяльності виступають такі показники, як готовність до роботи, прагнення до самостійної діяльності, якість роботи, шляхи вибору оптимальних способів розв’язання завдань.

Активізація пізнавальної діяльності студентів – це перехід до більш високого рівня активності та самостійності у процесі навчання, який стимулюється розвитком пізнавального інтересу, та відбувається завдяки удосконаленню методів та прийомів навчального процесу.

Врахування зазначених психологічних особливостей розвитку особистості приводить до вибору певних методів та прийомів навчання, які сприяють активізації пізнавальної діяльності при роботі з математичними задачами. Оптимальний вибір методів та прийомів навчання передбачає врахування як змісту навчального матеріалу, так і рівня його складності й специфіки, а також рівня підготовки студентів. Одним із засобів активізації пізнавальної діяльності студентів у процесі навчання є використання проблемних ситуацій.

Навчання студентів за допомогою традиційних методів та прийомів дає можливість досягти учнями лише зовнішньої, але не творчої активності. Використання проблемних ситуацій при роботі з математичними задачами підвищує продуктивність пізнавальних процесів, розвиває творчі здібності студентів, веде до глибокого та міцного засвоєння знань, вчить робити самостійні “відкриття” та знаходити їх застосування в бурхливому потоці життя.

Розробці вимог до застосування проблемних ситуацій у навчальному процесі присвячені роботи М. Махмутова. Автор вважає, що проблемні ситуації мають бути зорієнтовані на максимальну самостійність і пізнавальну діяльність студентів, водночас відповідаючи навчальній інформації, яку він пізнає, а також уже наявним у нього знанням. Багато уваги вчений приділяє застосуванню прийому проблемних запитань, який полягає в управлінні розумовими діями студента щодо виявлення відмінностей і подібностей між різними явищами, предметами, поняттями; знаходженню і встановленню закономірностей та зв’язків у процесі вивчення конкретних явищ [1].

Прояв активності та самостійності студента в проблемній ситуації можливий на різних рівнях активізації пізнавальної діяльності, а саме:

1. Вивчення та розв’язання проблеми за вимогою викладача.

2. Вивчення та розв'язання проблеми, завдяки виникненню здивування, бажання подолати протиріччя, які виникають.

3. Вивчення та розв'язання проблеми, яка зацікавлює та потребує уважної роботи.

4. Пізнавальний інтерес до роботи з проблемою.

Протиріччя, які виникають на певних етапах роботи з математичними задачами, служать джерелами проблемних ситуацій в процесі вивчення математики. З цього приводу, учбові проблемні ситуації поділяються на:

- пов'язані з перекладом реальних задач на мову математики;
- пов'язані з математичним формулюванням задач;
- пов'язані з перекладом математичного результату на мову, на якій була сформульована задача [2].

На нашу думку, використання задач з не сформульованим запитанням, із недостачею даних, із зайвими даними, з декількома розв‘язками, задач на доведення, на логічне міркування приводить до створення проблемної ситуації в навчанні. Завдяки задачам, які ставлять студентів у ситуації, характерні для життєвої практики, відбувається актуалізація досвіду, який вони мають.

Зазначимо, що структура проблемного уроку, або уроку, що містить проблемні ситуації, може значно варіюватись. В кожному окремому випадку вона визначається логікою навчального процесу, етапами творчої діяльності та рівнем проблемності.

Наведемо приклади можливих постановок проблемного запитань. При вивченні теми «Тригонометричні рівняння» пропонуємо моделювати проблемні ситуації в такому вигляді.

На екран проектуються рівняння:

$\sin x \cos^2 x = 1$ $\sin x \cos^2 x = 0$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\sin^2 x = 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$ $\sin x = \sqrt{3}\cos x = 0$ $\sin^2 x - 4\cos^2 x = 3 = 0$

Студенти повинні вказати тип рівняння і спосіб його розв’язання.

Далі пропонуємо розглянути рівняння виду $c\sin x = b\cos x = a$

1. Чи буде це рівняння однорідним рівнянням 1-го степеня?

(Оч. В. Ні)

2. Чим відрізняється дане рівняння від однорідного рівняння 1-го степеня?

(Оч.в. однорідне рівняння 1-го степеня має вид $a\sin x = b\cos x = 0$)

3. Якщо рівняння не однорідне, то чи можна ділити кожний член рівняння на $\sin x$ або на $\cos x$?

(Оч.в. Ні)

4. Які ж тоді можливі способи розв’язування даних рівнянь?

Після аналізу поставленої проблеми разом з студентами приходимо до потрібних висновків.

(Якщо $\sin x \cos x 3$, то рівняння коренів немає, оскільки $|\sin x| \le 1$ і $|cosx| \le 1$

.

В загальному якщо c=b=1, то рівняння прийме вигляд $\sin x \cos x a$.

Найбільше значення, яке може прийняти a буде $\sqrt{2}$. Якщо $a \sqrt{2}$, то рівняння коренів немає.)

Далі розглядаємо рівняння $\sin x \cos x 1$. Це рівняння має корені, оскільки $a 1$.

Наголошуємо, що є багато способів розв'язання таких рівнянь. Після проведення «Мозкового штурму» розглядаємо способи розв'язування запропоновані студентами, зокрема:

1. Оскільки у нас кути однакові, то робимо однакові функції за допомогою формул зведення. Оскільки $\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то початкове рівняння набуде вигляду

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x 1$$

Застосувавши формулу суми косинусів отримаємо:

$$2cos\frac{\frac{\pi}{2} - x x}{2} \cdot \cos\frac{\frac{\pi}{2} - x - x}{2} 1;$$

$$2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) 1;$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) 1;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{\pi}{4} - x \frac{\pi}{4} 2\pi n, \text{ де n } \in Z.$$

$$x \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} 2\pi n, \text{ де n } \in Z.$$

2. Можна застосувати формули подвійного кута. Тобто $\sin x$ за формулою $\sin 2x 2\sin x \cdot \cos x$ можна записати у вигляді $\sin x 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$.

За формулою $\cos 2x \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos x$ можна подати у вигляді:

$\cos x \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$. Тоді наше рівняння набуде вигляду:

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \sin^2\frac{x}{2} \cos^2\frac{x}{2};$$

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} 0;$$

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot (\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}) 0;$$

Отже, маємо

$$\sin\frac{x}{2}=0 \quad \text{або} \quad \cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0;$$

$$\frac{x}{2}=\pi+\pi n, \qquad 1-tg\frac{x}{2}=0$$

$$tg\frac{x}{2}=1$$

$$x=2\pi+2\pi n,\ n\in Z \qquad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

Об'єднавши ці відповіді отримаємо $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi n$, де n $\in Z$.

Подібна постановка завдань спонукає студентів до активної пізнавальної діяльності, сприяє розвитку логічного мислення.

Висновки. Розуміння вчителем психологічних закономірностей розвитку пізнавальної активності учнів є необхідною умовою успішного застосування проблемних ситуацій у навчанні математики.

Вважаємо, що використання проблемних ситуацій у процесі навчання може забезпечити реалізацію принципу активного та свідомого засвоєння знань, коли на зміну запам'ятовуванню та відтворенню матеріалу з підручника або слів учителя мають прийти поглиблене розуміння і навички оптимального розв'язання виникаючих проблем.

Література:

1. Махмутов М.И. Проблемное обучения: Основные вопросы теории / М.И. Махмутов. – М.: Педагогика, 1975. – 367 с.
2. Щукина, Г.И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе / Г.И. Щукина.– М.: Просвещение, 1979 .– 160 с.

Цимбал Марина Анатоліївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ З ТЕОРІЇ РЕШІТОК ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПЕРЕЛИВАННЯ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧНОГО БІЛЬЯРДА

Постановка проблеми. Задачі на моделювання руху більярдної кульки розглядаються в інформатиці, математиці та фізиці. До систем, відповідаючим більярдам, зводяться ряд задач статистичної фізики. Багато складних для аналітичного розв'язання математичних задач легко розв'язуються за допомогою побудови траєкторій більярдів в прямокутній та опуклій області. Чітко простежується зв'язок такої науки, як оптики з проблемами побудови траєкторій математичних більярдів в еліпсі.

Метод математичного більярду як спосіб розв'язування задач на переливання практично не використовується учнями: або він їм не знайомий, або не усвідомлений. При розв'язанні таких завдань завжди виникає потреба в складанні алгоритму послідовного отримання всіх можливих розв'язків, а також у виборі оптимального розв'язку. Покажемо застосування методу більярда в розв'язуванні задач на переливання на решітках.

Аналіз попередніх досліджень. Подібно до того, як азартна гра у кості викликала до життя «обчислення» вірогідності, гра в більярд стала предметом серйозних наукових досліджень з механіки та математики. Опису руху більярдної кулі присвячена книга фізика Г.Коріоліса, створена ним в 1835 році.

Властивості більярдів обговорювалися ще в працях А. Пуанкаре, Г. Біркгофа і Ж. Адамара. Великий внесок в розуміння ролі більярдів зробив фізик Н. С. Крилов. Математичний апарат для вивчення властивостей більярдів з'явилися в 70-х роках, після того, як в працях Д.В.Аносова, Я.Г.Сіная, Смейла та інших було створено новий напрямок теорії динамічних систем, що отримало назву теорії гіперболічних динамічних систем. Праця Сіная відкрила двері для проникнення динамічних систем в математичну теорію більярдів.

В умовах сучасності теорія більярдів здобула відомість і отримала широке визнання в науковому світі. Стали звичними такі поняття, як «стохастичний більярд», «квантовий більярд» «ентропія більярду», «статистичні властивості більярду». В той же час, це порівняно молода теорія. Тому можливості використання новітніх технологій розв'язання можливо допоможуть знайти відповідь на ще нерозв'язані задачі даної теорії.

Мета статті: описати основні теоретичні відомості з даної теми, проаналізувати можливості застосування методу більярду для розв'язування задач на решітках, розглянути алгоритм роз'язування логічних задач на переливання даним методом.

Виклад основного матеріалу. Суть методу більярда полягає в поданні послідовності переливання аналогічно руху більярдної кульки по столу особливої конструкції з розмірами, відповідними обсягами спочатку порожніх посудин. Намалювавши на бумазі в клітинку вихідну конфігурацію, необхідно простежити можливі рухи кульки відповідно до закону «кут падіння дорівнює куту відбиття» і потрапляння їм в необхідні точки по умові завдання. Завдання на переливання рідин можна дуже легко вирішувати, викреслюючи більярдну траєкторію кулі, що відбивається від бортів столу, що має форму паралелограма.

Типові задачі на переливання

У завданнях на переливання потрібно вказати послідовність дій, при якій здійснюється необхідну переливання і виконані всі умови задачі. Якщо не сказано нічого іншого, вважається, що:

- ✓ Всі судини без поділів;
- ✓ Не можна переливати рідини «на око».

Ми можемо точно сказати, скільки рідини в посудині, тільки коли:

- ✓ Знаємо, що посудина порожня;
- ✓ Знаємо, що посудина повна, а в задачі дана його місткість;

- ✓ У задачі дано, скільки рідини в посудині, а переливання з використання цієї судини не проводилися;
- ✓ У переливанні брали участь дві посудини, в кожному з яких відомого, скільки було рідини, і після переливання вся рідина помістилася в 1 з них;
- ✓ У переливанні брали участь дві посудини, в кожному з яких відомого, скільки було рідини, відома місткість того посудини, в який переливали, і відомо, що вся рідина в нього не помістилась: ми можемо знайти, скільки її залишилося в іншій посудині. Наведемо типові задачі на переливання.

Задачі на отримання деякої кількості рідини з великої або нескінченної по об'єму посудини, водойми або джерела за допомогою двох порожніх посудин

Задача 1. Як за допомогою посудин об'ємом 7 і 11 літрів і бочкою з водою відміряти 2 літри води.

Розв'язання.

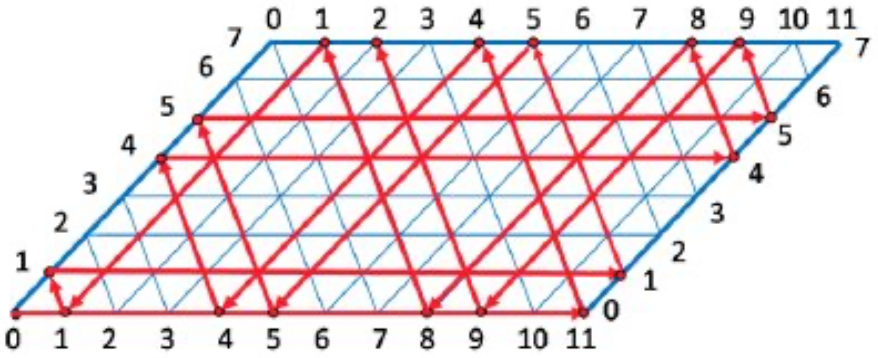


Рис.1

Як не дивно, але головоломки на переливання рідин можна дуже легко розв'язувати, викреслюючи більярдну траєкторію кулі, що відбивається від бортів ромбічного столу. Межі таких столів зручніше за все малювати на папері, на яку нанесена сітка з однакових рівносторонніх трикутників. У розгляді задачі сторони столу повинні мати довжину 7 та 11 одиниць (Рис.1).

Таблиця 1.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
11 літрів	11	4	4	0	11	8	8	1	1	0	11	5	5	0	11	9	9	2
7 літрів	0	7	0	4	4	7	0	7	0	1	1	7	0	5	5	7	0	7

По горизонталі відкладено кількість води в 11-літровій посудині в будь-який момент часу, а по вертикалі – та ж величина для 7-літрової посудини.

Як же користуватися діаграмою? Уявіть собі, що куля знаходиться в лівій нижній вершині в точці 0. Він буде переміщуватися уздовж нижньої основи ромба до тих пір, поки не досягне правої бокової сторони в точці 11. Це означає, що 11-літрова посудина наповнена до країв, а 7-літрова порожня.

Відбившись пружно від правого борту, куля покотиться вгору і вліво і вдариться об верхній борт в точці з координатами 4 по горизонталі і 7 по

вертикалі. Це означає, що в 11-літровій посудині залишилося всього 4 літри води, а 7 літрів з неї перелили в меншу посудину.

Простежуючи подальший шлях кулі і записуючи всі етапи її руху до тих пір, поки вона не потрапить в точку 2 верхнього борта, ви отримаєте відповідь і дізнаєтеся, в якій послідовності необхідно проводити переливання, щоб відміряти 2 літри води. Всі 18 переливань зображені схематично на рис.1. Похилі стрілки говорять про те, що вода переливається з однієї посудини в іншу, а вертикальні означають, що або вода цілком виливається з меншої посудини назад в бочку, або більшу посудину треба наповнити водою до країв.

Чи є цей розв'язок найкоротшим? Ні, існує другий шлях, коли воду спочатку наливають в 7-літровий посудину. На діаграмі (Рис.2) це відповідає тому, що куля з точки 0 котиться вгору вздовж лівого борту до тих пір, поки не вдариться в верхній борт. Намалювавши траєкторію більярдної кулі, можна переконатися в тому, що точка 2 досягається цього разу за 14 віддзеркалень від борта. Отриманий розв'язок з 14 переливаннями вже є найкоротшим.

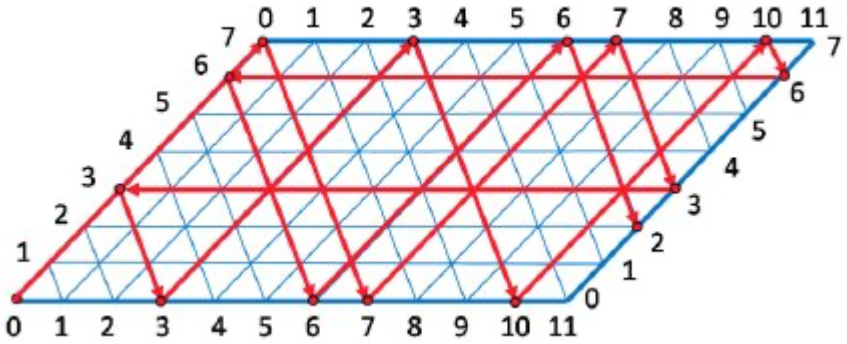


Рис.2

Таблиця 2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
11 літрів	0	7	7	11	0	3	3	10	10	11	0	6	6	11
7 літрів	7	0	7	3	3	0	7	0	7	6	6	0	6	2

Задачі на переливання посудин скінченного об'єму

Задача 2. Є три посудини місткістю 8, 5 і 3 літри. Найбільша посудина повна молока. Як розділити це молоко на дві рівні частини, використовуючи інші судини?

Розв'язання. У розглянутій задачі сторони паралелограма повинні мати довжини 3 і 5 одиниць. По горизонталі будемо відкладати кількість води в літрах в 5-літровій посудині, а по вертикалі - у 3-літровій посудині. На всьому паралелограмі нанесена сітка з однакових рівносторонніх трикутників (див. рис.3). Головна діагональ паралелограма розділена на 8 рівних частин, відносится до 8-літрової посудини.

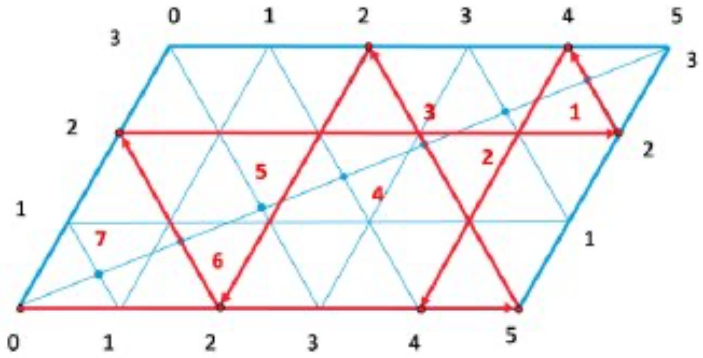


Рис.3

Більярдна куля може переміщуватися тільки уздовж прямих, що утворюють сітку на паралелограмі. Після удару об сторони паралелограма куля відображається і продовжує рух уздовж виходячого з точки борта, де відбулося зіткнення. При цьому кожна точка паралелограма, в якій відбувається зіткнення, повністю характеризує, скільки води є в кожній з посудин.

Нехай куля знаходиться в лівому нижньому кутку і після удару почне переміщуватися вгору вздовж лівої бічної сторони паралелограма до тих пір, поки не досягне верхньої сторони в точці А. Це означає, що ми повністю наповнили водою малу посудину. Відбившись пружно, куля покотиться вправо вниз і вдариться об нижній борт в точці В, координати якої 3 по горизонталі і по вертикалі 0. Це означає, що у великій посудині 3 літри води, а в малій посудині води немає, тобто ми перелили воду з малої посудини у велику.

Простежуючи подальший шлях кулі, і записуючи всі етапи його руху у вигляді окремої таблиці, в кінці кінців, ми потрапляємо в точку, яка відповідає стану, коли мала посудина порожня, а у великій посудині 4 літри води. Таким чином, отримана відповідь і вказана послідовність переливань, що дозволяють відміряти 4 літри води. Всі 8 переливань зображені схематично в таблиці.

Таблиця 3.

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5 літрів	0	0	0	3	3	5	0	1	4
3 літра	0	3	0	3	1	1	0	3	0

Чи є цей розв’язок найкоротшим? Ні, існує другий шлях, коли воду спочатку наливають в п'ятилітрову посудину. Якщо на діаграмі куля з точки O покотиться вправо по нижній стороні паралелограма і потім, відбившись від правої бічної сторони, в точку 2 на верхній стороні паралелограма і т.д., то отримаємо більш короткий розв’язок задачі. Можна показати, що отриманий розв’язок з 6 переливаннями вже є найкоротшим.

Таблиця 4.

№	0	1	2	3	4	5	6	7
5 літрів	0	0	0	3	3	5	0	1
3 літри	0	3	0	3	1	1	0	3
8 літрів	8	3	3	6	6	1	1	4

По суті, в даних задачах реалізуються два алгоритми.

Перший: послідовно з більшої посудини наповнюють меншу посудину, з неї рідина зливається в посудину проміжного об'єму, ці дві дії повторюються до повного наповнення посудини проміжного об'єму, після чого рідина з неї зливається в найбільшу. Процедура повторюється кілька раз до тих пір, поки дві менших посудини будуть порожніми, а вся рідина виявиться у великій посудині. Таким чином, будуть реалізовані всі варіанти наповнення посудин.

Другий алгоритм відповідає діям першого, записаних в зворотньому порядку, тобто з кінця. Спочатку з більшої посудини наповнюється посудину проміжного обсягу. З неї рідина переливається в саму маленьку, а з найменшої - в найбільшу. Дві останні дії повторюються до тих пір, поки посудина проміжного об'єму не стане порожньою. Тоді вона наповнюється рідиною з самої великої посудини. Ця процедура повторюється до повернення до вихідного стану.

Розв’язок задачі можна отримати в обох алгоритмах, обирається коротший.

Умова розв’язності задач

Якщо обсяги двох менших посудин не мають спільного дільника (взаємно прості), а обсяг третьої посудини більше або дорівнює сумі обсягів двох менших, то за допомогою цих трьох посудин можна відміряти будь-яке ціле число літрів, починаючи з 1 літра і закінчуючи об'ємом середньої посудини.

Маючи, наприклад, посудини місткістю 15, 16 і 31 літр, ви зумієте відміряти будь-яку кількість води від 1 до 16 літрів. Така процедура неможлива, якщо обсяги двох менших посудин мають спільний дільник.

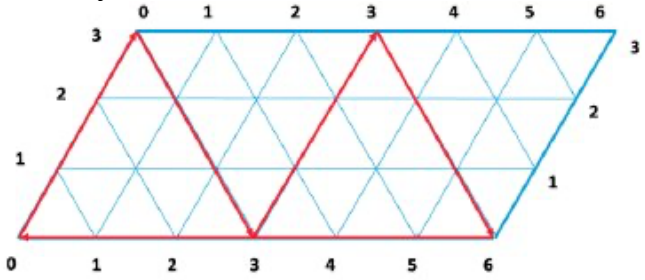


Рис.4

Коли об’єм більшої посудини менше суми обсягів двох інших, виникають нові обмеження. Якщо, наприклад, обсяги посудин дорівнюють 7, 9 і 12 літрів, то у ромбічного столу треба відсікти правий верхній кут (рис.5).

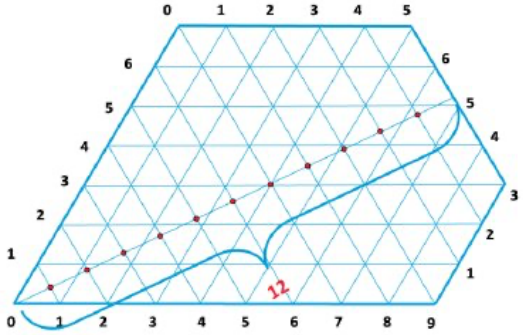


Рис.5

Тоді куля зможе потрапити в будь-яку точку від 1 до 9, за винятком точки 6. Незважаючи на те, що 7 і 9 взаємно прості, відміряти 6 літрів води виявляється неможливим через те, що найбільша посудина має надто маленький об’єм.

Висновки. Хоча математичний більярд – достатньо молода теорія, але в останній період вона здобула широке визнання. В статті яскраво показано доцільність вивчення елементів теорії математичних більярдів в школі на факультативах з математики. Дуже цікавими є правила гри в дійсний більярд, що витікають з математичної теорії. Це можна застосовувати для проведення нетрадиційних уроків з математики. На прикладах було продемонстровано важливість методу більярду для розв'язування задач на решітках. Також було показано, що даний метод спрощує розв'язання математичних логічних задач на переливання. Отримані висновки свідчать про широкі можливості застосування теорії.

Література:

1. Борахеостов В. Бильярды /В. Борахеостов // Наука и жизнь. – 1966. – № 2-4, 6, 11
2. Гальперин Г.А. Бильярды / Г.А. Гальперин //Квант. – 1981. – №4. – С.11–16.
3. Гальперин Г.А. Периодические движения бильярдного шара / Г.А. Гальперин // Квант. – 1989. – № 3. – С. 32-35.
4. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики). – М.: Наука, 1990. – 315 с.
5. Земляков А.Н. Арифметика и геометрия столкновений / А.Н. Земляков // Квант. – 1978. – №4. – С.24–27
6. Земляков А.Н. Бильярды и поверхности / А.Н. Земляков // Квант. – 1979. – № 9. – С. 15–19.
7. Земляков А.Н. Математика бильярда / А.Н. Земляков // Квант. – 1976. – № 5. – С.33–38.
8. Кориолис Г.Г. Математическая теория явлений бильярдной игры – М.: Гостехиздат, 1956. – 345 с.

Яцишен Сергій Олегович
викладач фізики та основ інформатики,
Вінницький технічний коледж

КРИВА ЗАБУВАННЯ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Постановка проблеми. Учні під час вивчення математики мають властивість дуже часто забувати вивчений матеріал, а для того щоб подолати дане явище потрібно шукати методи його подолання.

Мета даної статті: з'ясувати причини виникнення процесу забування під час вивчення математики, а також можливі шляхи вирішення цієї проблеми

Виклад основного матеріалу. З роллю особистості в процесі забування, мабуть, раніше за всіх впритул зіткнулись лікарі, які вивчали хвору психіку

людини. Творець психоаналізу Зігмунд Фрейд зазначав у своїх хворих, які страждали істерією, значні провали в пам’яті, причому забувалося все те, що було пов’язано з тяжкими переживаннями і травматичною ситуацією, які і призвели до утворення неврозу. Звернувшись до «психопатології повсякденного життя», Фрейд також виявив за багатьма фактами повсякденного забуття прізвищ та імен, втрати речей та інші мотиви небажання, неприязні і інші негативні емоції. З цієї точки зору той факт, що Достоєвський забув власний роман, про що йшлося в минулій частині статті, можна пояснити тим, що письменникові було важко згадувати про деякі події з власного життя, відображені у його творі.

Пам'ять – це форма психічного відображення дійсності, що полягає у запам'ятовуванні, збереженні, забуванні й відтворенні минулого досвіду.Физиологичной основою пам'яті є тимчасові нервові зв'язки в корі мозку, які можна актуалізовані під впливом різноманітних подразників. До основним процесам пам'яті належать запам'ятовування, що забезпечує закріплення нову інформацію шляхом зв'язування її з попереднього досвіду, зберігання - забування, відтворення.

У психології розрізняють декілька тисяч видів пам'яті. Залежно від характеру матеріалу, який запам'ятовується, пам'ять то, можливо вербальної, образною, емоційної. Враховуючи те, який аналізатор найбільше задіяним у сприйнятті інформації, яка запам'ятовується, виділяють зорову, слухову, тактильну інші види пам'яті. З урахуванням тривалості збереження пам'ять поділяється на довгострокову, короткочасну і оперативну. Інформація може фіксуватися мимовільний і довільно.

Забування та його причини

Те, що людина запам’ятовує, з часом поступово забувається. Забування – процес, протилежний запам’ятовуванню. Забування виявляється в тому, що втрачається чіткість запам’ятованого, зменшується його обсяг, виникають помилки у відтворенні, стає неможливим відтворення і, нарешті, унеможливлюється впізнання.

Забування – функція часу. Засадовим стосовно забування є згасання тимчасових нервових зв’язків, що тривалий час не підкріплювалися. Якщо здобуті знання тривалий час не використовуються і не повторюються, то вони поступово забуваються. Причиною забування є також недостатня міцність запам’ятовування. Щоб запобігти забуванню, потрібно добре заучувати матеріал. Забування залежить також від змісту діяльності, її організації та умов, за яких вона відбувається. Причиною, що погіршує запам’ятовування, може бути негативна індукція, зумовлена змістом матеріалу.Схожий, складний матеріал попереднього заняття ускладнює утворення нових тимчасових нервових зв’язків, знижує ефективність запам’ятовування. Негативний вплив раніше запам’ятованого матеріалу на оволодіння новим характеризується як проактивне (таке, що діє наперед) гальмування. З погляду психології недоцільно після математики вивчати фізику чи хімію. Негативний вплив наступної діяльності на

зв’язки,вироблені в попередній діяльності, називається ретроактивним (таким, що діє зворотно) гальмуванням.

Забування – процес поступовий. Засадовим стосовно нього є ослаблення і порушення раніше утворених умовних зв’язків. Чим менше вони закріплені, тим швидше згасають і спричинюють забування. Як свідчать проведені дослідження пам’яті (П. Зінченко, А. Смирнов та ін.), швидше забувається та інформація, якій належить другорядна роль у змісті запам’ятованого; тривалий час утримується інформація, що несе основне смислове навантаження. Найвищі темпи забування спостерігаються одразу після заучування матеріалу. Для тривалого утримання в пам’яті інформації важливо з самого початку забезпечити міцне її запам’ятовування і закріплення шляхом повторення в перші дні після того, як її було одержано. Важлива умова продуктивного запам’ятовування – осмисленість, розуміння того, що є його предметом.

Дозвіл проблем забування має надзвичайно важливий практичний сенс. Особливо важливо протистояти забування в процесі навчання, коли є необхідність запам'ятовувати як осмислений, так і довідковий матеріал. Подолання забування можна назвати психолого-педагогічною проблемою. Навчання висуває вимоги до стану пам'яті людини, до її подальшого розвитку, а також до дотримання психогігієни пам'яті.

Подолання забування важливо і в інших сферах людської діяльності. Наприклад, жодне важливе рішення, керівник, якого б рангу він не був, не може прийняти без урахування всіх важливих факторів і обставин. А для цього потрібне нормальне стан пам'яті. Забування, витіснення важливої інформації може призвести до непоправних наслідків. Необхідна нормальна пам'ять і в побуті. Без нормальної пам'яті немислима людська діяльність. Ні звична, відносно проста, ні складна, якою є, наприклад, професійна діяльність. Як відомо, предмети і явища навколишнього світу, що ми сприймаємо, не зникають з нашої свідомості безвісти. Їхні образи ми можемо думкою відтворювати, хоча самих предметів уже немає перед нами. Образи ці зберігаються нашою пам'яттю. Якщо сприйняття – відображення реальності, що діє на наші органи почуттів тепер, то пам'ять – це також відображення об'єктивної реальності, яка діяла в минулому.

У 1885р. *Герман Еббінгауз* видав працю «Пам’ять: внесок в експериментальну психологію», де він експериментальним шляхом дослідив механізми роботи людської пам’яті. В конденсованому вигляді, його дослідження можна представити наступним графіком:

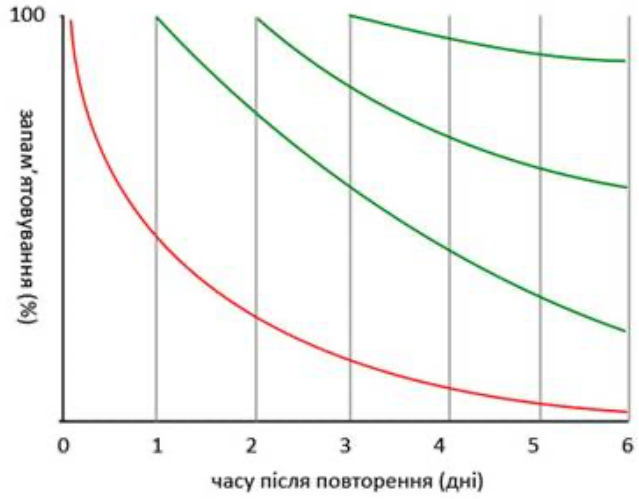


Рис. 1

Рис. 1 – «криві забування», відношення часу до якості запам’ятовування.

Вчений встановив ряд закономірностей:

1. Основне «забування» відбувається в період, що настає безпосередньо після заучування – у цей період втрачається найбільший обсяг матеріалу;

2. Осмислений матеріал запам'ятовується в 9 разів швидше;

4. Важкість заучування пропорційна об'єму або довжині ряду;

5. Зі збільшенням повторень швидкість завчання зменшується;

6. Заучування в цілому ефективніше ніж заучування по частинах;

7. «Ефект краю» – явище, яке полягає у тому, що елементи, що знаходилися на початку і наприкінці ряду, запам'ятовуються швидше, ніж елементи, що знаходилися в середині;

8. Якщо студент знає, що вивчений матеріал стане йому в нагоді, він запам'ятовує його краще.

З наведеного вище графіку та ряду закономірностей можна зробити кілька узагальнень та висновків:

Швидкість та якість запам’ятовування матеріалу, а також утримання його в довгостроковій пам’яті, пропорційні до структурованості матеріалу. Це підтримує гіпотезу мнемотехніків про те, що людина запам’ятовує в першу чергу не знаки, а зв’язки між ними. Таким чином, під час вивчення математики потрібно якомога чіткіше пояснювати та обґрунтовувати всі зв’язки теорії з практикою у наведених формулах.

1. Повторення матеріалу не лише пересуває криву забування вгору, а й робить її пологішою. Тому в процесі вивчення нового матеріалу потрібно постійно проводити аналогію із вивченим та засвоєним матеріалом. Це працює як механізм повторення, що призводить до кращого запам’ятовування та осмислення матеріалу, а також до вивчення нового матеріалу.

2. Аудіальний та графічний матеріал запам’ятовуються автономно один від одного. Відповідно до цього матеріал потрібно подавати насиченим графічним супроводженням (плакати, діафільми, презентації), показати учням де це можна використати в житті. Потрібно стимулювати студентів до самостійної практичної діяльності, а саме залучати студентів до виконання практичних робіт,

домашніх завдань із розв'язком достатньої кількості математичних задач. Для кращого запам'ятовування матеріалу потрібне структуроване його повторення, яке можна реалізувати за допомогою методу інтервального повторення. Суть цього методу полягає в тому, що матеріал пропонується студентові для повторення із інтервалами, довжина яких прямо пропорційна якості утримання цього матеріалу в пам'яті студента. Таким чином, з використанням методу інтервального повторення одиниця навчального матеріалу (в нашому випадку формули і закони) повторюватимуться частіше, якщо студент погано їх засвоїв, і все рідше по мірі того, як цей матеріал запам'ятовується краще. Цей метод вважаємо оптимальнішим, ніж звичайне повторення через економію часу та зусиль студента. Розглянемо шляхи реалізації цього методу, а саме за допомогою карток та програмного забезпечення. Карткова реалізація методу інтервального повторення була запропонована *С. Ляйтнером* [1, 61]. Вона полягає в тому, що одиниці матеріалу розміщуються на двосторонніх картках за принципом: перша сторона – запитання; друга сторона – відповідь. Картки розподіляються у певну кількість груп від найлегших до найважчих для студента. Студент проглядає картки, дивлячись на запитання і намагаючись на нього відповісти. При правильній відповіді картка переміщується в «легшу» групу, а у випадку помилки або неможливості відповісти – до «важчої». При цьому картки з «важчої» групи проглядаються частіше (кілька разів на день), що забезпечує процес вивчення. Відоміші ж повторюються рідше (раз на день, на три дні, на тиждень, місяць). Цей метод – боротьба із забуванням, на думку Ляйтнера [1] та Еббінгауза [2].

Висновки. Отже, щоб запобігти забуванню, як негативному явищу, і тривалий час утримувати в пам'яті інформацію, важливо з самого початку забезпечити міцне її запам'ятовування і закріплення шляхом повторення в перші дні після того, як її було одержано. Важлива умова продуктивного запам'ятовування – осмисленість і розуміння того, що є предметом вивчення.

Література:

1. Sebastian Leitner. So lernt man lernen. Der Weg zum Erfolg. Herder, Freiburg, 2003. – 317 p.
2. Hermann Ebbinghaus. Memory: A Contribution to Experimental Psychology . 1885.
3. Психология памяти / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтер и В.Я. Романова. – М.: "ЧеРо", 2002. – 816 с.

РОЗДІЛ IV. ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ПРИРОДНИЧО-НАУКОВІЙ СФЕРІ

Бірченко Вікторія Леонідівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

РІЗНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. Крайова задача – задача теорії диференціальних рівнянь, в якій граничні умови задаються в різних точках. Наприклад, при коливаннях струни із закріпленими кінцями зміщення на кожному з кінців дорівнює нулю. Під час розв'язання кожної з крайових задач застосовується один із багатьох методів, які будуть розглянуті у даній статті.

Мета статті: розглянути рівняння більш високих порядків, з використанням методів розв'язання крайових задач з урахуванням типу рівняння.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо звичайне диференційне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \tag{1}$$

при граничних умовах $y(a) = A, y(b) = B.$

Розділивши методи розв'язування крайових задач на два основних, отримаємо:

1. Методи, які ґрунтуються на заміні розв'язку крайової задачі розв'язком декількох задач Коші.

2. Методи, в яких використовується кінцево-різнична форма диференціального рівняння.

Методи стрільби [2]. Якщо звичайне диференційне рівняння другого порядку є лінійним, тобто має вигляд

$$y'' = f_1(x)y' + f_2(x)y + f_3(x) \tag{2}$$

при додаткових умовах $y(a) = A, y(b) = B.$ То крайову задачу можна звести до задачі Коші за допомогою початкових умов $y(a) = A$ і $y'(a) = \alpha_1$.

Знайшовши розв'язок $y_1(x)$ можна поставити другі граничні умови $y(a) = A$ і $y'(a) = \alpha_2$ і отримати другий розв'язок $y_2(x)$. Якщо $y_1(b) = \beta_1$ а $y_2(b) = \beta_2,$ при чому $\beta_1 \neq \beta_2$, то розв'язок

$$y(x) = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2}\left[(B - \beta_2)y_1x + (\beta_1 - B)y_2x\right]. \tag{3}$$

задовольняє обом початковим граничним умовам.

Якщо вирішується нелінійне звичайне диференційне рівняння, то розв'язок крайової задачі можна звести до розв'язку декількох задач Коші, послідовно вводячи в початкові умови значення α :

$$y(a) = A \text{ і } y'(a) = \alpha \ . \tag{4}$$

і прагнучи знайти розв'язок, який задовольняє умову $y(b) = B.$

При цьому може допомогти інтерполяція, що дозволяє побудувати впорядковану послідовність α і звести до мінімуму об'єм обчислень.

Кінцево-різницеві методи [3]. Перевага кінцево-різницевих методів в тому, що вони дозволяють звести розв'язок крайової задачі до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь. При розв'язку двоточкової крайової задачі

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{5}$$

при $y(a) = A$ і $y(b) = B$ відрізок $[a;b]$ можна розділити на n рівних частин:

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 1,2,...,n\ , \tag{6}$$

де $x_0 = a, x_n = b$, а $h = \frac{b-a}{n}$. В точках x_i, що називаються вузлами, намагаються знайти значення розв'язку y_i. Знаючи координати вузлів, користуючись кінцево-різницевими виразами для похідних $y'(x_i) = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})$ та $y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$, можна представити диференціальне рівняння у виді різницевого рівняння.

якщо початкове ЗДР лінійне, то задача буде складатися з розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь;

якщо початкове ЗДР нелінійне, то задача зводиться до розв'язування системи нелінійних алгебраїчних або трансцендентних рівнянь;

Методи, алгоритми та програми розв'язування таких лінійних та нелінійних рівнянь відомі, але звести розв'язування крайової задачі методом кінцевих різниць до стандартної програми важко, оскільки формулювання кожної задачі залежить від вигляду рівняння, що розглядається.

Приклад [1]. Нехай потрібно вирішити диференціальне рівняння $y'' = 2x + y$ при умовах $y(0) = 0$ і $y(1) = 1$ і кроці $h = 0.2$. В різницевій формі це рівняння має вид:

$$y''(x_i) = \frac{1}{0.04}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = 2x_i + 3y_i. \tag{9}$$

Використовуючи цю формулу і граничні умови можна виписати наступну систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} -2.12y_1 + y_2 = 0.016, \\ y_3 - 2.12y_2 + y_1 = 0.032, \\ y_4 - 2.12y_3 + y_2 = -0.064, \\ -2.12y_4 + y_3 = 0.936 \end{cases}, \quad y(x) = \frac{5}{3}\frac{sh\sqrt{3x}}{sh\sqrt{3}} - \frac{2}{3}. \tag{10}$$

Метод прогонки [2]. Якщо звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) 2-го порядку розв'язати методом скінченних різниць, то початкове ЗДР зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею коефіцієнтів, тобто такою, що кожне рівняння системи має три сусідні невідомі:

$$\begin{aligned} &a_{11}y_0 + a_{12}y_1 + 0 \cdot y_2 + ... + 0 \cdot y_N = f_1; \\ &a_{21}y_0 + a_{22}y_1 + a_{23}y_2 + 0 \cdot y_2 + ... + 0 \cdot y_N = f_2; \\ &..... \\ &0 \cdot y_0 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + ... + a_{NN-2}y_{N-2} + a_{NN-1}y_{N-1} + a_{NN}y_N = f_N. \end{aligned} \tag{11}$$

Для розв'язання такої системи розроблено спеціальний метод – прогонки. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{12}$$

з двоточковими граничними умовами:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A; && |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0; \\ &\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B; && |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0; \end{aligned} \tag{13 та 14}$$

де функції $p(x), q(x), f(x)$ неперервні на $[A;B]$.

Прийдемо до скінченнорізницевого рівняння:

$$\begin{aligned} &h = (B-A)/N;\ x_i = x_0 + ih;\ x_0 = A;\ x_N = B; \\ &q(x_i) = q_i;\ p(x_i) = p_i;\ f(x_i) = f_i;\ y(x_i) = y_i. \end{aligned} \tag{15}$$

Підставляючи вираз (15) у початкове ЗДР (12), отримаємо для внутрішніх точок $x_i\ (i = 1,2,..,n-1)$ систему скінченнорізницевих рівнянь:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i. \tag{16}$$

Після деяких перетворень (16) матимемо:

$$y_{i+1} = m_i y_i + n_i y_{i-1} + \hat{f}_i h^2;\ i = 1,2,..,n-1, \tag{17}$$

де

$$m_i = \frac{2 - q_i h^2}{1 + \frac{p_i}{2}h};\ n_i = \frac{1 - \frac{p_i}{2}h}{1 + \frac{p_i}{2}h};\ \hat{f}_i = \frac{f_i}{1 + \frac{p_i}{2}h}. \tag{18}$$

Для похідних на кінцях відрізка інтегрування $x_0 = A;\ x_n = B$ знаходимо скінченнорізницеві рівняння виду:

$$y'_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{h};\ y'_0 = \frac{(y_1 - y_0)}{-h}, \tag{19}$$

і, підставляючи їх у граничні умови (13) і (14), отримаємо два рівняння:

$$\alpha_0 y_0 + \frac{\alpha_1}{h}(y_1 - y_0) = A;\ \beta_0 y_0 + \frac{\beta_1}{h}(y_1 - y_0) = B, \tag{20}$$

Система $N+1$ рівнянь (17), (20) відносно невідомих $y_0, y_1, ..., y_n$ являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь з три діагональною матрицею коефіцієнтів. Цю систему зручно розв'язати *методом прогонки* [2].

Розглянемо суть цього методу.

1. Представимо рівняння (17) відносно y_i :

$$y_i = \frac{f_i}{m_i}h^2 - \frac{1}{m_i}y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i}y_{i-1}. \tag{21}$$

2. Допустимо, що за допомогою рівнянь (20) і (21) виключена складова y_{i-1}, тоді рівняння будуть мати вигляд

$$y_i = c_i(d_i - y_{i+1}) \tag{22}$$

де $c_i, d_i, (i = 1,2,..,N-1)$ – деякі коефіцієнти.

3. За аналогією з (22) представимо y_{i-1}, у вигляді

$$y_{i-1} = c_{i-1}(d_{i-1} - y_i) \quad (23)$$

і, підставляючи його в (17), матимемо:

$$y_{i+1} = m_i y_i + n_i c_{i-1}(d_{i-1} - y_i) + \hat{f}_i h^2 \quad (24)$$

і, отже,

$$y_i = \frac{\hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}} \quad (25)$$

4. Порівнюючи вирази (22) та (25), отримуємо рекурентні формули для визначення коефіцієнтів c_i , d_i вигляду

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}; \; d_i = \hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}, \; i = 1,2,..,N-1 . \quad (26)$$

5. Для визначення виразу для c_0 , d_0 використовуємо рівняння (20) та (22):

$$y_0 = \frac{Ah - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1} \; ; \qquad y_0 = c_0(d_0 - y_1). \quad (27) \text{ та } (28)$$

Порівнюючи останні дві нерівності, знаходимо: $c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}; \; d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}.$ (29)

На основі формул (17) та (29) послідовно визначаємо коефіцієнти $c_i, d_i, \; i = 1,2,..,N-1$ до c_{n-1} і d_{i-1} включно. Процес знаходження коефіцієнтів $c_i, d_i,$ називають прямим ходом методу прогонки.

Зворотній хід методу прогонки починається з визначення y_n. Використовуючи другу граничну умову (20) та формулу (22), отримуємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \beta_0 y_n = \beta_1 \dfrac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B; \\ y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \end{cases} \quad (30)$$

Розв’язуючи цю систему відносно y_n , отримаємо: $y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1 c_{n-1} + 1}.$

Тепер за формулою (22) послідовно знаходимо розв’язок початкового ЗДР: $y_{n-1}, y_{n-2}, .., y_1$.

Таким чином, метод прогонки достатньо простий, легко алгоритмізується та включає прямий та зворотній хід. Причому:

1) прямий хід полягає в знаходженні коефіцієнтів за рекурентними формулами (26);

2) зворотній хід полягає у знаходженні розв’язку початкового ЗДР $y_{n-1}, y_{n-2}, .., y_1$ за формулою (22).

Схему алгоритму методу прогонки показано на рис.1.

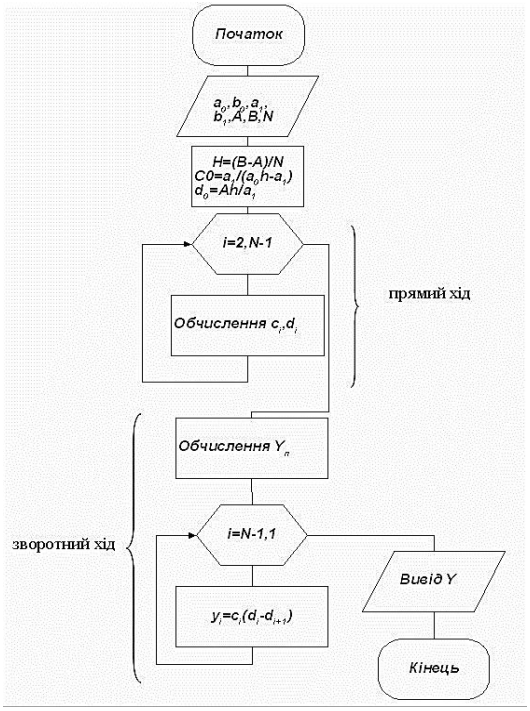


Рис.1. Схема алгоритму методу прогонки

Висновки. Крайові задачі важче розв'язувати, навіть ніж задачі Коші, особливо чисельно. Крайові задачі виникають як в теорії звичайних диференційних рівнянь, так і в теорії диференційних рівнянь із частковими похідними, особливо рівнянь еліптичного типу.

Особливістю крайових задач є вимога певної поведінки фукнції (скінченності) при прямуванні аргументу до нескінченності або в околі особливих точок. Тому згрупований та систематизований розгляд різних методів розв'язання крайових задач є особливо цінним.

Література:

1. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці: підручник / Л.П.Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва; за ред. М.З. Згуровського. – К. : Вид. група BHV, 2006. – 480 с.
2. Мак-Кракен Д., Дрон У. Численные методы и програмирование на фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дрон. – М. : Мир, 1977. – 584 с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. Анализ, алгебра, обычные диференциальные уравнения / Н.С. Бахвалов – М. : Наука, 1975. – 631 с.

Бондар Марія Миколаївна
студентки магістратури, спеціальність «Математика»

ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ

Постановка проблеми. На уроках математики потрібно виховувати не тільки звичку до логічного мислення, а і математичну інтуїцію, яка дозволяє передбачити кінцевий результат. У розв'язанні цієї проблеми значну роль відіграють творчі задачі, які в математиці є найбільш важливі, оскільки в них відсутній певний алгоритм розв'язання. Вони вимагають від учня нестандартного мислення, спонукають до самостійної роботи над книгою. Прикладами таких задач є оптимізаційні задачі [2].

Питання розв'язування задач на знаходження найбільших і найменших значень є одним з найцікавіших з теоретичного боку і в той же час має важливе практичне значення. Дуже важливо, наприклад, визначити, за яких умов на виготовлення якогось виробу витрачають найменше матеріалів, або з певної кількості матеріалу виготовляють найбільше деталей. Усі задачі на максимум і мінімум, незважаючи на їх різноманітність, за своїм змістом і методами розв'язування зводяться на знаходження умов, за яких деяка функція набуватиме найбільшого або найменшого значення [5].

Мета статті: розглянути два способи розв'язування оптимізаційних задач та підібрати добірку задач.

Виклад основного матеріалу. Мета теоретичного дослідження – встановлення законів і принципів, які дозволяють систематизувати, пояснювати і передбачати факти, встановлені в ході емпіричного дослідження.

Приклад 1. Серед усіх рівнобедрених трикутників з бічною стороною визначити трикутник з найбільшою площею. Обчислити площу цього трикутника.

Розв'язання. За властивістю медіани, висоти та бісектриси рівнобедреного трикутника $BK = KC$, $AK \perp BC$.

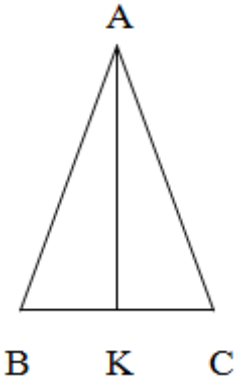


Рис. 1

Нехай $BK = x$ см, тоді за теоремою Піфагора $AK = \sqrt{25 - x^2}$. $S = \frac{1}{2} AK \cdot BC = \frac{1}{2} 2x\sqrt{25 - x^2} = x\sqrt{25 - x^2}$.

1. Областю визначення функції S є додатні значення x, $x > 0$, але $25 - x^2 > 0$; $x \in (-5;5)$, тобто $x \in (0;5)$.
2. Знайдемо похідну

$$S' = \sqrt{25 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}. \qquad S' = 0.$$

$25 - 2x^2 = 0$; $x^2 = 12{,}5$; $x_1 = \sqrt{12{,}5}$; $x_1 = -\sqrt{12{,}5}$ – не задовольняє умови.

3. Знайдемо другу похідну:

$$S'' = \frac{-4x\sqrt{25-x^2} - (25-x^2)\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}}{25-x^2} = -\frac{3}{\sqrt{25-x^2}};$$

$S'' < 0$, тобто при $x = \sqrt{12{,}5}$ функція S досягає максимуму.

$$S = x\sqrt{25-x^2} = \sqrt{12{,}5}\cdot\sqrt{12{,}5} = 12{,}5 \text{ кв. од.}$$

Відповідь. 12,5 кв. од. [5].

Приклад 2. Визначити, яку максимальну повну поверхню може мати конус, вписаний в кулю, площа сфери якої рівна Q.

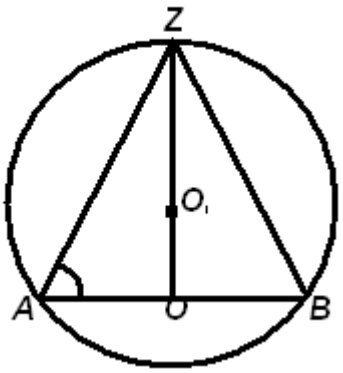


Рис. 2

Розв'язання. Розглянемо $\angle ZAO$ (рис. 2). Нехай $\angle ZAO = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2)$. Позначимо радіус кулі через R, тобто $ZO_1 = R$. Тоді

$$AZ = 2R\sin\alpha \text{ і } AO = R\sin 2\alpha \text{ і}$$

$$S_{кон} = \pi R^2 \sin 2\alpha(\sin 2\alpha + 2\sin\alpha) =$$

$$= 4\pi R^2 \sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки $Q = 4\pi R^2$, то

$S_{кон} = Q\sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$. Визначимо $S_{k_{\max}}$.

Розглянемо функцію $y = \sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$ і знайдемо її похідну:

$$y' = 2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}(\cos 2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos 2\alpha \sin^2\frac{\alpha}{2}) = 2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}(4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1).$$

У даній задачі не розглядаються значення α, при яких $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ рівні нулю. Розв'яжемо рівняння $4\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 = 0$, маємо $\cos\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \Rightarrow \alpha_1 = \arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ (від'ємний корінь для даної задачі є стороннім).

Оскільки $\cos\alpha -$ спадна функція на проміжку допустимих в даній задачі значень α, то при переході α через точку α_1 (від менших до більших) $\cos\alpha$ змінює значення, які більші за $\frac{1+\sqrt{17}}{8}$, на менші. При цьому квадратний тричлен змінює свої значення з додатних на від'ємні. Отже, функція $y = \sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$ в точці α_1 має максимум. Обчислимо його. Запишемо дану функцію у вигляді: $y = \sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin^2\alpha$. Тоді

$$\sin^2\alpha_1 = 1-\cos^2\alpha_1 = \frac{23-\sqrt{17}}{32}, \quad 2\cos^2\frac{\alpha_1}{2} = \frac{9+\sqrt{17}}{8}.$$

$$y_{\max} = \frac{9+\sqrt{17}}{8}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{8}\cdot\frac{23-\sqrt{17}}{32} = \frac{107+51\sqrt{17}}{512}.$$

Отже, $S_{k_{\max}} = \frac{107+51\sqrt{17}}{512}$.

Відповідь. $\frac{107+51\sqrt{17}}{512}Q$ [5].

Для розв'язання оптимізаційних задач можна використовувати не тільки теоретичні дослідження, а й раціональне міркування.

Приклад 3. Прожектори по периметру освітлюють прямокутну огорожу розміром $a\times b$. Розмістити мінімальну кількість прожекторів для повної освітленості за умови, що прожектор розсіює промені під кутом φ і для забезпечення нормативної освітленості прожектор не може бути віддалений від огорожі більше, ніж на відстань $c\left(a+b+2c\cdot tg\frac{\varphi}{2}\right)$. Домогтись в умовах задачі максимальної інтенсивності освітлення огорожі.

Розв'язання. Враховуючи умови задачі, бачимо, що для освітленості прямокутної огорожі $ABCD$ прожектори потрібно розміщувати окремо для кожної сторони (рис.3). Отже, потрібно:

1) підрахувати, яку частину огорожі d може освітити прожектор, віддалений від неї на максимальну відстань c (рис.4), що дає можливість вибрати мінімальну кількість прожекторів;
2) визначити найменшу кількість прожекторів, потрібну для освітленості сторін AB і CD та BC і AD;
3) з'ясувати, чи дозволяють умови задачі розмістити прожектори ближче до огорожі, ніж на відстань c.

Як видно з рис.4, прожектор, віддалений від неї на максимальну відстань c від огорожі, може освітити частину огорожі $MN = d+2c\cdot tg\frac{\varphi}{2}$. Тому, якщо $a = pd$ і $p-$ціле число, то для освітленості кожної зі сторін AB і CD потрібно взяти p прожекторів; якщо $pd < a < (p+1)d$, то потрібно $p+1$ прожекторів. Аналогічно, якщо $b = qd$ і $q-$ ціле число, то для освітленості кожної зі сторін BC і AD потрібно взяти q прожекторів; якщо ні, то $q+1$ прожекторів.

Отже, можна зробити такі висновки. Якщо $p,q-$ цілі числа, то мінімальна кількість прожекторів, потрібна для освітлення всієї огорожі, становитиме $2(p+q)$; якщо ж $p-$ціле число, а $q-$ні, то $2p+2(q+1)$; якщо $q-$ціле число, а $p-$ні, то $2q+2(p+1)$; якщо $p,q-$ нецілі числа, то $2(p+q)$.

У випадку, якщо p або q є нецілими числами, то прожектори на відповідних сторонах можна розмістити ближче до огорожі, ніж на відстань c. Нехай, наприклад, p – неціле число. Позначимо $d_1 = \frac{a}{p-1} = RS$ і знайдемо відстань h від прожектора до огорожі, за якої буде освітленим відрізок $RS = d_1$ (рис. 5):

$$h = \frac{d_1}{2} ctg \frac{\varphi}{2}.$$

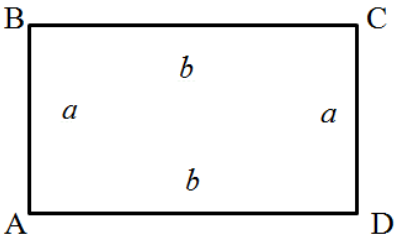


Рис. 3

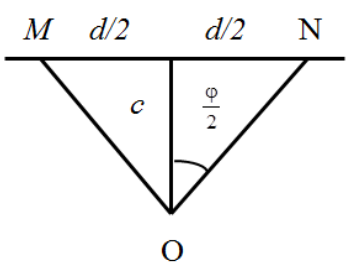


Рис. 4

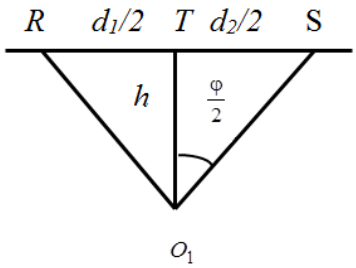


Рис. 5

Отже, якщо p – неціле число, то на сторонах AB і CD розміститься по $(p-1)$- му прожектору, які можна розмістити до огорожі на відстані $h = c$ (максимально збільшивши інтенсивність освітлення).

Аналогічні міркування і для сторін BC і AD [1].

Добірка оптимізаційних задач:

1. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об’ємом 250π см^3. Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу [3]?
2. Потрібно виготовити ящик з кришкою, сторони основи якого відносяться як один до двох, а площа повної поверхні 108см^2. Якими повинні бути його розміри, щоб його об’єм був найбільшим [3]?
3. Треба виготовити ящик з кришкою, об’єм якого 288 см^3, а сторони основи відносяться як 1:3. Які мають бути розміри ящика, щоб його площа повної поверхні була найменшою? У відповіді записати значення найменшої площі повної поверхні (у см^2) [4].
4. Число 20 розбити на два доданки так, щоб сума їхніх кубів була найменшою. Визначити добуток цих доданків [4].
5. Закон прямолінійного руху тіла заданий рівнянням:
   $S = -t^3 + 9t^2 - 24t - 8$. S – в метрах, t – в секундах. Знайти максимальну швидкість руху тіла [3].
6. Визначити додатне число, для якого різниця куба і потроєного квадрата цього числа є найменшою [4].
7. Визначити три числа, добуток яких буде найбільшим, якщо сума цих чисел дорівнює 54 і перше число більше за друге у 8 разів. У відповіді записати найбільше з цих чисел [4].

8. Знайти суму координат точки, яка лежить на прямій $y = -7x + 2$, якщо різниця квадратів абсциси й ординати точки є найбільшою [4].
9. Визначити значення параметра а, при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 2ax - a - 2 = 0$ буде найменшою [4].
10. Прямокутну ділянку землі треба обгородити сіткою так, щоб її площа дорівнювала 400м^2 і на огорожу пішло найменше погонних метрів сітки. Обчислити периметр такої ділянки (у м) [4].
11. З квадратного листа картону зі стороною 24 см вирізають по кутах однакові квадрати і роблять відкриту коробку. Яка має бути (у см) сторона вирізаних квадратів, щоб об'єм коробки був найбільшим [4]?
12. Відома висота конуса H і кут нахилу твірної до площини основи α. Знайти, який максимальний об'єм може мати вписаний в нього циліндр [5].
13. Визначити, яким може бути мінімальний об'єм конуса, описаного навколо кулі, об'єм якої рівний Q [5].
14. В кулю радіусу R вписана правильна n-кутна піраміда, що має найбільший об'єм. Визначити двогранний кут при ребрі основи піраміди [5].
15. Навколо кулі радіуса R описана правильна трикутна піраміда, яка має мінімальну бічну поверхню. Визначити кут нахилу бічного ребра піраміди до площини її основи [5].
16. Картина повішена на стіні так, що її нижній край міститься на a м, верхній край на b м вище від очей відвідувача. На якій відстані x від стіни повинен стояти відвідувач, що картину було видно під найбільшим кутом ϕ [1].

Висновки. Розв'язування оптимізаційних задач сприяє розвиткові просторового уявлення, вмінню орієнтуватись у співвідношеннях, спонукає до самостійної роботи. Учні вчаться широко застосовувати зв'язки між даними і шуканими елементами, набувають навичок застосування теоретичних тверджень до вирішення конкретних питань, тобто пов'язувати теорію з практикою.

Література:

1. Абрамчук В.С. Посібник з шкільного курсу математики / В. С. Абрамчук, Л. А. Тютюн, Н. М. Шунда. – К. : Техніка, 2008. – 736 с.
2. Гарбич-Мошора О. Готовність особистості до розв'язання творчих математичних задач / О. Гарбич-Мошора О. // Молодь і ринок. – 2007. – С. 126-130.
3. Литвин І.І. Вища математика: навчальний посібник / І.І. Литвин, О.М. Онончук, Г.О. Желізняк. – Львів, 2008. – 345 с.
4. Цегелик Г.Г. Збірник типових конкурсних тестових завдань з математики / Г.Г. Цегелик. 13-те вид. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені І.Франка, 2007. – 136 с.

Войтовик Олексій Вікторович, студент 4 курсу
Устимчук Юлія Анатоліївна, студентка 2 курсу
напрям підготовки «Математика»

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИКИ В БІОЛОГІЇ

Постановка проблеми. Звичайна мова не тільки дозволяє нам упорядковувати наші думки і ідеї настільки, щоб ними можна було маніпулювати, тобто записувати їх і передавати, але значною мірою визначає й існування самих думок. Ця взаємодія думки і мови і фактично їх спільний розвиток можна порівняти з відповідною взаємозалежністю думки і математики, коли ми переходимо до використання останньої для більш точних описів. Якщо розглядаються такі складні питання, як теорія відносності або квантова теорія, то справедливість цього твердження самоочевидна. Деякі основні ідеї цих теорій можна проілюструвати, розглянувши, скажімо, відомий парадокс годин і перехід елементарних частинок з однієї орбіти на іншу. І навіть тут потрібно певний обсяг елементарної математики. Однак опис найбільш важливих питань, що становлять істотну частину цих теорій, можливо лише за допомогою дуже складного математичного апарату; без такого опису подальша творча думка неможлива. Більшість біологічних і медичних досліджень не вимагає такого складного математичного аналізу. Однак досить розглянути лише застосування статистики при плануванні та аналізі експериментів, теорії випадкових процесів - при вивченні росту біологічних популяцій або теорії інформації - при обговоренні деяких питань біосинтезу білка, щоб зрозуміти, що в біологічній науці існує багато важливих проблем, де математичні методи дійсно забезпечують таке проникнення в суть справи, якого неможливо досягти чисто описовим шляхом. Зараз наша мета полягає в тому, щоб познайомитися ближче лише з першим етапом побудови математичних моделей біологічних явищ.

Бурхливий розвиток прикладної математики в XVII ст. відразу ж привело до вражаючих успіхів у вивченні реального світу. Розглянемо, наприклад, область ньютонівської механіки і оптики. Найбільш сміливі люди наважувалися навіть у той час використовувати математичний підхід при вивченні форм живих організмів і їх розвитку. Так, Галілей розглядав зв'язок між міцністю матеріалів і відносними пропорціями відповідних конструкцій не тільки в застосуванні до будівель суддів або спорудження палаців, а й у зв'язку з будовою рослин і тварин. Наприклад, він намагався встановити максимальну висоту дерева, при перевищенні якої невелике відхилення стовбура призводить до постійного вигину, вивчити вплив збільшення розмірів тіла тварини на розміри і міцність скелета і м'язів, а також виявити різні фізичні зміни, що відбуваються в організмі, коли така тварина, як кит, занурюється у воду і вага його тіла врівноважується вагою витисненою ним води. У XVII ст. Вільям Гарвей підходив до пояснення таких фізіологічних явищ, як кровообіг, з позицій механіки, хоча більш точні описи - через гідродинамічну теорію - з'явилися тільки в XIX ст. При вивченні багатьох питань такого роду можуть знайти застосування методи фізики і хімії,

а також деякі розділи прикладної математики. Однак нас будуть цікавити перш за все ті аспекти біології та медицини, які лежать поза областю, безпосередньо пов'язаної з точними науками. В той же час не можна забувати, що фізичні і хімічні поняття лежать в основі більшості (якщо не всіх) порівняно абстрактних досліджень, скажімо таких, як вивчення поведінки тварин або еволюційного розвитку [1].

Мета статті: полягає в розгляді математичних моделей при описі біологічних явищ.

Виклад основного матеріалу. Більшість біологічних робіт носить описовий характер. При описі рослин і тварин розглядаються їх форма, розмір, колір, поведінка, поширення, схожість з іншими організмами або відміну від них і т. д. Це, по суті, стадія природної історії. У найпростішому вигляді такий опис носить головним чином словесний характер і насичене різними подробицями. Однак у міру того, як спостереження ставали більш точними, з'явилася можливість застосування математичної мови для опису або відображення величезного різноманіття форм життя. Вища Сходинка в розвитку такого роду описово-математичної, природної історії була відзначена появою в 1917 р. книги д'Арсі Томпсона «Зростання і форма», яка в даний час вважається класичною. Значна її частина присвячена застосуванню звичайної статики, динаміки, фізики та хімії для отримання більш детального і більш складного опису живих організмів, ніж це можливо за допомогою словесних засобів. Значна увага приділяється також правильному вибору математичних понять і теорій для пояснення складності і заплутаності спостережуваних форм.

Розглянемо, наприклад, чудові гексагональні утворення в архітектурі осередків медових стільників. На перший погляд цю конфігурацію можна розглядати як результат стиснення подвійного шару однакових циліндрів з круговим поперечним перерізом; при такому стиску поперечні перерізи повинні прийняти вид шестикутників. Однак справжня форма виходять багатогранників вимагає більш ретельного вивчення. Можна показати, як це зробив Кеплер ще в XVII ст., що просторова симетрія медових стільників є розташування площин і кутів, в правильному ромбододекаедрі. Згодом виявилося, що таке тіло має певні оптимальні властивості, а саме площа його поверхні при певних умовах мінімальна. На цій підставі деякі вчені припустили, що бджола осмислено вибирає цю певну форму медових стільників, щоб економити віск. Проте надалі геометрична форма стільників була уточнена, і це припущення довелося змінити. Так, спостережуваний ромбододекаедр містить ряд гексагональних призм з ромбоідеальними пірамідами в якості підстав. Припустимо тепер, що основою служить площина. Можна показати, що таке тіло буде всього на 2% менш ефективним. Навряд чи можна припустити, що бджола виробляє настільки точні обчислення. Крім того, при більш ретельному дослідженні виявилося, що форма медових стільників відхиляється від ідеальної математичної фігури: товщина їх стінок неоднакова, осередки ніколи не розташовуються строго по горизонталі, краї не зовсім прямі. Більш ймовірно, що спостережувана геометрична форма виникає в результаті спільної дії сили тяжіння, взаємного тиску і поверхневого

натягу. Основна цінність таких досліджень полягає в тому, що вони ілюструють величезну силу математичного опису, або, як зараз кажуть, математичної моделі. Відшукання в даному конкретному випадку правильного багатогранника, настільки вдало описує об'єкт, що зустрічається в природі, дає нам не тільки певне естетичне задоволення. Такого роду модель слугує корисною основою для подальших міркувань і досліджень. Слід зазначити також, що такий підхід має велику ефективністю і гнучкістю, незважаючи на те (і скоріше навіть завдяки тому) що математична модель є лише апроксимацією дійсності. Справді, якщо б модель занадто точно імітувала реальну дійсність, математичні вираження виявилися б надмірно складними та їх обробка була б пов'язана з непереборними труднощами. Далі ми зупинимося на цьому протиріччі більш докладно [2].

Ще одне цікаве питання, що дає широкі можливості для застосування математики, – листорозміщення у дерев і інших рослин; це питання було також досить детально розглянуто д'Арсі Томпсоном. Не тільки листя на стеблах багатьох рослин, але і окремі квіточки в суцвітті соняшнику, лусочки у ялинової шишки і т. д. утворюють чудово правильні спіралі, збуджуючі інтерес багатьох біологів і математиків. Так, у шишок норвезької ялинки є п'ять рядів лусочок, круто піднімаються в одному напрямку, і три ряди, що йдуть більш полого в протилежному напрямку. У звичайної модрини число таких рядів відповідно п'ять і вісім. Розташування квіток у гігантського соняшнику має аналогічну схему, і числа рядів рівні відповідно 34 і 55, 55 і 89, 89 і 144 і т. д. Хоча мають місце і винятки, пари чисел, що зустрічаються найбільш часто, є двома послідовними членами арифметичного ряду Фібоначчі (італійський математик, відомий ще як Леонардо з Пізи, 1170 – 1250 рр.):

1,1,2,3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ...

Ряд починається з одиниці, і кожен його член в точності дорівнює сумі двох попередніх. Одне з найбільш важливих математичних властивостей цього ряду полягає в тому, що послідовність дробів, утворених шляхом ділення кожного члена на наступний, тобто ряд: $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}$ …, прямує до так званого золотого перерізу, точне значення якого дорівнює $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618\ldots$ Якщо відрізок прямої розділений на дві частини золотим перетином, тобто так, що відношення більшої частини до всього відрізку дорівнює 0,618, то відношення меншої частини до більшої також є золотим перерізом. Ця пропорція і її властивості були добре відомі давнім грекам, і їй часто надавали важливу роль в естетичних дискусіях про мистецтво і архітектурі. Хіба не дивно, що такі ж числа зустрічаються і в живій природі?

Розглянемо ріст одиночного стебла рослини (вважаючи його ідеальним круговим циліндром), на поверхні якого по спіралі на однаковій відстані один від одного з'являються нові листя: A, B, C, D,… Можна очікувати, що листя розташуються при цьому в кілька вертикальних рядів, рівновіддалених один від одного по поверхні циліндра. Однак у загальному випадку такого розташування не виникає. При уважному розгляді стебла очима легко виділить на ньому деяку

іншу спіраль, наприклад A, C, E,... Дійсно, на основі геометричних міркувань можна показати, що на стеблі є дві доповнюючі один одного системи спіралей: одна - правобічна, а інша - лівостороння, і обидві вони відрізняються від вихідної генетичної спіралі A, B, C... Крім того, якщо O – лист, до якого можна дійти з точки A за *m* кроків, рухаючись по одній спіралі, і за *n* кроків, рухаючись по відповідній додатковій спіралі, то можна показати, що *m* і *n* являють собою послідовні члени ряду Фібоначчі і що шляхом належного вибору спіралі можна виділити всі попередні пари членів ряду. Хоча ці співвідношення наближено справедливі тільки для майже циліндричних стебел або гілок, при відповідній деформації циліндра типологічно ідентичну побудову можна виконати і для таких структур, як ялинова шишка або суцвіття соняшнику. Мабуть, різні на око додаткові спіралі разом з відповідними числами Фібоначчі є неминучим наслідком регулярного зростання листя на основний генетичної спіралі. У відомому сенсі поява певних арифметичних співвідношень є математичним збігом. Однак єдність математики полягає в тому, що результати і теореми, що випливають з даної групи припущень, застосовні у всіх тих випадках, коли ці допущення можна вважати справедливими.

Ще більше місця (близько 100 сторінок) д'Арсі Томпсон приділяє логарифмічній спіралі, яка пов'язана з певними видами росту. Найбільш простий вигляд має спіраль, яку викреслює точка P при обертанні радіуса-вектора OP з постійною кутовою швидкістю відносно початку координат O при одночасному русі точки P з точки O уздовж лінії OP з постійною швидкістю. Це так звана Спіраль Архімеда; приблизно таку форму приймає канат, акуратно згорнутий в бухту на палубі судна і має витки однакової товщини. У полярних координатах рівняння спіралі має вигляд $r = a^{\theta}$. Однак у дуже багатьох молюсків, наприклад у Nautilus Pompilius, Turritella duplicata, Ammonites і т. д., послідовні витки не однакові, а все більш і більш товщають. У багатьох випадках наближені значення товщини послідовних витків утворюють геометричну прогресію. Спіраль, що має цією властивістю, називається логарифмічною; її можна побудувати, змусивши точку P рухатися з початку координат O не з постійною швидкістю, як в описаній вище архімедовій спіралі, а з зростаючою швидкістю, і пропорційною відстанню від точки O. Побудована спіраль може бути описана рівнянням в полярних координатах $r = a^{\theta}$, або $r = \theta \log a$. Ця спіраль має рядом цікавих властивостей, у тому числі такі. По-перше, крива перетинає всі радіуси під одним і тим же кутом. Звідси одна з її назв – рівнокутна. По-друге, як уже вказувалось, відстані між послідовними витками утворюють геометричну прогресію. По-третє, послідовність довжин радіусів, що утворюють однакові кути один з одним, також становить геометричну прогресію. Крім того, нарешті, що утворюються в процесі розширення сектори, що відсікаються такими радіусами, подібні один одному.

Хоча саму раковину молюска не можна назвати живою, вона утворюється під час росту організму. Один з найпростіших способів нарощування нової речовини автоматично призводить до утворення деякої фігури, дуже близької до логарифмічної спіралі. Раковина молюска Nautilus являє собою, звичайно,

тривимірну структуру, однак будь-яка послідовність відповідних точок її поверхні (наприклад, точок, що визначають контури раковини в процесі її росту) лежить більш-менш в одній площині. Зростання раковин таких молюсків, як Turritella duplicata, відбувається в трьох вимірах. Тим не менш, у цьому випадку придатний аналогічний математичний опис, хоча на цей раз ми повинні оперувати з більш широким поняттям логарифмічної спіралі.

У багатьох раковинах виявляється вражаюче близький збіг між результатами вимірювань і теоретичними значеннями, очікуваними для точної логарифмічної спіралі. Ще більш дивно, що у багатьох випадках аналогічна крива досить точно описує утворення кришечки, що закриває вхід у черепашку. Ця кришечка росте шляхом поступового наростання з одного краю, одночасно пересуваючись вздовж раковини і повертаючись навколо своєї осі таким чином, що в кінці кінців утворюється щільна пробка. Ясно, що дати строгий геометричний опис такого чудового пристосування досить важко [3].

З попередніх прикладів видно, що математичні побудови порівняно простого типу описують деякі біологічні явища з дивовижним ступенем правдоподібності. Звичайно, якщо спробувати описати геометричними кривими форму тіла коня, то можна швидко прийти до висновку, що математика не підходить для опису об'єктів такого роду. Саме через величезної складності світу живих організмів багато біологів сумніваються в можливості широкого застосування математичних методів. Але хоча прості математичні методи знаходять в біології лише обмежене застосування, це не означає, що складні явища життя недоступні математичному аналізу. Навпаки, ми стикаємося з математичними поняттями кожен раз, коли намагаємося внести будь-які уточнення при обговоренні ідей і передачі інформації.

Тому насправді питання полягає в тому, якого роду математичне дослідження підходить до тієї чи іншої конкретної задачі, які обмеження мають місце в кожному випадку і яким чином ці методи можна розвивати далі.

Не слід, зрозуміло, забувати, що будь-яка математична модель – це ідеалізована, абстрактна побудова, яке в кращому випадку лише частково відповідає дійсності. Так, ми бачили, що з певним ступенем точності поперечний переріз бджолиних стільників можна вважати більш-менш шестикутним, однак при достатньо близькому розгляді спостерігаються помітні відхилення від ідеальної геометричної форми. Аналогічно логарифмічна спіраль, обрана належним чином, наближено відтворює форму раковини молюска Nautilus, однак при більш ретельних спостереженнях і вимірюваннях легко виявляється, що вона помітно відхиляється від теоретичної кривої. І в кращому випадку вдається описати лише основну загальну форму раковини; при спробі математичного опису її тонкої структури, не кажучи вже про опис знаходиться в раковині живого організму, виникають складніші проблеми.

Чим складніше розглядається явище, тим важче побудувати його досить точну кількісну модель; частково це обумовлено самою природою деяких процесів, що утрудняє їх вимір, а частково тим, що складні математичні моделі громіздкі і не мають практичної цінності. При описі цілого організму нам часто

доводиться обмежуватися такими загальними показниками, як вага і розмір, а також загальним описом анатомії і фізіології, яке вдається підкріпити лише окремими кількісними характеристиками деяких частин тіла або деяких функцій. При вивченні груп тварин ступінь абстракції ще більше. У цих випадках можуть розглядатися число індивідуумів в популяції, вік, стать і т. д.

Для того щоб вирішити, які чинники можна вважати несуттєвими в тому чи іншому випадку, необхідно добре розібратися в І досліджуваної задачі. Досить велике число деталей доводиться опускати навіть при чисто словесному біологічному описі. Ще більше деталей опускають при побудові математичних моделей біологічних явищ, але за рахунок цього все, що включається в модель, може бути описане дуже точно. У той же час слід врахувати, що складні екологічні системи можуть бути пов'язані з такою величезною кількістю біологічно суттєвої інформації, яку людина не в змозі охопити повністю, користуючись лише звичайними словесними описами. У цьому випадку цінну допомогу можуть надати статистичні методи компактного представлення і обробки інформації. Крім того, великих успіхів можна добитися за допомогою існуючих в даний час методів обробки даних на великих електронних обчислювальних машинах.

Нерідко ми стикаємося з протиріччям між реалістичністю моделі і можливістю оперувати нею. Дуже точний опис всіх відомих фактів, скажімо, деякий розвиток вигляду не дозволить виконати які-небудь корисні обчислення або здійснити будь-які прогнозування. У той же час надмірно спрощена математична модель дозволить легко оцінити чисельні значення певних коефіцієнтів, але вони будуть вкрай неточні, оскільки були опущені деякі істотні факти. Це одвічна дилема, що виникає при будь-якій науковій роботі. Вона аж ніяк не специфічна для біології та медицини, хоча приймає тут особливо гостру форму [1].

Висновки. Математичні побудови порівняно простого типу описують біологічні явища з досить малим відхиленням. Однак процеси складної природи вимагають більш точнішого дослідження.

Література:

1. Бейли Н. Математика в медицине и биологии / Н. Бейли. – М. : Мир, 1970. – 325 с.
2. Пилипченко В.І. Використання елементів вищої математики в медико-біологічних дослідженнях / В.І. Пилипченко. – Полтава, 2000. – 69 с.
3. Наука кібернетика та її застосування в економіці, медицині та техніці [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://cybernetics.kiev.ua/content/poshirennya-u-prirodi-logarifmichnoï-spirali.

Волкодав Тетяна Анатоліївна
Здобувач аспірантури,
Спеціальність теорія і методика професійної освіти

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ В ЕКОНОМІЦІ

Постановка проблеми. Фінансовий успіх будь-якого підприємства залежить від правильного вибору стратегії поведінки. Для прийняття раціонального рішення в управлінні підприємством необхідно прогнозувати можливі ситуації, впливати на них і прагнути до вибору найкращого з можливих варіантів дій у даних умовах. Процес розвитку кожного варіанта управлінського рішення залежить від багатьох чинників, які мають певні числові характеристики та багато з яких невідомі або відомі лише приблизно. Тому виникає закономірне питання: яким чином керувати і приймати рішення при впливі величезної кількості чинників? Рішення цієї проблеми лежить на шляху обґрунтованого спрощення об'єкта управління та прийняття рішення, коли зі всієї безлічі чинників і зв'язків враховуються лише найсуттєвіші, що визначають найбільш значущі для поставлених цілей властивості, характеристики і поведінку об'єкта.

Спрощення проблеми за допомогою збереження в ній тільки самих суттєвих факторів і причинних зв'язків та відкидання усього малозначного і несуттєвого відкриває можливість для прийняття найкращих управлінських рішень. В основі цієї можливості лежить створення математичної моделі управлінської проблеми, тобто переведення проблеми в управлінні підприємством на формальну математичну мову. Тому тут необхідне застосування економіко-математичного інструментарію.

Мета статті: розкрити можливості математичних моделей і методів для прогнозування основних показників фінансового плану та вдосконалення системи фінансового планування на підприємстві.

Виклад основного матеріалу. Математична модель економічного об'єкта – це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці найскладнішим етапом є чітка постановка задачі та її формалізація. Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному типі задач вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

Один із найпоширеніших типів задач в економіці це задача визначення оптимального плану виробництва. Її постановка така: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях.

Розглянемо приклад на складання математичної моделі задачі.

Приклад 1: Побудувати економіко-математичну модель задачі.

Для виробництва чотирьох видів продукції підприємство використовує три види ресурсів. Витрати ресурсів на одиницю продукції, запас ресурсів

кожного виду, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці 1. Знайти обсяг виготовленої продукції, за якого прибуток підприємства від реалізації продукції буде найбільшим.

Таблиця 1: Запаси та витрати ресурсів.

Ресурси	*Витрати ресурсів на одиницю продукції*				*Запас ресурсів*
	1	*2*	*3*	*4*	
Сировина	*3*	*5*	*2*	*4*	*60*
Робочий час	*22*	*14*	*18*	*30*	*400*
Обладнання	*10*	*14*	*8*	*16*	*128*
Прибуток, ум.од.	*30*	*25*	*8*	*26*	

Розв'язання

Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 – кількість одиниць продукції відповідно 1-го, 2-го, 3-го та 4-го видів. Отже, $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4$ – витрати сировини на весь обсяг виготовленої продукції, $22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4$ – витрати часу на весь обсяг виготовленої продукції, $10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4$ – витрати обладнання на весь обсяг виготовленої продукції.

За умовою задачі запаси сировини не перевищують 60, робочого часу – 400, а обладнання – 128. Тому маємо таку систему обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 60, \\ 22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \le 400, \\ 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \le 128, \end{cases}$$ причому $x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4)$.

Прибуток від реалізації продукції задається функцією :

$F = 30x_1 + 25x_2 + 8x_3 + 26x_4$.

Отже, економіко-математична модель задачі має вигляд: знайти такий розв'язок $X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, що задовольняє системі,

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 60, \\ 22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \le 400, \\ 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \le 128, \end{cases}$$ умовам $x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4)$ і за якого функція $F = 30x_1 + 25x_2 + 8x_3 + 26x_4$ набуває максимального значення.

Одним з яскравих прикладів застосування математичних моделей і методів в економіці є транспортна задача. Суть її така: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного A_i-го постачальника до кожного B_j-го споживача, що подані як елементи матриці виду: $c_{ij} \square \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною. Ефективність плану перевезень

визначається його вартістю: чим менша сумарна вартість перевезення продукції, тим краще.

Наведемо приклад складання математичної моделі транспортної задачі знаходження її опорного плану двома методами.

Приклад 2: Компанія контролює читири фабрики A_1, A_2, A_3, A_4, здатні виготовляти відповідно 30, 30, 20 та 10 тис. од. продукції щотижня. Вона уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня доставляти відповідно 10, 15, 30 та 35 тис. од. продукції. Вартість транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведена в таблиці 2. Скласти опорний план перевезень продукції від кожної фабрики до замовників, що мінімізує загальну вартість транспортних послуг, двома будь-якими методами, визначивши кращий.

Таблиця 2: Вартість транспортування продукції

Фабрика	*Вартість транспортування 1000 од. продукції замовнику*			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	2	2	1
A_2	8	5	5	3
A_3	2	4	3	6
A_4	7	5	2	3

Скласти опорний план перевезень продукції від кожної фабрики до замовників, що мінімізує загальну вартість транспортних послуг, двома будь-якими методами, визначивши кращий.

Розв’язання

Побудуємо спочатку математичну модель даної задачі.

Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з *i*-ї фабрики до *j*-го замовника $(i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,4})$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_i = 90\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 10, \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає в тому, що вся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що може надходити до споживача від трьох фабрик, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 10, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 15, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 35, \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з транспортуванням продукції, визначаються як сума добутків обсягів перевезеної продукції на вартості транспортування 1000 од. продукції до відповідного замовника і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому формально це можна записати так:

$\min Z = 5x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + x_{14} + 8x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} + 7x_{14} + 5x_{24} + 2x_{34} + 3x_{44}$

Загалом математична модель сформульованої задачі має вигляд:

$\min Z = 5x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + x_{14} + 8x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} + 7x_{14} + 5x_{24} + 2x_{34} + 3x_{44}$ за умов:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 10, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 10, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 15, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 30, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 35, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}.$$

Складемо опорний план транспортної задачі методом північно-західного кута. Ідея цього методу полягає в тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітину записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітини в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Таблиця 3: Метод північно-західного кута складання опорного плану транспортної задачі

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	5 **10**	2 **15**	2 **5**	1	30
a_2	8	5	5 **25**	3 **5**	30
a_3	2	4	3	6 **20**	20
a_4	7	5	2	3 **10**	10
Потреби	10	15	30	35	

Згідно з таблицею отримаємо опорний план $X = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Отже, загальна вартість перевезення вантажу складає: $S_1 = 5 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 3 \cdot 10 = 50 + 30 + 10 + 125 + 15 + 120 + 30 = 380$.

Тепер складемо план транспортної задачі методом мінімальної вартості. Ідея даного методу полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Таблиця 4: Метод мінімальної вартості складання опорного плану транспортної задачі

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запаси
	b_1	b_2	b_3	b_4	
a_1	5	2	2	1 **30**	30
a_2	8	5 **15**	5 **10**	3 **5**	30
a_3	2 **10**	4	3 **10**	6	20
a_4	7	5	2 **10**	3	10
Потреби	10	15	30	35	

Згідно з другою таблицею отримаємо такий опорний план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 10 & 5 \\ 10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, загальна вартість перевезення вантажу за другим опорним планом складає: $S_2 = 1 \cdot 30 + 5 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 30 + 75 + 50 + 15 + + 20 + 30 + 20 = 240$.

Оскільки $S_1 > S_2$, причому $S_1 - S_2 = 380 – 240 = 140$ (ум.од.), то кращим буде другий опорний план , тобто метод мінімального елемента можна вважати кращим за метод північно-західного кута.

За умов ринкової економіки все частіше мають місце конфліктні ситуації, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить і від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуації в економіці є відношення продавець - покупець. Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об’єднання чи коаліції. Для прийняття управлінських рішень в умовах ризику та невизначеності на підприємствах використовують теорію ігор. Теорія ігор – це сукупність математичних методів і моделей, пов’язаних із прийняттям раціональних рішень в умовах конфлікту та невизначеності. Тут розглядаються конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.

Приклад 3. Фірма виготовляє устаткування для хімічної промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: А-1, А-2, А-3. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три

модифікації: М-1, М-2, М-3 залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в таблиці 5. Конфліктна ситуація виникає в зв'язку з необхідністю вибрати той тип устаткування та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього вигляду.

Таблиця 5: Собівартість виготовлення устаткування, тис. ум. од.

Тип устаткування	*Модифікація*		
	М-1	*М-2*	*М-3*
А-1	*10*	*6*	*5*
А-2	*8*	*7*	*9*
А-3	*7*	*5*	*8*

Розв'язання.

Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу А-1, то економічний відділ настоюватиме на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 — також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно настоювати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов — 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$\min\limits_{i=1} a_{ij} = \min(10;6;5) = 5$, $\min\limits_{i=2} a_{ij} = \min(8;7;9) = 7$,

$\min\limits_{i=3} a_{ij} = \min(7;5;8) = 5$, $\alpha = \max\limits_{j} \min\limits_{i} a_{ij} = \max(5;7;5) = 7$ — нижня ціна гри.

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу А-1. Для технології виготовлення устаткування з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. — для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 — також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати — 7 тис. ум. од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$\max_{j=1} a_{ij} = \max(10;8;7) = 10$, $\max_{j=2} a_{ij} = \max(6;7;5) = 7$,

$\max_{j=3} a_{ij} = \max(5;9;8) = 9$, $\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min(10;7;9) = 7$ — верхня ціна гри.

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації, мають значну розмірність. Тому важливим моментом дослідження платіжної матриці є способи її скорочення. Скоротити матрицю можна, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони є невигідними або повторюють одна одну. Для спрощення розрахунків дублюючі та ті стратегії, для яких існують домінуючі, вилучають з платіжної матриці.

Висновки. Математичне моделювання заощаджує матеріальні, фінансові та людські ресурси і, крім того, на відміну від здійснення реальних випробувань і досліджень, вільно від ризиків і катастрофічних наслідків. Без побудови адекватної моделі та проведення моделювання, управління реальною діяльністю буде здійснюватися за натхненням, всліпу і, швидше за все, таке управління закінчиться незапланованим результатом і марними витратами ресурсів.

Література:

1. Наконечний С. І. Математичне програмування : навчальний посібник/ Наконечний С. І., Савіна С. С. // Київ : КНЕУ, 2005 - 48-58 с., 422-430 с.

2. Дякон В.М. Математичне програмування : навчальний посібник / Дякон В.М., Ковальов Л.Є. // Київ : Видавництво Європейського університету, 2007. – 206-227 с.

3. Бідник Н.Б. Використання математичних методів і моделей в економіці, фінансах / Н.Б. Бідник // Науковий вісник НЛТУ України. – 2008. – № 18.6. – С. 258-262.

Заскока Оксана Василівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІКИ

Постановка проблеми. Використання математичних знань у сфері економіки – найважливіший напрям вдосконалення систем в економіці. Математичні методи прискорюють проведення економічного аналізу, сприяють найповнішому урахуванню впливу різноманітних чинників на результати діяльності, підвищенню точності обчислень.

Застосування математичних методів вимагає:

• системного підходу до дослідження заданого об'єкта, урахування взаємозв'язків і відносин з іншими об'єктами (підприємствами, фірмами);

• розробки математичних моделей, що відображають кількісні показники системної діяльності працівників організації, процесів, що відбуваються в складних системах, якими являються підприємства;

• вдосконалення системи інформаційного забезпечення управління підприємством з використанням електронно-обчислювальної техніки (ЕОТ).

Вирішення задач економічного аналізу математичними методами можливо, якщо вони сформульовані математично, тобто реальні економічні взаємозв'язки і залежності виражені із застосуванням математичного аналізу. Це спричиняє необхідність розробки математичних моделей.

Мета статті: дослідити елементи використання математики у економіці.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Використання математичних методів у економіці почалося досить давно. Перша у світі економічна модель була створена у XVIII столітті французьким економістом Ф. Кене. У XX столітті його “Економічна таблиця” послугувала основою для побудови й розвитку численних моделей суспільного відтворення. Так, міжгалузева модель “Витрати – випуск” В. Леонтьєва є подальшим логічним кроком у продовження економічної таблиці Ф. Кене.

Розквіт застосування математичних методів у економіці ознаменувало XX століття. З їх використанням пов’язанні роботи практично всіх вчених, відзначених Нобелівською премією з економіки, наприклад, Д. Хікс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуельсон.

Виклад основного матеріалу. Перші роботи із застосуванням математики в економіці не виходили за рамки найпростіших обробок результатів спостережень. Подальший розвиток мікро і макроекономіки, прикладних економічних дисциплін пов’язаний з дедалі вищим рівнем їх формалізації. Основу для цього заклав прогрес у самій математиці, а особливо в галузі прикладної математики.

У сучасній економіці математичні моделі відіграють дуже важливу роль. Зазвичай економіку прийнято називати гуманітарною дисципліною, проте це не так. Насправді вона оперує кількісними величинами, тобто економічними показниками, і функціональними або статистичними зв’язками між ними – розрахунковими формулами і економічними законами.

Проникнення математики в економіку пов’язане з подоланням значних труднощів. Головні причини лежать у специфіці економічної науки, а також у

природі економічних процесів, для яких характерні масовість, динамічність і стохастичність. Крім того, більшість об'єктів, досліджуваних економічною наукою, характеризується поняттям «складна система». Складність економічних процесів часто розглядається як обґрунтування неможливості їх формалізації і моделювання засобами математики. Хибність такої точки зору доводиться самою «живучістю» моделей. Моделювати можна об'єкт будь-якої природи і складності, тому що теза про принципову неможливість моделювання рівносильна твердженню про принципову непізнаність об’єкта [1].

І саме складні об’єкти становлять найбільший інтерес для моделювання. Саме тут моделювання може дати і дає результати, які не можна одержати жодними іншими способами дослідження.

У даній статті на прикладі конкретних задач ми продемонструєм взаємозв’язок математики та економіки.

В економічних та статистичних розрахунках частини величин прийнято виражати у відсотках (сотих частинах). Це має велике практичне застосування, адже ми можемо швидко порівнювати числа, спрощувати розрахунки і одночасно точно виражати частини величин цілими числами.

Найчастіше відсотки використовуються у фінансових розрахунках, при веденні господарської продукції, виконанні планів виробництва. Розглянемо наступну задачу.

*Задача 1***.** У квітні робітники цеху повинні були виготовити за планом 124 тисячі деталей. За першу декаду квітня цех виконав – 40% місячного плану, а за другу декаду – 25% з того що залишилось виконати. Скільки деталей потрібно виготовити працівникам цеху за останню декаду квітня, щоб повністю виконати план виробництва?

Розв’язання. Спосіб 1. Підрахуємо скільки деталей було виготовлено за першу декаду квітня:

$$124000 \cdot \frac{40}{100} = 1240 \cdot 40 = 49600.$$

За другу декаду вони виконали 25% від плану на квітень, тому:

$$74400 \cdot \frac{25}{100} = 744 \cdot 25 = 18600.$$

Звідси маємо, що для виконання місячного плану робітникам необхідно виготовити за третю декаду квітня 55800 деталей (74,4-18,6=55,8).

Спосіб 2. Розв’яжемо дану задачу так званим методом “залишку”.
Оскільки за першу декаду було виготовлено 40% місячного плану, то за другу і третю декади залишилось виготовити 60% плану (100%-40%). Враховуючи те, що за другу декаду виготовили 25% від того плану, що залишився (це становить 60% від всього плану на квітень), маємо, що для виконання місячного плану робітникам необхідно виконати за третю декаду 75% (100%-25%) від залишку, що становить 45% від навчального плану на квітень:

$$(1 – 0{,}45) \cdot (1 – 0{,}25) = 0{,}6 \cdot 0{,}75 = 0{,}45.$$

Звідси ми отримаємо кількість деталей, яку необхідно виготовити робітникам цеху у третій декаді квітня, щоб повністю виконати план:

$$124000 \cdot 0,45 \square 1240 \cdot 45 \square 55800.$$

Відповідь 55800.

Велику роль у економіці мають середні величини. Найпоширеніший вид середньої величини – це середнє арифметичне. Розглянемо наступну задачу.

Задача 2. В інтернет-магазині "Книга для дому" працює чотири категорії працівників: директор (зарплата – 4 тис. грн.), бухгалтер (зарплата – 3 тис. грн.), 5 менеджерів, які відповідають за замовлення книг (зарплата – 2,5 тис. грн.) і 25 кур'єрів (зарплата – 2 тис. грн.). Визначте середньомісячну заробітню плату кожного з співробітників.

Розв'язання. Виходячи з умови задачі, при розв'язуванні необхідно використати формулу знаходження середнього арифметичного. Для зручності у розв'язанні можна скласти наступну таблицю:

№ групи	Середня заробітна плата по j групі (x_i)	Кількість робітників у j групі (n_j)	Фонд заробітної плати у j групі $(n_j x_j)$
1	4000	1	4000
2	3000	1	3000
3	2500	5	125000
4	2000	25	50000
Разом	?	32	69500

Табл. 1

Таким чином, величина середньомісячної заробітної плати на фірмі може бути порахована за формулою:

$$\bar{x} \square \frac{\sum_{j\square 1}^{4} m_j x_i}{\sum_{j\square 1}^{4} m_j} \square \frac{1 \cdot 4000 \square 1 \cdot 3000 \square 5 \cdot 2500 \square 25 \cdot 2000}{32} \square \frac{69500}{32} \square 2171,9.$$

Отже, ми отримали середньомісячну заробітну плату, яка становить 2171,9 грн.

Відповідь: 2171,9 грн. [2].

Багато задач, які мають економічний зміст мають достатньо прості математичні моделі, які виражаються лінійними, квадратними рівняннями, або їх системами. Основна складність, яка виникає при розв'язанні таких задач – побудова відповідної математичної моделі і запис задачі у формалізованому вигляді. Від того, наскільки вдало вибрана невідома величина залежить подальше розв'язання задачі [3].

На наступному прикладі продемонструємо розв'язання економічної задачі за допомогою системи рівнянь.

Задача 3. Автозавод випустив 52000 автомобілів двох марок ($A;B$). На наступний рік було заплановано збільшення випуску автомобілів марки A на 75%, а марки B на 140%. У кінцевому результаті випуск автомобілів повинен збільшитись вдвічі. Скільки автомобілів кожної марки автозавод випускав у поточному році і скільки випустять у наступному?

Розв'язання. Позначимо через x кількість автомобілів марки A, які випущені заводом у поточному році, а y – марки B. Тоді у наступному році буде випускатися $1{,}75x$ автомобілів марки A і $2{,}4y$ – автомобілів марки B.

З умови задач випливає, що $x + y = 52000$ і $1{,}75x + 2{,}4y = 104000$. З отриманих рівнянь складемо систему.

$$\begin{cases} x + y = 52000, \\ 1{,}75x + 2{,}4y = 104000. \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо: $y = 52000 - x$, підставимо знайдений результат у друге рівняння системи і отримаємо:

$$1{,}75x + 52000 \cdot 2{,}4 - 2{,}4x = 104000,$$

$$0{,}65x = 52000 \cdot 0{,}4,$$

Звідки $x = 32000$.

Тоді $y = 52000 - 32000 = 20000$.

Отже: 1) автозавод у поточному році випустив 32000 автомобілів марки A і 20000 автомобілів марки B;

2) у наступному році автозавод випустить $32000 \cdot 1{,}75 = 56000$ автомобілів марки A і $20000 \cdot 2{,}4 = 48000$ автомобілів марки B.

Висновки. Нині математичний апарат є визнаним інструментом економіки. З його допомогою розробляються конкретні прикладні завдання управління підприємствами та організаціями, оптимізації бізнесу і виробництва, фінансового регулювання.

Література:

1. Алешковский И. А. Математика в экономике: экономико-математические задания вступительного экзамена по обществознанию: методическое пособие для поступающих на экономический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова / И.А. Алешковский, Ф.С. Картаев. – М. : МАКС Пресс, 2006. – 350 с.
2. Вітлінський В.В. Ризик у менеджменті / В.В. Вітлінський, С.І. Наконечний. – К. : Борисфен, 1996. – 330 с.
3. Основы экономической теории / под ред. С. И. Иванова. Кн. 1, 2. – М. : Вита-Пресс, 2002. – 250 с.

Ільчук Аліна Григорівна
студентка освітньо-кваліфікаційного рівня «Спеціаліст»
спеціальність «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СІЛЬСЬКОМУ ГОСПОДАРСТВІ

Постановка проблеми. В історії науки рівень складності математичних моделей часто перевищував можливості розв'язування відповідних математичних задач, але ще частіше труднощі виникали при побудові математичних моделей реальних процесів. І це не випадково. Адже моделі, які доводиться будувати в зв’язку, наприклад, з проблемами сільського господарства, потребують залучення усього надзвичайно широкого апарату сучасних та класичних розділів математики: диференціальні та інтегральні рівняння, теорія ймовірностей, скінченних автоматів, катастроф і т. д.

Будуючи математичну модель досліджувального явища, вчений має насамперед з’ясувати, яким властивостям розглядуваних реальних об’єктів слід приділити особливу увагу, а які вважати другорядними. Цей розподіл властивостей реальних об’єктів на головні (істотні) і другорядні (неістотні), а також виявлені зв’язки між ними фіксують у вигляді певних математичних залежностей, зокрема рівнянь і нерівностей. І ось тут однаково небезпечним є як надмірне ускладнення, так і зайве спрощення реальної ситуації. Справді, якщо дістанемо велику кількість надто складних рівнянь, то можемо не знайти їх розв'язків, а якщо рівняння надто прості, то вони можуть не описувати досліджуваного явища з потрібною повнотою.

Мета статті: проілюструвати конкретними прикладами можливості застосування математики в сільському господарстві.

Виклад основного матеріалу. Не буде перебільшенням сказати, що до кожного гвинтика машини, кожного метра дороги, якою вона пересувається, доклала своїх рук і математика.

Кілька фрагментів математичних ситуацій, з якими мають справу сучасні землероби, - це тільки крихта велетенського айсберга математичних теорій, які обслуговують сільськогосподарське виробництво країни.

Великий комплекс проблем пов’язаний з розробкою та експлуатацією машин. Досвід підтверджує, що раціональне використання техніки великою мірою сприяє підвищенню врожаю зернових та інших культур. Перед тим, як виїхати на колгоспне чи радгоспне поле, машини проходять складні випробування. Методами математичного моделювання на комп'ютерах вдається визначити вплив кліматичних умов на техніко-економічні показники сільськогосподарських машин, продуктивність і надійність їх роботи в різних умовах.

На основі теорії ймовірностей, теорії надійності, математичної статистики й комп'ютера формується новий напрям сільськогосподарської науки й техніки – терранавігація. Предмет її – створення наземних мобільних сільськогосподарських роботів – моботів.

Взагалі сфера застосування комп’ютера в сільському господарстві постійно розширюється. Вони складають графіки роботи автотранспорту на жнивах, плани перевезення сільськогосподарських продуктів залізницями і водними магістралями. Автоматичні системи управління (АСУ) вже працюють

на ряді ферм країни. АСУ “впізнає” кожну корову, “пам’ятає”, скільки кілограмів корму з’їла вона за день, регулює видавання фуражу за встановленими нормами.

На великій птахофабриці, в двадцяти корпусах якої близько мільйона несучок, майже не видно людей. Тут уводяться АСУ, і в кожному корпусі тільки один диспетчер слідкує за автоматичним режимом роботи системи. Коли АСУ діятиме на всій фабриці, відпаде потреба і в роботі операторів. Інформація, зібрана датчиками з усіх корпусів фабрики, надходитиме на центральний диспетчерський пункт, де встановлено комп'ютери. Вона й керуватиме системами обігрівання, освітлення, конденціювання всіх корпусів одночасно. За командою комп'ютера автоматика забезпечить зміну “дня” і “ночі”. Все це дасть змогу значно підвищити продуктивність птахів. Економічний ефект від запровадження АСУ тільки на одній птахофабриці – понад мільйон карбованців. Вона окупиться вже за 10 місяців. А ось ще один аспект застосування математики в сільському господарстві.

У ставку розводять дзеркальних коропів. Щоб планувати виловлення, продаж і прибутки, потрібно встановити, скільки риби в ставку. Як це зробити?

Під час розв’язування такої задачі не можна обійтися без теорії ймовірностей.

Потрібно піймати, наприклад, 100 коропів, поставити на них мітки і впустити назад у ставок.

Через деякий час – знову піймати 100 коропів і встановити, скільки серед них помічених.

Далі міркуватимемо так. 100 коропів – випадкова вибірка із загального числа риб у ставку. Це число називається генеральною сукупністю. Випадкова вибірка саме й дає уявлення про генеральну сукупність. Відповідно до нашої вибірки на кожні 100 коропів у середньому припадає 2 помічених, а оскільки в ставку всього 100 помічених коропів, то з очевидної пропорції $2:100 = 100:x$ знаходимо, що $x = 5000$, тобто в ставку приблизно 5000 коропів.

Звичайно, подбати про збільшення табунів риби ще недостатньо для того, щоб вона була на нашому столі. Її потрібно виловити і з найменшими затратами переробити. Тут знову на допомогу приходить математика. Рибалки, працюючи в Атлантиці, звернули увагу на те, що в одному районі завжди ловиться пікша, але в невеликій кількості, в іншому трапляються великі косяки окуня, але досить рідко. Закономірно виникає задача: що вигідніше – ловити пікшу чи вирушати за окунем, ризикуючи залишитися з порожніми сітками ?

Вивчивши дані про вилов риби в цих районах Атлантики, вчені підрахували, що найкращий вилов чекає рибалок, якщо на кожні три походи за пікшею припадатиме один за окунем. Проте цей висновок ще не був розв'язком задачі. Потрібно було визначити, куди вирушати спочатку. Оскільки йшлося про прогнозування випадкових явищ, то вдалися до…жеребкування. Поклали в шапку чотири папірці. На трьох з них було написано “пікша”, на одному – “окунь”.

Рибалки вирушили в той район, на який вказав випадок. Уже в перші два тижні вилов на кожному з траулерів зріс на 60 т.

Ознайомимося з деякими задачами, що постають перед працівниками сільського господарства під час посівної кампанії.

Визначити норму висівання насіння пшениці, коли відомо, що на 1 га має рости 6 мільйонів рослин, а при визначенні господарської придатності насіння з'ясувалось, що маса 1000 зернин 40 г, чистота насіння 97%, а схожість 93%.

Нехай на 1 га посіяли x (кг) насіння. Пшениця становитиме $0{,}97\,x$, решта будуть бур'яни і домішки, причому проросте тільки насіння із загальною масою $0{,}93 \cdot 0{,}97x$, що має становити 6 міліонів зернин. З рівняння $0{,}97 \cdot 0{,}93x \square 0{,}04 \cdot 6000$ визначимо норму висівання - 266 кг/га.

Визначивши норму висівання, налагоджуємо відповідно сівалку. ЇЇ агрегат приводиться в дію одним з ходових коліс. Кількість насіння на 1 га не залежить від швидкості руху сівалки і регулюється заздалегідь спеціальними важелями.

На яку норму висівання p (кг/га) відрегульовано сівалку, якщо за n обертів колеса з неї висипалося m (у кг) насіння? Які параметри сівалки достатньо знати, щоб розв'язати задачу?

Оскільки площа S, яку засіває сівалка за один оберт колеса, визначається робочою шириною сівалки й довжиною обода її колеса, то достатньо знати ці параметри.

Нехай робоча ширина сівалки h метрів, довжина обода колеса c метрів. Оскільки за один оберт колеса сівалка засіває прямокутник площею $S \square \frac{hc}{10000}$, то дістанемо рівняння $\frac{chp}{10000} \square \frac{m}{n}$, з якого знаходимо $p \square \frac{10000m}{chn}$.

Обчислену експериментально величину p порівнюємо з нормою висівання N даної культури і, якщо потрібно, так відрегульовуємо роботу сівалки, щоб $p \square N$.

Спалахи сонячної активності впливають на живі організми, спричинюючи мутації. Це відімо давно, як і те, що мутації можуть покласти початок новому виду.

Учені змоделювали "вибухаюче Сонце" на рослинах і тваринах, і перед селекціонерами відкрилася цікава перспектива. У фокусі геліоустановки, на якій моделювали вибухи сонячної активності, помістили зернини пшениці. Рослини з цих зернин розвивались набагато інтенсивніше від контрольних. Це зацікавило вчених. На спеціальній установці продовжили експерименти з пшеничними зернинами під штучними "вибухами Сонця". З експериментальних зернин виросли рослини з цінними для землеробів ознаками: коротким міцним стеблом і колоссям з великою кількістю зернин. Вважають, що проведені експерименти – це можливо перші кроки нових методистів прискорення високоврожайних сортів пшениці.

Вчені розробили математичний метод фенологічних прогнозів і біокліматичних оцінок. Запропоновано систему рівнянь, які дають можливість установити залежність життєдіяльності рослин від зовнішнього тепла. Для розв'язування цих рівнянь у польових умовах складено спеціальні графіки. Достатньо трафарет з кривими тривалості міжфазових періодів накласти на сітку

середньоперіодичних температур повітря, як дістанемо дати початку і кінця будь-якої фази розвитку рослин.

За цими датами агроном може дізнатися про тривалість залежно від погоди тієї чи іншої фази, побачити, якій з них загрожує затримка, і активно впливати на рослини з метою прискорення їх розвитку.

Математичні методи прогнозування взяли на озброєння і працівники служби захисту рослин. Адже більшість сільськогосподарських шкідників – комахи, життєдіяльність яких залежить від температури навколишнього середовища. За графіком розраховують, коли з'являться шкідники, коли настане фаза, в якій вони найменш захищені від отрутохімікатів. Цей метод прогнозування виявився корисним і для прогнозування захворювань сільськогосподарських тварин.

Існує серйозна наука болотознавство, яка зовсім не може обійтися без математики. Специфіка болота, як гідрологічного і біологічного об'єкта, описується надзвичайно складними рівняннями.

За допомогою електронних прикладів учені вивчають воднотепловий баланс боліт. Телеметричні дані передаються на прилади, електронний пульт який стає математичним дзеркалом болота. На ньому знаходять відображення коефіцієнти рівнянь боліт. Це дуже важливо. Адже в нашій країні зосереджено дві третини болотного фонду планети. А це потужна фабрика торфу. Щорічно в болотах земної кулі наростає чотири кубічні кілометри торфу або близько 4 міліардів тонн дорогоцінного торфу природної вологості.

Осушення боліт вимагає наукового підходу. Це знає кожний меліоратор. Не можна недосушити, а тим більше пересушити торф'яні поклади. Тоді вони перетворяться в порохові склади. Відповідальна і дуже потрібна наука болотознавство.

Висновки. Наведені вище приклади задач сільськогосподарського змісту, розв'язуваних побудовою математичної моделі тієї чи іншої реальної ситуації, переконливо свідчать про те, що математика для дослідних наук є особливого роду мовою, способом перетворення інформації про експериментальні факти і виявлення зв'язків між ними.

Література :

1. Конфорович А. Г. Математика служит человеку / А.Г. Конфорович. – К. : Рад. Шк., 1984. – 192с.

Ільчук Ірина Сергіївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. У сучасному суспільстві виникло нове розуміння цілей освіти, інші підходи до розробки і використання навчальних технологій. Тому поставлені завдання щодо поєднання навчання з подальшою продуктивною працею, а саме посилення прикладного і практичного спрямування математичної освіти.

Але й до сьогодні ми продовжуємо спостерігати не достатню відповідність системи навчання з сучасними потребами. Як правило, при вивченні математики більше уваги приділяють вивченню ознак, теорем, розробці алгоритмів розв'язання математичних задач на застосування вивчених термінів. І при такій організації навчання, на нашу думку, мало приділяється уваги застосуванню математики при розв'язанні задач з інших галузей знань. Не є виключенням і один з розділів математики: «Диференціальні рівняння».

Під час вивчення диференціальних рівнянь другого порядку за браком аудиторних годин не в достатній мірі демонструється їх застосування в інших науках, а саме при розв'язуванні задач практичного спрямування.

Мета статті: запропонувати алгоритм розв'язання фізичних задач за допомогою диференціальних рівнянь другого порядку та на прикладі показати застосування диференціальних рівнянь другого порядку до розв'язування задач з фізики.

Виклад основного матеріалу. Диференціальні рівняння є одним із засобів математичного розв'язання практичних задач. Особливо широко вони використовуються для розв'язання задач природничо-наукового циклу: теоретичної механіки, фізики, хімії, біології. В багатьох задачах геометричної оптики, геодезії, картографії виникає необхідність знаходити криві за заданими властивостями їх дотичних. Зазвичай такі та багато інших задач розв'язуються за допомогою диференціальних рівнянь.

Розв'язання фізичної задачі реального життя має послідовно пройти три етапи:

- складання диференціального рівняння;
- розв'язання даного рівняння;
- дослідження отриманого розв'язку.

При цьому рекомендуємо наступну послідовність дій:

1. Визначити величини, які змінюються в даному явищі, і визначити фізичні закони, які їх поєднують.
2. Вибрати незалежну змінну і функцію цієї шуканої змінної.
3. З умови задачі визначити початкові та крайові умови.
4. Виразити усі величини, які є в умові задачі, через незалежну змінну, шукану функцію і похідні цієї функції.
5. Виходячи з умови задачі і фізичного закону, якому підпорядковане дане явище, скласти диференціальне рівняння.
6. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл диференціального рівняння.
7. За допомогою початкових чи крайових умов знайти частинний розв'язок.

8. Дослідити отриманий розв’язок.

Перші 5 дій визначають алгоритм побудови математичної моделі явища, яке вивчається.

В природі широко розповсюджені процеси, в яких яка-небудь характеристика послідовно відхиляється то в одну, то в іншу сторону від свого визначеного значення – коливні процеси. Описати коливний процес – це означає вибрати характерний параметр процесу, який залежить від часу, і скласти рівняння коливань, якому він відповідає. Широке застосування при вивченні різних коливних явищ знаходять лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

Наведемо приклад.

Задача 1. На вертикальній пружині закріплений вантаж масою m (рис.1). Вантаж виводять зі стану рівноваги у вертикальному напрямі і потім відпускають. Знайти закон руху вантажу, нехтуючи масою пружини і опором повітря.

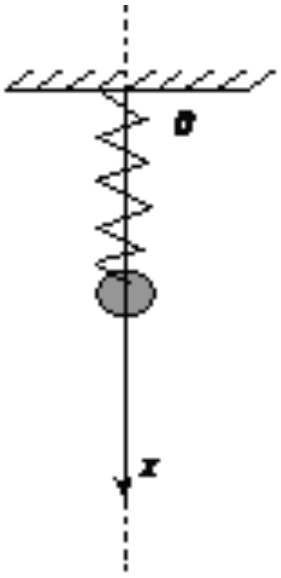


Рис.1

Розв’язання. Побудуємо математичну модель. Направимо вісь Ox вниз по вертикальній прямій, яка проходить через точку підвісу вантажу, яку й приймемо за початок координат.

Складемо диференціальне рівняння, спираючись на II закон Ньютона:

$$F = ma, \qquad (1)$$

де m – маса вантажу, a – прискорення руху, F – результуюча всіх сил, які прикладені до тіла.

В положенні рівноваги сила тяжіння, проекція якої на вісь Ox рівна mg, врівноважується силою пружини, яка за законом Гука пропорційна видовженню пружини:

$$mg = \omega^* \lambda, \qquad (2)$$

де ω^* – коефіцієнт жорсткості пружини.

Позначимо через $x(t)$ відхилення вантажу від положення рівноваги. В момент часу t на тіло будуть діяти дві сили: сила тяжіння mg, яка тягне вантаж вниз, і пружна сила пружини, яка дорівнює $\omega^*(\lambda + x)$ і направлена вгору.

Результуюча сила буде дорівнювати:

$$F = mg - \omega^*(\lambda + x),$$

або враховуючи (2):

$$F = -\omega^* x.$$

З II закону Ньютона (1) отримуємо:

$$ma = -\omega^* x. \qquad (3)$$

У випадку прямолінійного руху вздовж осі Ох прискорення дорівнює $x''(t)$.

Рівність (3) можна записати у вигляді $x''m = -\omega^* x$, звідки

$$x'' + \omega^2 x = 0, \qquad (4)$$

де $\omega^2 = \frac{\omega^*}{m} > 0$, тобто $\omega = \sqrt{\frac{\omega^*}{m}}$.

Отримали диференціальне рівняння руху тіла – лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Коренями його характеристичного рівняння $r^2 + \omega^2 = 0$ є комплексні числа $r_{1,2} = \pm\omega i$, тому загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t.$$

Для визначення фізичного змісту отриманого розв'язку перетворимо його:

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\omega t\right).$$

Покладемо

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin\alpha,\ \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos\alpha.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння запишеться так:

$$x = A(\sin\alpha\cos\omega t + \cos\alpha\sin\omega t),$$

або

$$x = A\sin(\omega t + \alpha), \qquad (5)$$

де A і α – нові довільні сталі.

Величина A називається амплітудою коливання, аргумент $\omega t + \alpha$ – фазою коливання, α при $t = 0$ – початкова фаза, ω – частота коливання.

Нехай в початковий момент часу $t = 0$ відхилення вантажу від положення рівноваги дорівнює x_0, а швидкість руху x_0': $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$. За даними початковим умовами можна знайти амплітуду і початкову фазу.

За умовою при $t = 0$, враховуючи рівність $x'(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$, отримуємо: $A\sin\alpha = x_0$, $A\omega\cos\alpha = x_0'$, звідки

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{\omega^2}},\ \alpha = arctg\left(\omega \frac{x_0}{x_0'}\right). \quad (6)$$

Підставивши знайдені значення A і α в (5), отримуємо:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + arctg\left(\omega \frac{x_0}{x_0'}\right)\right). \quad (7)$$

Формула (7) виражає закон руху вантажу. З неї видно, що вантаж здійснює гармонічне коливання біля положення рівноваги.

Частота і період коливання відповідно дорівнюють:

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega^*}{m}},\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\omega^*}}.$$

Як бачимо, частота і період коливання залежить тільки від жорсткості пружини і маси вантажу, тобто визначаються властивостями самої системи.

Амплітуда коливання і початкова фаза ще й залежать від початкових умов $x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0'$.

Відповідь. Рух вантажу на вертикальній пружині – гармонічні коливання за законом (5) біля положення рівноваги.

Наведемо ще декілька прикладів застосування диференціальних рівнянь другого порядку.

Задача 2. Матеріальна точка M масою m рухається по прямій OT під дією сили $\vec{f}_1$, яка притягує її до точки O, і сили опору середовища $\vec{f}_2$. Значення сили $\vec{f}_1$ пропорційне відхиленню матеріальної точки від положення O, значення сили $\vec{f}_2$ пропорційне швидкості точки M. Початкове відхилення матеріальної точки дорівнює s_0, початкова швидкість становить v_0. Визначити закон руху точки.

Не вдаючись у деталі побудови математичної моделі, зазначимо, що вона описується такою задачею Коші:

$$s'' + ps' + qs = 0,\ s(t_0) = s_0,\ s'(t_0) = v_0,$$

де $p = \frac{b}{m},\ q = \frac{k}{m} > 0,\ \vec{f}_1 = -ks(t)\vec{i},\ \vec{f}_2 = -bs'(t)\vec{i}$.

Задача 3. Тіло кинуто під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Вважаючи, що опір повітря пропорційний швидкості руху, визначити закон руху залежно від часу й траєкторії руху тіла.

Математична модель описується системою двох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt} \end{cases}$$

з початковими умовами $x(0)=y(0)=0, x'(0)=p, y'(0)=q$, де k – коефіцієнт сили опору повітря, $p=v_0\cos\beta$, $q=v_0\sin\alpha$ – проекції початкової швидкості v_0 на Ox та Oy.

Задача 4. Знайти закон руху електрона в однорідному електричному полі з напруженістю E, якщо в початковий момент відомі напрям і швидкість електрона.

Математична модель описується системою двох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=eE, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=0 \end{cases}$$

з початковими умовами

$$x(0)=y(0)=0,,$$

де m – маса електрона, e – заряд електрона.

Висновки. Отже, знання та вміння з диференціальних рівнянь другого порядку можна застосувати не лише під час розв'язання математичних задач, а й при вивченні ряду тем з фізики.

Література:

1. Векерик В. Теоретична механіка. Частина друга / В. Векерик, О. Петрук, І. Цідило. – Івано-Франківськ : Факел, 2002. – 342 с.
2. Возняк Г. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі вивчення математики / Г. Возняк, М. Маланюк. — К. : Рад. шк., 1989. – 128 с.
3. Зайцев И. А. Высшая математика / И. А. Зайцев. – М. : Высшая школа, 1991. – 400 с.
4. Роджерс Э. Физика для любознательных / Э. Роджерс. – М. : Мир, 1973. – Т. 3. – 664 с.
5. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння в задачах: навч. посіб. / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 504 с.

Клєйманов Владислав Олександрович
студент 1 курсу, напрям підготовки «Математика»

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ В ЕКОНОМІЦІ

Постановка проблеми. Останнім часом досить велика кількість учнів обирають економічні спеціальності як свою подальшу діяльність. Тому у школах створені економічні класи. Як правило, учителя, що працюють у таких класах, дають учням більш глибокі знання по звичайних темах шкільного курсу математики, найчастіше орієнтуючись на програми для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики. Але при такій організації навчання

практично не розглядаються економічні додатки тієї або іншої теми, мало часу приділяється застосуванню математичного моделювання до рішення економічних завдань. Не є виключенням і тема, присвячена застосуванню визначеного інтеграла в економіці.

Мета статті: показати застосування визначеного інтегралу та методів інтегрального обрахунку в економіці.

Виклад основного матеріалу. Зазвичай, практичний додаток інтеграла ілюструється обчисленням площ різних фігур, знаходженням об'ємів геометричних тіл. Інтегральні обрахунки мають багатий математичний апарат для моделювання й дослідження процесів, що відбуваються в економіці [4].

Зупинимося на декількох прикладах використання інтегрального вирахування в економіці. Почнемо із широко використовуваного в ринковій економіці поняття споживчого надлишку. Для цього введемо кілька економічних понять і позначень.

Попит на даний товар – сформована на певний момент часу залежність між ціною товару й обсягом його покупки. Попит на окремий товар графічно зображується у вигляді кривої з негативним нахилом, що відбиває взаємозв'язок між ціною P одиниці цього товару й кількістю товару Q, що споживачі готові купити при кожній заданій ціні. Негативний нахил кривої попиту має очевидне пояснення: чим дорожче товар, тим менше кількість товару, який покупці готові купити, і навпаки.

Аналогічно визначається й інше ключове поняття економічної теорії – пропозиція товару: сформована на певний момент часу залежність між ціною товару й кількістю товару, запропонованого до продажу.

Пропозиція окремого товару зображується графічно у вигляді кривої з позитивним нахилом, що відбиває взаємозв'язок між ціною одиниці цього товару P і кількістю товару Q, що споживачі готові продати при кожній ціні.

Зазначимо, що економісти вважають зручним зображувати аргумент (ціну) по осі ординат, а залежну змінну (кількість товару) по осі абсцис. Тому відповідно графіки функцій попиту та пропозиції виглядають таким чином (рис.1).

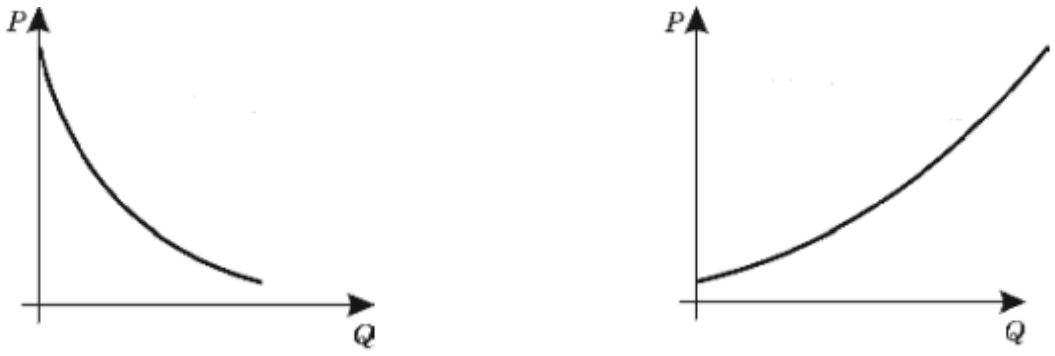


Рис. 1

Введемо ще одне поняття, що грає більшу роль у моделюванні економічних процесів – ринкова рівновага. Стан рівноваги характеризують такі ціна й кількість, при яких обсяг попиту збігається з величиною пропозиції, а

графічно ринкова рівновага зображується точкою перетинання кривих попиту та пропозиції (рис.2), E*(p*; q*) – точка рівноваги.

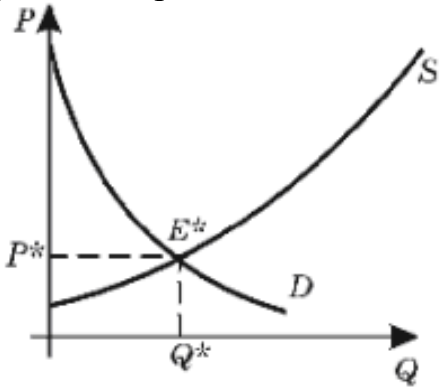


Рис. 2

Надалі для зручності аналізу ми будемо розглядати не залежність $Q = f(P)$, а зворотні функції попиту та пропозиції, що характеризують залежність $P = f(Q)$, тоді аргумент і значення функції графічно будуть зображуватися звичним для нас образом.

Перейдемо тепер до розгляду додатків інтегрального аналізу для визначення споживчого надлишку. Для цього зобразимо на графіку зворотну функцію попиту $P = f(Q)$. Припустимо, що ринкова рівновага встановилася в точці E*(q*; p*) (рис.3).

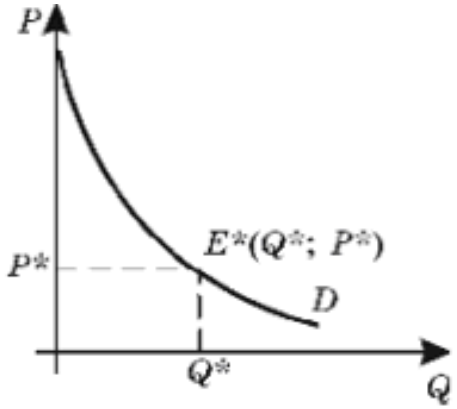


Рис. 3

Якщо покупець отримує товар у кількості Q^* за рівноважною ціною P^*, то очевидно, що загальні витрати на покупку такого товару складуть $P^* Q^*$, що дорівнює площі заштрихованої фігури A (рис.4).

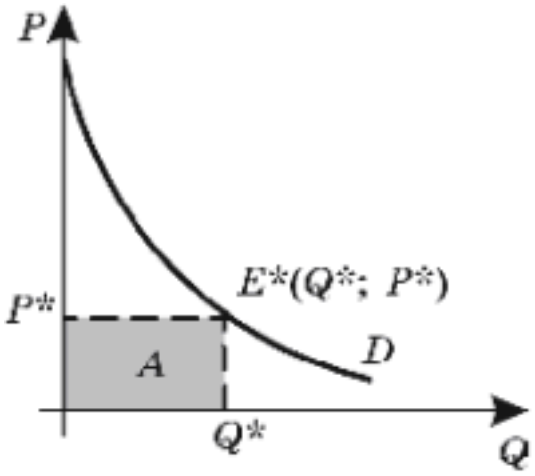


Рис. 4

Тепер припустимо, що товар у кількості Q^* продається продавцями не відразу, а надходить на ринок невеликими партіями Q. Саме таке припущення разом із припущенням про безперервність функції попиту та пропозиції є основним при виведенні формули для розрахунку споживчого надлишку. Відзначимо, що дане припущення цілком виправдане, тому що така схема реалізації товару досить поширена на практиці й випливає з мети продавця підтримувати найвищу ціну на товар.

Тоді одержимо, що спочатку пропонується товар у кількості $Q_1 = Q$, що продається за ціною $P_1 = f(Q_1)$.

Величина Q мала, то можна вважати, що вся перша партія товару реалізується за ціною P_1, при цьому витрати покупця на покупку такої кількості товару складуть P_1Q, що відповідає площі заштрихованого прямокутника S_1 (рис.5).

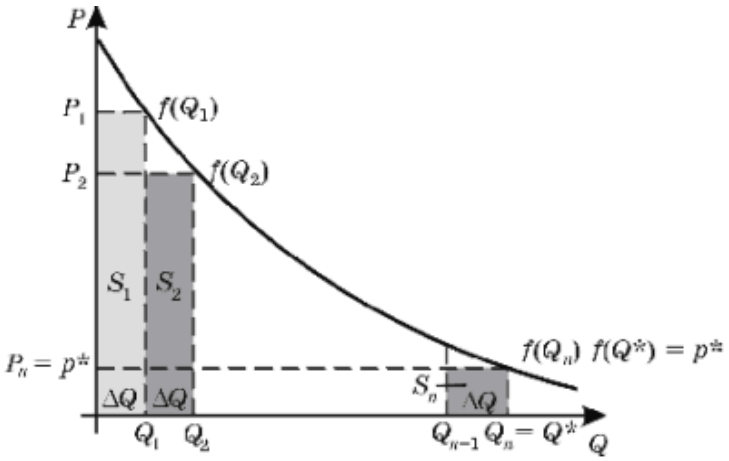


Рис. 5

Далі на ринок надходить друга партія товару в тій же кількості, що продається за ціною $P_2 = f(Q_2)$, де $Q_2 = Q_1 = Q$ – загальна кількість реалізованої продукції, а витрати покупця на покупку другої партії складуть P_2Q, що відповідає площі прямокутника S_2.

Продовжимо процес доти, поки не дійдемо до рівноважної кількості товару $Q^* = Q_n$. Тоді стає ясно, якою повинна бути величина Q для того, щоб процес продажу товару закінчився в крапці Q^*:

$$\Delta Q = \frac{Q_n}{n} = \frac{Q^*}{n}$$

У результаті одержимо, що ціна n-ої партії товару:

$$P_n = f(Q_n) = f(Q^*) = P^*,$$

а витрати споживачів на покупку цієї останньої партії товару складуть $P_n Q$, або площа прямокутника S_n.

Таким чином, ми одержимо, що сумарні витрати споживачів при покупці товару дрібними партіями Q рівні:

$$Q = P_1\Delta Q + P_2\Delta Q + \ldots + P_n\Delta Q =$$
$$= f(Q_1)\Delta Q + f(Q_2)\Delta Q + \ldots + f(Q_n)\Delta Q =$$
$$= S_1 + S_2 + \ldots + S_n.$$

Тому що величина Q дуже мала, а функція $f(Q)$ безперервна. $\sum_{t=1}^{n} S_t$ приблизно дорівнює площі фігури B (рис.6). Як відомо, при малих збільшеннях аргументу Q площа фігури B дорівнює певному інтегралу від зворотної функції попиту при зміні аргументу від 0 до Q^*, тобто в підсумку одержимо, що:

$$S_B = \int_0^{Q^*} f(Q)\, dQ.$$

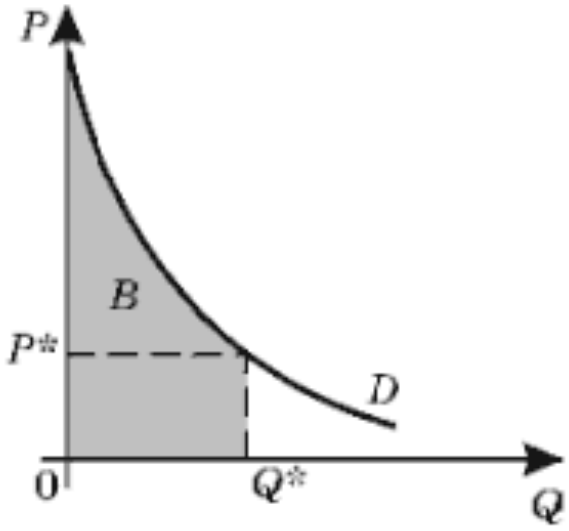


Рис. 6

Згадавши, що кожна точка на кривій попиту $P_i = f(Q_i)$, $i = 1,2,...,k$, показує, яку суму споживач готовий заплатити за покупку додаткової одиниці продукту, одержимо, що площа фігури B відповідає загальній грошовій сумі, що споживач готовий витратити на покупку Q^* одиниць товару. Різниця між

площею фігури B і площею прямокутника A є споживчий надлишок при покупці даного товару (площа заштрихованої фігури на рис.7) [3].

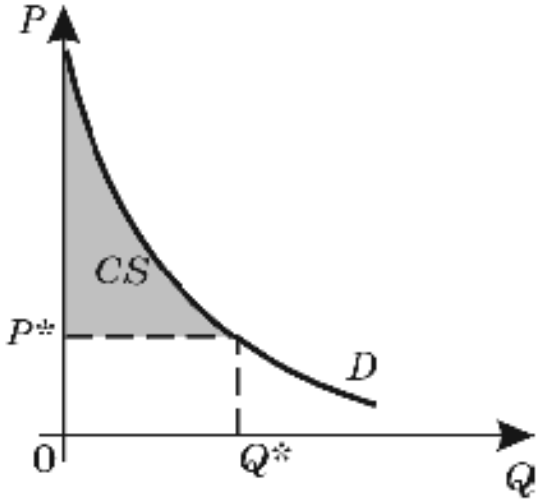


Рис. 7

Таким чином, споживчий надлишок можна порахувати по наступній формулі:

$$CS = \int_0^{Q^*} f(Q)\,dQ - P^*Q^*$$

Подібно надлишку споживача визначається й надлишок виробника. Відзначимо, що надлишок виробника являє собою різницю між тією грошовою сумою, за якої він був би готовий продати Q^* одиниць товару, і тією сумою, що він реально одержує при продажі цієї кількості товару [2].

Графічно він може бути представлений площею фігури, обмеженої кривої пропозиції, віссю цін і прямій, паралельній осі абсцис, що проходить через точку ринкової рівноваги (рис. 8).

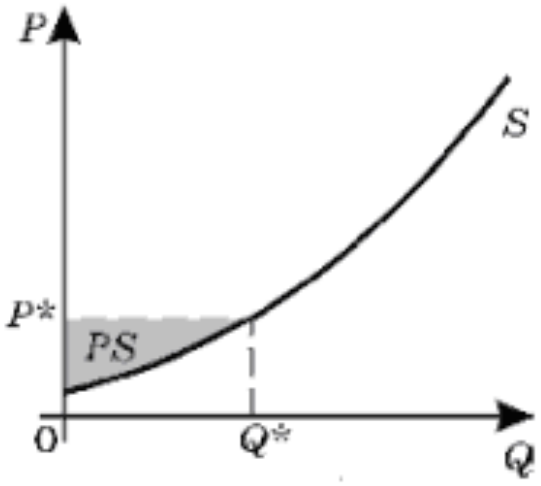


Рис. 8

Задача. Відомо, що попит на деякий товар описується функцією $q = \frac{8000}{p^3}$ а пропозиція даного товару характеризується функцією $q = 500$ грн. Знайдіть величину надлишку споживача при покупці даного товару.

Розв'язання. Для розрахунку надлишку споживача спочатку визначимо параметри ринкової рівноваги (p*; q*). Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} q = \dfrac{8000}{p^3}, \\ q = 500p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8000}{p^3} = 500p, \\ q = 500p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^4 = 16, \\ q = 500p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^* = 2, \\ q^* = 1000. \end{cases}$$

Таким чином:

$p^* = 2, q^* = 1000$.

Запишемо формулу для обчислення споживчого надлишку, де $f(q)$ – функція, яка зворотна функції:

$q = \dfrac{8000}{p^3}$, $f(q) = \sqrt[3]{\dfrac{800}{q}} = 20q^{-\frac{1}{3}}$.

Звідси

$$CS = \int_0^{100} 20q^{-\frac{1}{3}}dq - 2 \cdot 1000 = \frac{3 \cdot 20q^{\frac{2}{3}}}{2}\Bigg|_0^{1000} - 2000 =$$

$$= 30q^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{1000} - 2000 = 30 \cdot 1000^{\frac{2}{3}} - 2000 = 30\sqrt[3]{1000^2} - 2000 = 1000.$$

Відповідь. 1000.

Висновки. Отже, метод інтегрального обрахунку і визначений інтеграл широко використовується в багатьох науках, зокрема, при розв'язанні задач з економіки.

Література:

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для вузов / А. Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М. : Наука, 1971. – 736 с.
2. Вэриан Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход / Х. Р. Вэриан. – М. : ЮНИТИ, 1997. – 400 с.
3. Колесников А. Н. Краткий курс математики для экономистов / А. Н. Колесников. – М. : Инфра-М, 1998. – 367 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Т.1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – 600 с.

Кузема Олександр Олександрович
студент 1 курсу, напрям підготовки «Математика»

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ГЛОБАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПОЗИЦІОНУВАННЯ (GPS)

Актуальність теми. Загальновідомо, що роль математики в сучасній науці постійно зростає. Це пов'язано з тим, що, по-перше, без математичного опису цілого ряду явищ дійсності важко сподіватися на їх більш глибоке розуміння і освоєння, а, по-друге, розвиток фізики, лінгвістики, технічних і деяких інших наук передбачає широке використання математичного апарату. Більше того, без розробки та використання останнього було б, наприклад, неможливо ні освоєння космосу, ні створення електронно-обчислювальних машин, ні створення пошукових систем.

Мета статті: описати математичні основи Глобальної системи позиціонування.

Виклад основного матеріалу. GPS, Глобальна система позиціонування (англ.*Global Positioning System*) – це сукупність радіоелектронних засобів, що дозволяє визначати положення та швидкість руху об'єкта на поверхні Землі або в атмосфері. Положення об'єкту обчислюється завдяки використанню GPS-приймача, який приймає та обробляє сигнали супутників та інших установок. Для визначення точних параметрів орбіт супутників та керування ними, GPS-система в своєму складі має наземні центри управління. Також ця система стає в нагоді коли потрібно вказати потрібний шлях кораблеві у відкритому морі, чи туристу, що заблукав у великому місті або просто в лісі, тощо.

GPS-приймач обчислює власне положення, вимірюючи час проходження сигналу, що надається від GPS супутників. Кожен супутник постійно надсилає повідомлення, в якому міститься інформація про час відправки повідомлення, точку орбіти супутника, з якої було надіслано повідомлення (ефемеріс), та загальний стан системи і приблизні дані орбіт всіх інших супутників угрупування системи GPS (альманах). Ці сигнали розповсюджуються зі швидкістю світла у всесвіті, але з меншою швидкістю через атмосферу. Приймач використовує час отримання повідомлення для обчислення відстані до супутника, виходячи з якої, шляхом застосування геометричних та тригонометричних рівнянь обчислюється положення приймача. Отримані координати перетворюються в більш наочну форму, таку як широта та довгота, або положення на карті, та відображається користувачеві [3].

Оскільки для обчислення положення необхідно знати час з високою точністю, необхідно отримувати інформацію із 4-х або більше супутників задля усунення необхідності в надточному годиннику. Іншими словами, GPS приймач використовує чотири параметри для обчислення чотирьох невідомих: x, y, z та t. В деяких окремих випадках може бути необхідною менша кількість супутників. Якщо заздалегідь відома одна змінна (наприклад, висота над рівнем моря човна в океані дорівнює нулеві), приймач може обчислити положення використовуючи дані з трьох супутників. Також, на практиці, приймачі використовують різну допоміжну інформацію для обчислення положення з меншою точністю в умовах відсутності чотирьох супутників.

В даній статі розглянемо як математичні основи лінійної алгебри та геометрії використовуються в GPS. Імена науковців, які розробляли систему та математичні алгоритми, за якими працює вона не відомо, адже спочатку система розроблялася для військових. Багаторазово дослідники зверталися до архівів та інших установ, щоб дізнатися про розробників та їхню долю,але кожного разу вони отримували відповідь, що інформація про людей, які створювали систему знаходиться під грифом “секретно” .

Знаходження загального розв’язку невизначених лінійних систем, тобто систем, де кількість рівнянь менше, ніж невідомих, є стандартною темою в лінійній алгебрі. Це сприяє повному аналізу поведінки лінійних систем, а також наданню основи для розуміння більш абстрактної теми, в тому числі значення лінійних перетворень, нуль-простір, і розмір.

Основною ідеєю GPS є визначення місця розташування точки на поверхні Землі, в тривимірному просторі. В цій точці визначається, місце розташування приймача GPS, решта точки супутників, обчислюються з використанням часу дорозі радіосигналів [1].

Перш ніж навести приклад, потрібно уточнити, що подальші розрахунки, відрізняються від тих, які фактично використовуються у GPS. Приклад не передбачає, точних геометричних знань, в той час як GPS має справу з реальною похибкою вимірювання світу. Таким чином, GPS зазвичай використовує більше чотирьох супутників, та методом найменших квадратів отримується потрібна інформація про місцерозташування.

Досить часто GPS використовують на кораблях або інших суднах для орієнтування у відкритому морі тому для наочного прикладу як працює система покажемо таку задачу.

Як вже було сказано GPS приймач використовує 4 параметри для обчислення невідомих x, y, z, t. Так ось у системі Земля знаходиться в уявній прямокутній системі координат де, центром планети є початок координат тобто магма і з додатнім напрямом Z-осі, що проходить через північний полюс, що є фіксованою по відношенню до Землі. Для простоти візьмемо що радіус землі і цій системі дорівнює одиниці, тоді матимемо рівняння кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Іншою невідомою є t, тобто час, який буде вимірюватись у тисячних секунди. Окрім того, час дуже пов’язаний зі швидкістю передачі даних. Для цього нам необхідно знати швидкість світла, яка приблизно рівна 0,47 (радіуса Землі на тисячну частину секунди).

Задача. Розглянемо корабель в морі, що рухається у невідомому напрямку. Він має приймач GPS, який отримує одночасно сигнали від чотирьох супутників. Кожен сигнал вказує час її передачі та положення супутника. Це дозволяє приймачу GPS обчислити його місце розташування і час.

Розлянемо як саме це відбувається.

Почнемо з того, що уявімо собі, що є система координат $Oxyz$ Землі з центром в початку координат, додатною віссю z, що проходить через Північний полюс, що є фіксованою по відношенню до Землі. Положення корабля невідоме, воно може бути виражене як точка з кординатами (x, y, z), які згодом можуть

бути переведені на широту і довготу. Щоб все спростити, давайте візьмемо на трьох осях одиницю, яка дорівнює радіусу Землі. Так як GPS показує висоту над рівнемморя, а судно якраз знаходиться на воді − тоді формула для знаходження його координат матиме такий вигляд як і рівняння кулі, тобто $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Наше судно знаходиться в невідомому положенні і немає годинника. Воно отримує одночасні сигнали від чотирьох супутників, надаючи свої позиції, як показано в таблиці 1. (Ці цифри були складені для прикладу, в разі реальної позиції супутників не було б таких простих векторів).

№ супутника	Координати	Час
1	(1,2.0)	19,9
2	(2,0,2)	2,4
3	(1,1,1)	32,4
4	(2,1,0)	19,9

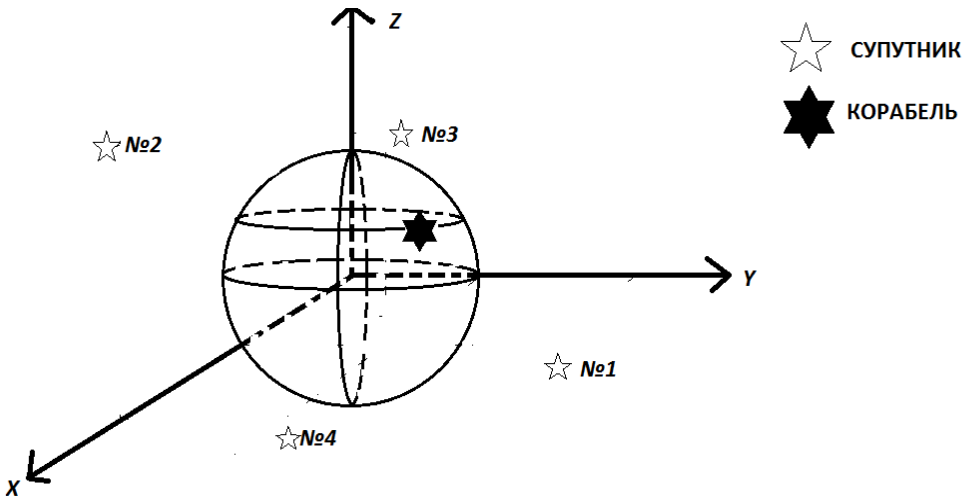


Рис. 11

Нехай (x, y, z) положення судна і t той час, коли сигнали надходять. Наша мета полягає у визначенні значень цих змінних. Використовуючи дані з першого супутника, можна обчислити відстань від судна наступним чином. Сигнал був посланий у момент 19,9 і прибув в момент часу t. Корабель, який рухається зі швидкістю 0,47, проходить наступну відстань:

$$d = 0,47(t - 19,9).$$

Ця відстань може бути виражена як в координатах (x, y, z) так і з супутникової позиції (1, 2, 0): $d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2}$.

Поєднання цих результатів приводить до рівняння

$$(x-1)^2 \square (y-2)^2 \square z^2 \square 0,47^2(t-19,9)^2 \quad . \qquad (1)$$

Аналогічно, ми можемо отримати відповідні рівняння для кожної з трьох інших супутників. Отримали чотири рівняння з чотирма невідомими, і тому ми можемо знайти для X,Y,Z і T. Вони не є лінійними рівняннями, але використовуючи алгебраїчні методи отриману систему, можна розв`язати.

Зупинимося ще раз на рівняння для першого супутника:

$$(x-1)^2 \square (y-2)^2 \square z^2 \square 0,47^2(t-19,9)^2 .$$

Після нескладних математичних перетворень моємо:

$$2x \square 4y - 2(0,47^2)(19,9)t \square 1^2 \square 2^2 - 0,47^2(19,9)^2 \square x^2 \square y^2 \square z^2 - 0,47^2 t^2 .$$

Аналогічні рівняння можуть бути отримані для трьох інших супутників. Запишемо систему рівнянь для всі разом:

$$\begin{cases} 2x \square 4y \square 0z - 2 \square 0,47^2 \square 19,9 \square t \square 1^2 \square 2^2 \square 0^2 - 0,47^2 \square 19,9 \square^2 \square x^2 \square y^2 \square z^2 - 0,47^2 t^2, \\ 4x \square 0y \square 4z - 2(0,47^2)(2,4)t \square 2^2 \square 0^2 \square 2^2 - 0,47^2(2,4)^2 \square x^2 \square y^2 \square z^2 - 0,47^2 t^2, \\ 2x \square 2y \square 2z - 2 \square 0,47^2 \square 32,6t \square 1^2 \square 1^2 \square 1^2 - 0,47^2 32,6^2 \square x^2 \square y^2 \square z^2 - 0,47^2 t^2, \\ 4x \square 2y \square 0z - 2(0,47^2)(19,9)t \square 2^2 \square 1^2 \square 0^2 - 0,47^2(19,9)^2 \square x^2 \square y^2 \square z^2 - 0,47^2 t^2; \end{cases}$$

Квадратичні члени в рівняннях такі, що, віднімаючи від першого рівняння кожне з трьох інших, ми отримаємо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 4y \square 4z \square 2 \square 0,47^2 \square 17,5 \square t \square 8 - 5 \square 0,47^2 \square 19,9^2 - 2,4^2 \square, \\ 0x - 2y \square 2z - 2 \square 0,47^2 \square 12,7 \square t \square 3 - 5 \square 0,47^2 \square 19,9^2 - 32,6^2 \square, \\ 2x - 2y \square 0z \square 2 \square 0,47^2 \square 0 \square t \square 5 - 5 \square 0,47^2 \square 19,9^2 - 19,9^2 \square. \end{cases}$$

Тепер ми знаємо, що ця система не може мати єдиний розв’язазок. Але якщо супутникові дані є точними, має бути розв’язання вихідної системи квадратних рівнянь. При отриманні загального розв’язку, можна буде виразити три невідомі через четверту.

Тоді підставимо в одне з перших квадратних рівнянь отриманий вираз і буде мати квадратне рівняння з однією невідомою. Розв’язавши отримане рівняння ми зможемо, знайти значення інших змінних. Таким чином, здійснюючи розв’язання відповідно за даним алгоритмом, ми сформуємо з лінійної системи матрицю:

$$\begin{bmatrix} 2 & —4 & 4 & 0,77 & 3,86 \\ 0 & —2 & 2 & —0,56 & -3,47 \\ 2 & —2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Звівши дану матрицю до східчастої форми – отримаємо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,95 & 5,41 \\ 0 & 1 & 0 & 0,95 & 5,41 \\ 0 & 0 & 1 & 0,67 & 3,67 \end{bmatrix}.$$

За методом Гауса повернемось від матриці до лінійної системи, таким чином ми отримаємо :

$$\begin{cases} x \approx 5,41 - 0,95t \\ y \approx 5,41 - 0,95t \\ z \approx 3,67 - 0,67t \end{cases} \quad (2)$$

де t – це вільна змінна. Повертаючись до (1), і підставляючи отримані вирази для x, y, z отримаємо рівняння:

$$(5,41 - 0,95t - 1)^2 + (5,41 - 0,95t - 2)^2 + (3,67 - 0,67t)^2 = 0,47^2 (t - 19,9)^2$$

або $0,02t^2 - 1,88t + 43,56 = 0$

$$\sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-1,88)^2 - 4 \cdot 0,02 \cdot 43,56} = 0,2227 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{1,88 + 0,2227}{0,04} = 52,5 \\ t_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{1,88 - 0,2227}{0,04} = 41,4 \end{cases}.$$

Якщо t_1, тоді:

$$\begin{cases} x = 1.317 \\ y = 1,317 \\ z = 0,790 \end{cases}.$$

А відстань над поверхнею Землі становить 4000км, тому цей розрахунок не задовольняє умову задачі. Якщо ж візьмемо t_2 з координатами $(x, y, z) \approx (0,667; 0,667; 0,332)$, отримаємо, що $d = 0,9997$. Це відповідає точці на поверхні Землі (до чотирьох знаків після коми) і дає нам місце розташування корабля [4].

Відомо, що супутники використовуються в системі орбіти на висоті 20200 км над поверхнею Землі. Виникає питання: який відсоток поверхні Землі може «бачити» кожен супутник ? Розглянемо задачу.

Задача Дано: $OC = OB = R = 6374\,км.$

$AP = 20200\,км$

Знайти який відсоток земної поверхні може побачити один супутник?

Розв'язання.

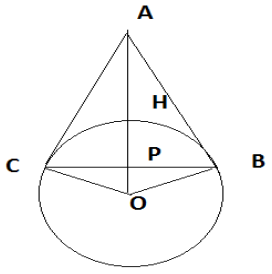


Рис. 2

Уявимо, що Земля – це ідеальне коло з центром у точці *O* та радіусом *6374 км*.

Точка *A* – це супутник.

Проводимо з точки *A* дві дотичні до цього кола – це буде та межа яку може побачити супутник а також хорду яка проходить через ці точки дотику $AO = OP = AP$ – це сума радіуса Землі відстані від Землі до супутника.

H – це точка перетину хорди та прямої AO.

Оскільки ΔCHO і ΔCHA подібні, тоді

$$AO : OC = OC : OH.$$

$$AO = OP + PA = 6374 + 20200 = 26574 \ (км),$$

$$OH = \frac{OC \cdot OC}{AO} = \frac{6374 \cdot 6374}{26574} = 1525{,}858 \ (км),$$

$$PH = OP - OH = 6374 - 1528{,}858 = 4845{,}142 \ (км).$$

Обчислимо площу дуги СВ:

$$S_1 = 2\pi rh = 2\pi PO \cdot PH = 2\pi \cdot 6374 \cdot 4845{,}142 = 193944832 \ (км^2) \ .$$

А тепер обчислимо загальну площу поверхні Землі:

$$S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi (6374)^2 = 510286123 \ (км^2).$$

Знайдемо їхнє відношення:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{193944832}{510286123} = 0{,}38.$$

Тобто супутник здатний “бачити” лише 38% земної поверхні [2].

Висновки. За досить короткий час Система Глобального Позиціонування стала невід’ємною частиною нашого життя, адже вона є в пригоді в усіх життєвих ситуаціях: чи то туристу, який заблукав, чи то кораблеві, що знаходиться у відкритому морі. З цього слідує, що така абстрактна наука як математика відіграє важливу роль у всьому чим користується людина, і взагалі у нашому житті.

Література:

1. Dan Kalman. An Underdetermined Linear System for GPS. / Dan Kalman. – THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, 2002. – 390 с.
2. David Royster .GPS and Mathematics NCTM/ David Royster. – Norma Royster Central Cabarrus High School, 2003. – С. 21-22.
3. Вікіпедія [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://uk.wikipedia.org/wiki/GPS
4. Paul Massatt Geometric formulas for dilution of precision formulas / Paul Massatt // Journal of Navigation, 1990. – С. 379-392

Матковська Інна Анатоліївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»

ВИКОРИСТАННЯ ЛАТИНСЬКИХ КВАДРАТІВ У ВИБОРІ МЕТОДУ ПОПЕРЕДНЬОЇ ОБРОБКИ РИНКОВИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Постановка проблеми. Специфіка дослідження фінансових показників полягає в обмеженому обсязі вихідної інформації, пов'язаної з об'єктивними пропусками даних і неможливістю отримання додаткових спостережень, що обмежує коло математичних методів і моделей, придатних для їх якісного аналізу. Сам характер вихідних даних (а він передбачається випадковим, слідуючи ЕМН теорії ефективного ринку (Efficiency Market Hypothesis)) обмежує можливості її обробки.

Мета статті. Показати за допомогою яких розрахункових показників можна оцінити ефективність згладжування і яким чином враховувати неоднорідність вихідних даних в різні історичні періоди? Проілюструвати яким чином можна поставити експеримент, в якому будуть не тільки досліджені різні методи згладжування, але і виключена уся неоднозначність, породжена мінливістю ринку.

Виклад основного матеріалу. При аналізі та моделюванні ринкових показників особливо важлива роль відводиться попередній обробці тимчасових рядів. Згладжування вихідних рядів фінансових показників стає необхідним етапом у вирішенні завдань прийняття торгових рішень на фінансових ринках. Але традиційні схеми згладжування володіють загальним недоліком – втратою інформації на кінцях ряду, який можна розв’язати альтернативним методом одностороннього (Несиметричного) згладжування, що враховує при ковзному усередненні тільки попередні рівні ряду.

Як правило, в технічному аналізі розглядаються саме однобічні варіанти згладжування: за допомогою простої ковзної середньої (Simple MA), експоненційного згладжування (Exponential MA), за допомогою лінійних ваг (Linear Weighted MA) та лінійної регресії. Ці інструменти є індикаторами трендів і, як правило, вимагають ретельного (емпіричного) підбору параметрів. Найбільш корисною інформацією від усередненого показника руху курсу є спрямування його зміни, що сигналізує про моменти розвороту ринкових тенденцій [3].

Показник середнього руху курсу (moving average, MA) показує середнє значення даних за певний період часу:

$$MA_t = \frac{\sum_{i=t-k}^{t} P_i}{k} \quad (1)$$

Просте MA змінюється двічі після однієї зміни цін. Спочатку воно змінюється тоді, коли нове значення потрапляє в період усереднення, потім, коли стара ціна покидає період усереднення. Цих недоліків позбавлений метод експоненціального усереднення:

$$EMA_t = k * P_t + (1-k) * EMA_{t-1}, \quad k = \frac{2}{n+1} \quad (2)$$

На перший погляд EMA володіє двома основними перевагами перед MA. По-перше, воно приділяє більше уваги останнього дня торгів. По-друге, EMA не відкидає старі дані, як MA, а дає їм повільно розчинитися, хоча, на практиці ці переваги не приносять відчутної користі [2].

Існує багато напрямів для використання ковзних середніх в якості генераторів прийнятих рішень: це підбір інтервалу згладжування таким чином, щоб середні виявлялися нижче цінових показників при їх зростанні і вище при їх падінні, в цьому випадку сигналами будуть служити перетин цінових графіків з їх усередненими значеннями.

Цікавими з практичної точки зору, виявляються перетин середніх різних порядків (в залежності від розміру інтервалу згладжування їх ділять на швидкі і повільні) і самі розвороти середніх.

При використанні даних процедур обробки часових рядів підбір параметрів згладжування (розміру інтервалу), як і вибір самого методу згладжування обґрунтовуються емпірично. Але оскільки від якості обробки даних на попередньому етапі безпосередньо залежить і точність подальшого моделювання, очевидна необхідність розробки коректної методики порівняння існуючих алгоритмів. Емпіричне обґрунтування не може служити гарантією оптимального вибору способу згладжування, так як безпосередньо залежить відрозміру вибірки спостережень і від конкретних історичних даних (в кризові періоди й у періоди стабільності різні методи можуть демонструвати кращі результати на практиці) [4].

Для порівняльного аналізу результатів згладжування можна розглядати наступні показники: середньоквадратичне відхилення згладжених значень від вихідних (як і середнє відхилення по модулю) та середньоквадратичне відхилення згладженого ряду від середніх рівнів. Якщо враховувати тільки різницю між вихідними і згладженими значеннями, то, очевидно, лідирувати в точності будуть методи експоненціального згладжування з максимальним (близьким до 1) вагою останнього врахованого спостереження, що, в кінцевому рахунку, дискредитує саму ідею згладжуванняпо інтервалу, оскільки навіть при досить великому числі повторних процедур вирівнювання ряд вихідних спостережень не може бути очищений від незначних відхилень.

Облік середньоквадратичного відхилення згладжених значень дозволяє віддати перевагу тим методам, які дозволяють насправді перетворювати вихідний ряд в більш гладкий (З точки зору виключення незначних флуктуацій), що і є кінцевою метою попередньої обробки часових рядів. Таким чином, на практиці потрібно розв’язати двохкритеріальну задачу оптимізації, обравши між різними методами згладжування. Оскільки історичні дані для дослідження об'єктивно обмежені, то на перше місце виходять питання розбиття всієї сукупності даних на частини, відповідні для дослідження. Шляхи вирішення цього завдання в даній роботі пропонуються на базі колись добре відомого, але в даний час майже забутого, математичного підходу, запропонованого в останні роки життя Леонардом Ейлером (1707-1783).

Дана робота була названа «Дослідження магічного квадрата нового типу». Зараз такі квадрати прийнято називати латинськими, тому що Ейлер позначив їх клітини звичайними латинськими літерами (замість буквгрецького алфавіту) [3].

Клітини в одному квадраті заповнюються латинськими літерами, причому в кожному стовпці і в кожному рядку літери не повторюються. У клітини іншого

квадрата вписуються грецькі літери. Якщо накласти квадрати один наодного, то виявиться, що кожна латинська буква з'являється один і тільки один раз в парі з кожної грецькою буквою. Два або більше латинських квадратів, які можна так скомбінувати один з одним, називаються ортогональними, а вийшов комбінований квадрат називають греко-латинським.

Греко-латинські квадрати можна використовувати при плануванні експериментів як в соціології та ринковій торгівлі, так і в біології медицині. Греко-латинський квадрат в данному випадку буде схемою експерименту. Його рядки відповідають одній, стовпці – інший, латинські літери – третій, а грецькі букви – четвертої змінної. На рис. 1 представлені два ортогональних латинських квадрата 4-го порядку:

0	1	2	3
2	3	0	1
3	2	1	0
1	0	3	2

0	1	2	3
3	2	1	0
1	0	3	2
2	3	0	1

Рис. 1. Пара ортогональних діагональних латинських квадратів 4-го порядку

Якщо цифри в лівому квадраті замінити першими літерами латинського алфавіту, а цифри у другому – грецькими та поєднати ці два квадрати – ми побачимо класичний варіант греко-римського квадрата [1].

Повертаючись до проблеми вибору найкращого способу згладжування, не можна не сказати про те, що труднощі експериментів за розрахунками різними методами пов'язана з тим, що поведінка фінансових ринків нестабільно, неоднаково на різних періодах і зазвичай змінюється без будь-якої закономірності. *Яким чином можна поставити експеримент, в якому будуть не тільки досліджені різні методи згладжування, але і виключена всяка неоднозначність, породжена мінливістю ринку?*

При використанні греко-латинських квадратів крім відповідей на поставлені питання, одночасно, можна вирішити і проблему редукції даних, необхідних для прийняття рішення.

З трьох розглянутих методів найбільш точним (з точки зору мінімізації відхилень) є метод з нелінійним усередненням. Метод зваженого ковзного середнього володіє кількома перевагами при порівнянні з найбільш поширеними методами. По-перше, це велика точність, якщо порівнювати його з традиційними методами ковзного усереднення. По-друге, це здатність «очищати» ряд він дрібних збурень при багаторазовому повторенні процедури (На відміну від експоненціального згладжування і згладжування на базілінійної регресії), і, головне, можливість «налаштовувати» процедуру вирівнювання варіюючи розмір інтервалу згладжування, тим самим, регулюючи глибину ринкової пам'яті і, одночасно, регулюючи параметр, бере участь у розрахунку вагових коефіцієнтів.

У якості першої змінної при використанні латинських квадратів для експериментального порівняння методів згладжування можуть бути обрані різні торгові інструменти на фінансових (Котирування акцій на фондовому ринку або крос-курси валют на FOREXe), в якості другої змінної можна розглядати власне, різні способи згладжування (наприклад, просте усереднення, зважене, експоненційний згладжування і згладжування з використанням регресії).Третьою зміною може виступати розмір інтервалу, на якомупроводиться згладжування і четвертої – періоди, на які доведеться розбити вихідну базу спостережень.

Задавши схему експерименту запропонованим способом, можна у рази скоротити кількість обчислень, необхідних для обґрунтованого вибору на користь одного з конкретних методів попередньої обробки інформації. Природньо, схему експерименту можна варіювати, змінюючи як кількість змінних, так і їх змістовне навантаження.

Аналогічно можна порівнювати не тільки методи попередньої обробки, але й методи моделювання часових рядів, виключаючи випадковий «Виграш» певних моделей на конкретних історичних періодах [3].

Висновки. Таким чином, запропонований спосіб побудови експерименту для порівнянні різних процедур обробки даних на практиці може виявитися одним з критеріїв оцінки адекватності розраховуються значень вихідним, а також дає практичну користь такого підходу в загалом у зв'язку зі зменшенням обсягу оброблюваної інформації.

Література:

1. Белоусов В.Д. Алгебраические сети и квазигруппы / В.Д. Белоусов. – Издательство Штиинца, 1972. – 342 с.
2. Гарднер М. Математические досуги / М. Гарднер. – М. : Мир, 1972. – 546 с.
3. Концевая Н.В. Об использовании латинских квадратов в выборе метода предварительной обработки рыночных наблюдений / Н.В. Концевая // Современная економика: проблемы и решения. – Т.3(3). – 2010. – С.123-129.
4. Маркова Е.В. Руководство по применению латинских квадратов при планировании експеремента с качественными факторами / Е.В. Маркова. – Челябинск: Южно-Урал. кн. изд-во, 1971. – 156 с.
5. Холл М. Комбинаторика: пер. с англ. − М. – 1970.

Мельник Тетяна Олександрівна
вчитель математики ЗОШ І-ІІ ступенів, с. Голодьки

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІВ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЛОГІЧНИХ ЗАДАЧ

Постановка проблеми. Розв'язуючи логічні задачі чи головоломки, ми зазвичай намагаємося скласти таблиці, позначити об'єкти точками, з'єднати їх відрізками або стрілками, побачити закономірності в отриманих рисунках. Таким чином, ми створюємо наочне представлення різноманітних об'єктів, процесів і явищ, що досліджуються, тобто будуємо математичну модель. Ця модель є графом. Вміння використовувати графи дає можливість розв'язувати нестандартні задачі оригінальним та водночас простим і зручним способом.

Мета статті: розглянути приклади застосування графів до розв'язування логічних задач.

Виклад основного матеріалу. Серед задач, для розв'язання яких зручно використовувати графи, виділяють задачі про призначення. Наведемо приклад такої задачі.

Задача 1. В нашій школі є кілька гуртків: $C_1,C_2,\ldots,C_n$. Кожен із цих гуртків повинен мати старосту. Для того, щоб виключити перевантаження учнів, була поставлена умова, щоб жоден учень не був старостою більш, ніж одного гуртка. За якої умови це можливо?

Розв'язання. Використаємо дводольний граф. Одна підмножина вершин графа – це множина гуртків (N), а інша підмножина – це множина учнів школи (M).

Ми проводимо ребро від гуртка C_1 до учня m в тому випадку, якщо m є членом C_1. При цьому умова різноманітності перетворюється в наступне: кожна група із k гуртків (при k = 1, 2,..., N) повинна включати щонайменше k різних учнів. Згідно вище вказаному - це та умова, за якої гуртки можуть мати різних старост.

Це можливо. Припустимо, що кожен гурток складається принаймні з 5 учнів. Тоді на відповідному графі із кожної вершини множини C буде виходити принаймні 5 ребер. Для групи із k гуртків буде не менше 5k ребер, що виходять із відповідних вершин C до вершин із M (де k=4) (рис. 1).

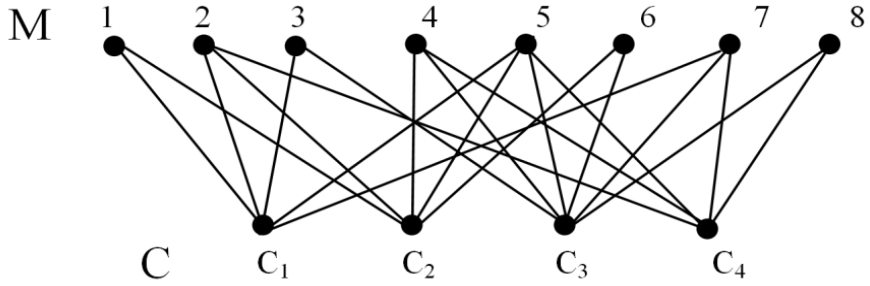


Рис. 1.

Тепер, якщо нам буде потрібно, щоб кожен учень брав участь не більше, ніж в 5 гуртках, це означатиме, що ребра від k гуртків повинні йти принаймні до k вершин із M, і, відповідно, умова різноманітності буде виконана.

Отже, потрібно, щоб в кожному гуртку брало участь принаймні t учнів і щоб, окрім того, жоден учень не брав участь більше, ніж в t гуртках. Тоді завжди можна знайти для цих гуртків різних старост.

Ще одним прикладом застосування графів є розв'язування задач про спортивні змагання та турніри [1].

Задача 2. У шаховому турнірі приймають участь 7 школярів. Кожен з них повинен зіграти один з одним по одному разу. Відомо, що до цього часу Максим зіграв 6 партій, Анатолій – 5, Олексій і Дмитро – по 3, Семен та Ілля – по 2, Євген – 1. З ким зіграв Олексій?

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному гравцеві точку площини - вершину графа. Якщо два гравці зустрілися між собою, то з'єднаємо відповідні вершини лінією - ребром графа. Таким чином, ми побудуємо граф зустрічей гравців. Нехай у цьому графі вершина 1 відповідає Максиму, вершина 2 - Анатолію, вершина 3 - Олексію, вершина 4 - Дмитру, вершина 5 - Семену, вершина 6 - Іллі та вершина 7 - Євгену. Оскільки Максим провів 6 зустрічей, то ступінь вершини 1 дорівнює 6, і цю вершину з'єднаємо з усіма вершинами графа. Ступінь вершини 2 повинна дорівнювати 5, так як Анатолій провів 5 зустрічей. З вершини 2 виходить 1 ребро. Решта 4 ребра проведемо з 2 в вершини 3, 4, 5 і 6, оскільки вершина 7, ступінь якої дорівнює 1 (Євген провів одну зустріч), з'єднана вже ребром з вершиною 1. Тепер вершини 5 і 6 відповідні Семену та Іллі, повинні мати ступінь 2, так як ці учасники провели по дві зустрічі. Вершини 3 і 4 з'єднаємо ребром, оскільки вони повинні мати ступені 3, так як Олексій та Дмитро провели по 3 зустрічі. Це означає, що граф, що описує зустрічі учасників, має вигляд:

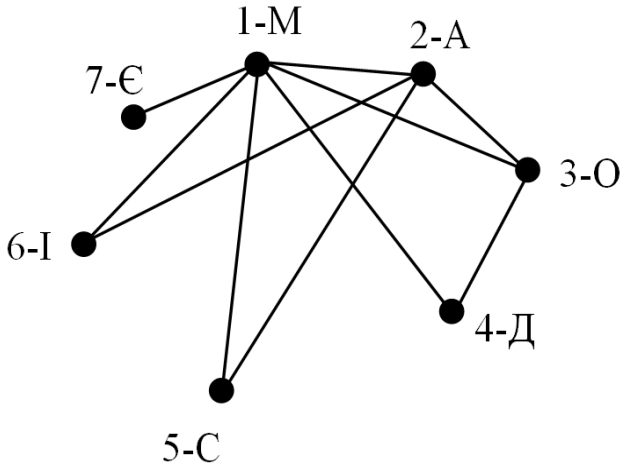


Рис. 2

Тому Олексій, якому відповідає вершина 3, зустрівся з Максимом, Анатолієм і Дмитром, яким відповідають вершини 1, 2 і 4 відповідно.

Відповідь. Олексій зіграв з Максимом, Анатолієм і Дмитром.

Не менш цікавим прикладом застосування графів є задача про складання меню.

Задача 3. У шкільній їдальні на перше можна замовити борщ, гороховий суп та гречаний суп, на друге – картопляне пюре і гарнір, а на третє - чай і сік. Скільки варіантів обіду можна отримати із зазначених страв?

Розв'язання. Вибір однієї із перших страв зобразимо графом (рис. 3).

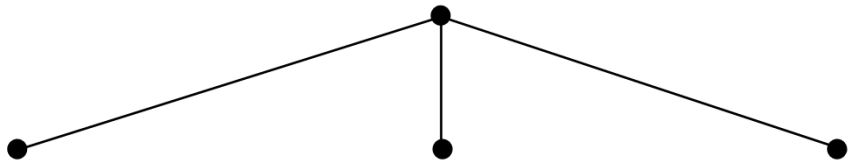


Рис. 3

До кожної з перших страв можна вибрати одну з двох других страв (рис. 4).

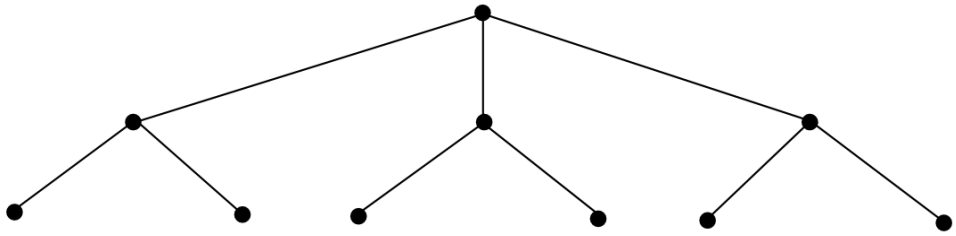


Рис. 4

Отримали 6 способів вибору першої та другої страви. До кожного з таких наборів страв можна вибрати один з двох варіантів третьої страви. Будуємо відповідний граф та нумеруємо кожен із отриманих варіантів обіду (Рис. 5).

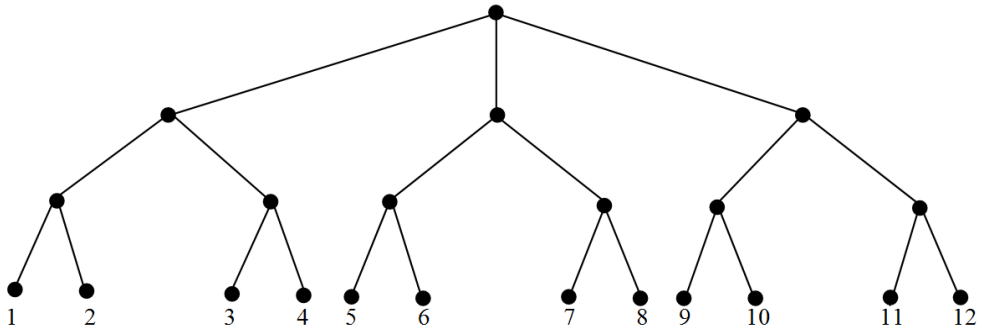


Рис. 5

Отже, 12 варіантів обіду можна отримати із зазначених страв.

Відповідь. 12.

Серед олімпіадних задач для учнів основної школи часто зустрічаються задачі на сполучення міст [4]. Розв’язувати такі задачі зручно використовуючи графи.

Задача 4. У країні 15 міст. Чи можна їх з'єднати авіалініями так, щоб було 4 міста, кожне з яких з'єднане з трьома іншими, 8 міст, кожне з яких з'єднане з шістьма іншими, і 3 міста, кожне з яких з'єднане з п'ятьма іншими?

Розв’язання. Якби це було можливим, то можна було б накреслити граф з 15 вершинами, чотири з яких мали б степінь 3, вісім — степінь 6, три — степінь 5. Тоді загальна кількість непарних вершин була б непарною, що неможливо.

Відповідь. Не можна.

Задача 5. У країні 101 місто, і деякі з них зв'язані дорогами. При цьому кожні два міста з'єднує рівно один шлях. Скільки в цій країні доріг?

Розв'язання. З умови випливає, що граф доріг цієї країни є деревом. У цього дерева є висяча вершина. Видалимо її разом з ребром, яке з неї виходить. Граф, що залишається, теж є деревом. Тому в нього теж є висяча вершина, яку ми видалимо разом з ребром, що з неї виходить. Цю операцію виконаємо 100 разів, поки не дістанемо граф, що складається з однієї вершини. Оскільки щоразу видалялося одне ребро, то спочатку їх було 100.

Відповідь. 100.

Задача 6. У країні є 9 міст з назвами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мандрівник виявив, що два міста з'єднані авіалінією в тому й тільки тому випадку, коли двозначне число, складене із цифр — назв цих міст, ділиться на 3. Чи можна з міста 1 дістатися в місто 9?

Розв'язання. Зобразимо граф: кожне місто позначимо точкою, а авіалінії – лініями, що з'єднують відповідні точки. (рис. 6).

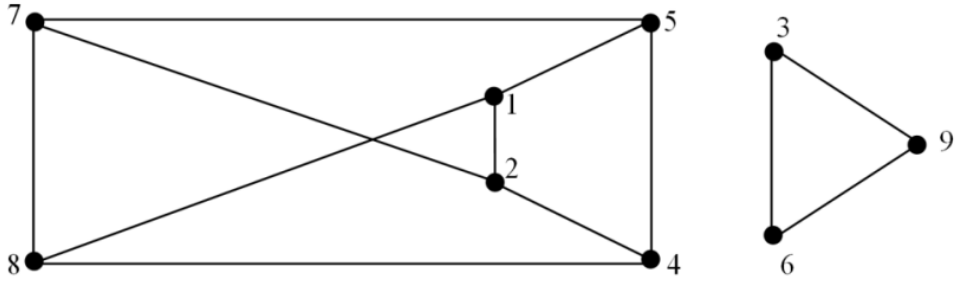


Рис. 6

Тепер стає очевидним, що з міста 1 до міста 9 дістатися не можна.

Відповідь. Не можна.

Висновки. Зображення умови логічної задачі у вигляді креслень, рисунків, схем, в яких використовуються графи, полегшує розв'язання задачі, робить його більш переконливим і наочним.

Для того, щоб навчити учнів застосовувати графи до розв'язування логічних задач, достатньо ввести основні поняття елементарної теорії графів та їх властивості, здійснити відбір задач, розв'язувати їх з учнями, переходячи від простих до більш складних.

Література:

1. Березина Л.Ю. Графы и их примеение: пособие для учителей / Л.Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.
2. Вовк С.П. Ейлерові графи / С.П. Вовк // Математика в школах України. – 2010. – № 28. – С. 32-35.
3. Шедивы Я. Решение логических задач при помощи графов / Я. Шедивы // Математика в школе. – 1967. – №6. – С. 56-60.
4. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.

Наконечний Ярослав Валерійович, Дарченко Ольга Володимирівна
4 курс, напрям підготовки «Математика»

АРИФМЕТИЧНА І ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЇ В БАНКІВСЬКИХ РОЗРАХУНКАХ

Актуальність дослідження. Роль математики в сучасній науці постійно зростає. Це пов'язано з тим, що, по-перше, без математичного опису цілого ряду явищ дійсності важко сподіватися на їх більш глибоке розуміння і освоєння, а по-друге, розвиток фізики, лінгвістики, технічних і деяких інших наук передбачає широке використання математичного апарату. Більше того, без розробки та використання останнього було б, наприклад, неможливо ні освоєння космосу, ні створення електронно-обчислювальних машин, що знайшли застосування в самих різних областях людської діяльності. Зокрема, і в банківській сфері.

Психологи та методисти одностайно вважають, що учнів необхідно спеціально навчати вміння поєднувати теоретичні знання з практичними діями. При цьому включення у процес навчання питань і задач прикладного та практичного змісту є лише необхідною умовою такого навчання.

Прикладна спрямованість навчання математики формує в учнів розуміння математики, як методу пізнання та перетворення оточуючого світу, який має розглядатися не тільки областю застосувань математики, а й невичерпним джерелом нових математичних ідей.

У нашій статті в якості прикладних задач ми розглянемо задачі з економічним змістом: завданнями, поставленими в області економіки, розв’язування яких вимагає використання математичного апарату. Симонов А.С. зазначає, що «сучасне суспільство живе в економізованому світі, а шкільна математика (та й інші предмети) на ці особливості ніяк не реагують». Саме тому ряд сучасних дослідників в області викладання математики відзначають необхідність включення прикладних задач з економічним змістом у шкільний курс математики .

Метою нашої статті є продемонструвати застосування математики, а саме арифметичної та геометричної прогресії, в банківських розрахунках.

Виклад основного матеріалу. Вважається, що на рівні з винайденням колеса, створення банківської системи стало одним з найважливіших винаходів людства.

Ба́нк (від італ. *banco* - лава) — кредитно-фінансова установа, яка зберігає кошти і капіталовкладення, надає кредити та здійснює послуги по фінансовим операціям.

Прообразом сучасних банківських закладів стали банки, які заснувались у Венеції в 1171 року. Ці банки давали гроші в борг королям, купцям, ремісникам, вони фінансували дальні подорожі, будівництво великих будівель. Робилось це все, звісно, небезкорисно. Банки брали за це плату, традиційно вона виражалась у вигляді проценту до виданої в борг суми.

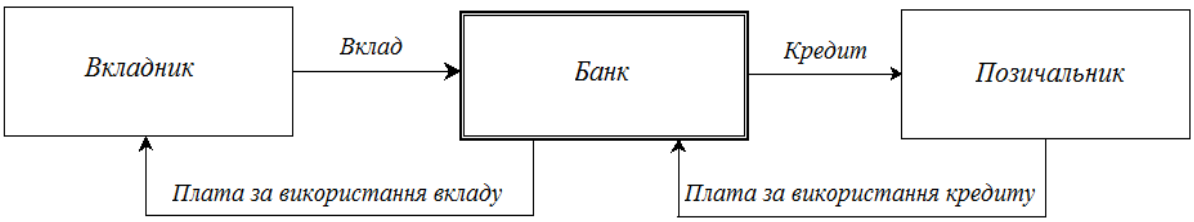
Слово відсоток або процент походить від латинського (pro centum – нарахування на сотню). В подальшому для скорочення писали: Р/С, а після цей запис набув вигляду знайомого нам виду %. Таким чином, один відсоток – це

сота частина числа, наприклад, $p_0\%$ від числа A становить $\frac{Ap_0}{100}$, або $A \cdot p$, звідки $p = \frac{p_0}{100}$, $0 \le p \le 1$.

Сучасні банки акумулюють гроші, цінні папери, надають кредити, виконують операції з іноземною валютою, дорогоцінними металами, випускають паперові гроші, монети і т.д. Комерційні банки стають посередниками, між тими хто зберігає та заощаджує гроші, та тими, хто бере кредити в банку.

Основна частина тих грошей, які банк видає позичальникам, складають гроші вкладників, які вони вносять в банк для зберігання та накопичення відсотку. Цей зв'язок наглядно показано на схемі.

Схема співпраці банка з клієнтами



У подальшому ми будемо розглядати відносини банку і вкладників. Зазвичай вкладник відкриває в комерційному банкові рахунок, на який він вносить певну суму грошей. При цьому вкладник отримує від банку плату у вигляді відсотків за користування його грошима для видачі кредитів, купівлі валюти і т.д. Розглянемо детальніше як це відбувається.

Якщо відсотки нараховують від початкового капіталу, то вони називаються простими. Якщо відсотки нараховують від нарощеного капіталу, то вони називаються складними. Складними відсотками, як правило, користуються при фінансових розрахунках, при підрахунку народонаселення, оцінці якісних змін у рослинному або тваринному світі тощо.

Розглянемо схему нарахування *простих відсотків за допомогою арифметичної прогресії.*

Нехай на рахунок внесли вклад в розмірі S_0 грн. Банк зобов'язується в кінці кожного року виплачувати вкладникові p_0 % від початкової суми, $S_0 p_0\%$ - називають *річною відсотковою ставкою*.

Збільшення вкладу S_0 по схемі простих відсотків характеризується тим, що розмір відсотків на протязі всього терміну зберігання грошей визначається тільки виходячи з початкової суми S_0 і не залежить від терміну зберігання вкладу. Проведемо підрахунки.

По завершенню першого року сума нарахованих відсотків складе $\frac{S_0 p_0}{100}$ грн., і розмір вкладу буде дорівнювати $S_1 = S_0 + \frac{S_0 p_0}{100}$, або $S_1 = S_0 \left(1 + \frac{p_0}{100}\right)$.

Якщо вкладник залишить всю суму S_1 на рахунку, то при закінченні другого року йому знову нарахують p_0% на початкову суму S_0 грн., і розмір вкладу стане дорівнювати $S_2 = S_1 + \frac{S_0 p_0}{100}$, або $S_2 = S_0\left(1 + \frac{2p_0}{100}\right)$ грн.

Якщо вкладник залишить знову всю суму, то по завершенню третього року йому знову нарахують суму $\frac{S_0 p_0}{100}$, а розмір вкладу досягне значення $S_3 = S_2 + \frac{S_0 p_0}{100}$, або $S_2 = S_0\left(1 + \frac{3p_0}{100}\right)$ грн.

Тепер зрозуміло, що якщо гроші вкладника будуть знаходитись на рахунку *n* - років, то сума $П_n$ нарахованих відсотків складе $П_n = \frac{nS_0 p_0}{100}$ грн., а розмір початкового вкладу разом з нарахованими відсотками складе

$S_n = S_0 + П_n$, або $S_n = S_0\left(1 + \frac{np_0}{100}\right)$ грн. (1)

Формула (1) називається *формулою нарахування простих відсотків*.

Нарахування простих відсотків зазвичай застосовують при невеликих термінах зберігання. Випишемо розміри вкладів, які опиняться на рахунку вкладника через 1 рік, 2, 3 роки і т.д. Отримаємо наступний ряд чисел:

$S_0 + \frac{S_0 p_0}{100}, S_0 + \frac{2S_0 p_0}{100}, S_0 + \frac{3S_0 p_0}{100}, \dots, S_0 + \frac{nS_0 p_0}{100}$,

або $S_0 + S_0 p, S_0 + 2S_0 p, S_0 + 3S_0 p, \dots, S_0 + nS_0 p$.

Ми бачимо, що даний ряд чисел утворює арифметичну прогресію з першим членом $S_0 + \frac{S_0 p_0}{100}$ і різницею прогресії $d = \frac{S_0 p_0}{100}$. Тому говорять, що початковий вклад S_0 з ростом *n* росте, як арифметична прогресія з різницею $d = \frac{S_0 p_0}{100}$.

Інколи вклад знаходиться в банкові декілька років, місяців і днів. В подібних випадках, помітимо, що в банківських розрахунках застосовуються угоди, згідно яких, якщо *p*% - річна ставка, то ставка за півріччя складе - $\frac{p}{2}$%, за квартал - $\frac{p}{4}$%, а за один день - $\frac{p}{365}$%. І взагалі, за $\frac{1}{n}$ частину року $\frac{p}{n}$%.

Приклад 1. Вкладник поклав в банк $S_0 = 10000$ грн. при умові, що банк нарахує 5% річних. Через 2 роки 4 місяці і 20 днів вкладник закрив рахунок. Підрахуємо, яку суму виплатив банк вкладнику.

Розв'язання. Підрахуємо відсоткові нарахування банку. За 2 роки по ставці 5% річних банк нарахував суму $П_1 = \frac{10000 \cdot 5 \cdot 2}{100} = 1000$ грн. За 4 місяці по ставці $\frac{5}{12}$% банк нарахував суму $П_2 = \frac{10000 \cdot 5 \cdot 4}{12 \cdot 100} = 166{,}7$ грн. За 20 днів по ставці $\frac{5}{365}$% банк нарахував суму $П_3 = \frac{10000 \cdot 5 \cdot 20}{365 \cdot 100} = 27{,}4$ грн.

Тепер зрозуміло, що вкладник отримає:

$S = 10000 + 1000 + 166{,}7 + 27{,}4 = 11194{,}1$ грн.

Приклад 2. Яку суму поклали в банк під прості відсотки за ставкою 22% річних, якщо через п'ять років вклад досягнув величини $S_5 = 94500$ грн.? На скільки гривень збільшився вклад за п'ять років?

Розв'язання. В нашому випадку p=22, n=5, S_5=94500. З формули (1) отримаємо $S_0 = \frac{100S_n}{100+np}$. Підставимо сюди задані значення і отримаємо $S_0 = \frac{9450000}{210} = 45000$ грн. За п'ять років вклад збільшився на $S_5 - S_0 = 49500$ грн.

У світовій історії відомий приклад, який демонструє колосальне зростання приросту за простими відсотками, якщо число періодів нарахування велике. Так, в 1624 році за острів Манхеттен, на якому розташований центр Нью-Йорка, вождю індіанського племені було сплачено 24 долари. У 1974 році - через 350 років - вартість землі цього острова оцінювалася приблизно в 40 млрд. доларів, тобто коефіцієнт приросту склав 1666000000! Цей колосальний приріст досягається при невеликій відсотковій ставці - всього 6,3%. Причиною є величезний часовий проміжок у 350 років. Зрозуміло, що наведений приклад носить умовний характер, оскільки реальні внески на такий термін не можливі [7,8].

Нарахування простих відсотків, особливо при довгострокових вкладах зберігання грошей на рахунку, не завжди є доречним способом розрахунку банку з вкладником. Дійсно, якщо вкладник вніс S_0 грн. в банк, який виплачує p% річних, то через один рік на рахунку вкладника стане $S_0\left(1+\frac{p_0}{100}\right)$ грн. Цією сумою банк буде користуватись весь рік, а по його завершенні нарахує відсотки не на ту суму, якою він користувався $S_0\left(1+\frac{p_0}{100}\right)$ грн., а тільки на початкову суму S_0 грн. Зі збільшенням терміну зберігання ця несправедливість буде тільки зростати.

Розглянемо інший спосіб розрахунку банку з вкладником, який не має таких недоліків. Це нарахування *складних відсотків за допомогою геометричної прогресії.*

Нехай знову вкладник вніс в банк S_0 грн., а банк нараховує p% річних. По закінченню одного року банк нарахує $\frac{S_0p}{100}$ грн., і сума грошей на рахунку становитиме $S_1 = S_0 + \frac{S_0p}{100} = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Якщо вкладник не зніме грошей з рахунку, то по закінченню другого року банк нарахує p% на суму S_1, а не початкову S_0. Таким чином, через два роки $S_2 = S_1 + \frac{S_1p}{100} = S_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

По закінченню третього року банк нарахує p% на суму S_2 грн., і на рахунку стане сума $S_3 = S_2 + \frac{S_2p}{100} = S_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$.

Тепер стає зрозуміло, що через n років на рахунку вкладника опиниться сума $S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$, $n = 1,2,3,\ldots$ (2)

Таким чином, банк нараховує відсотки не тільки на початковий вклад S_0 грн., а й на відсотки, які на нього нараховані. Такий спосіб нарахування відсотків на відсотки в математиці та економіці називають *складними відсотками*.

Розглянемо, як змінюється розмір вкладу з ростом терміну його зберігання. З формули (2) отримаємо ряд:

$$S_0\left(1+\frac{p}{100}\right), S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2, S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3, \dots, S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Ми бачимо, що дані числа утворюють геометричну прогресію з першим членом $a = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ і знаменником $q = \left(1+\frac{p}{100}\right)$, тому говорять, що в даному випадку початковий вклад зросте, як геометрична прогресія зі знаменником $q = \left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Приклад 3. Вкладник поклав в банк 15000 грн. по схемі складних відсотків. Банк щорічно виплачує 8%. Підрахуємо, яка сума грошей буде на рахунку через 5 років.

Розв'язання. Використаємо формулу (2) і тоді $S_5 = 15000\left(1+\frac{8}{100}\right)^5 = 22039{,}92$ грн.

На уроках математики під час вивчення арифметичної та геометричної прогресії можна використати наступну добірку прикладних задач:

1. У банк, що виплачує 16% річних, покладено 600 грн. У яку суму перетвориться цей вклад через 2 роки? На скільки гривень збільшиться початкова сума?
2. Щомісячна оплата за Інтернет становить 74 грн. Абонент прострочив оплату на 25 днів. Яку суму він має сплатити, якщо за кожний прострочений день нараховується пеня у розмірі 1%?
3. Знайдіть, яку щорічну ставку складних відсотків виплачував банк, якщо за 4 роки початкова сума 2560 грн. досягла розміру 6250 грн.?
4. Продуктивність праці на заводі щороку збільшується на однакову кількість відсотків. За три роки вона зросла на 33,1 %. На скільки відсотків щороку збільшувалася продуктивність праці?
5. На якій термін банк надав позику в розмірі 4800 грн., якщо, повертаючи кредит, позичальник сплатив 9150 грн., а річна відсоткова ставка становить 25 %?
6. Через скільки років сума, покладена під 9% річних, подвоїться при щорічному нарахуванні відсотків?
7. Як вигідніше покласти гроші - під 20% річних «простих» чи під 14% «складних»?
8. Ціна нового автомобіля 60 000 грн. При нормальних умовах експлуатації його продажна вартість з кожним роком зменшується на 8% від початкової вартості. За скільки гривень зможе продати автомобіль його власник через 5 років експлуатації? через n років експлуатації? Через скільки років продажна вартість автомобіля стане менше 15000 грн.? Чому буде дорівнювати ця вартість?

9. При покупці квартири в новобудові покупець уклав з будівельною фірмою наступний договір: відразу після укладення договору він сплачує 10% вартості квартири, а далі починає щомісяця виплачувати 1,5% від її вартості. Вартість купленої ним квартири в доларах США становить 36000. Скласти формулу для обчислення суми, виплаченої покупцем квартири через n місяців після укладення договору. Обчислити, скільки доларів було виплачено через 1 рік, через 2 роки після укладення договору. Скласти формулу для обчислення суми, яку залишилося заплатити через n місяців з початку дії договору, і знайти, скільки залишається заплатити через 1 рік, через 2 роки. в) На скільки років розрахована виплата вартості квартири?

Висновки. У процесі розв'язування прикладних задач здійснюється навчання учнів елементам математичного моделювання, адже найбільш відповідальним і складним етапом розв'язування прикладної задачі є побудова її математичної моделі.

Завдання з економічним змістом є практичними завданнями. Такі завдання дозволяють найбільш повно реалізовувати прикладну спрямованість у навчанні і сприяють більш якісному засвоєнню самого навчального матеріалу, формуванню вміння розв’язувати завдання даного типу, здійснювати перенесення отриманих знань і вмінь в економіку та інші сфери життя. Використання таких завдань активізує інтерес школярів до завдань прикладного характеру та вивчення математики в цілому, сприяє зміцненню мотивації навчання, системності, дієвості, гнучкості знань.

Література

1. Симонов А.С. Некоторые применения геометрической прогрессии в экономике / Симонов А.С. // Математика в школе. – 1998. - № 3.
2. Симонов А.С. Некоторые применения геометрической прогрессии в экономике. // Математика в школе. - 1998. - №3.
3. Симонов А.С. Проценты и банковские расчеты //Математика в школе. - 1998. - №4.
4. Симонов А.С. Сложные проценты. //Математика в школе. - 1998. - №5.
5. Симонов А.С. Сегодняшняя стоимость завтрашних платежей. // Математика в школе. - 1998. - №6
6. Инютина Е.В. Геометрическая прогрессия в экономике / Инютина Е.В., Симонов А.С. // Математика в школе. – 2001. - № 5.
7. Дорофеев Г.В. Избранные вопросы математики / Дорофеев Г.В. // Математика в школе. – 2003. - № 10.

Нечипорук Юлія Володимирівна
студентка 3 курсу , напрям підготовки «Математика»

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ВІДСОТКІВ

Постановка проблеми. Для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язування практичних задач. Вміння розв'язувати прикладні задачі свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою. Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі й до навчання математики зокрема. Одним із важливих засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання математики є встановлення природних міжпредметних зв'язків математики з іншими предметами, у першу чергу, з природничими. Особливої уваги заслуговує встановлення взаємозв'яків між математикою та економікою. Фінансова математика є одним з інструментів розв'язання економічних проблем, які виникають у суспільстві. Математичні задачі з фінансовим змістом ─ це засіб ознайомлення учнів із застосуванням математичних понять та методів у фінансовій галузі та розкриття можливостей математики у фінансовій теорії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У дореволюційний час питання фінансових обчислень вивчались у середніх навчальних закладах. Вони були відомі як «комерційна арифметика», в курсі якої вивчалась техніка відсоткових обчислень за відсотковими паперами та акціями, розрахунки за векселями, методи дисконтування та ін. Наприклад, в елементарну алгебру А. Н. Глаголева були включені питання капіталу, ренти, спадкування та інші. Навіть у 40-х роках ці питання ще вивчалися у курсі арифметики в п'ятих класах звичайних шкіл.

Використання прикладних задач у навчанні математики досліджували відомі методисти Бевз В. Г., Бевз Г. П., Колмогоров А. В., Конягін Ю., Межейнікова Л. С., Прус А. В., Слєпкань З. І., Філон Л., Швець В. О. та інші. Включення математичних задач з фінансовим змістом у шкільний курс математики досконало вивчали Межейнікова Л. С., Калашніков І. В., Швець В. О. та інші. Вони виділяють такі типи задач з фінансовим змістом: задачі на банківську діяльність; задачі на оподаткування; задачі на цінні папери; задачі на сімейний бюджет; задачі на страхування.

При вивченні відсотків у 5-6 класах доцільно розглядати задачі фінансового змісту на сімейний бюджет (як прикладних задач). Розв'язання таких задач сприятиме формуванню позитивного ставлення до навчання, відповідальності за власні дії, заощадливість тощо.

Мета статті: підібрати диференційовану добірку задач на відсотки з фінансовим змістом, яка буде містити основні типи задач на відсотки, що вивчаються в 5-6 класах.

Виклад основного матеріалу. Учні 5-6 класів ще не володіють складними економічними термінами, але вони вже користуються грішми, тому вони мають знати, що таке сімейний бюджет та з чого він формується.

Сімейний бюджет – це сукупність доходів та витрат сім'ї за певний період часу. Сімейний бюджет, як правило, містить такі складові:

✓ заробітна плата членів родини;
✓ дохід від підприємницької діяльності;
✓ дохід від власного господарства;
✓ пенсії, стипендії, соціальні виплати;
✓ доходи від цінних паперів та інші.

На уроці систематизації та узагальнення знань і вмінь учнів з теми: «Відсотки» в 6 класі доцільно заповнити таку таблицю.

Сімейний бюджет	
Доходи	Витрати
1. Заробітна плата. 2. Доходи від власного господарства. 3. Доходи від цінних паперів. 4. Пенсії, стипендії, соціальні виплати. 5. Доходи від інших джерел, які пов'язані із власністю. 6. Доходи від підприємницької діяльності.	1. Поточні витрати. 2. Одноразові витрати. 3. Податки. 4. Обов'язкові платежі. 5. Заощадження.

Для заповнення цієї таблиці можна запропонувати учням такі запитання:

1. Які види доходів ви знаєте?
2. Які види витрат ви знаєте?
3. Як обчислюється відсоток на заробітну плату?
4. Чим відрізняється обчислення доходів від обчислення витрат?
5. Які сплачуються податки?
6. Який бюджет є дефіцитним? Профіцитним? Збалансованим?
7. Як поповнити бюджет, якщо він дефіцитний?
8. Як можна розпорядитися залишком коштів, якщо бюджет профіцитний?
9. Якого бюджету краще дотримуватися в родині? А державі в цілому?

Систему задач на такий урок можна відібрати із підібраних нами задач на відсотки фінансового змісту. Ці задачі поділені за основними типами задач на відсотки, а спосіб розв'язування та рівень складності задачі визначає вчитель самостійно.

Задачі на знаходження відсотків від числа

1. Черевики коштували 240 гривень, а після уцінки – 200 гривень. На скільки відсотків зменшилася ціна черевиків?

Відповідь: на 25 %.

2. На літній відпочинок родина завжди витрачає фіксовану частку власних доходів. На наступний рік родина планує отримати доходів на 13% більше, ніж у цьому році. Скільки відсотків коштів родина планує витратити на відпочинок на наступний рік, якщо доходи родини в цьому році становили 200 000 грн, а на відпочинок було витрачено 14 000 грн?

Відповідь: 7 %

3. Батько отримує заробітну плату вдвічі більшу за заробітну плату матері. Величина прибутку від підприємницької діяльності родини становить 70% від

доходів батька. З прибутку від підприємницької діяльності сплачується єдиний податок у розмірі 3 450 грн на рік. Знайти у відсотках величину кожного з відмічених видів прибутку родини, якщо їх загальний річний прибуток 148 350 грн.

Відповідь: мати – 23 %, батько – 45 %, підприємницька діяльність – 32%.

4. Прожитковий мінімум в Україні становить 1 051 грн. Родина складається з 5 осіб, з яких прцюють лише двоє: мати отримує 1 800 грн, а батько – 2 300 грн. Скільки відсотків від необхідної суми родині потрібно заробити додатково для забезпечення нормального існування родини?

Відповідь: 22 %.

Задачі на знаходження числа за його відсотком

1. Ощадний банк виплачує 10 % річних. Скільки грошей матиме вкладник через рік, якщо його вклад становить 30 000 гривень?

Відповідь: 33 000 грн.

2. Щомісячний бюджет родини 2 525 грн. На харчування витрачається 33,4 % , на одяг – 19,7 %. Знайти суму, яка витрачається на харчування та одяг разом (з точністю до сотих).

Відповідь: 1 340,78 грн.

3. Загальні витрати родини складаються з заощаджень, витрати на харчування та оплати житла. Заощадження родини складають 20 % від витрат на харчування, а оплата житла складає 200 % від заощаджень. Знайти величину заощаджень та витрат на харчування, якщо всі витрати 32 000 грн на рік.

Відповідь: 4 000 грн; 20 000 грн.

4. За два столи й чотири стільці заплатили 2 200 гривень. Після того як столи подешевшали на 10%, а стільці на 20%, за один стіл і два стільці заплатили 960 гривень. Яка була початкова ціна одного стола та одного стільця?

Відповідь: 800 грн, 150 грн.

Задачі на відсоткове відношення

1. Родина за місяць на харчування планувала витратити 1280 гривень, а витратила 1120 гривень. Який відсоток коштів витратила родина на харчування за місяць.

Відповідь: 87,5 %.

2. Сімейний бюджет складається із заробітних плат матері і батька і становить 3 750 гривень. Батько отримує заробітну плату у розмірі 2250 гривень. Який відсоток сімейного бюджету отримує мати?

Відповідь: 40 %.

3. Щомісячний бюджет родини 5 000 гривень. На рік на відпочинок родина витрачає 7 500 гривень. Скільки відсотків річного сімейного бюджету родина витрачає на відпочинок?

Відповідь: 12,5 %.

4. Місячний бюджет родини 5 000 гривень. Щомісяця родина витрачає на харчування 2 900 гривень. Який відсоток своїх доходів родина витрачає на харчування щорічно?

Відповідь: 58 %.

Висновки. Отже, прикладні задачі сприяють розвитку творчого мислення учнів, допомагають з´ясувати роль і місце математики в практичній діяльності людини, прищеплюють інтерес до предмета, бажання працювати самостійно. Задачі на відсотки з фінансовим змістом дозволяють систематизувати знання учнів на три основні типи задач на відсотки, а також сприяють формуванню уявлення учнів про відсоткове відношення двох чисел, розвитку вміння розв'язувати задачі на знаходження зміни величини у відсотках, розкривають практичну необхідність вивчення теми.

Література:

1. Державний стандарт базової та повної середньої освіти // Математика в школі. – 2004. – №2. – С. 2-5.

2. Литвиненко Г.М. Математика : [пробний підручник для 6 класу середньої школи] / Г. М. Литвиненко, Г. М. Возняк. – К. : Освіта, 1996. – 287 с.

3. Межейнікова Л. С. Математичні задачі з фінансовим змістом в основній школі / Л. С. Межейнікова, В. О. Швець. ─– Харків : Вид. група «Основа», 2004. – 96 с.

4. Янченко Г. Математика: [підручник для 6 класу] / Г. Янченко, В.Кравчук. – Тернопіль. Підручники та посібники, 2006. – 272 с.

Пугач Олена Сергіївна
студентка 1 курсу, напрям підготовки «Математика»

ГРАФИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Постановка проблеми. У сучасній науці широкого застосування, при розв'язуванні задач набуває теорія графів. Граф є математичною моделлю найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, що досліджуються і використовуються в науці, техніці та на практиці. Дослідження властивостей графів представляють як теоретичний, так і практичний інтерес.

Аналіз попередніх досліджень. Термін "граф" вперше з'явився в науковій літературі в 1936 році в роботах угорського математика Д. Кьоніга, хоча елементи теорії графів були відомі та широко використовувались ще у XVIII столітті, зокрема в роботах Л. Ейлера.

Мета даної статті: узагальнення знань про графи та вивчення способів їх використання

Виклад основного матеріалу. Припустимо, що футбольна команда з вашої школи приймає участь у змаганнях і грає з командами інших шкіл. Нехай загальна кількість команд дорівнює шести. Позначимо вашу команду буквою A, а інші команди буквами – B, C, D, E та F. Через декілька тижнів після початку змагань виявиться, що деякі команди вже зіграли одна з одною, наприклад:

A з C, D, F,
B з C, E, F,
C з A, B,

D з A, E, F,
E з B, D, F,
F з A, B, D, E

Це можна зобразити за допомогою такої геометричної схеми. Кожну команду уявимо точкою або маленьким кружечком, з'єднаємо відрізками ті пари точок, які відповідають тим командам, які вже зіграли одна з одною. Тоді для даного списку проведених ігор отримаємо схему, зображену на рис.1.

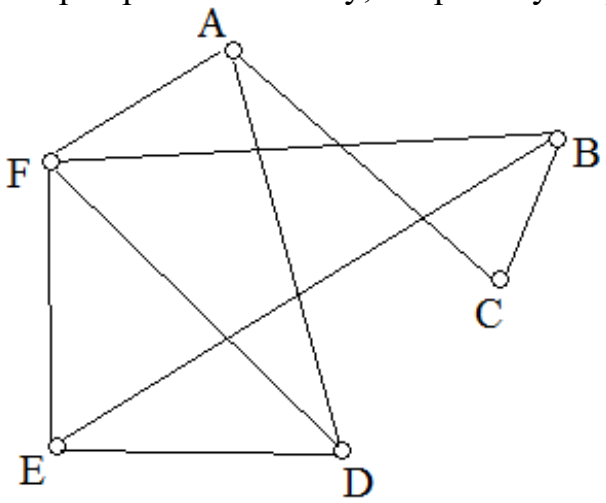


Рис. 5

Схема даного виду називається графом. Вона складається з декількох точок A, B, C, D, E, F, які називаються вершинами, і кілька відрізків, які з'єднують вершини, таких як AC або EB, які називаються ребрами графа.

З мал. 1. видно, що точки перетину деяких ребер графа можуть не бути його вершинами, це відбувається тому, що ми зобразили граф на площині.

Можливо було б зручніше уявляти граф нитками, що проходять одна над одною в просторі, в будь-якому випадку, під час зображення графа на площині, для того щоб уникнути плутанини, вершини потрібно виразно позначати (наприклад кружечками) [1].

Кожну сукупність ігор будь-якого турніру можна зобразити за допомогою відповідного графа. І навпаки, якщо заданий деякий граф, тобто фігура, що складається з точок – вершин, з'єднаних відрізками – ребрами, то його можна розглядати, як схему деякого змагання. В якості прикладу розглянемо граф, зображений на рис. 2. Його можна розглядати, як граф, що відповідає змаганню восьми команд, де команда A вже грала з командами B, E, D, команда B грала з A, F, G, C і т. д.

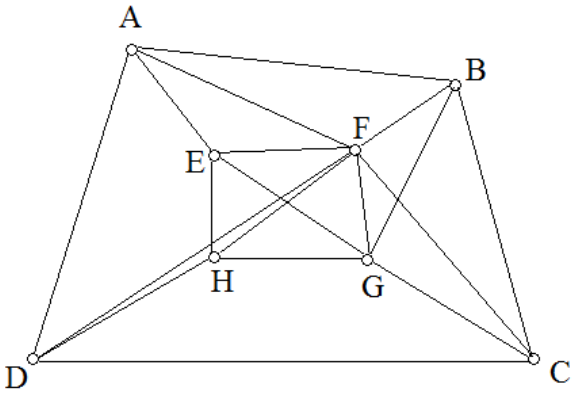


Рис. 6

Наступним елементом теорії графів, за допомогою якого зручно розв'язувати практичні задачі є дерево. Деревом називається зв'язний граф, який не має циклів, такий граф, як правило не має кратних ребер. З означення дерева випливає також, що для кожної пари його вершин існує єдиний, зв'язний їх ланцюг. Якщо граф не зв'язний, не містить циклів, то кожна його зв'язна компонента буде деревом, користуючись термінологією, прийнятою в ботаніці, такий граф можна назвати лісом.

Для того щоб побудувати дерево, оберемо будь-яку вершину A_0. З A_0 проведемо ребра в сусідні вершини A_1, A_2,…, з них проведемо ребра до їх сусідів A_{11}, A_{12}, …, A_{21}, A_{22},…, і т. д. як показано на рис.3. Початково вибрана вершина A_0 називається коренем дерева; кожна нова вершина може служити його коренем.

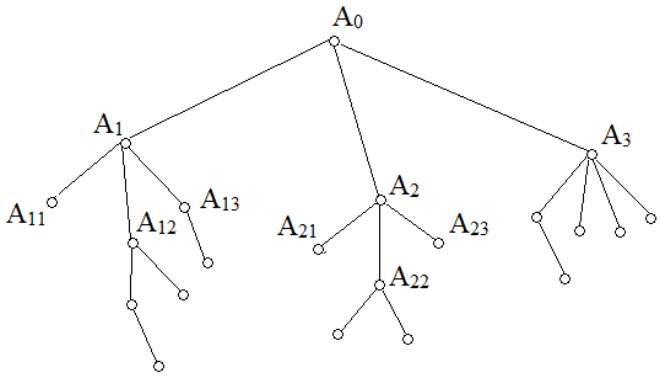


Рис 7

Оскільки на дереві немає циклів, різні ланцюги (або гілки), що виходять з A_0, будуть ізольовані один від одного, як гілки справжнього дерева. Кожна гілка такого графа повинна мати останнє, або заключне, ребро із заключною вершиною, з якої вже не виходить жодного ребра.

Згідно з даним алгоритмом, дерево можна побудувати, поступово додаючи ребра в його вершинах. Це дає можливість порахувати кількість ребер дерева. Найпростіше дерево має всього одне ребро; точніше кажучи, воно складається з двох вершин і одного ребра. Щоразу, коли ми додаємо ще одне ребро, з'являється ще одна вершина, відповідно справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Дерево з n вершинами, має n-1 ребро.

Замість одного дерева розглянемо ліс, що складається з k зв'язних компонентів, кожен з яких є деревом (рис. 4.). Для кожного з компонентів число ребер менше за число вершин на одиницю, відповідно справедлива наступна теорема.

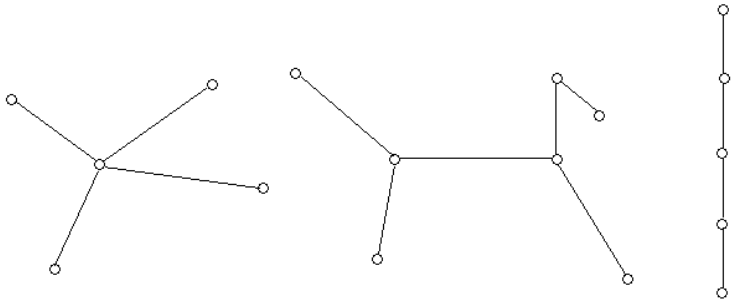


Рис. 8

Теорема 2. Ліс, що складається з k компонентів і має n вершин, має n-k ребер.

Дерева мають широке застосування. Тут згадаємо лише те, що кожен процес сортування може бути представлений у вигляді деякого дерева. Так рис. 3. можна уявити як процес опису сортування пошти. Початкова пачка листів позначена A_0. Пошта в країні може бути позначена A_1, пошта в Європу як A_2, пошта на Далекий Схід через A_3, і т. д. Місцева пошта поділяється на східну, західну та центральну, пошта в Європу A_3 поділяється по країнам і т. д. [2].

Процес сортування перфокарт може бути представлений таким же графом, тільки тут дерево має більш визначений вигляд, так як отвори на перфокарті розміщені правильними колонками, в кожній з яких зазвичай буває 10 місць. Відповідно при розподілі перфокарт по отворах в першій колонці є 10 можливостей: A_0, A_1,… A_9 і в кожній з них – знову по 10 можливостей: A_{00}, A_{01},…, A_{09} і т. д. (рис. 5.). Цей процес можна розглядати, як процес розбиття цілих чисел на групи, в залежності від їх першої, другої і. т. д. цифри. Але, кожне дерево можна зображати, як деяку досить загальну систему.

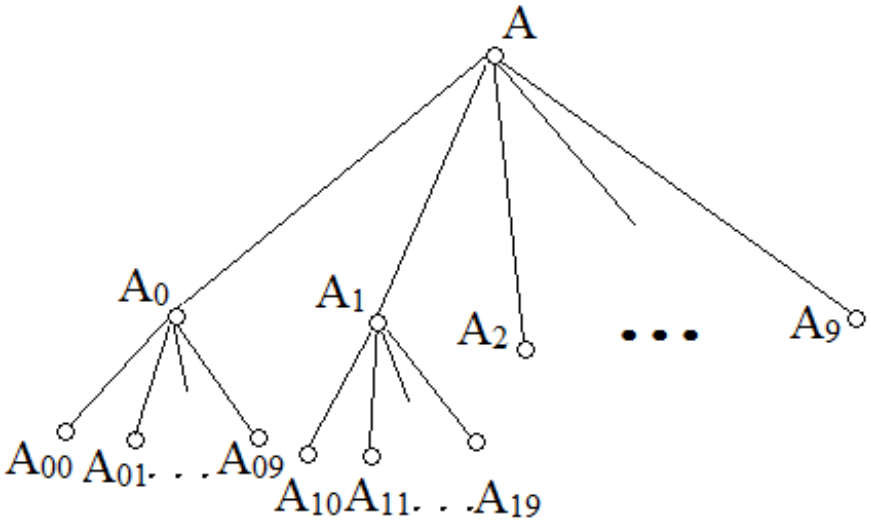


Рис. 9

Під час розробки схем маршрутів та їх оптимізації застосовують математичний апарат теорії графів, тобто графоаналітичні методи. Головне завдання при цьому полягає у побудові графу логістичної організації турпродукту (туру). Перейдемо до задачі, що має більш практичне значення – про засоби повідомлення, поставивши її спочатку у вигляді запитання про проведення доріг. Маємо декілька міст: A, B, C,…, які необхідно з'єднати між собою сіткою шосейних, або залізнодорожних шляхів. Для кожної пари міст відома вартість *c*(A, B) будівництва дороги, що їх з'єднує. Задача складається з того, що потрібно побудувати з можливих сіток найдешевшу дорогу. Замість того щоб говорити про сітку залізничних доріг, можна було б говорити про електричні лінії, або про водні шляхи, або про нафтопроводи і т. д.

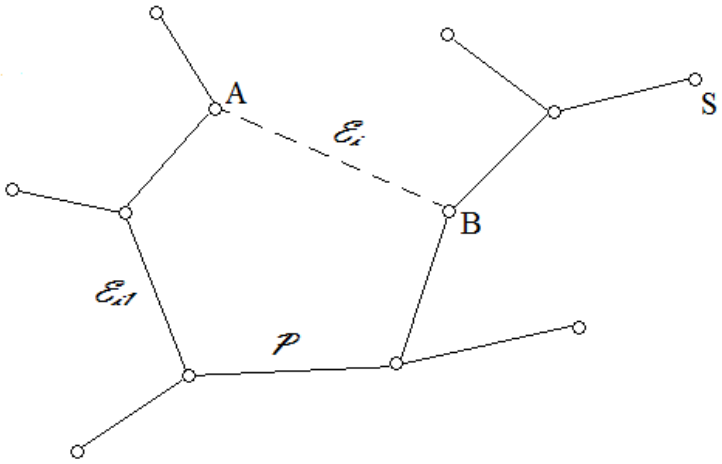


Рис. 10

В тому випадку, коли маємо всього три міста A, B, C, достатньо побудувати всього одну із з'єднуючих ліній ABC, ACB, BAC

При чому, якщо BC найдорожча лінія, то саме її потрібно виключити, побудувавши дорогу BAC.

Розглянемо тепер загальний випадок.

Граф найбільш дешевої сітки повинен бути деревом. Тому якби він містив цикл, можна було б видалити одну із частин даного циклу і відповідно міста все ще виявилися б з'єднаними. Відповідно для з'єднання *n* міст, потрібно побудувати n-1 доріг.

Покажемо, що сітку мінімальної вартості можна побудувати, користуючись наступним простим *правилом економічності*. В першу чергу з'єднаємо міста з найдешевшою з'єднуючою ланкою ε_1. На кожному з наступних кроків додаємо найдешевшу з ланок ε_1, при з'єднанні якого до вже побудованих ребер не утвориться ніякого циклу; якщо маємо декілька ланок однакової вартості, вибираємо будь-яку з них. Кожне дерево Ω, побудоване таким чином, ми будемо називати *економічним деревом.* Його вартість дорівнює сумі вартостей окремих ланок:

$$c(\Omega) = c(\varepsilon_1) + c(\varepsilon_2) + \ldots + c(\varepsilon_{n-1}).$$

Потрібно довести, що будь-яке інше дерево ϑ – найдешевше дерево, яке з'єднує ті ж вершини, не може виявитися дешевшим, ніж економічне дерево Ω.

Нехай ϑ - найдешевше дерево, яке з'єднує наші вершини, а Ω - будь-яке економічне дерево.

Припустимо, що ребра ε_1, ε_2,… економічного дерева Ω пронумеровані в тому порядку, в якому вони приєднувались при побудові Ω. Якщо найдешевше дерево ϑ не співпадає з Ω то Ω має щонайменше одне ребро, яке не належить ε.

Нехай ε_i=(A, B) – перше таке ребро, і нехай P(A, B) – ланцюг графа ϑ, який з'єднує вершини A і B (рис.6). Якщо ребро ε_i додати до ϑ, то граф $\vartheta + \varepsilon_i$ буде містити цикл C=ε_i+ P (A, B), а так як Ω не містить циклів, то цикл C повинен містити хоча б одне ребро, яке не належить Ω. Видаливши ребро ε_i, ми отримаємо дерево

$$\vartheta' = \vartheta + \varepsilon_i - \varepsilon_{i1}$$

з тим самим числом вершин, що і ?, пр. чому його вартість дорівнює

$$c(\vartheta') = c(\vartheta) + c(\varepsilon_i) - c(\varepsilon_{i1}).$$

Так як ϑ має найменшу можливу вартість, то

$$c(\varepsilon_i) \geq c(\varepsilon_{i1})$$

Але ε_i було ланкою найменшої вартості, при додаванні якого до $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1}$ не має циклів. Так як при додаванні ребра ε_{i1} до даних ребер ми також не отримаємо циклу, тому

$$c(\varepsilon_i) = c(\varepsilon_{i1}),$$

і відповідно, ϑ' також має мінімальну вартість:

$$c(\vartheta) = c(\vartheta').$$

Таким чином, ми знайшли друге дерево ϑ' мінімальної вартості, яке має з економічним деревом Ω на одне спільне ребро більше, ніж ϑ. Ми можемо повторювати дану операцію доти, доки не отримаємо остаточно зв'язне дерево мінімальної вартості, яке співпадає з Ω. Таким чином, Ω, а також всі інші економічні дерева дійсно мають мінімальну вартість [3].

Висновки. Проаналізувавши розглянуті в роботі методи застосування графів можна зробити висновок, що за допомогою графів можна розв'язати багато важливих проблем. На розглянутих прикладах показана можливість застосування графів у будівництві доріг, у поштовій справі та у спорті.

Перспективними напрямками подальшого розвитку теорії графів є її застосування в комп'ютерних технологіях, хімії, генетиці та інших науках, які в наш час розвиваються швидкими темпами.

Література:

1. Єлісєєва О. Графи працюють на нас / О. Єлісєєва, В. Петров // Математика в школі. – 2005. – №5. – С. 47-51.
2. Оре О. Графи та їх застосування / О. Оре. – М. : Мир, 1999. – 174 с.
3. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М. : УРСС, 2003. – 300 с.

Солодюк Ганна Вікторівна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ВИКОРИСТАННЯ ЕЙЛЕРОВИХ ГРАФІВ

Постановка проблеми. Перша робота з теорії графів, що належить відомому швейцарському математику Л. Ейлеру, з'явилася в 1736 р. Спочатку теорія графів здавалася досить незначним розділом математики, так як вона мала справу в основному з математичними розвагами й головоломками. Однак подальший розвиток математики і особливо її додатків дало сильний поштовх розвитку теорії графів. Вже в XIX столітті графи використовувалися при побудові схем.

В даний час ця теорія знаходить численне застосування в різноманітних практичних питаннях: при встановленні різного роду відповідностей, при вирішенні транспортних задач, задач про рух інформації у мережі нафтопроводів, в програмуванні та теорії ігор, теорії передачі повідомлень. Теорія графів тепер застосовується і в таких областях, як економіка, психологія і біологія.

Аналіз попередніх досліджень. Вадим Георгійович Візінг український математик, відомий завдяки результатам у теорії ейлерових графів, і особливо через теорему Візінга, у якій стверджується, що ребра ейлеревого графа з максимальним степенем Δ можуть бути розфарбовані не більше ніж $\Delta+1$ кольорами.

Мета статті. У цій роботі ми докладніше розглянемо ейлерові графи, основні відомості пов'язані з цим поняттям. А також завдання, які вирішуються за допомогою ейлеревих графів.

Виклад основного матеріалу. Термін «ейлерів граф» має два загальні значення в теорії графів. Одне значення це наявність в графі ейлеревого циклу, друге це те, що всі вершини графа мають парний степінь.

Для існування ейлеревого ланцюга необхідно, щоб не більше ніж дві вершини мали непарний степінь:

- якщо не існує вершин непарних степенів, то всі ейлереві ланцюги є циклами;
- якщо рівно дві вершини мають непарний степінь, то всі ейлереві ланцюги починаються в одній вершині і завершуються в іншій.

Іноді граф, що має ейлерів ланцюг, але не має ейлеревого циклу називається напів-ейлеровим.

Ейлерів цикл в неорієнтованому графі – це цикл, що проходить кожне ребро рівно один раз.

Для орієнтованих графів ланцюг замінюється на шлях або орієнтований шлях і цикл на орієнтований цикл.

До задач на ейлерові графи відносяться головоломки, в яких вимагається накреслити на площині одним розчерком замкнені криві, обводячи кожну криву (дугу) рівно один раз.

Розваги, в яких треба обмалювати деяку фігуру, не відриваючи та не повторюючи ліній, є дуже давніми. Вважається, що фігура, названа шаблями Магомета, має арабське походження (рис. 1).

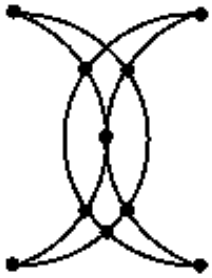


Рис. 1

Шабля Магомета

Розглянемо низку питань, пов'язаних з тим, чи є в неорієнтованому графі ейлерів цикл.

Наприклад:

1. Яке найбільше число ланцюгів або циклів необхідно для того,щоб кожне ребро графа G містилося точно в одному ланцюзі або в одному циклі? Очевидно, що якщо G має ейлерів цикл або ейлерів ланцюг, то відповідно буде число 1.

2. Дано зважений граф G (тобто ребрам графа приписані деякі додатні числа). Необхідно знайти цикл,що проходить через кожне ребро G принаймні один раз і такий, що для нього сума величин n_j та $c(e_j)$ загальна вага), де n_j – число проходжень по ребру n_j, а $c(e_j)$ – вага ребра мінімальна.

Очевидно, що якщо G містить ейлерів цикл, то довільний такий цикл буде оптимальним, так як кожне ребро проходиться по одному разу і вага цього циклу рівна:

$$\sum_{j=1}^{m} c(e_j).$$

Задача 1 називається ще задачею китайського поштаря, і її розв'язання має багато потенційних застосувань.

Розглянемо декілька задач, що розв'язуються за допомогою теорії ейлеревих графів.

Задача 1.

Які з наступних орієнтованих графів мають ейлерів цикл (Рис. 2)?

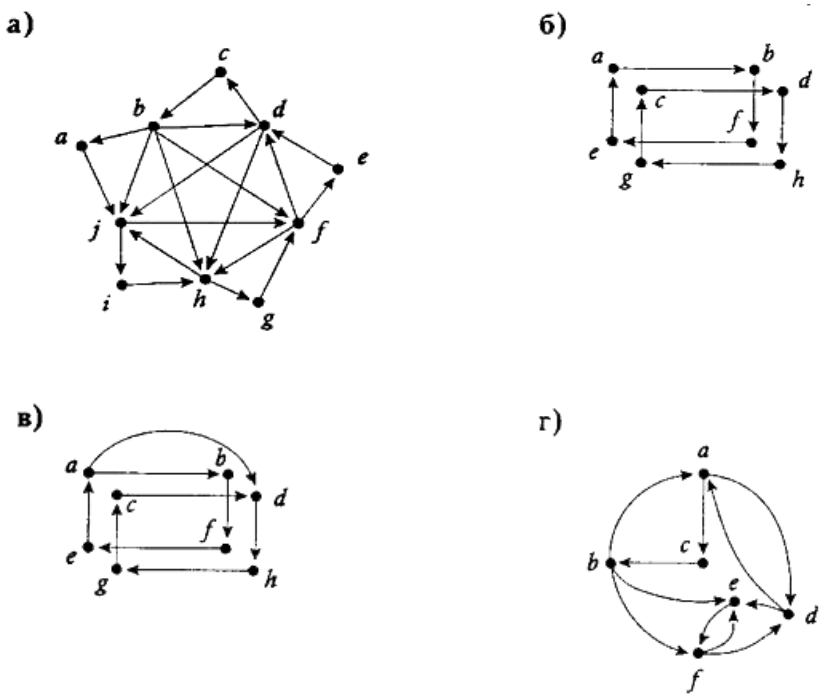


Рис. 2 (а, б, в, г)

Позначимо степінь вершини v, в яку входить ребро через $d^{\square}(v)$; з якої виходить ребро - $d^{-}(v)$.

Розв'язання:

а) Граф зв'язний, знайдемо степені вершин:

$d^{-}(a) \square 1,\ d^{\square}(a) \square 1$

$d^{-}(b) \square 5,\ d^{\square}(b) \square 1$

Граф не має ейлеревого циклу.

б) Граф не є зв'язним. Отже, він не має ейлеревого циклу.

в) Граф зв'язний, знайдемо степені вершин:

$d^{-}(a) \square 2,\ d^{\square}(a) \square 1,$

так як є один «вхід» і два «виходи», то граф не має ейлерового циклу.

г) Граф зв'язний, знайдемо степені вершин:

$d^{-}(a) \square d^{\square}(a) \square 2$

$d^{-}(b) \square 3,\ d^{\square}(b) \square 1$

тоді граф не має ейлеревого циклу.

Задача 2.

На малюнку план підземелля, в одній з кімнат якого приховані скарби лицаря. Після смерті лицаря його спадкоємці знайшли заповіт, в якому було сказано, що для відшукання скарбів досить увійти в одну з крайніх кімнат підземелля, пройти через усі двері, причому в точності по одному разу через кожну; скарби сховані за тими дверима, які будуть пройдені останніми . У якій кімнаті були сховані скарби (Рис. 3)?

Побудуємо граф, вершинами якого є кімнати підземелля, а ребрами - двері. Потім знайдемо такий шлях, щоб пройти по всіх ребрах (через усі двері) в точності по одному разу (Рис. 4).

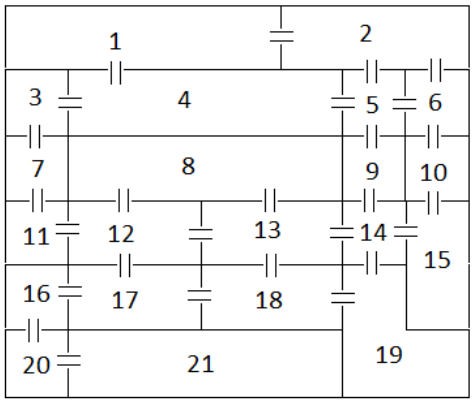


Рис. 3

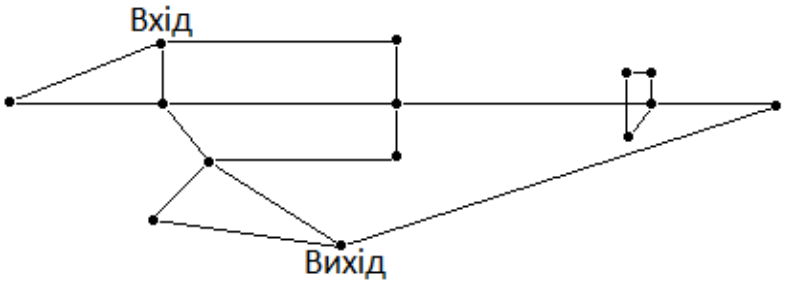


Рис. 4

Даний граф має ейлерів ланцюг, тому що лише дві вершини мають непарний степінь, це вершини 6 і 18. Значить, вхід і вихід можуть бути лише у вершинах 6 і 18.

Так як кімната 6 є крайньою, то в ній буде вхід, значить, останньою кімнатою буде 18, а, отже, скарби сховані в цій кімнаті.

Висновки. У цій роботі ми докладніше опрацювали ейлерові графи та основні відомості пов'язані з цим поняттям. Також розглянули завдання, які вирішуються за допомогою ейлеревих графів.

Література:

1. Бардачов Ю.М. Дискретна математика / Ю.М. Бардачов, Н.А. Соколова, В.Є. Ходаков. – К. : Вища школа, 2007. – 384 с.
2. Березина Л.Ю. Графы и их применение / Л.Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 144 с.
3. Берж К. Теория графов и ее применения / К. Береж. – М. : Иностранной литературы, 1962. – 320 с.
4. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – М. : Мир, 1977. – 208 с.
5. Харари Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М. : Мир, 1977. – 328 с.

Солодюк Олег Васильович
студент магістратури, спеціальність «Математика»

СПРОЩЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОБЧИСЛЕНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ НОВІТНІХ ТЕХНОЛОГІЙ

Постановка проблеми. Об’єктивними умовами самореалізації особистості в професійній діяльності на початку XXI століття є доступність необхідного освітньо-інформаційного поля, озброєння кваліфікованих робітників не стільки готовими знаннями, скільки способами здобуття, осмислення та використання цих знань у професійній діяльності. Сучасна цивілізація з її гуманізацією і демократизацією суспільних відносин, швидкою зміною техніки і технологій, інтелектуалізацією виробничих процесів передбачає необхідність широкого використання комп’ютерних технологій у процесі навчання. З розвитком відбувається спрощення навчання математики за рахунок виконання технікою різних математичних завдань.

Аналіз попередніх досліджень. У травні 2009 р. з'явився принципово новий інтернет-ресурс, який отримав назву «*Вольфрамова Альфа*». Вважали, що *Альфа* може стати в певному значенні «вбивцею» пошукової системи Google. Проте такі чутки не мали під собою достатніх підстав. Wolfram|Alpha – база знань і набір обчислювальних алгоритмів . Не є пошуковою системою.

Засновник проекту Стівен Вольфрам, пояснює, що він зможе перевести природно-мовні питання у формат, зрозумілий для комп'ютерів, що дозволить проводити обчислення і пошук через трильйони одиниць «Кураторів даних» з використанням мільйонів рядків алгоритмів для надання користувачу відповідей.

Wolfram|Alpha не видає перелік посилань, що ґрунтується на результатах запиту, а обчислює відповідь, ґрунтуючись на власній базі знань, яка містить дані з математики, фізики, астрономії, хімії, біології, медицини, історії, географії, політики, музики, кінематографії, а також інформацію про відомих людей та інтернет-сайти. Він здатний переводити дані між різними одиницями вимірювання, системами числення, підбирати загальну формулу послідовності, знаходити можливі замкнуті форми для наближених дробових чисел, обчислювати суми, границі, інтеграли, розв'язувати рівняння і системи рівнянь, проводити операції з матрицями, визначати властивості чисел і геометричних фігур. Однак, розрахунок на підставі власної бази має і свої недоліки, в тому числі — вразливість до помилок даних. Наприклад, на момент відкриття, запит president of russia 1999 видавав ім'я Аслана Масхадова (в даний час ця помилка вже виправлена).

Рушій Wolfram|Alpha заснований на обробці природної мови (в даний час – тільки англійської), великій бібліотеці алгоритмів і NKS-підході для відповідей на запити. Він написаний на мові Mathematica і становить близько 5 мільйонів рядків, в наш час виконується приблизно на 10000 процесорах.

19 жовтня 2009 було випущено додаток для iPhone (пізніше — для iPad), а 6 жовтня 2010 року — для Android. Додаток є браузером, здатним показувати тільки одну сторінку — m.Wolfram|Alpha .com з розширеною клавіатурою, корисною для вводу математичних формул.

Мета статті : оглянути можливість використання та переваги сучасного мультимедійного контенту, який спрощує математичні обрахунки і показує кроки виконання дій.

Виклад основного матеріалу. Нині ми розглядаємо сучасні програми не просто як засіб технічної підтримки навчального процесу, а як пристрій, який здатний виконувати педагогічні функції. Нами було виявлено, програму навчального засобу – Wolfram|Alpha, яка на нашу думку, слід впроваджувати в освітній процес з метою оптимізації. Дана програма, являє в собі, модельну програму – представлення навчальних завдань, які вимагають від студента відтворення послідовності міркувань або знаходження правильного результату на основі наданої системи бази даних; програма-тренажер – представлення навчальних завдань у алгоритмічному вигляді для вироблення і закріплення вмінь та навичок вирішення завдань на різних рівнях самостійної діяльності, контролю і самоконтролю. Отже, ми можемо назвати цю програму комбінованою, так як до її складу входять інші програми.

Безкоштовна програма для автоматичного рішення математичних прикладів будь-якої складності з відображенням етапів вирішення. Програма вирішує математичні приклади і рівняння з відображенням етапів рішення, виробляє наочно обчислення "в стовпчик". Вас приємно здивує результат рішення ви побачите все що маю написати учень або студент для вирішення прикладу. Відмінно підходить як для перевірки вже виконаних завдань, так і для, безпосередньо, їх виконання.

На відміну від традиційних онлайнових пошукових систем, розробка Вольфрама використовує не тільки традиційні методи сортування та каталогізації інформації, але також глибокий математичний аналіз і ряд семантичних прийомів. До того ж розрахована вона більше на пошук інформаційних відомостей, але не контента. Крім того сервіс Wolfram Alpha здатний порівнювати і аналізувати результати пошуку для користувача. При цьому пошуковий запит можна задавати на манер спілкування з людиною, а не програмою. Цей пошуковик не шукає інформацію в Інтернеті так, як це робить Google і не видає посилання на сайти. Він систематизує і аналізує дані, після чого, якщо поставити йому запитання у коректній формі, видає вже готову відповідь.

Користуватись програмою дуже легко, наведемо кілька прикладів, які найбільш часто зустрічаються.

1. Графіки

Щоб побудувати графік функції, необхідно використовувати оператор plot, наприклад plot $x\hat{}3-6x\hat{}2\square 4x\square 12$ або plot $\sin x\square\cos(sqrt(3)x)$.

Графік функції з заданою областю визначення plot $e\hat{}x$ from $x\square 0$ to 10

Графік функції двох змінних із заданою областю визначення plot x^2 y^3, $x \in -1..1$, $y \in 0..3$.

Графік функції у полярних координатах polar plot r = theta, theta = 0 to 8 pi

Графік параметричної функції parametric plot (cos ^ 3 t, sin ^ 3 t)

2. Рівняння

Звичайні рівняння: x4 +2 x3 +3 = 0 записується так x ^ 4 +2 x ^ 3 +3 = 0

Нерівності | 2x +1 | -8 <2 записується так | 2x +1 | -8 <2

Система рівнянь записується через кому, наприклад x3 + 2x2 + 3 = 0, 3x = 0

Щоб розв'язати рівняння з параметром, необхідно використовувати оператор solve.

Наприклад: 2x3 + ax +6 = 0 вирішуємо щодо x, тоді запис буде такий solve 2x ^ 3 + ax +6 = 0 for x

Тригонометричні рівняння: sin x + cos x = 1

Система лінійних рівнянь записується через кому: x + y = 10, xy = 4

Розкладання елементарної дробу partial fractions (x ^ 2-4) / (x ^ 4-x)

Щоб розкласти вираз на множники, використовуємо оператор factor, наприклад factor x ^ 3-2x +1 призведе вираз до (x - 1) (x2 + x +1).

Оператор expand розкриє дужки і розкладе вираз, наприклад expand (x - 1) (x2 + x +1) призведе вираз до x3-2x +1.

Оператор partial fractions розкладе відношення многочленів в суму найпростіших дробів.

minimize мінімізує функцію, а maximize максимізує

Число "Пі" записується, як pi

Тригонометричні функції: sin, cos, tan, ctan, arcsin, arccos, arctan, arcctan

Команда series розкладає функцію в ряд, наприклад: taylor series sinx at x = 0 дасть нам розкладання функції sin (x) в ряд Тейлора в точці x = 0

3. Похідні та інтеграли

Щоб знайти межу, необхідно на початку функції підставити lim, а після записати саму функцію, в кінці вказати до чого прагне межа: as-> далі число (нескінченність записується infinity). Приклад: lim (x +2) / (x ^ 2) as x-> infinity derivative або d / dx - похідна. Щоб знайти другу похідну потрібно написати перед функцією second derivative або d2/dx2 і так далі.

Невизначений інтеграл шукається за допомогою оператора integrate, який необхідно записати перед функцією. Для визначеного інтеграла вказуються межі інтегрування: integrate 1 / x ^ 2 from x = 1 to x = 2

4. Операції з числами

Піднесення до степеня. Так 78 записується як 7 ^ 8

Оператор factor розкладає число на множники

! виводить факторіал, наприклад 123!

Оператор gcd виводить найбільший спільний дільник, наприклад gcd 164, 88 виводить найбільший загальний дільник чисел 164 і 88

Також, розглянемо наприклад, про розв’язання систем рівнянь за допомогою Wolfram|Alpha почнемо з систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

В загальноосвітній школі навчають учнів такі системи розв’язувати наступними методами: метод підстановки, метод алгебраїчної суми. Пізніше (на першому курсі вузу) ми вивчаємо метод Крамера, оберненої матриці тощо.

Відповідь про вигляд розв’язків системи дає і Wolfram|Alpha , якщо скористатися командою solve[{перше рівняння, друге рівняння}, {перша невідома, друга невідома}] (рис. 1).

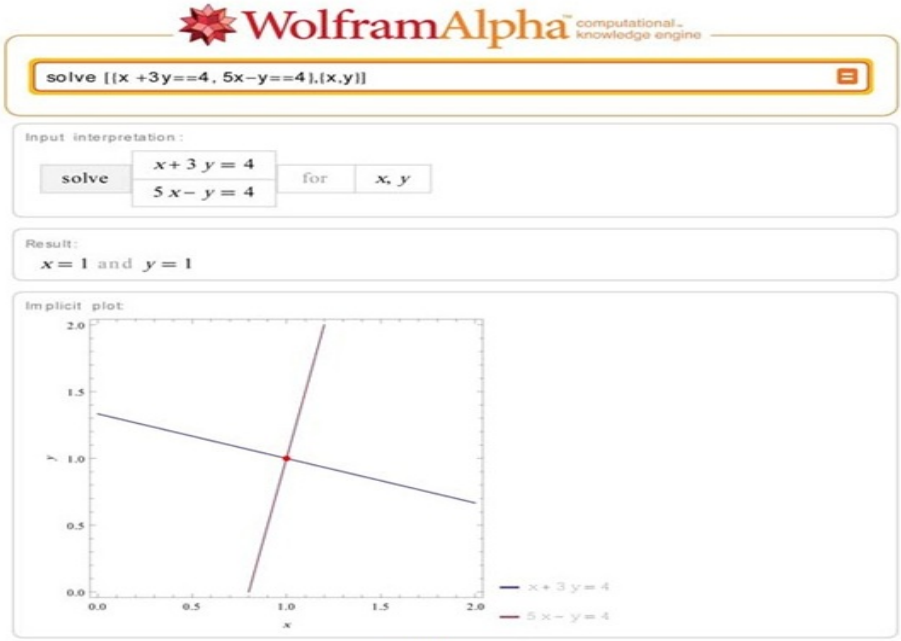


Рис. 1

У даному випадку розв’язок системи подано ще й графічно. Переваги Wolfram|Alpha очевидні, коли кількість рівнянь і невідомих більше ніж 2.

Зокрема, у випадку системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими маємо (рис. 2):

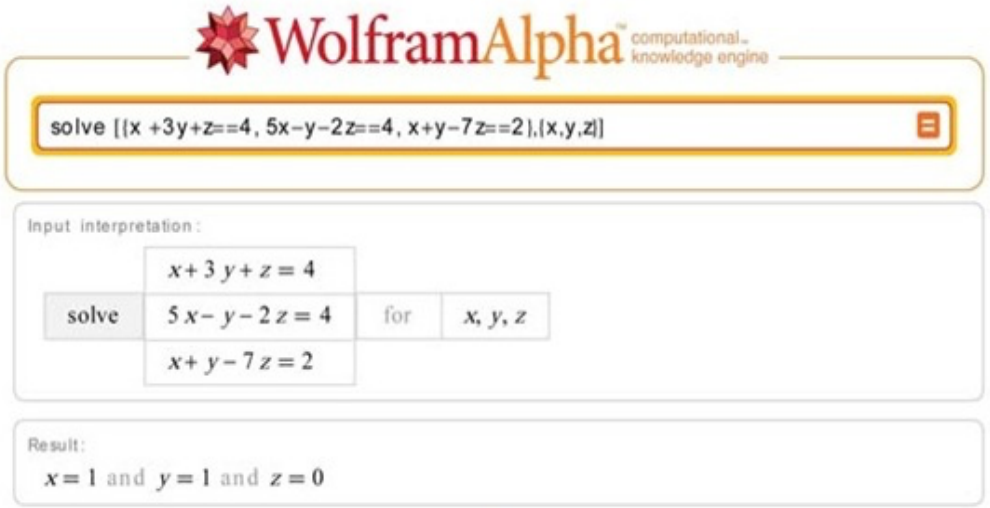


Рис. 2

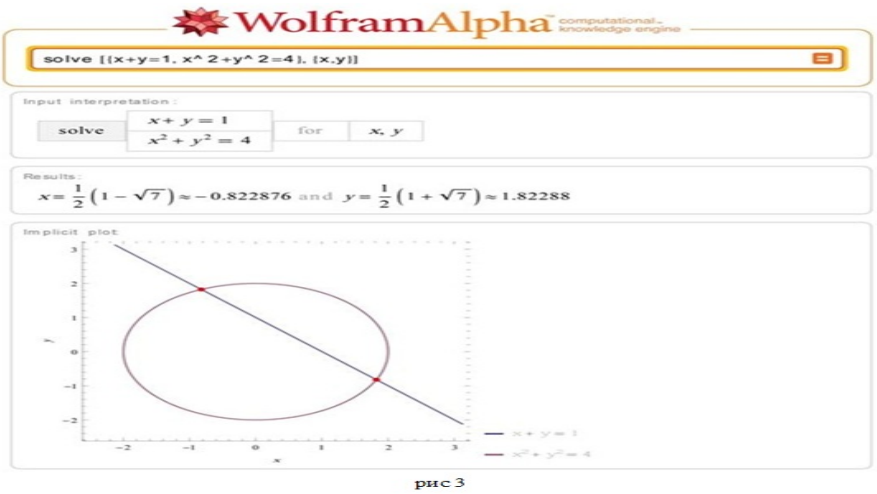


рис 3

Рис. 3

І хоча при збереженні картинки рішення даної системи один розв'язок не зберігся, то графічне зображення показує всі розв'язки. А всі розв'язки Ви знайдете, якщо самостійно online виконаєте зазначені обчислення в Wolfram|Alpha .

Висновки. Зовсім недавно в мережі з'явився новий он-лайн сервіс під назвою Wolfram|Alpha. Головна його перевага - це здатність вирішувати безліч математичних задач. У нього можна вводити рівняння, нерівності, функції і різні математичні вирази, а він їх буде вирішувати, спрощувати, розкладати на множники, будувати графіки, знаходити межі, похідні та інтеграли, загалом, Wolfram|Alpha вже багато чого вміє. Головний мінус даного сервісу - він поки на англійській мові. Також сервіс показує саме рішення задачі, коли справа з'являється "show steps"(ця функція може не з'явитися, так як вона допрацьовується розробниками контенту). Ви можете побачити всі подробиці рішення. Нами були помічені рішення для знаходження похідних, невизначених інтегралів, кратного двох поліномів, а також при спрощенні виразів.

Література:

1. Добришева І.Н. Комп'ютери в навчанні / І.Н. Добришева // Інформатика та навчання. – 1998. – С. 108.
2. Гайшут О.Г. Розв'язування алгебраїчних задач / О.Г. Гайшут, Г.М. Литвененко. – К. : Рад. шк., 2007. – 224 с.
3. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики / М.І. Жалдак. – К. : Техніка, 1997. – 303 с.
4. Капустина К.П. Комп'ютерная система Mathematica для пользователей / К.П. Капустина. – М. : Солон., 2009. – 317 с.
5. Гущин Ю. Ф. Досягнення розробки комп'ютерних навчальних програм / Ю.Ф. Гущин. – М. : НДІ ШОТСО АПН., 2004. – 96 с.

Фармагей Оксана Олексіївна
студентка 4 курсу, напрям підготовки «Математика»

ТЕОРІЯ ГРАФІВ. ЗАСТОСУВАННЯ ДЕРЕВ

Постановка проблеми. За допомогою графів можна розв’язувати багато важливих проблем. Їх застосовують у математиці для розв’язання нестандартних задач, у хімії та біології для розробки інформаційно-пошукових дерев, також в фізиці, щоб конструювати друкарні схеми, генеологічні дерева, які вказують на родинні стосунки між людьми.

Дерева – це особливий і дуже важливий клас графів. Роль дерев визначається як широким їхнім застосуванням у різних галузях науки і практики, так і тим особливим положенням, яке дерева займають у самій теорії графів. Останнє випливає з граничної простоти будови дерев. Часто при розв’язуванні різних задач теорії графів їхнє дослідження починають з дерев.

Аналіз попередніх досліджень. Перша робота з теорії графів, що належить відомому швейцарському математику Л. Ейлеру, з'явилася в 1736 р. Спочатку теорія графів здавалася досить незначним розділом математики, так як вона мала справу в основному з математичними розвагами й головоломками. Однак подальший розвиток математики і особливо її додатків дало сильний поштовх розвитку теорії графів. Вже в XIX столітті графи використовувалися при побудові схем. Вагомий внесок в розвиток теорії графів, зокрема дерев та їх застосування належить таким математикам як Берж К., Басакер Р., Сааті Т., Бєлов В. В., Воробйов Є. М., Шаталов В. Є.

Мета статті. У цій роботі ми докладніше розглянемо дерева та їх застосування, а також основні відомості пов'язані з цим поняттям та завдання, які вирішуються за допомогою дерев.

Виклад основного матеріалу. Звичайний граф G називається деревом, якщо він є зв’язним і не має циклів, а граф G, всі компоненти зв’язності якого є дерева – лісом.

Вершина v графа G називається кінцевою, якщо її локальний степінь дорівнює одиниці.

Ребро, яке інцидентне кінцевій вершині, називають кінцевим.

Очевидно, якщо дерево має більше однієї вершини, то воно має хоча б одне кінцеве ребро, якщо дерево має більше двох вершин, то серед них є некінцеві.

Графи, зображені на рис.1, є деревами.

Еквівалентні твердження:

1) граф G - дерево;

2) граф G є зв’язним і не має простих циклів;

3) граф G є зв’язним, і $n(G) = m(G) + 1$;

4) для будь-яких двох різних вершин графа G існує єдиний ланцюг;

5) граф G не містить циклів, але, додаючи до нього будь-яке нове ребро, дістаємо рівно один цикл.

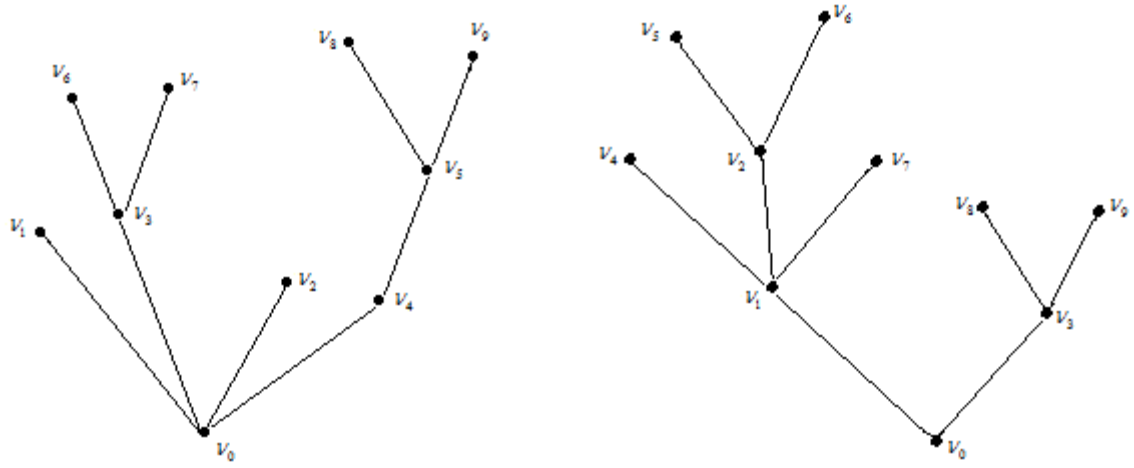


Рис.1 Приклади дерев

В дереві G вибирають вершину v_0, яку називають коренем дерева G. На рис.1 два ізоморфні графа - дерева, які відрізняються за своїм коренем. Кістяковим деревом зв' язного графа G називається будь-яка його частина, що містить усі вершини графа G і є деревом.

Нехай G – зв'язний граф. Тоді кістякове дерево графа G має містити $n(G)-1$ ребер, і є результатом вилучення з G рівно

$m(G)-(n(G)-1)=m(G)-n(G)+1$ ребер.

Покажемо існування кістякового дерева для довільного зв'язного псевдографа $G=(V,X)$, описавши алгоритм його вибору.

Алгоритм знаходження кістякового дерева:

Крок 1. Вважаємо $i=1$. Вибираємо в G довільну вершину v_1, що утворює частину G_1 псевдографа G, причому G_1 є деревом.

Крок 2. Якщо $i=n$, де $n=|G|$, то задачу розв'язано, і G_i-шукане кістякове дерево псевдографа G. В іншому випадку переходимо до кроку 3.

Крок 3. Нехай уже побудовано дерево G_i, що є частиною псевдографа G і містить деякі вершини $v_1,...,v_i$, де $1\le i\le n-1$. Будуємо граф G_{i+1}, додаючи до графа G_i нову вершину $v_{i+1}\in v$, суміжну в G з деякою вершиною v_j графа G_i, та нове ребро, інцидентне вершинам v_i і v_{i+1}. Очевидно, граф G_{i+1} також є деревом. Прирівнюємо $i:=i+1$ і переходимо до кроку 2.

Задача.

Є чотири кубики, грані яких розфарбовані в червоний, синій, зелений та жовтий кольори, кожен з кубів має хоча б одну грань даних кольорів (рис.2). Потрібно поставити ці кубики один на одного так, щоб кожна з чотирьох бічних граней розміром 4×1, отриманих з прямокутної призми, була пофарбована в кожний з чотирьох кольорів.

Щоб вирішити це завдання, зобразимо кожний кубик графом з чотирма вершинами, по одній на кожний колір. В усіх таких графах дві вершини суміжні

тоді і тільки тоді, коли в досліджуваному кубику дві протилежні грані розфарбовані у відповідні кольори.

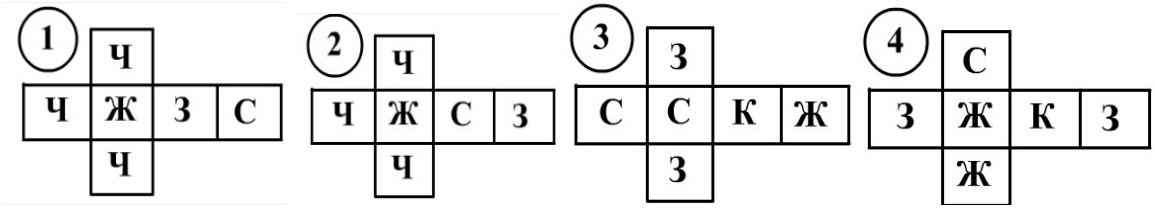


Рис.2

Графи, що відповідають кубикам зображеним на рис. 2, показані на рис. 3.

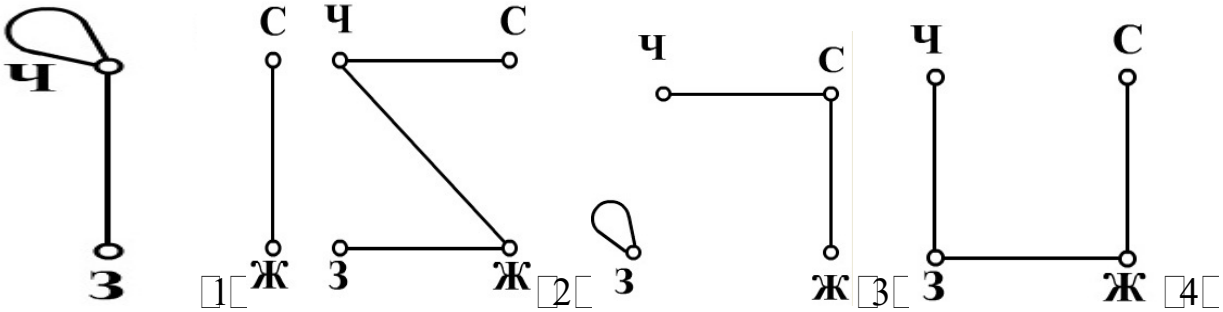


Рис.3

Зручно розташувати ці всі графи один на одний і утворити з них новий граф G (рис.4). Так як при будь-якому розв'язку задачі на кожну з двох пар протилежних бічних граней призми знайдеться дві грані кубика кожного кольору, то не важко помітити, що шуканий розв'язок отриманий наступним чином: знайдемо два реберно-неперетинаючих підграфи H_1 і H_2 графа G, які мають постійно степінь 2 і містять по одному ребру кожного номера (рис.5). Тоді H_1 і H_2 містять кольори, розташовані на передній - задній і лівій – правій бічних гранях призми. Таким чином, розв'язок може буде отримано з допомогою цих під графів (рис.6).

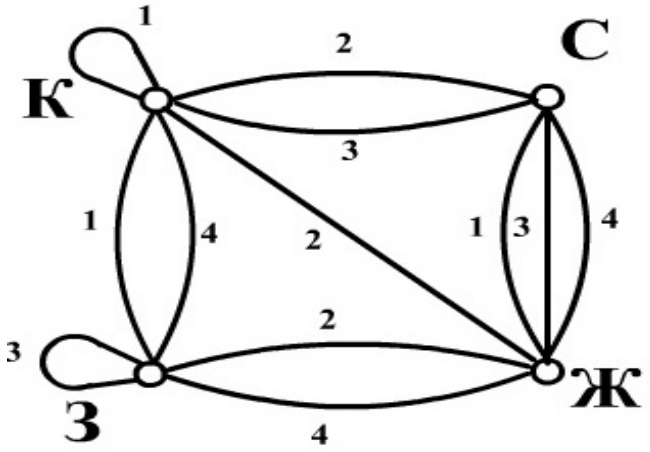


Рис. 4

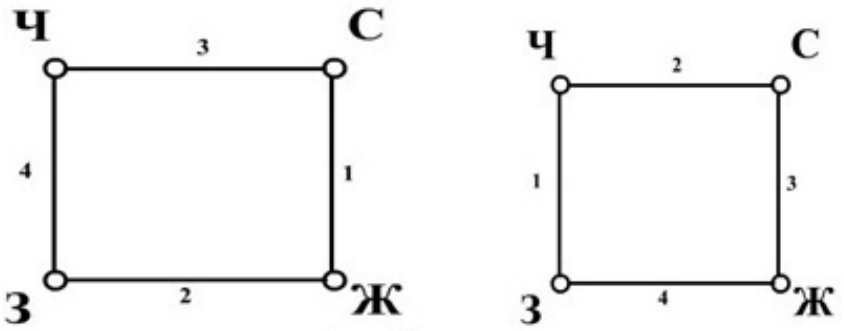


Рис. 5

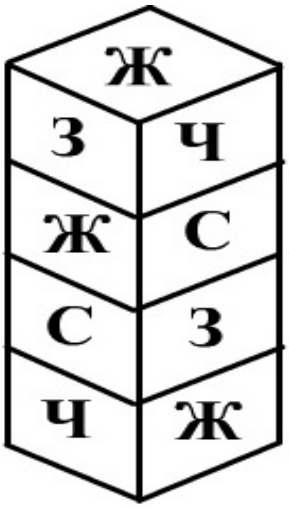


Рис. 6

Висновки. У цій роботі ми докладніше опрацювали дерева та їх застосування та основні відомості пов'язані з цим поняттям. Також розглянули завдання, які вирішуються за допомогою дерев.

Література:

1. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – М. : Мир, 1997 – 2007 с.
2. Бардачов Ю.М. Дискретна математика / Ю.М. Бардачов, Н.А. Соколова, В.Є. Ходаков. – К. : Вища шк., 2007. – 338 с.
3. Березина Л.Ю. Графы и их применение / Л.Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.
4. Басакер Р. Конечние графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати. – М. : Наука,1973. – 368 с.
5. Харри Ф. Теорія графів / Ф. Харри. – М. : Світ, 1973. – 300 с.