Вінницький державний педагогічний університет

імені Михайла Коцюбинського

Інститут математики, фізики і технологічної освіти

Кафедра алгебри і методики навчання математики

Шостий випуск збірника

публікацій «Методичний пошук»

за тематичним напрямом

Організація позакласної роботи з підготовки учнів до математичних олімпіад

присвячується

55-річчю

кафедри алгебри і методики навчання математики

Вінниця – 2016

УДК 514(06)

ББК 74.262.21я5+22.15я5

М54

Методичний пошук. Організація позакласної роботи з підготовки учнів до математичних олімпіад // Науково-методичний збірник праць студентів. Випуск 6. – Вінниця: ТВОРИ, 2016 – 351с.

Затверджено до друку вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол № від)

Основу шостого збірника складають праці студентів різних курсів спеціальності «Математика*» Інституту математики, фізики і технологічної освіти Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського присвячені актуальній проблемі фахової підготовки майбутніх учителів математики: організації позакласної роботи з підготовки учнів до математичних олімпіад.

Для студентів та вчителів спеціальності «Математика»*

ЗМІСТ

Передмова

Позакласна робота з математики (гуртки, факультативи, індивідуальна робота, конкурси, турніри, олімпіади тощо) надає учням додаткові можливості для розвитку їх здібностей, виховує інтерес до навчання математики. Головне призначення позакласної роботи з математики в школі – не тільки розширення і поглиблення теоретичних знань, одержаних на уроках математики, але і розвиток умінь використовувати математичні знання до розв'язування різних життєвих задач, виховання у школярів культури розумової діяльності. Однією із ефективних форм розвитку в учнів навичок математичного мислення є заохочення їх до участі в математичних олімпіадах.

Збірник статей призначається для тих, хто бажає поглибити знання з математики та методики навчання математики. Мета посібника – дати майбутнім вчителям методичну розробку, в якій систематизовано вдалі та різноманітні приклади організації позакласної роботи з підготовки учнів до математичних олімпіад.

Збірник статей підготовлено у відповідності до вимог навчальної програми з методики навчання математики та завдань фахової підготовки майбутнього вчителя математики.

Збірник статей структурований за модульними принципом. Він складається з чотирьох частин, кожна з яких містить матеріал, що відповідає певній тематиці:

1. Загальні питання методики організації та проведення математичних олімпіад школярів.
2. Формування та розвиток знань та умінь учнів з алгебри у процесі підготовки їх до математичних олімпіад.
3. Формування та розвиток знань та умінь учнів з геометрії у процесі підготовки їх до математичних олімпіад.
4. Спеціальна підготовка учнів до математичних олімпіад школярів.

Кожна стаття вибудована за єдиною структурою: постановка проблеми, мета статті, виклад основного матеріалу, висновки, література.

У створенні збірника «Методичний пошук. Випуск 6» взяли участь студенти магістратури спеціальності «Математика*». Крім редакційної колегії та технічної підготовки збірника до випуску, активно працювали над його створенням: А. П. Юзва, Р. М. Медяний, О. О. Наконечний, Я. М. Яшина, С. С. Качанюк.

Автори вдячні за поради і рекомендації, критичні зауваження і доброзичливі побажання викладачам кафедри алгебри і методики навчання математики.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТОДИКИ ОРГАНІЗАЦІЇ ТА ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД ШКОЛЯРІВ

Бак Антоніна Миколаївна
вчитель математики Гонорівської ЗОШ І-ІІІ ступенів, Ямпільський р-н

МІСЦЕ І РОЛЬ ШКІЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД В СИСТЕМІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ

Вступ. Шкільні олімпіади з різних навчальних дисциплін є одним із видів позакласної роботи в школі. Серед основних цілей проведення олімпіад школярів з математики можна виділити розвиток математичних здібностей учнів, формування інтересу до розв’язування математичних задач, усвідомлення можливостей та потреби оволодіння математичними знаннями на поглибленому рівні. Шкільні математичні олімпіади містять задачі підвищеної складності, які вирізняються нестандартністю формулювання, та потребують уявлень про різні методи розв’язування. До олімпіадних завдань з математики вчителі включають як задачі, для розв’язування яких потрібні незвичні ідеї та спеціальні методи, так і завдання відносно не складні, однак які можна розв’язувати оригінальними способами.

Мета даної статті: виокремити місце і роль шкільних математичних олімпіад в системі формування математичних компетентностей учнів.

Виклад основного матеріалу. Учитель математики завжди замислюється над тим, як вчасно визначити обдарованість кожної дитини, як розвивати та примножувати її таланти. Один із шляхів розв'язання цього завдання є підготовка учнів до участі в різноманітних математичних змаганнях, у тому числі й предметних олімпіадах. На уроках потрібно виділяти час для розглядання нестандартних розв’язань задач, розв’язування задач підвищеної складності, різних способів розв’язування однієї задачі. Однак, усім відома проблема: недостатність часу, виділеного навчальним планом на уроки математики, для виконання завдань навчальних програм з математики. Отже, основний акцент на розвивальній функції навчання математики може бути зроблений у процесі позакласної роботи. Одним із видів такої роботи є факультативні заняття. Математичні змагання, ігри, розв'язування спеціальних задач – все це зацікавлює учнів і приваблює до того, щоб відвідувати додаткові заняття з математики.

Індивідуальна робота (консультації) із здібними до навчання математики учнем підготовки до участі в математичних олімпіадах проводиться тоді коли учень має вище середнього рівень знань та умінь з математики. Часто таку форму роботи використовують перед самою олімпіадою [5]. Для того, щоб в учнів не було стресу в процесі участі в математичній олімпіаді і вони не розгубились, потрібно періодично проводити шкільні математичні олімпіади за вимогами районної та обласної олімпіад школярів з математики. Учні звикають до тих умов і вже потім відчувають себе комфортно і впевнено на математичних олімпіадах. В результаті чого учні показують свої дійсні знання з предмету.

Шкільна математична олімпіада це І етап Всеукраїнської олімпіади школярів з математики. Для участі в шкільній олімпіаді з математики учні повинні мати відповідні знання, бути психологічно та фізично підготовленими, повинні вміти правильно розподіляти час на виконання завдань, долати можливі труднощі. Для досягнення певних результатів у математичних олімпіадах учні повинні мати розвинене мислення. Складання завдань вчителями для шкільних математичних олімпіад, повинно відповідати певним вимогам. Зважаючи на психологічні аспекти треба так складати завдання, щоб принаймні одну із запропонованих задач міг розв'язати кожен учасник олімпіад [2]. Розглянемо конкретні поради учасникам шкільних математичних олімпіад: уважно читати умови завдань і визначити порядок, в якому учень буде їх розв'язувати; якщо умову задачі можна зрозуміти різними способами, то не потрібно самому вирішувати зручніший для себе, а звернутися за консультацією до членів журі; не потрібно зациклюватись на одній задачі.

Якщо немає ідей розв’язання, то краще цю задачу залишити на потім і звернути увагу на інші завдання; перед тим, як здати роботу потрібно учневі перечитати її та переконатись, що все зрозуміле іншим.

Перевірку завдань шкільної олімпіади здійснює журі, до складу якого входять вчителі навчального закладу. Журі працює із зашифрованими роботами. Кожен член журі засвідчує оцінку підписом у роботі. Після розшифровки робіт кожен член журі підписує зведений протокол і має змогу перевірити за шифрами, чи правильно записані всі бали. Роботи перевіряються за критеріями, вказаними у завданнях, а за їх відсутності – журі розробляє свої критерії. Результати перевірки робіт, питання щодо розв’язування завдань та критеріїв їх оцінювання можна також аналізувати на консультаціях, які проводяться, по можливості, для учнів і керівників команд по закінченню перевірки робіт. Журі повинно перевіряти тільки ті завдання, які записані у чистовику учасника олімпіади. Чернетка членами журі не розглядається. Як виключення, журі може звернутися до чернетки, де розглянуто окремі випадки або проведено доведення якогось твердження, але в чистовику явно вказано посилання на чернетку. В останньому випадку, за неналежне оформлення розв’язання, журі може прийняти окреме рішення щодо зниження загального балу за виконання відповідного завдання [4].

Кожного року в нашій школі проводяться шкільні олімпіади з математики. Кожен учитель математики повинен підібрати завдання для шкільного туру. Пропоную вашій увазі добірку задач, для шкільної олімпіади в основній школі, яка допоможе вчителю виявити обдаровану дитину, яку після I туру можна запрошувати до II туру олімпіад з математики.

Завдання для 5 класу:

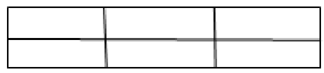
1. У лютому деякого року 2419200 секунд. Чи високосним був цей рік?

2. Розмістити у виразі $7 \cdot 9 + 12 : 3 - 2$ дужки так, щоб його значення дорівнювало 23.

3. У Сергія однокласників на 7 більше, ніж однокласниць. У його класі хлопців вдвічі більше, ніж дівчат. Скільки однокласниць у Сергійкової однокласниці Катрусі?

4. Назвемо число «дзеркальним», якщо справа і зліва воно читається так само, як і зліва направо, Наприклад: число 7887 – є «дзеркальним». Знайдіть усі дзеркальні п'ятицифрові натуральні числа, в запису яких використовуються тільки цифри 1 та 0.

5. Скільки прямокутників зображено на малюнку?



Завдання для 6 класу:

1. Дівчинка запитала дідуся, скільки йому років. Той відповів: «Якщо зменшити мої роки в 6 раз та відняти ще 6 років, то отримаємо 6. То скільки мені років?»

2. У даному завданні написати лише відповідь:

а) У скільки разів сходи на 6 поверх будинку довший за сходи на 2 поверх цього самого будинку?

б) У шаховому турнірі з трьома учасниками було зіграно всього 6 партій. Скільки партій зіграв кожний?

3. Чи можна подати число 91 у вигляді суми кількох натуральних чисел, добуток яких також дорівнює 91?

4. Наталя та Інна купили однакові коробки чаю в пакетиках. Відомо, що одного пакетика вистачає на дві або три чашки чаю. Наталі вистачило пакетиків із коробки лише на 41 чашку чаю, а Інні – лише на 58 чашок чаю. Скільки пакетиків чаю було в коробці?

5. На острові, населення якого становлять тільки лицарі, що говорять правду, і брехуни, які завжди брешуть, знаходиться науково-дослідний інститут (НДІ). Кожний із його співробітників зробив одного разу дві заяви: а) в інституті немає і десятка людей, що працюють більше від мене; б) принаймні сто осіб в інституті отримують зарплату більшу, ніж моя. Відомо, що навантаження у всіх працівників різне, як і зарплата. Скільки людей працює в НДІ?

Завдання для 7 класу:

1. Середній вік одинадцяти гравців футбольної команди 22 роки. Під час гри один із гравців травмувався та пішов з поля. Середній вік гравців, які залишилися на полі став дорівнювати 21. Скільки років гравцю, який отримав травму?

2. Учні сьомого класу під час контрольної роботи передавали один одному записки. Після контрольної сім учнів сказали: «Я передав на одну записку більше, ніж отримав». Інші сказали: «Я передав на дві записки менше, ніж отримав». Доведіть, що хтось з учнів помилився.

3. Знайдіть найменше складене число, яке не ділиться на жодне із натуральних чисел від 2 до 10.

4.В середині кута AOB, рівного $120°$, проведені промені *OC* і *OD* так, що кожен з них є бісектрисою якогось із кутів, що утворилися при цьому. Знайдіть величину кута AOC. Укажіть всі можливі варіанти.

5. Є шість монет, серед яких дві – фальшиві, вони легші від справжніх. За три зважування на шалькових терезах без гир знайдіть обидві фальшиві монети.

Завдання для 8 класу:

1. Якою цифрою закінчується сума $54^{35} + 28^{21}$?

2. Є лист паперу в клітинку і олівці 6 кольорів. Зафарбуйте найменше число клітин так, щоб для будь-яких двох кольорів знайшлося дві клітини цих кольорів, що граничать по стороні. Доведіть, що менше число клітин зафарбувати не можна.

3. На острові проживають 2010 мешканців, кожен з яких або лицар(завжди говорить правду), або брехун (завжди бреше). Одного разу всі жителі острова розбилися на пари, і кожен про свого напарника сказав одну із фраз: «він лицар» або «він брехун». Чи могло виявитися так, що тих і інших фраз було виголошено порівну?

4. Є 101 монета. Серед них 50 фальшивих. Кожна фальшива монета відрізняється від справжньої на 1 грам. За допомогою одного зважування на

терезах зі стрілкою (показує різницю мас на чашах) визначити, чи є монета фальшивою.

5. Коло, з центром на гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC, проходить через вершину A і дотикається катета BC в точці M. Доведіть, що AM — бісектриса кута BAC.

Завдання для 9 класу:

1. Є 25 коробок цукерок трьох сортів. Доведіть, що серед них знайдуться 9 коробок цукерок того самого сорту.

2. Розв’яжіть рівняння: $||x-1|-1|=2$.

3. У країні 15 міст, деякі з них з'єднані авіалініями, що належать трьом

авіакомпаніям. Відомо, якщо навіть будь-яка з авіакомпаній припинить польоти, то можна буде дістатися з будь-якого міста в будь-яке інше (можливо, з пересадками), користуючись рейсами інших двох компаній. Яка найменша кількість авіаліній може бути в країні?

4. Ціна квитка на стадіон була 200 грн. Після зниження цін на квитки, кількість глядачів на стадіоні збільшилася на 50%, а виручка з проданих квитків збільшилася на 14%. Скільки став коштувати квиток на стадіон після зниження ціни?

5. У квадраті $ABCD$ на сторонах AD та DC вибрані точки M та N відповідно таким чином, що $\angle BMA = \angle NMD = 60°$. Знайдіть величину кута MBN.

Висновки: Проаналізувавши навчально–методичну літературу з проблеми підготовки учнів до математичних олімпіад та власний досвід викладання математики в школі можна стверджувати, що місце і роль шкільних олімпіад з математики є вагомими. Майстерність вчителя математики в організації та проведенні шкільних олімпіад з математики є чинником збудження та розвитку інтересу учнів до пошуку та розв’язування цікавих математичних задач.

Література

1. І шкільний етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики [Електронний ресурс]. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: https://docs.google.com/document/d/1EYnTU6VtsTn7Kha50z_7ysFBWzXfkbhwqRI4mWPtmJA/edit.

2. Гурбієнко К. М. Збірник завдань для підготовки та проведення І етапу Всеукраїнських олімпіад з математики / К. М. Гурбієнко. – Великоолександрівка. – 2014.

3. Методисти науково-методичного центру природничо-математичних дисциплін ІППОЧО. Методичні рекомендації щодо підготовки та проведення І-ІІ етапів Всеукраїнських учнівських олімпіад з природничо-математичних дисциплін у 2014/2015 н.р. / методисти науково-методичного центру природничо-математичних дисциплін ІППОЧО. – 2014.

4. Методичний кабінет Ямпільського відділу освіти. Матеріали ІІ етапу всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / Методичний кабінет Ямпільського відділу освіти. – 2015.

5. Мироненко І. Ю. Підготовка до олімпіади з математики [Електронний ресурс] / І. Ю. Мироненко – Режим доступу до ресурсу: https://www.google.com.ua/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=&url=http &sig2=igUzJ6_w4cy7l23yiFhtDw&bvm=bv.116954456,d.bGQ.

6. Рафальська О. Д. Шкільна математична олімпіада [Електронний ресурс] / О. Д. Рафальська. – 2011. – Режим доступу до ресурсу: http://oksanarafalska.ucoz.ua/.

Анотація. *Наведено завдання для шкільної олімпіади з математики для учнів 5, 6, 7, 8, 9 класів. Обґрунтовано необхідність та специфіку проведення математичних олімпіад у школі.*

Ключові слова: *шкільні математичні олімпіади, математична компетентність, індивідуальна робота.*

Войтовик Юлія Анатоліївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика*»

ЦІЛІ ОРГАНІЗАЦІЇ ЗМАГАНЬ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ВСІХ ШКОЛЯРІВ

Вступ. Однією з болючих проблем сучасної математичної освіти є недостатнє використання можливостей математики як навчального предмету для розвитку творчого мислення учнів. Суспільство потребує творчого підходу фахівця до вирішення проблем, тому загальноосвітня школа не лише має навчати математиці всіх школярів незалежно від їх відношення до цього предмету, але й в ході навчально-пізнавального процесу виявляти та розвивати їхні здібності. Сучасні учні навчаються за різними програмами з математики, різними підручниками. Але єдиною має бути мета – цілеспрямований розвиток особистості учня незалежно від напряму майбутньої професійної підготовки. Ефективний розвиток особистості є неможливим без прагнення до саморозвитку, що базується на інтересі самого школяра до вивчення математики.

Мета даної статті запропонувати один із шляхів залучення всіх учнів до творчої математичної діяльності через організацію змагань з математики для всіх школярів.

Виклад основного матеріалу. Не викликає сумнівів, що математика як навчальний предмет відіграє особливу роль у формуванні і розвитку творчого мислення учнів. Звичайно, сама специфіка змісту матеріалу, математичної діяльності є такою, що процес навчання математики об'єктивно не може не бути фактором розвитку творчої особистості учня, але будь-яка діяльність стає дійсно ефективною і плідною лише за умови її цілеспрямованості і достатньо чіткої спланованості. Ще однією, не менш важливою умовою високої результативності цього процесу є зацікавленість самого учня.

Позакласна робота з математики має за мету зацікавити учнів і поступово сформувати стійкий інтерес до навчання математики. Якщо звернути увагу на практику проведення шкільних олімпіад з математики, то неважко помітити, що при їх проведенні у традиційному вигляді учню класу нематематичного профілю важко знайти застосування своїм можливостям. Він, навіть за умови достатньо високого рівня розвитку творчого мислення, об’єктивно не може конкурувати з учнями класів з поглибленим вивченням математики через недостатній рівень “обізнаності” з основними методами розв’язування олімпіадних задач, з їх специфікою. І це, перш за все, через те, що виконання частини завдань перших етапів математичних олімпіад (меншої чи більшої) вимагає скоріше не творчого підходу, а знайомства з питаннями, що відповідають програмі з математики для класів математичного профілю.

Аналізуючи, наприклад, процес розв’язування завдань, в яких вимагається розкласти на множники многочлен, учнями класів різного профілю, можна помітити таку відмінність: частіше учень класу математичного профілю користується теоремою Безу та її наслідками, тобто знаннями і вміннями, що відповідають програмі з математики для цього профілю. Таким чином він виконує скоріше роботу за алгоритмом, ніж творчу роботу. Учень з класу нематематичного профілю, незнайомий з цим матеріалом, виходить на рівень евристичної діяльності. Він виявляє, як групувати доданки або які “доданки-невидимки” необхідно використовувати, тобто саме його діяльність можна назвати творчою, тому що в даному випадку важливу роль відіграє інтуїція, здатність до нестандартного підходу. Але його дії потребують більшої витрати часу, ніж дії того учня, що використовує вже відому теорему. Таким чином, здібний, але “менше обізнаний” учень має й менше часу на роботу з іншими завданнями [5]. Поодинокі випадки перемоги в математичних олімпіадах учнів класів нематематичного профілю не знімають цієї проблеми.

По-друге, іноді до оцінювання виконання завдань застосовується “чорно-білий” варіант: повністю розв’язане завдання оцінюється максимальною кількістю балів; неповністю розв’язане, так само, як і зовсім не розв’язане, – у нуль балів. Таким чином не тільки порушується принцип диференційованого підходу, але й зменшується ймовірність виявити здібних учнів серед тих, хто ще не входить у групу “лідерів”. Незалежно від віку, учні болюче сприймають цей факт.

Поступово навіть у тих, хто має потенційно високий рівень розвитку математичних здібностей, творчого мислення згасає бажання брати участь в таких олімпіадах. Об’єктивна неспроможність потрапити у “коло переможців та призерів” в таких умовах нерідко трактується учнем як його особиста неспроможність, викликає незадоволення собою. Наслідком цього може стати згасання інтересу не тільки до участі в олімпіадах з математики, але й – апатичне (а іноді й – негативне) ставлення до вивчення предмету взагалі.

На наш погляд, проведення шкільних олімпіад з математики має розв’язувати такі завдання:

- виявлення учнів, яких водночас можна назвати і здібними, і обізнаними, з метою формування команди для участі в міських та районних олімпіадах школярів з математики;

- виявлення учнів, які є здібним, але ще “недостатньо обізнаними”, з метою подальшого розвитку їх математичних здібностей, творчого мислення; - пробудження зацікавленості всіх учнів до навчання математики, формування стійкого інтересу; використання можливостей математики для розвитку творчої особистості, творчого мислення всіх учнів.

Але всі вище перелічені різнопланові завдання об’єктивно не може розв’язувати одна й та ж сама шкільна олімпіада з математики. Тому, необхідним є проведення не тільки традиційних олімпіад для здібних учнів, але й змагань з математики для всіх школярів”. Звичайно, що ці змагання мають відрізнятися і особливостями кола залучених школярів, і організацією, і змістом завдань, і методикою проведення.

Крім традиційної олімпіади з математики для учнів, які вже мають достатньо високий рівень математичних здібностей і ґрунтовну математичну підготовку, в Україні проводяться не тільки олімпіади на базі університетів, але й заочна математична олімпіада журналу “У світі математики”, відкрита фізико-математична олімпіада Рішельєвського ліцею (м.Одеса), Інтернет-олімпіади (в режимах off-line та on-line) [1], Всеукраїнський турнір юних математиків (м.Суми) та ін. Таким чином, для учнів що мають поки ще недостатньо виявленим творчий потенціал, теж з'явилися можливості проявити себе.

По-перше, вкажемо на вдалі спроби проведення паризької олімпіади для "звичайних школярів" [4]. Конкурс-гра "Кенгуру – математика для всіх", створений з метою популяризації математики і підвищення зацікавленості школярів в її вивченні, набув неабиякого розповсюдження по Україні [2].

Найважливіше у співпраці з учнями - не обійти увагою жодну дитину, дати можливість кожному висловитись, вчасно підтримати, допомогти, заохотити. Щоб учень не зневірився в собі, в своїх силах, слід запропонувати посильне завдання, стежити за рівнем його знань, вчасно перевести на порівняно вищий рівень та підвищити самооцінку. Зауважимо, що масові заходи виконують роботу індикатора з виявлення здібних учнів та розвивають пізнавальну та творчу компетентності.

Висновки. На наш погляд, проведення змагань з математики для всіх учнів дійсно сприятиме популяризації математики серед більш широких кіл школярів, підвищенню ефективності розвитку творчої особистості учнів в процесі навчання. Отже, вчитель, по-перше, повинен вихованців навчати вчитися, по-друге, працювати в напрямку їхнього зацікавлення навчання. На змаганнях з математики прагнути сформувати самосвідомість, виховати всебічно-розвинену особистість, залучати учнів до збереження загальнолюдських цінностей. Підкреслимо, що основне завдання педагога - допомогти своїм учням побороти інертність та байдужість до поразок, ставити задачі перед собою та мотивувати до навчання. Активізація пізнавальної діяльності учнів класів відмінних від матматичних у ході вивчення математики є важливим та актуальним питанням.

Отже, перед учителем математики, стоїть завдання зацікавити учнів своїм предметом, мотивувати їх на вивчення математики, залучити кожного учня до процесу активного навчання, тобто сприяти їх переходу до більш високого рівня активності, а відповідно – формувати та розвивати загальну математичну культуру.

Література

1.Актуальні питання комплексної освіти у спеціалізованих середніх навчальних закладах з підвищеними вимогами до вивчення природничо-математичних дисциплін. Матер. Всеукр. наук.-метод. конф. «Рішельєвські читання». – Одеса:Астропринт, 1999. – 271 с.

2.Борисова В.О. Міжнародний конкурс-гра «Кенгуру» // Математика.– 2003. – №5(209). – С. 1- 4.

3. «Золотий ключик». Математичний конкурс // Математика., 2003. – №8(212). – С.1-6

4. Роман С.О. О парижской олимпиаде для обыкновенных школьников // Математика (приложение к газете «Первое сентября»), 1993. – №5-6.

5. Чашечникова О.С. Можливості залучення учнів неспеціалізованих класів до творчої роботи з математики // Сучасні проблеми науки та освіти. Матер.3-ї міжнар. міждисц. наук.-практичн. конф. 1-9 травня 2002 р., м.Ужгород, 2002. – С.244.

Анотація. *У статті розглянуто один із шляхів залучення всіх учнів до математичної діяльності через організацію змагань з математики для всіх школярів.*

Ключові слова: *організацію змагань з математики для всіх школярів, учню класу нематематичного профілю, традиційні олімпіади.*

Задніпрянська Наталія Миколаївна
студентка 3 курсу, спеціальність «Математика»*

ПЛАНУВАННЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ УЧНІВ 7 КЛАСІВ У КОНТЕКСТІ ПІДГОТОВКИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ЗМАГАНЬ

Вступ. Позакласна робота – важлива складова частина навчально-виховного процесу. Вона тісно пов'язана з класними заняттями, але не підміняє їх, хоч і розв'язує ті самі навчальні й виховні завдання, і в цьому відношенні є продовженням тієї роботи, яка проводиться на уроці.

Завданням позакласної роботи є: збагачення й розширення знань учнів, створення, за висловленням В.О. Сухомлинського, інтелектуального фону, що сприяє свідомому і глибокому засвоєнню програмового матеріалу; поглиблення набутих на уроках знань, розвиток умінь і навичок усного й писемного мовлення; виховання ініціативи, самостійності, творчих здібностей учнів, їх пізнавальних інтересів; забезпечення виховної спрямованості предмета, що вивчається, формування почуття патріотизму.

Мета даної статті: наголосити на важливості та показати переваги позакласної роботи учнів 7 класу в контексті підготовки учнів до математичних змагань, та математичних олімпіад загалом.

Виклад основного матеріалу. Перед учителем математики, як і перед учителями інших предметів, стоїть важливе завдання: не тільки передати учням певну суму знань, розвивати їхні вміння та навички, а й навчити дітей застосовувати здобуті знання на практиці. Цьому значною мірою сприяють позакласні заходи з предмета.

Позакласні заняття поглиблюють і розширюють знання учнів, здобуті на уроці, підвищують інтерес до предмета. Ознайомившись на заняттях гуртка, конференції або тематичному вечорі з тим чи іншим поняттям, учень захоче глибше зрозуміти його суть, почитати додаткову літературу.

Позакласні заходи привчають до самостійної творчої праці, розвивають ініціативу учнів, вносять елементи дослідництва в їхню роботу, допомагають вибрати майбутню професію. Крім того, вони мають велике виховне значення: сприяють розвитку особистості учня як члена колективу, виховують почуття відповідальності за доручену справу, готують до трудової діяльності.

Позакласна робота допомагає вчителеві краще пізнати індивідуальні здібності своїх учнів, виявити серед них обдарованих, які мають підвищений інтерес до математики, і всіляко спрямовувати розвиток цього інтересу.

Для позакласних занять відсутня обов’язкова програма. Їх організовують і проводять з урахуванням запитів учнів. Організовуючи позакласні заняття, потрібно раціонально розподіляти час учителя й учнів. Тому дуже важливо до початку навчального року спланувати всю позакласну роботу, розрахувати потрібний для неї час у годинах і календарних строках.

Такий план слід складати відповідно до бажань і схильностей учнів, узгоджуючи його із загальношкільним річним планом. Під час планування позакласної роботи корисно дотримувати такого принципу: краще менше, але якісніше [1].

Позакласна робота з математики є складовою частиною всього навчального процесу, природним продовженням роботи на уроці. Позакласна робота має характер математичних розваг, ігор, змагань. Тут широко використовують вправи і завдання у цікавій формі. Однак, стимулюючи цікавість, треба пам'ятати, що вона цінна лише тоді, коли сприяє розумінню математичної суті питання, уточненню і поглибленню знань з математики.

Потреба у позакласній роботі з математики виникла у зв'язку з такою методичною проблемою математичної освіти молодших школярів, як взаємозв'язок математичного розвитку і формування логічних прийомів розумових процесів [2].

Позакласна робота сприяє поглибленню знань, яких набувають учні на уроках, прищепленню навичок застосовувати ці знання на практиці, вихованню моральних якостей: волі, наполегливості, критичного ставлення до виконаної роботи, а також розвиває інтерес до вивчення предмету.

Форми організації позакласної роботи і методи проведення її відрізняються від форм і методів проведення навчальних занять у школі. Час, кількість і види позакласних занять визначаються їх характером, метою і віком учнів.

Олімпіада, як один з видів математичних змагань, має широку популярність у нашій країні. Математична олімпіада у школі - засіб виховання сумлінного ставлення дітей до навчання; одна з форм позакласної роботи, яка створює умови для вияву спортивного азарту, посилює зв'язки сім'ї та школи. Цей вид позакласної роботи цікавий для дітей тим, що тут вони можуть випробувати свої знання, позмагатися з іншими учнями з того чи іншого предмету, і, звичайно, отримати оцінку своїх знань [2].

Успішність вирішення завдань організації роботи з обдарованими учнями з математики значною мірою залежить від організації навчального процесу. Учитель має використовувати можливість вільно вибирати методичні шляхи й організаційні форми навчання.

Перший етап підготовки учнів до участі в олімпіаді з математики в 7-х класах є певною мірою орієнтовним. На цьому етапі слід допомогти учневі усвідомити ступінь свого інтересу до предмета й оцінити можливості оволодіння ним з тим, щоб після закінчення 7 класу він міг зробити свідомий вибір на користь подальшого поглибленого вивчення математики або вивчення в рамках загальноосвітнього курсу.

На етапі підготовки передбачається розширення теоретичного матеріалу та наповнення курсу різноманітними цікавими і складними задачами з достатнім та високим евристичним навантаженням. Для підтримки інтересу до предмета включаються до процесу навчання задачі з розважальними елементами, відомості з історії математики тощо.

Відповідно до листа Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОН молодь спорту України від 12.11.2012 № 14.1/10-3121 «Про проведення ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2013 року» педагогам, які готують учнів до олімпіади з математики рекомендовано розглянути задачі комбінаторно-логічного змісту, теоретико-числові задачі, задачі на доведення нерівностей, функціональних співвідношень та задачі на властивості функцій, задачі на властивості цілої та дробової частини числа, різнопланові геометричні та стереометричні задачі [3].

Основним завданням підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах є забезпечення високого рівня математичної культури, формування стійкого, усвідомленого інтересу до математики, розвиток творчого потенціалу здібних та обдарованих учнів, оволодіння ними математичними методами, які дають розв’язати складні й нестандартні задачі зі значним евристичним навантаженням [4].

Цілі та завдання:

- підвищення рівня якості знань учнів, розширення математичного кругозору;
- прищеплення інтересу до математики та її застосувань;
- виявлення найбільш обдарованих учнів та розвиток їх творчих здібностей;
- навчання культурі самоосвіти та саморозвитку школярів;
- удосконалення умінь та навичок самостійної роботи учнів зі спеціальної літератури;
- організація діяльності учнів з метою підготовки їх до участі в різних олімпіадах та конкурсах;
- профорієнтація учнів та підготовка їх до отримання подальшої освіти.

Основні напрямки роботи:

- підготовка учнів до оволодіння знаннями, що виходять за межі шкільної програми;
- навчання учнів роботі з додатковою та спеціальною літературою;
- організація групових та індивідуальних консультацій;
- підготовка, організація та проведення турнірів, олімпіад;
- підготовка учнів до участі в олімпіадах та конкурсах.

Теми підготовчого курсу незалежні одна від одної, а об’єм матеріалу в кожній з них допускає регулювання учителем. Матеріал може використовуватись на факультативі, курсі за вибором або спецкурсі, введених за рахунок варіативного компоненту.

Очікувані результати

Учні будуть знати:

- алгоритми розв’язання базових та опорних задач з кожної розглянутої теми;
- прийоми ефективного використання у розв’язані базових задач;
- означення понять вивченого матеріалу.

Учні будуть вміти:

- виявляти та усувати двозначності з умов;
- формулювати умови для розв’язання задач олімпіадного характеру;
- тестувати розв’язання базових та опорних задач;
- використовувати стандартні прийоми та методи при розв’язанні нестандартних задач [3].

Висновки. Поєднання класної та позакласної форм роботи збагачує урок, наповнює його новим змістом, підвищує інтерес учнів. Знання, здобуті на позакласних заняттях дають змогу учневі доповнювати в класі відповіді товаришів, наводити цікаві приклади, чи виконувати складні досліди, налагодження тісного зв'язку між класними та позакласними заняттями є одним з найдієвіших шляхів підвищення якості навчання математики. Його можна здійснювати по-різному. Ставити такі запитання, щоб в учнів виникла потреба глибше, ніж це можливо на уроці, вивчати матеріал. Потім на позакласних заняттях розглянути цей додатковий матеріал, який дає змогу учням ознайомитися, наприклад, з історією математичних відкриттів, з новими способами розв'язання проблеми. А на наступних уроках заслухати виступи учнів, підготовлені на позакласних заняттях.

Пропонувати задачі, які мають різні способи розв’язування, частину з них аналізувати на заняттях гуртка. Цікаві способи розв'язування гуртківці можуть повідомити всьому класу на наступних уроках.

Правильне поєднання класної й позакласної роботи забезпечує взаємне використання не тільки змісту, а й форми та методів роботи [1].

Література

1. Антикуз О. В. Нові аспекти позакласної роботи / О. В. Антикуз // Математика в школах України, 2014. – № 9 (45) – С. 2-3.

2. Білінець Є. С. Готуємось до математичної олімпіади. Методичний посібник. – ЗОШ I-III ст. с. Маяки, 2013. – 36 с.

3. Божко І. В. Тиждень математики в школі / І. В. Божко, І. В. Ющенко. – Х. : Основа, 2010. – 192 с.

4. Доповідь вчителя Городищенської ЗОШ I-III ст. № 3 Немикіної Л.Ф. Про підготовку учнів до участі в олімпіаді з математики Інтернет-семінар для вчителів математики 2014. – 10 с.

Анотація. *У статті ставиться завдання показати необхідність планувати та проводити позакласну роботу учнів з математики та навести деякі переваги математичних олімпіад як виду позакласної роботи з математики.*

Ключові слова: *позакласна робота з математики, позакласні заняття, олімпіада, математичні олімпіади, підготовка учнів до участі в математичних олімпіадах.*

Каштельян Юлія Олександрівна
студентка 2 курсу, спеціальність «Математика»*

ПЛАНУВАННЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ УЧНІВ 8-9 КЛАСІВ У КОНТЕКСТІ ПІДГОТОВКИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ЗМАГАНЬ

Вступ. Завдання кожного вчителя математики полягає в тому, щоб зацікавити учнів математикою, показати її красу та могутність, переконати у важливості вивчення та навчити творчо мислити. Тому потрібна така організація навчання, при якій би діти включалися в роботу, мали бажання навчатися та пізнавати нове. Велика частина цієї організації залежить від учителя, тому що саме він організовує роботу, враховуючи рівень класу, інтереси всіх учнів, індивідуальні і вікові особливості кожного учня. Важливу роль в організації такого навчання відграє саме позакласна робота. На жаль, в школах практично відсутні будь-які методичні рекомендації та вказівки щодо її організації.

Мета даної статті: описати та обґрунтувати планування позакласної роботи учнів 8-9 класів в контексті підготовки до математичних змагань.

Виклад основного матеріалу. Позакласна робота з математики є важливою частиною всього навчального процесу, продовженням роботи на уроці. Позакласна робота проявляється в формі математичних розваг, ігор, змагань, олімпіад тощо. Саме на позакласній роботі розглядаються логічні та цікаві задачі, до яких учні більш проявляють інтерес, ніж до звичайних завдань які розглядаються на уроці.

Звернути увагу дітей 8-9 класів до позакласного заняття з математики, можна різними засобами: використовувати задачі, які наводять приклади використання математики в навколишньому середовищі, тобто прикладні задачі; задачі, які пов’язані з захопленнями дитини, наприклад, задачі пов’язані з спортом, малюванням та іншим, також використовувати загадки, шаради, ребуси, логічні вправи тощо.

Одним із головних завдань позакласної роботи з математики є підготовка обдарованих учнів до математичних змагань. У свою чергу математичні змагання підвищують інтерес учнів до математики, розвивають у дітей творчість та інтелектуальні здібності, поглиблюють теоретичну підготовку, привчають дітей до організованості та самостійності, виховують жагу до перемоги.

Оскільки не кожен учень може брати участь у олімпіадах, це в свою чергу пов'язано з тим, що не кожен учень має математичні здібності та нестандартне мислення, необхідно визначити обдарованих учнів в класі. Це можна зробити провівши шкільну математичну олімпіаду, у якій беруть участь усі охочі. Для цієї олімпіади потрібно підібрати завдання різного рівня складності, як прості, так і більш складні, адже з усіх учасників необхідно відібрати найрозумніших.

На олімпіадах пропонують завдання, розв'язання яких вимагає від учнів вміння нестандартно мислити, мати гарну просторову уяву, стійкі навички раціональних обчислень та перетворень виразів.

Готувати учнів до олімпіад краще індивідуально або невеликими групами з 3-5 осіб. Заняття з підготовки до олімпіад корисно пов'язувати з поглибленим вивченням математики. Вчитель, який навчає учнів в звичайному класі, повинен бути ознайомлений із програмою вивчення математики поглиблено. Адже слід враховувати, що переможці шкільної олімпіади будуть змагатися з учнями, які вивчають математику поглиблено. Успіх роботи такої групи цілком залежить від роботи на уроці, занятті гуртка, від уміння вчителя зацікавити учнів предметом. Участь юних математиків в різних етапах олімпіад – результат великої роботи, що проводив вчитель протягом року. Це і вдалі уроки з математики, і багатогранна позакласна робота (гурткові заняття,математичні вечори), і вдалі комп'ютерні проекти та презентації учнів, також велике значення має самостійна робота учнів вдома [4].

При підготовці учнів 8-9 класів до олімпіад необхідно організовувати лекції, консультації, на яких розглядатимуться методи розв'язування олімпіадних задач. Потрібно ознайомити дітей з усіма типами олімпіадних завдань та методами їх розв’язання, зокрема з такими:

1. Задачами, які вимагають нестандартних форм розв’язання;
2. Задачами з оригінальними і цікавими розв’язаннями, які можна знайти лише глибоко проникаючи в суть математичних понять;
3. Задачами про цілі числа;
4. Задачами з ірраціональними числами;
5. Доведення нерівностей;
6. Метод математичної індукції;
7. Принцип Діріхле;
8. Принцип крайнього та ін.

Засвоєння таких методів розв'язування задач вимагає від учнів напруженої активної розумової діяльності, вміння розв'язувати такі нестандартні задачі свідчить про високий рівень володіння математики.

Стосовно самого планування позакласної роботи з математики у 8-9 класах його можна спланувати так:

Навчальний місяць	*8 клас*	*9 клас*
Вересень	Множини операції над ними. Чотирикутники. Раціональні вирази та їх перетворення. Принцип Діріхле. Ігрові задачі. Задачі, що використовують ідеї парності, підрахунку двома способами.	Повторення вивченого матеріалу у 8 класі; Доведення відносно нескладних нерівностей. Розв'язування трикутників (теореми синусів, косинусів). Зовні вписане коло трикутника. Площі фігур.
Жовтень		

Листопад Грудень	Подібність трикутників. Розв’язування задач на застосування ознак подібності трикутників. Теорема Фалеса. Задачі, пов’язані з цифрами числа. Основи теорії подільності цілих чисел; перевірка того, чи є число квадратом/кубом цілого числа. Пошук інваріанту.	Квадратична функція; нестандартні задачі на властивості квадратного тричлену. Теореми Чеви та Менелая. Декартові координати на площині. Доведення більш складних нерівностей.
Січень Лютий Березень	Діофантові рівняння: лінійні і найпростіші нелінійні. Рівняння, що містять невідому під знаком модуля. Побудова графіків функцій, зокрема тих, у яких аргумент під знаком модуля. Вписані і описані чотирикутники. Нерівність трикутника.	Радикальна вісь кіл. Векторний метод розв’язування геометричних задач. Нестандартні рівняння і системи рівнянь. Задачі, пов’язані з цілою і дробовою частинами числа.
Квітень Травень	Задачі на розфарбування. Ігрові задачі. Розв’язування прямокутних трикутників. Рівняння з параметрами. Задачі на встановлення кількості коренів рівняння. Розв’язування різних задач математичних олімпіад.	Задачі на пошук ГМТ. Числові послідовності, зворотні послідовності. Розв’язування різних видів діофантових рівнянь. Розв’язування різних задач математичних олімпіад.

Висновки. Для участі в олімпіаді учні повинні мати відповідні знання, бути психологічно та фізично підготовленими, повинні вміти правильно розподіляти час на виконання завдань, долати можливі труднощі. Разом з тим, такі олімпіади мають велике виховне значення. Вони привчають школярів до організованості, виробляють у них самостійність і гнучкість мислення, зміцнюють віру у свої сили, виховують наполегливість і волю до перемоги.

Але й цього недостатньо. Для досягнення високих результатів у математичних олімпіадах необхідно мати розвинене нестандартне мислення, чому можуть сприяти факультативні та групові заняття.

Література

1. Глушко О. О. Учнівські олімпіади – шлях до самовираження. Навчально - методичний збірник / О. О. Глушко, В. М. Черкун – Решетилівка: РМК, 2012. – 56 с.
2. Обласні математичні олімпіали / І. М. Конет, В. Г. Паньков, Ю. В. Теплінський, В. М. Радченко. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2004. – 304 с.
3. Підручна М. В. Позакласна робота з математики у неповній середній школі (І частина) / М. В. Підручна, Г. М. Янченко. – Тернопіль: Посібники і підручники, 1997. – 63 с.
4. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навчальний посібник / О. А. Сарана. – Київ: А. С. К, 2004.

Анотація. *В даній статті описано власне бачення орієнтовного планування позакласної роботи учнів 8-9 класів в контексті підготовки до математичних змагань.*

Ключові слова: *позакласна робота з математики, робота з обдарованими учнями, математичні здібності, нестандартне мислення.*

Клітний Сергій Васильович
студент 4 курсу, спеціальність «Математика»*

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ, ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ ЗДІБНИХ УЧНІВ, ЯКІ ПРОЯВЛЯЮТЬ ІНТЕРЕС ДО ЗАНЯТЬ МАТЕМАТИКОЮ

Вступ. Формування понять будь-якого навчального предмета – найважливіше завдання сучасної шкільної освіти. Перед науковцями постають проблеми творчого розвитку учнів, розкриття механізмів свідомого навчання і використання цих механізмів як опорних засобів, за якими розвивається інтелект учня. Специфічні риси математики, як науки і навчального предмета, визначають її особливе положення в ряді основних напрямків розвитку особистості, оскільки, освітній, виховний і розвивальний потенціали математики безмежні. При вивченні предмета математики учням доводиться виконувати одночасно кілька видів діяльностей, зокрема: 1) виділення даного поняття з ряду інших понять за наявністю істотних ознак; 2) конструювання математичних об'єктів із заданими властивостями; 3) здійснення пошуку розв'язання математичних задач і виділення блоку необхідних теоретичних знань для виконання самого процесу розв‘язування; 4) застосування наявних знань в різних навчальних ситуаціях: аналогічних, змінених, нових. Адже в сучасних умовах необхідна людина нової формації, здатна до активного творчого оволодіння знаннями, вміюча аналізувати, узагальнювати, моделювати і прогнозувати результати своєї діяльності і робити аргументовані висновки.

Л.І. Токарева [3] вважає, що самостійне застосування знань учнями в змінених і нестандартних навчальних ситуаціях стане можливим в тому випадку, якщо вони оволодіють теоретично узагальненими структурами понять, систем понять, різними видами математичних тверджень і методами їх доведень, методами розв‘язування різних типів математичних задач. Процеси навчання математики, розвитку учнів, будуть ефективними і результативними, якщо вони будуть спиратися на модель цілісного процесу формування математичних понять і їх систем.

Мета даної статті. Розглянути роль математичних понять у шкільному курсі математики та скомпонувати систему вправ з теми «Трапеція» для позакласної роботи, яка сприятиме змістовному узагальненню вихідних математичних понять, розвитку творчого мислення, формуванню вмінь учнів самостійно застосовувати знання в змінених і нестандартних навчальних ситуаціях.

Виклад основного матеріалу. За допомогою означення та класифікації окремі поняття організовуються в систему взаємопов'язаних понять. Роль понять при вивченні математики складна й різноманітна. З одного боку, на поняття ми спираємося в процесі доведення, з іншого – в усякому доведенні ми розкриваємо поняття, поглиблюємо і уточнюємо знання про поняття. Саме означення поняття ґрунтується на вже відомих поняттях. Тому важливо звертати увагу на формулювання означення поняття.

Для того щоб учні досягли найкращих результатів під час вивчення математики в школі та під час підготовки до математичних олімпіад зокрема, учні повинні не лише вміти формулювати певні поняття та означення але й проводити їх систематизацію. Дослідженнями багатьох науковців було встановлено, що кращих результатів досягають ті учні, які чітко усвідомлюють з яким поняттям чи означенням вони мають справу. Тобто учень повинен вміти відразу відрізнити означення від ознаки, визначити до якого класу належить те чи інше поняття. Адже, коли учень розуміє з чим має справу, коли він чітко усвідомлює яке завдання перед ним стоїть, знайти розв’язок цього завдання уже набагато легше. Звичайно ж добре, коли учень уміє самостійно читати умови до завдань, розв’язувати різні їх типи. Але ще краще, коли він намагається знаходити свої доведення, свої способи розв’язання задач, можливо навіть пропонує свої формулювання означень, теорем тощо, а для цього учневі просто необхідно мати сформовану систему понять.

З.І. Слєпкань, Л.І. Токарева, Д.Б. Ельконін, Н.Ф. Тализіна, Ю.М. Колягін, А.А. Столяр, Г.І. Саранцев у своїх працях виділяли основні етапи формування математичного поняття. Отже, формування математичного поняття здійснюється в кілька етапів: 1) мотивація (підкреслюється важливість вивчення поняття, активізується цілеспрямована діяльність школярів, збуджується інтерес до вивчення поняття за допомогою залучення знань нематематичного змісту, виконання спеціальних вправ, що пояснюють необхідність розвитку математичної теорії); 2) виявлення істотних властивостей поняття (виконання вправ, де виділяються істотні властивості досліджуваного поняття); 3) формулювання означення поняття (виконання дій на розпізнавання об'єктів, що належать поняттю, конструювання об'єктів, що відносяться до обсягу поняття).

Враховуючи, що вправи є основним засобом навчання математики у загальноосвітній школі, тому добірка вправ для позакласної роботи з підготовки учнів до математичних олімпіад має складатись із трьох блоків. Перший – *вправи, що сприяють* оволодінню теоретично узагальненими структурами понять, систем понять; другий – вправи, *що сприяють засвоєнню* різних математичних тверджень і методів їх доведень, методів розв‘язування стандартних математичних задач; третій – вправи, *що сприяють формуванню* вмінь учнів самостійно застосовувати знання в змінених і нестандартних навчальних ситуаціях.

Розглянемо детальніше вимоги до вправ першого блоку. Вправи доцільно відбирати до кожного етапу формування поняття. Для мотивації введення поняття важливо запропонувати вправи на застосування вивчених понять і теорем та вправи практичного характеру. Вправи на побудову об'єктів, які відповідають зазначеним властивостям; засвоєння логічної структури означення поняття; розпізнавання об'єктів, що належать обсягу поняття; на виділення наслідків з означення поняття; на доповнення умов (розпізнавання і виведення наслідків) сприяють виділенню істотних властивостей поняття. Для етапу застосування поняття варто розглянути вправи на складання родоводу поняття. Встановленню зв'язків досліджуваного поняття з іншими поняттями сприятимуть вправи на застосування поняття в різних ситуаціях та на систематизацію понять.

Вправи, що сприяють оволодінню теоретично узагальненими структурами понять, систем понять:

1. При проектуванні фундаменту нового музею сучасного мистецтва, що має чотирикутну форму, архітектори мають чітко дотримуватись вимоги: сума кутів, прилеглих до двох протилежних сторін дорівнює 180°. Встановіть, як саме має виглядати ескіз фундаменту, тобто яку форму матиме будівля [1]?
2. В означені трапеції замініть видову ознаку та сформулюйте відповідне означення [2].
3. Встановіть з яких двох трикутників можна отримати трапецію.
4. Складіть схематичний рисунок для розрізання трикутної (чотирикутної) пластинки на три частини, кожна з яких має форму трапеції.
5. За якою ознакою поняття трапеції можна виділити з поняття опуклого чотирикутника [2]?

Вправи, що сприяють засвоєнню різних математичних тверджень і методів їх доведень, методів розв‘язування стандартних математичних задач:

1. Встановіть, як розділити квадратну пластинку на 8 частин, кожна з яких має форму не прямокутної трапеції [1].
2. Виділіть властивості, що належать: усім трапеціям; деяким трапеціям; не належить жодній з них [2].
3. Встановіть, чи існує трапеція, у якої: а) два протилежні кути рівні; б) два протилежні кути прямі [1].
4. Вкажіть на властивості, які має трапеція [2].
5. Дослідіть кути трапеції при довільній бічній стороні [1].
6. Встановіть, чи існує трапеція, у якої: а) два протилежні кути гострі (прямі, тупі); б) основи рівні; в) дві протилежні сторони рівні [1].

Вкажіть на властивості: всіх трапецій; тільки деяких трапецій [2].

7. (Нарисуй рисунок) Продовжте твердження: «Якщо діагональ трапеції є бісектрисою кута при більшій основі, то …». Сформулюйте та перевірте обернене твердження [1].

8. Бісектриси кутів при більшій основі трапеції перпендикулярні до бічних сторін. Знайдіть кути трапеції [1].

Вправи, що сприяють формуванню вмінь учнів самостійно застосовувати знання в змінених і нестандартних навчальних ситуаціях:

1. Доведіть, що в будь-якій трапеції відстань між серединами діагоналей дорівнює піврізниці основ [1].

2. Встановіть у наступному означені поняття таке: термін, рід, видові ознаки (та як вони поєднані).

Трапецією називається чотирикутник, у якого дві сторони паралельні та дві інші – непаралельні [2].

3. Які з властивостей трапеції, що наведені далі, є істотними, а які неістотними:

а) дві сторони трапеції паралельні;

б) два кути при більшій основі гострі;

в) сума кутів трапеції, які належать до однієї бічної сторони, дорівнює 180;

г) основи трапеції горизонтальні;

д) обидва кути при меншій основі тупі [2].

4. Сума кутів при нижній основі трапеції дорівнює прямому куту. Доведіть, що відрізок, який з’єднує середини основ трапеції, дорівнює їх піврізниці [1].

5. Три сторони трапеції рівні. Коло, що побудоване на більшій основі як на діаметрі, ділить бічну сторону навпіл. Знайдіть градусні міри кутів трапеції [1].

6. Вкажіть декілька родових понять для поняття трапеції [2].

7. Коло, діаметром якого є менша основа трапеції дотикається до більшої основи і ділить діагоналі трапеції навпіл. Знайдіть величини кутів трапеції [1].

Висновки. У процесі навчання математики важливо сформувати в учнів цілісну систему понять, що сприятиме змістовному узагальненню вихідних математичних понять, розвитку творчого мислення, формуванню вмінь учнів самостійно застосовувати знання в змінених і нестандартних навчальних ситуаціях.

Література

1. Амброзяк О. В. Еврестичне навчання математики: геометричні поняття: методичний посібник для вчителів / О. В. Амброзяк – Кривий Ріг. Видавець ФО-П Чернявський Д. О., 2014. – 424 с.

2. Прус А. В. Збірник задач з методики навчання математики / А. В. Прус, В. О. Швець – Житомир: «Рута», 2011 – 388с.

3. Токарева Л. И. Формирование систем понятий при обучении математике: монография / Л. И. Токарева; Башк. гос. пед. ун-т им. М. Акмуллы. – Уфа, 2008. – 392 с. (24 п. л.).- http://shworks.ru/dokumenti-1-tokarevartf/file1/index.html.

Анотація. *У статті скомпоновано систему вправ з теми «Трапеція» для позакласної роботи, яка сприятиме змістовному узагальненню вихідних математичних понять, розвитку творчого мислення, формуванню вмінь учнів самостійно застосовувати знання в змінених і нестандартних навчальних ситуаціях.*

Ключові слова: *формування математичних понять, класифікація математичних понять.*

Мартиненко Дмитро Олександрович
студент 4 курсу, спеціальність «Математика*»

МОЖЛИВОСТІ ДИДАКТИЧНИХ ІГОР У ПІДГОТОВЦІ УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Вступ. В наш час учні завантажені неймовірним обсягом знань та інформації, особливо на уроках математики. Звісно, час від часу потрібно робити моніторинг знань учнів у формі олімпіад з математики, щоб побачити можливості їх знань та вміння їх використовувати. Також, потрібно виділити увагу і самій підготовці до олімпіади. Більшість підготовок до олімпіад проходить за стандартним сценарієм: вчитель за кілька тижнів до олімпіади підбирає цікаві задачі, подібні тим, що будуть на олімпіаді, та розбирає їх розв'язок з учнем. Зазвичай така схема працює, але деякі обдаровані та наполегливі діти, які після навантажених уроків, не сприймають таке подання, як задач, так усієї підготовки в цілому. В даному випадку потрібно шукати інші шляхи подання учням цікавих задач та матеріалу. Треба подбати про те, щоб кожен учень працював активно і захоплено, і використовувати це, як ключову точку для виникнення і розвитку допитливості, глибокого пізнавального інтересу в математиці.

Мета даної статті: Розкрити можливості та вплив дидактичних ігор через їх структуру у підготовці учнів до математичних олімпіад.

Виклад основного матеріалу. Виникнення інтересу до розв'язування олімпіадних задач у значного числа учнів залежить більшою мірою від методики їх викладання, від того, наскільки вміло буде побудована навчальна робота. Важлива роль тут відводиться дидактичним іграм на уроках та на гуртках математики - сучасному і визнаному методу навчання і виховання, що володіє освітньою, розвиваючою і виховною функціями, які діють в органічній єдності [1].

Сучасна дидактика, звертаючись до ігрових форм навчання, справедливо вбачає в них можливості ефективної організації взаємодії педагога і учнів, продуктивної форми їх спілкування з присутніми елементами змагання, безпосередності, непідробного інтересу. Дидактична гра – гра, спрямована на формування у дитини потреби в знаннях, активного інтересу до того, що може стати їх новим джерелом, удосконалення пізнавальних умінь і навичок. Гра дозволяє відійти від буденної праці учнів в школі. Гра – один з найважливіших засобів розумового і морального виховання дітей. Величезне значення грі, як виховному засобу надавав А. С. Макаренко: «Яка дитина в грі, така багато в чому вона буде в роботі, коли виросте. Тому виховання майбутнього діяча відбувається насамперед у грі» [5]. Тобто, дидактична гра надає плацдарм учням, після використання якого вони розкривають свій потенціал.

Більшість вчителів за браком часу та великого навантаження не в змозі використати дидактичні ігри, ні на уроках, ні у підготовці до олімпіад. Розглянемо, які ж можливості може надати гра в процесі підготовки до олімпіад з математики та вплив цих можливостей на дитину. Можливості ігор в даному процесі можуть випливати зі структури самої гри.

Структура будь-якої дидактичної гри базується з таких частин: ігровий задум; правила; ігрові дії; пізнавальний зміст; устаткування; результат гри [1].

Ігровий задум – перший структурний компонент гри – виражений, як правило, в назві гри. Він закладений в тій дидактичній задачі, яку треба вирішити в навчальному процесі, в нашому випадку – підготовці до олімпіади. Ігровий задум часто виступає у вигляді питання, як би проектує хід гри, або у вигляді загадки. У будь-якому випадку він додає грі пізнавальний характер, пред'являє учасникам гри певні вимоги щодо знань. Ігровий задум полягає в тому, щоб на основі створеної проблемної ситуації активізувати мислення учнів, перетворити весь процес навчання в процес активної пошукової діяльності і самостійних відкриттів. Можливість гри, як активізатора дасть поштовх для розв’язування олімпіадних задач без уточнення, що це підготовка до олімпіади. Тобто, втратиться психологічний тиск, який присутній у підготовці, і учні швидше дійдуть до розв’язування задачі та його сприйняття.

Кожна дидактична гра має свої правила, які визначають порядок дій і поведінку учнів в процесі гри, сприяють створенню робочої обстановки. Тому правила дидактичних ігор повинні розроблятися з урахуванням мети та індивідуальних можливостей учнів. Цим створюються умови для прояву самостійності, наполегливості, розумової активності, для можливості появи у кожного учня почуття задоволеності та успіху. Крім того, правила виховують вміння керувати своєю поведінкою, підпорядковуватися вимогам колективу. При проведенні гри вчителі повинні дотримуватися таких правил:

- За правильну відповідь команді нараховуються очки; помилка, допущена у відповіді, неправильну відповідь, порушення дисципліни призводять до зняття певної кількості очок з рахунку команди.
- Кожен член команди може знову відповідати тільки після того, як відповідатимуть усі члени команди.
- Запитання і завдання дає вчитель.
- Після постановки загального завдання вирішуються консультації всередині команд.
- Всі необхідні записи за вказівкою вчителя заносяться в зошит [4].

Дидактична гра надає можливість контролю за учнями, як у виховному так і навчальному процесі. Отже, вчитель може скеровувати учнів до розв’язання цікавих задач та у разі помилки одного з них, через інших продемонструвати правильний шлях розв’язання.

Важливою стороною дидактичної гри є ігрові дії, які регламентуються правилами гри, сприяють пізнавальної активності учнів, дають їм можливість проявити свої здібності, застосувати наявні знання, вміння і навички для досягнення цілей гри. Ігрові дії полягають у тому, щоб швидко і без помилок відповідати на запитання вчителя, виконувати потрібні записи і побудови в зошитах. Стежити за правильністю відповідей своїх товаришів зі своєї та іншої команди, вирішувати приклади і задачі біля дошки, консультувати або брати консультацію, не порушувати дисципліну, бути уважним і активним.

Основою гри, яка пронизує собою її структурні елементи, є пізнавальний зміст. Пізнавальний зміст полягає в засвоєнні тих знань і умінь, які застосовуються при вирішенні навчальної проблеми, поставленої грою. Вона полягає в тому, щоб учні засвоїли ті чи інші методи і способи розв'язання, які вони прослідковували в продовж гри [3]. Отже, пізнавальний зміст надає можливість запам'ятати набуті знання, які в свою чергу будуть проявленні вже на олімпіаді.

Устаткування дидактичної гри – це наявність технічних засобів навчання. Сюди також відносяться різні засоби наочності: таблиці, моделі, а також дидактичні роздаткові матеріали, прапорці, грамоти, якими нагороджуються команди-переможці [3]. Таким чином, гра дає учням ігровий стимул, ради якого вони будуть старатись, для свого задоволення своїх амбіцій та перемоги своєї команди, і паралельно з цим всім буде активна, весела та розвиваюча підготовка до олімпіади.

Дидактична гра має певний результат, який є фіналом гри, надає грі закінченість. Він виступає насамперед у формі рішення поставленої навчальної завдання і дає школярам моральне і розумове задоволення. Для вчителя результат гри завжди є показником рівня досягнень учнів або в засвоєнні знань, або в їх застосуванні. Вчитель по закінченню гри одразу бачить, де будуть можливі помилки на олімпіадах, а де учні справляються і повертатись до таких задач непотрібно. Після закінчення вчитель повинен провести заключення гри, його проведення та пояснити усі проблемні моменти, які були при розв'язуванні задач.

Найпопулярнішими дидактичними іграми, які допоможуть у підготовці до математичних олімпіад є: ігри, що базуються на телепередачах «ЩО? ДЕ? КОЛИ?», «О, щасливчик» та інші; брейн-ринги та математичні КВК [2]. Дані ігри є універсальними через свою манеру проведення і підходять усім учням. Вчитель повинен завжди правильно підбирати завдання для ігор, він повинен розуміти, що учні, які готуються до олімпіад кмітливіші за інших, але з тим він не повинен забувати про вік учнів та вікові смаки дітей. Наприклад: гра «Геометричний крокодил» у якій учні без слів мовою жестів демонструють різні геометричні об’єкти або ж формують умову задачі, а інші гравці це відгадують або мають розв’язати відповідно, не підходить для учнів молодших 7 класу, оскільки в них ще слабо розвинена просторова уява; або ж гра «Супер Маріо» у якій команди учні рятують уявну принцесу через швидке розв’язання задач, не підходить для учнів 11 класу, оскільки вони вже не так цікавляться мультфільмами.

Висновки. Дидактичні ігри допомагають вчителям і учням з фокусуванням, почуття власної гідності та розвитку пам'яті. Дидактичні ігри можуть допомогти учням зосередитися над розв’язанням цікавої задачі тому, що вони в даний час під дією гри, завдяки якій проходить активніше підготовка до олімпіад. Проаналізувавши структуру дидактичних ігор, їх можливості (активізуючу, керуючу, проявляючу здібності, емоційну, запам’ятовуючу) ми можемо виділити вплив ігор на учня:

1. Ігри є формою розваги. Це дає учням насолоду і задоволення.

2. Ігри мають конфлікт / конкуренції / виклик / опозицію. Це дає учням сильну і пристрасну участь.

3. Ігри мають правила. Це дає учням структуру.

4. Ігри мають цілі. Це дає учням мотивацію.

5. Ігри інтерактивні. Це дає учням робити і творити.

6. Ігри мають результати і зворотний зв'язок. Це дає учням вчитися.

7. Ігри мають перемогу. Це дає учням задоволення власного его.

8. Ігри мають рішення проблем. Це дає учням знання.

9. Ігри мають взаємодію. Це дає учням соціальні групи.

10. Ігри мають уявлення і історію. Це дає учням емоції.

Усі ці впливи дидактичних ігор допоможуть вчителеві краще, швидше, а головне з цікавістю та захопленням для учнів підготувати їх до математичних олімпіад. Головне вибрати гру, підібрати правила, вибрати правильні цікаві задачі – і цікава підготовка до олімпіади забезпечена.

Література

1. Бижова Т. В. Роль дидактической игры на уроках математики и во внеурочной деятельности как одной из педагогических технологий на основе активизации и интенсификации деятельности учащихся [Текст] // Теория и практика образования в современном мире: материалы междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, февраль 2012 г.). – СПб.: Реноме, 2012. – С. 149-154.

2. Данилов І. К. Про ігрових моментах на уроках математики // «Математика в школі», 2005 р. – №1– С. 46-48.

3. Дон О. Про дидактичні ігри Завуч., 2001. - № 23-24– С. 31-32.

4. Коваленко В. Г. Дидактические игры на уроках математики. Кн. для учителя – М: Просвещение, 1990 г.

5. Эльконин Д. Б. Психология игры – М.: Высшая школа, 1978.–62с.

Анотація. *Дана стаття розкриває можливості дидактичних ігор в процесі підготовки до математичних олімпіад через саму структуру ігор, та містить інформацію щодо впливу на учнів можливостей дидактичних ігор.*

Ключові слова: *Дидактична гра, можливості ігор на уроках, підготовка до математичних олімпіад.*

Медяний Роман Михайлович
студент магістратури, спеціальність «Математика*»

ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ В ПІДГОТОВЦІ УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Вступ. Формування в студентів та учнів навичок самостійної діяльності, творчого потенціалу і здатності використовувати знання на практиці є важливим завданням викладача у ВНЗ та учителя в школі. В розвитку названих якостей особистості студента та школяра велике значення має позакласна робота, зокрема позааудиторна робота з математики. При цьому майбутні вчителі мають усвідомлювати значимість занять математикою в позааудиторний час. У такий спосіб студенти отримують додаткову можливість для розвитку мислення, формування умінь аналізувати, порівнювати і зіставляти, узагальнювати, конкретизувати, абстрагувати від часткового, робити умовиводи. Звісно, викладач на лекції чи на практичному занятті не може охопити розвиток усіх цих умінь у всіх студентів. Якщо студент за своїм власним бажанням, буде учасником математичних заходів, гуртків, то він і під час аудиторних занять буде більш зацікавлено ставитись до навчального матеріалу, зможе краще зрозуміти й засвоїти його.

Мета даної статті: проаналізувати складові системи формування компетентностей майбутніх учителів математики з підготовки учнів до математичних олімпіад.

Виклад основного матеріалу. З поміж компетентностей майбутніх учителів математики до підготовки і проведення математичних олімпіад виокремлюємо три основні компетентності: математичну, методичну, педагогічну. Розглянемо детальніше кожну з них.

Відомий науковець та дослідник С. А. Раков під математичною компетентністю розуміє «вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень» [1, с. 6]. До предметно галузевих математичних компетентностей С. А. Ракова відносить: процедурну компетентність, логічну, технологічну, дослідницьку, методологічну.

О. Я. Савченко [2] виокремлює складові математичної компетентності – обчислювальну, інформаційно-графічну, логічну та геометричну. Це свого роду внутрішній ресурс предметної математичної компетентності.

Як зазначає О. І. Матяш [3] при підготовці до олімпіад варто виділяти геометричну компетентність, яка включається до математичної компетентності. Геометрична компетентність визначається як набута у процесі навчання геометрії інтегровна здатність того хто навчається, його досвід, цінності і ставлення, що формується у процесі навчання геометрії і може цілісно реалізуватися на практиці.

Процес формування математичної компетентності, на переконання С. А. Ракова [1], пов’язаний з різними аспектами, у тому числі і з мотивацією навчально-пізнавальної діяльності, участю в діяльності з розвитку математичної компетентності, інтересом до предмету навчання, а також самооцінкою. Ми погоджуємося з науковцями, що процес формування математичної компетентності потребує активної мотивації при цьому вона має супроводжуватися знаннями, використанням на практиці та активним саморозвитком.

І. А. Зязюн [4] під професійною компетентністю вчителя розуміє глибоке знання педагогом навчально-виховного процесу, знання предмету та методики його викладання, психології, педагогіки, а також уміння застосовувати ці знання у практичній діяльності.

О. І. Матяш [3] виділяє такі складові професійної компетентності: ключові компетентності (навчальна, культурна, громадська, соціальна, підприємницька), базові компетентності (математична, педагогічна, методична, інформаційна, комунікативна) та спеціалізовані або предметні компетентності.

С. О. Скворцова [5] трактує поняття «методична компетентність вчителя математики», як теоретичну і практичну готовність до проведення занять з математики за різними навчальними комплектами, що виявляються у сформованості системи дидактично-методичних знань і вмінь.

Формування методичної компетентності майбутніх учителів математики починається під час навчання у вищому навчальному і цей процес триває упродовж всієї професійно-педагогічної діяльності вчителя математики. Проте рівень методичної компетентності залежить від специфічних особливостей пізнавальної, емоційно-вольової сфери, індивідуальних особливостей, темпераменту й характеру особистості.

Педагогічна компетентність учителя на думку О. О. Анісімової, Л. М. Мітіної, Г. В. Мітіна – це «гармонійне поєднання предмета, методики й дидактики викладання, умінь і навичок (культури) педагогічного спілкування, а також способів і прийомів саморозвитку, самовдосконалення, самореалізації», або за визначенням А. О. Трофименко «категорія педагогічної науки та особистісної інтегративної характеристики суб’єкта навчання, який володіє сукупністю знань, умінь і навичок ціле покладання, ціле здійснення навчальної діяльності, має певний досвід її організації й аналізу результатів із визначенням розвитку» [6, с.18].

На нашу думку сутність компетентностей майбутнього вчителя математики з підготовки учнів до математичних олімпіад полягає в тому, що майбутні вчителі мають добре знати шкільну математику, вміти застосовувати математичні знання зокрема таких тем: класифікація натуральних чисел (прості і складені числа, взаємно прості числа, дільники і кратні чисел, парність чисел, використання властивостей подільності та методу остач, принципу Діріхлє під час розв’язування вправ), методи розв’язування Діофантових рівнянь та деякі нестандартні методи розв’язування рівнянь, функціональні рівняння, застосування властивостей квадратного тричлена під час доведення тотожностей, найменшого або найбільшого значення функції, теорема Вієта в практичних задачах для квадратного та кубічного рівнянь, розкладання многочленів на множники та його застосування під час розв'язування степеневих рівнянь, теорема Безу, застосування методу математичної індукції та його модифікацій під час різних доведень, способи доведення нерівностей, розмальовування фігур під час розв'язування логічних задач, використання кола та зв'язаних з ним співвідношень під час розв'язування геометричних задач, цікаві лінії та точки в трикутнику, площі фігур, перерозподіл площ, геометричні нерівності, геометричні інваріанти. Майбутній учитель математики має вміти використовувати метод координат та векторний метод у процесі розв'язування геометричних задач. Не зайвими у підготовці майбутніх учителів є їхні знання та уміння про: формування здатності учнів доводити математичні твердження; застосування математичних методів у процесі розв'язування задач; формування здатності учнів оцінювати правильність і раціональність розв'язування математичних задач; обґрунтування тверджень, прийняття рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації; моделювання за допомогою рівнянь реальних ситуації. Важливо працюючи з учнями пояснювати здобуті результати, застосування комбінаторних правил до розв'язування олімпіадних задач; розв'язувати задачі за допомогою кругів Ейлера та методу «перебору» тощо.

Висновки. Формування компетентностей майбутніх учителів математики в підготовці учнів до математичних олімпіад відбувається у процесі засвоєння різних психологічних, педагогічних, фахових та методичних дисциплін. Особливий акцент слід зробити на дисциплінах математичного та методичного циклів.

Література

1. Раков С. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти. / С. Раков // Математика в школі. – 2007. – №5 – С. 2-7.

2. Савченко О. Я. Новий етап розвитку шкільної освіти і підготовка майбутнього вчителя / О. Я. Савченко // Шлях освіти, 2003. - № 3. – с.2-6.

3. Матяш О. І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії: монографія / О. І. Матяш; науковий редактор д. пед. н., проф. О. І. Скафа.- Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД»., 2013. – 450 с.

4. Зязюн І. А. Краса педагогічної дії: навч. Посібник для вчителів, аспірантів, студ. Середніх та вищ. Навч. Закл. / І. А. Зязюн.- К.: Українсько-фінський ін.-т менеджменту і бізнесу, 1997. – 302 с.

5. Скворцова С. О. Формування професійної компетентності в майбутнього вчителя математики / С. О. Сворцова // Е-журнал «Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку». – 2010, вип.4.- режим доступу до журн. : http//www.intelect-invest.org.ua

6. Трофименко А. О. Формування навчальних компетентностей у майбутніх учителів предметів гуманітарного циклу : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.04 «Теорія і методика професійної освіти» / А. О. Трофименко. – Тернопіль, 2008. – 22 с.

Анотація. *У статті визначено складові системи формування компетентності майбутнього учителя математики при підготовці учнів до математичних олімпіад, які досягається шляхом професійних знань, умінь та навичок, вмінню застосовувати методику викладання математики та використання індивідуального підходу до особистості, вмінню організувати процес підготовки до олімпіад.*

Ключові слова: *математична компетентність, методична компетентність, педагогічна компетентність, навчальна діяльність, математична олімпіада.*

Мельничук Вікторія Миколаївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»*

ПРИЙОМИ ФОРМУВАННЯ ІНТЕРЕСУ ДО ОЛІМПІАДНИХ ЗМАГАНЬ З МАТЕМАТИКИ В П’ЯТИКЛАСНИКІВ

Вступ. Значні можливості підготувати учнів до математичний змагань вчитель має, працюючи, на позакласних заходах. Позакласна діяльність відкриває нові можливості формування самостійності, розвитку творчого потенціалу особистості, дозволяє виявити потенціальні можливості школярів, рівень розвитку пізнавальних інтересів, врахувати в цій діяльності особливості кожного учня. В процесі позакласної роботи є можливість підтримати інтерес в одних, спиратися на захоплення інших, переключити негативні інтереси на позитивні у третіх.

Актуальною проблемою перед вчителями математики постає завдання більш ефективної організації позакласної роботи з метою підвищення рівня математичного розвитку і цікавості до предмета, а також з метою виявити здібних до математики учнів і сприяти їх математичному розвитку. Основне завдання вчителя – сформувати у кожного учня активну позицію, надати йому можливість брати участь в організації та проведенні колективної пізнавальної справи.

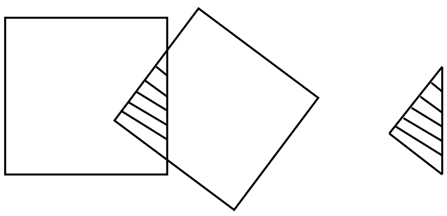
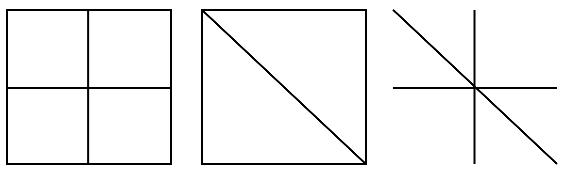
Мета даної статті описати прийоми формування інтересу до математичних змагань у п’ятикласників на позакласних заходах з математики.

Виклад основного матеріалу. Добре організована й уміло поставлена позакласна робота – один з найефективніших засобів пробудження і підтримання в учнів інтересу до математики [3]. Основною формою позакласної роботи з математики у 5 класах є математичні гуртки. Заняття в гуртках доповнюють роботу на уроках і дають можливість задовольнити інтереси та запити учнів, які виходять за межі навчальної програми. У процесі гурткової роботи учні розширюють і поглиблюють набуті знання з математики, навчаються працювати над математичними проблемами, читати математичну літературу. Це сприяє підвищенню їх математичної культури. На математичних гуртках є змога підготувати учнів до участі в математичних олімпіадах, які покликані виявити талановитих юнаків і дівчат [2].

Дієвим засобом розвитку логічного мислення учнів є розв'язування задач нестандартного характеру. Задачі такого типу виховують у п'ятикласників любов до математики та допомагають вчителеві перемкнути увагу учнів на уроці або зосередити її на іншому об'єкті.

У позакласній роботі з учнями доцільно розглянути задачі на зважування та переливання. При підготовці до такого виду роботи варто підготувати демонстрації, оскільки особливості дітей такого шкільного віку у тому, що вони сприймають те, що бачать, абстрактне мислення у них ще слабко розвинене. Варто запропонувати учням розв'язувати задачі на знаходження закономірностей та за готовими рисунками.

Задача 1. Вставте пропущені числа, слова, букви чи рисунки

1)  

3; 11; 6; 15   7; 6; 3   ?

Відповідь: 11; 15; 7.

Пролісок   Лісник   ?

3; 8; 5   9; 3; 1   ?

Розв'язання.

Пролісок   Лісник   Ліс

3; 8; 5   9; 3; 1   3

На уроках математики або у процесі гурткової роботи в 5 класі варто розглядати задачі, які демонструють вихід зі скрутного становища [1].

Задача 2. Що швидше: половину шляху пройти пішки, а іншу половину проїхати на машині чи половину витраченого часу йти пішки, а іншу половину їхати на машині?

Розв'язання. Якщо йти пішки і їхати на машині однаковий час, то шлях, що проїхали машиною, буде довший, ніж той, що йшли пішки. Отже, у цьому випадку машиною проїхали більше ніж половину всієї дороги, що, природно, забере менше часу, ніж якби машиною проїхали половину шляху.

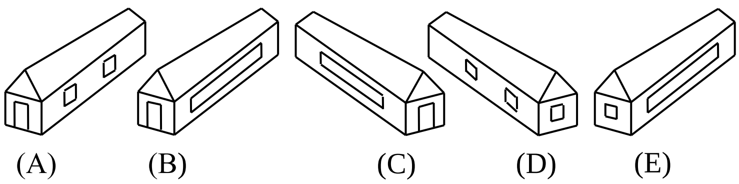
Неабиякий інтерес викликають в учнів задачі на «ігри з сірниками» та розв’язування магічних квадратів. Із задачами такого типу п’ятикласники знайомі з молодшої школи і вже мають поняття та навики до їх розв’язування. В учнів виникає бажання розв’язати якомога більше задач та швидше, кожен хоче продемонструвати свій розв’язок. Головне завдання вчителя правильно організувати роботу, щоб заохотити дітей, а не відбити в них бажання працювати.

Хоча учні 5 класу не беруть участь у районних та обласних математичних олімпіадах, вчителям п’ятих класів доцільно залучати учнів до шкільних олімпіад з математики для дітей цього віку. Таким чином майбутні учасники районних олімпіад знайомляться з формою проведення таких заходів і в подальшому це не викликає в них нервування та страху, вони знайомляться з типами олімпіадних задач, з прийомами їхнього розв’язування.

Під час педагогічної практики у закладі «Фізико-математична гімназія №17» м. Вінниці була змога отримати певний досвід в організації і проведенні шкільної олімпіади з математики для п’ятикласників.

Завдання з шкільної олімпіади з математики для 5-х класів.

<u>*Задача 1.*</u> Будиночок Кролика намальований 4 рази, а будиночок П’яточка тільки один раз. Де будиночок П’яточка?



<u>*Задача 2*</u>. Учні вирішили відвідати свою улюблену вчительку математики. По дорозі до неї їм пригадалося, що навіть свою адресу вчителька повідомила їм як цікаву шараду: «одні й ті самі цифри утворюють номер мого будинку й номер моєї квартири, причому сума цифр дорівнює різниці між номером будинку й номером квартири». Який номер будинку і номер квартири вчительки?

Задача 3. Чи можливо побудувати чотирикутник і перетнути його однією прямою так, щоб вийшло три трикутники?

Задача 4. За допомогою двох цифр, записаних поряд, я утворив натуральне число. Потім видалив цифру, яка була записана ліворуч; в результаті цього число збільшилося. Наведіть такий приклад.

Задача 5. Знайди закономірності і заповни вільні дужки:

1) 15 (32) 17	3) 15 (14) 17	5) 15 (36) 17	7) 15(255) 7
21 ( ) 32	21 ( ) 32	21 ( ) 32	21 ( ) 32
2) 15 (2) 17	4) 15 (3) 57	6) 15 (71) 17	8) 15 (16) 17
21 ( ) 32	21 ( ) 32	21 ( ) 32	21 ( ) 32

Задача 6. Стародавня задача.

Двоє їли сливи. Один каже другому: «Дай мені свої дві сливи, тоді у нас з тобою буде порівно слив», - на що другий відповідає: «ні, краще ти дай мені своїх слив, - тоді у мене буде вдвічі більше ніж у тебе. Скільки слив було у кожного?

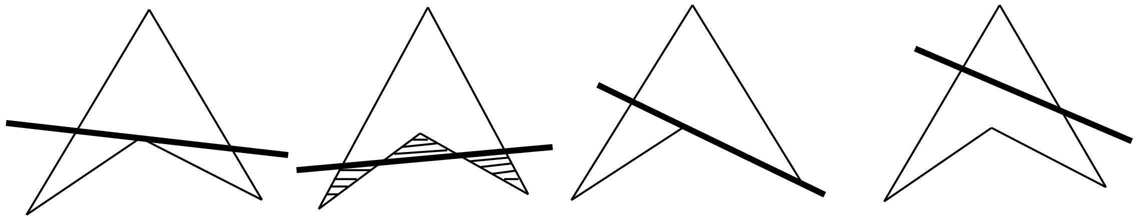
Задача 7. Цю таблицю необхідно розділити на чотири рівні частини і при цьому виконати таку умову: сума чисел кожної з частин має бути однаковою.

9	6		
10	5		
6	11	9	14
9	10	8	3

Методичний коментар. Розв’язання першої задачі в учнів особливих труднощів не викликало. Більшість змогла уявити розташування будиночка та його можливий зовнішній вигляд.

Розв’язання другої задачі було виконано здебільшого методом підбору. На уроках математики та на позакласній роботі вчителю слід було звернути увагу на те, що двоцифрове число може бути подане у вигляді $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$. Тоді учні 5 класу можуть скласти рівняння $10x + y - 10y - x = x + y$. При правильно організованій роботі вчителя на уроці учні вміють розв'язувати такі рівняння, а саме, п'ятикласники для початку зводять подібні доданки, а потім наче з шальок терезів одночасно знімають невідомі, таким чином отримують рівняння $4x = 5y$. Роблять висновки, що рівняння задовольняють числа $x = 5$, $y = 4$.

Під час розв'язування задачі 3 головна проблема учнів була в тому, що вони розглядали лише опуклі чотирикутники і робили поспішні висновки, що інших чотирикутників, які задовольнили б умову задачі бути не може. Проте були й діти, які розглянули різні випадки, зокрема були запропоновані такі розв'язки:



Особливу увагу слід приділити авторам останніх двох малюнків, тому що вид чотирикутника визначено правильно, але висновок зроблено хибний. Завдання вчителя розглянути з учнями усі можливі випадки розміщення прямої відносно чотирикутника та попередити подальші помилки такого характеру.

Основна проблема з якою зіткнулися учні при розв'язуванні задачі 4 було те, що учні розглядали лише арабські числа, де задача розв'язку немає. П'ятикласниками були запропоновані й інші варіанти розв'язання даної задачі, зокрема було запропоновано розглянути числа 0,3 та -15, для яких виконується умова задачі. Дані розв'язки не є правильними, оскільки учні не врахували, що числа повинні бути натуральними. Але вчителю потрібно звернути увагу на таких учнів, адже у них добре сформоване логічне мислення.

Одностайної відповіді до задачі 5 немає. Кожна дитина може побачити свою закономірність, головне, щоб там було «раціональне зерно». Завдання вчителя підтримати учня та по можливості запропонувати ще один варіант.

Найбільше проблем виникло в учнів при розв'язуванні задачі 6. Дійшовши до певних результатів, учні не могли правильно зробити висновки.

Із розв’язанням задачі 7 ніяких труднощів не виникло. Усі п’ятикласник впоралися із завданням.

Висновки. Ми з’ясували, що до прийомів формування інтересу до олімпіадних змагань з математики у п’ятикласників можна віднести розв’язування нестандартних логічних задач таких, як задачі на зважування та переливання, на знаходження закономірностей, «ігри з сірниками» та розв’язування магічних квадратів та інші, а також залучення учнів до участі у шкільних олімпіадах з математики.

Література

1. Гарнагіна І. А. Формування креативного мислення учнів на уроках математики та позакласних заняттях / І. А. Гарнагіна. // Математика в школах України. – 2008. – №4. – С. 10–13.
2. Козлова О. М. Математична логіка. Курток (5-6 класи) / О. М. Козлова, С. М. Лискова, С. О. Чамата. – Черкаси, 2008. – 75 с.
3. Панішева О. В. Позакласна робота як один із засобів виховання інтересу до вивчення математики / О. В. Панішева. // Математика в школах України. – 2007. – №8. – С. 28–32.

Анотація. *Наведено приклади задач, які можуть зацікавити учнів як на уроках математики, так і при проведенні позакласної роботи та мотивувати їх для подальшого вивчення математики. Розглянуто можливий приклад завдань шкільної олімпіади з математики для 5 класу, який дасть можливість учням ознайомитися з тонкощами її проведення.*

Ключові слова: *шкільна олімпіада з математики, нестандартні задачі, позакласна робота з учнями 5 класу.*

Ольшевський В'ячеслав Володимирович
студент 4 курсу, спеціальність «Математика*»

МІСЦЕ І РОЛЬ ПРОЕКТНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ З МАТЕМАТИКИ

Вступ. Щоб відповідати сучасним вимогам суспільства, вчитель має бути майстром, творцем, а не просто старанним ремісником. Сучасні вчителі знаходяться в активному пошуку та апробації методів та засобів, які були б найефективнішими для досягнення кінцевої мети – формування в учнів ключових та предметних компетентностей, які мають забезпечити випускнику школи успішну життєдіяльність. Все більше вчителів осмислюють основи інноваційного навчання. Інноваційне (лат. innovatio – оновлення, зміна) навчання зорієнтоване на динамічні зміни в навчальній та освітній діяльності вчителя, ґрунтується на розвитку прийомів мислення, творчих здібностей, індивідуальних можливостей учнів.

З метою розвитку особистісних, творчих здібностей учнів, поступового й систематичного привчання їх до самостійної пізнавальної діяльності, забезпечення співпраці між учнями та вчителем варто ширше використовувати можливості різних форм позакласної роботи.

Мета даної статті. На основі аналізу педагогічної літератури, виокремити прийоми активізації пізнавальної діяльності учнів в процесі позакласної роботи з математики, обґрунтувати доцільність використання методу проектів.

Виклад основного матеріалу. Вивчення та аналіз педагогічної літератури, власні методичні переконання дозволяють стверджувати, що одним із засобів досягнення позитивного результату в справі збудження інтересу до навчання є забезпечення вчителем математики ситуації успіху для учнів. Досвідчені вчителі математики виокремлюють, як найефективніші, такі прийоми:

✓ *Прийом «Даю шанс»* – це заздалегідь підготовлена вчителем ситуація, в якій учень має змогу зненацька для себе розкрити пізнавальні можливості.

✓ *Прийом «Рушай за нами»* – алгоритм цього прийому такий:

- Діагностика інтелектуального фону колективу класу;
- Виявлення інтелектуального керівника групи;
- Керівник групи «веде» за собою діяльність інших учнів.

✓ *Прийом «Навмисна помилка»* – застосовується з урахуванням вікових особливостей і рівня навченості учнів на засвоєному навчальному матеріалі, який використовується як опорні знання.

Створення ситуації успіху в процесі позакласної роботи з математики можливе на основі дотримання певних правил: вчитель має ставитись до кожної дитини як до особистості, що повністю унеможливлює грубість, різкість, образливий тон вчителя; кількість і різноманітність позитивно та діяльнісно забарвлених, зокрема і спеціально створених вчителем ситуацій, у які має потрапити учень, визначають різні шляхи його можливого успіху.

В основі вказаної педагогічної діяльності – позитивна "Я – концепція" учня. Бо прийняття себе, розуміння себе, оптимістичне, життєрадісне сприймання – чи не головний провідний принцип забезпечення соціально-психологічних умов для зміцнення і збереження сприятливих тенденцій у самовдосконаленні та самореалізації особистості. Позитивну "Я-концепцію" слід сприймати через взаємозв’язок, взаємозумовленість емоційно-ціннісного й поведінкового компонентів. Така концепція є базовою для успішної реалізації елементів технології колективної та групової діяльності, проблемно-модульної та проектної технологій, які є поширеними нині в практиці роботи вчителів.

Для прикладу, впроваджуючи проектну технологію, вчитель має за мету не тільки передати учням обсяг знань, а ще й навчити здобувати ці знання самостійно, застосовувати їх для розв’язування нових пізнавальних і практичних завдань; прищепити учням уміння користуватися дослідницькими прийомами, а саме: збирати інформацію, аналізувати її з різних точок зору, висовувати гіпотези, навчатись самостійно робити висновки.

Практичне втілення методу проектів у позакласній роботі з математики включає обов'язкове складання обґрунтованого плану дій кожного з учнів на основі виявлення можливих рішень проблеми й обговорення найбільш оптимального шляху його реалізації. Завдання вчителя при цьому – сприяти більшій самостійності учнів на усіх етапах виконання проекту – від ідеї до втілення її. Для ефективного використання методу проектів у позакласній роботі з математики важливо, щоб вибір того чи іншого типу проекту (а саме: дослідницький, розвивальний, практико-орієнтований та інші) був обумовлений кількома чинниками, а саме: вікові особливості учнів, здатність до творчості, рівень самостійності, ступінь технічного забезпечення школи тощо.

Особливість проектної діяльності навчання математики полягає в тому, що учні засвоюють специфічні математичні факти у процесі виконання проблемно-пошукових завдань, які вони отримують згідно зі своїми інтересами, здібностями та рівнем володіння програмовим навчальним матеріалом. Важливими вимогами до виконання проектних завдань є креативність, готовність до нових ідей, цікаві пропозиції та здатність їх презентувати. Важливо розуміти, що проектна діяльність учнів у процесі позакласної роботи є ефективною формою поєднання теорії з практикою, можливістю продемонструвати власні вміння та індивідуальну схильність до творчої діяльності й науково-дослідницької роботи.

В основі методу проектів – розвиток пізнавальної активності школярів, здатність самостійно конструювати знання, орієнтуватися в інформаційному просторі, а також розвиток критичного та творчого мислення, формування вмінь співпраці в групі.

За методом проектів можна опрацювати будь-яку тему олімпіадної математики. Під час першого заняття гуртка, з обраної вчителем теми, учням оголошується тема проекту. Після діагностування опорних математичних знань, учні організовуються в групи за інтересами, розподіляють обов'язки та починають працювати над проектом. Доцільно здійснювати захист проектів шляхом створення презентацій у програмі «PowerPoint», "Publisher". Метод проектів і у позакласній роботі з математики за способом організації може бути індивідуальним, парним і груповим. Груповий метод має певні правила та принципи. Методичні аспекти роботи за проектною технологією можна простежити за такими етапами: підготовка, організація роботи, проміжний контроль, власне презентація, підбиття підсумків. Розподіл обов'язків у кожній групі може бути таким: консультант, збирач інформації, графічний дизайнер, головний редактор. У ході дослідження між школярами постійно відбувається мовна взаємодія, обмін інформацією, які проходять в різних формах: діалог, дискусія, замітка в газету. Таким чином, протягом роботи над проектом відбувається формування комунікативної компетентності учнів. Після презентації проектів учні мають удосконалити комунікативні, математичні та соціокультурні навички, здобути вміння конструювати публічний виступ і презентувати результати діяльності, здійснювати оцінювання та само оцінювання роботи над проектом.

Актуальним питанням проектної методики є контроль за діяльністю учнів та її оцінювання. Необхідно оцінювати не лише результат, а й сам процес роботи. Особистий успіх у навчанні, підкріплений оцінкою, заохоченням учителя, надає стимулювальну дію пізнавальній активності. Педагогічний оптимізм, віра педагога в пізнавальні можливості своїх учнів підбадьорює останніх, спонукає працювати з максимальним використанням власних сил.

Практичні роботи, експерименти, творчі пошуки покликані запалити в очах учнів вогники зацікавленості. Робота у групах, парах не дає можливості розгубитися слабшим, кожний має змогу повірити у власні сили.

Висновки. Пізнавальна активність школяра представляє собою складне психолого-педагогічне утворення, що синтезує в собі низку компонентів. Особливий зв'язок спостерігаємо між пізнавальною активністю і пізнавальним інтересом учнів, іншими словами, якщо урок або позакласний захід не є цікавим, прийоми та методи навчання не приваблюють, не стимулюють до пошуку нової інформації, то очікувати на високу пізнавальну активність учнів не доводиться. Дієвим чинником пізнавальної активності учнів слугують інноваційні засоби й методи навчання, оскільки вони спрямовуються на формування та розвиток особистісних якостей учнів.

Методично правильно організований процес пізнавальної діяльності школяра в процесі позакласної роботи з математики – передумова формування пізнавальної активності учнів у навчанні математики. Для підкріплення пізнавального інтересу необхідні актуальні в певних умовах способи навчання, які задовольняють творчу і самостійну пошукову діяльність школярів. У результаті широкого і повного використання всіх джерел інформації в учнів формуються особистісно значущі внутрішні стимули, що активізують пізнавальну активність, інтерес як мотив діяльності (радісні переживання, пов'язані з оволодінням знаннями, засвоєння нових, більш удосконалених способів навчання).

Література

1. Коба В. І. Позакласна робота з математики в школі / В. І. Коба, О. О. Хмура – К. :Радянська школа, 1988.

2. Панаетова О. А. Використання методу проектів на уроках країнознавства // Англійська мова і література., 2003. – № 30. – С. 15-19.

3. Полат Е. С. Метод проектов на уроках иностранного языка. // Иностранные языки в школе.,2000. – №2-3. – С. 15-34.

4. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навчальний посібник. – К. :Видавництво А. С. К., 2004.

Анотація. *Виокремлено прийоми активізації пізнавальної діяльності учнів у процесі позакласної роботи з математики, обґрунтовано доцільність використання методу проектів.*

Ключові слова: *пізнавальна активність, метод проектів, навчання математики,ситуація успіху.*

Пасіхова Олена Петрівна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

НЕТРАДИЦІЙНІ ФОРМИ МАТЕМАТИЧНИХ ЗМАГАНЬ, ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ

Вступ. Часто учні вважають математику нецікавою та нудною наукою. Інтерес до розв'язування задач може з'явитися лише тоді, коли в ситуації успіху в учня не виникають труднощі при застосуванні основних математичних понять, теорем тощо. Часто школярі перевантажені великою кількістю обчислювальних вправ, орієнтованих на здобуття технічних вмінь та навичок. Це призводить до того, що учні, які на контрольних роботах отримують гарні оцінки, на математичних конкурсах, турнірах або олімпіадах, не можуть навіть зрозуміти умову задачі. Тобто гарна оцінка ще не гарантує учню участь та призове місце під час математичного змагання.

Мета даної статті: обґрунтувати доцільність застосування математичних змагань,як засобу розвитку математичних здібностей учнів.

Виклад основного матеріалу. Діти часто вважають,що для заняття математикою, необхідні особливі здібності. Якщо у дитини погано розвинуте логічне мислення, то вона не може обґрунтувати свої дії, послідовно міркувати, було б не розумно вимагати від неї високих результатів з математики. Але теж саме можна сказати про всі інші заняття, пов'язані з розумовою діяльністю та ці здібності можна розвивати, особливо в початковій школі. Проте, школярі не бажають займатися математикою, оскільки ці заняття потребують від них терпіння та уважності, а з самого початку немає ніякої винагороди.

Щоб досягти, навіть найменших успіхів, необхідно наполегливо та достатньо довго працювати, знайти велику кількість ідей та методів, то не будуть лякати незнайомі задачі, з'явиться впевненість в своїх силах, а згодом і успіхи.

Міркуючи над задачами розвивається інтелект, рівень математичної грамотності. Крім того, для дитини це шанс стати переможцем.

Останнім часом часто можна почути слова про те, більша частина математичних знань не застосовується при розв’язуванні простих задач середнього рівня, навіть під час уроку математики. Але якщо дитину зацікавити математикою, якщо перемоги важливі і для учня, і для вчителя, як засіб самореалізації та самооцінки, то різноманітні форми математичних змагань, конкурсів, фестивалів, ніколи не зникатимуть.

Якщо вчитель зацікавлений в тому, щоб його учні не втратили інтерес до математики та розвивали свої здібності, і до того ж, показували гарні результати, то завжди є потреба в цікавих задачах і пошуках форм проведення занять гуртка, нестандартних уроків, змагань.

Якщо роботу по зацікавленню дітей розпочати в початковій школі і продовжити в 5-6 класах, то в подальшому це викликає неабиякий інтерес в учнів і спонукатиме їх до роботи над складними задачами. При цьому в учителя виникає ряд трудностей, одна із яких - де взяти практичний матеріал для такої роботи. При підготовці дітей до олімпіад та конкурсів учитель стикається з великою проблемою, такою як відсутність належної кількості якісної літератури з умовами олімпіад них задач. А якщо і знаходить такі задачі, які будуть цікаві учневі та зможуть розвинути його математичні здібності, то розв’язань до таких задач немає, або оформлені неналежним чином.

Окрім традиційних математичних олімпіад слід залучати учнів до більш масових змагань, які ,на початку, не вимагають додаткових знань. Обов’язково необхідно залучати учнів до Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру», «Золотий ключик». Також в різних школах проводяться альтернативні математичні олімпіади, предметні Брейн-ринги, математичні регати.

Слід звернути увагу на необхідність проведення регулярних занять математичного гуртка. Щоб нові знання, прийоми та методи якимось чином «вклалися» в голові кожного гуртківця, необхідно декілька занять поспіль розв’язувати по декілька задач з певної теми, розбираючи разом з учителем типові задачі. При цьому не можна на одному занятті розв'язувати задачі на одну і ту ж тему, інакше діти швидко втратять інтерес.

Для розширення кругозору та конструктивних навичок доцільними є практичні завдання, пов'язані з розрізанням, побудовами, розташуванням цифр та літер в таблицях за вказаними правилами (наприклад, латинські та магічні квадрати), знайомити з деякими знаменитими задачами математики та цікавими фактами історії математики.

Для тренування необхідно періодично проводити олімпіади, математичні бої та інші змагання. Наведемо приклад альтернативного математичного змагання, здатного спонукати розвиток логічного мислення, реально оцінювати свої можливості і здобувати досвід тактичної боротьби.

Познайомимося з правилами гри « Математичне казино».

Правила гри

У грі беруть участь команди, що складаються з 4-6 чоловік. Гра складається з шести блоків, на кожен з яких відводиться по 15 хвилин. У кожному блоці командам видаються картки, що містять 5 завдань. У картки гравцями вносяться тільки відповіді на кожне завдання, пишеться назва команди і ставка, яка кількість завдань команда, на думку її гравців, розв'язала правильно. Ставка може бути будь-яким цілим числом від 1 до 5. Завдання вважається розв'язаним правильно, якщо вказана правильна відповідь. Якщо відповідей в завданні декілька і наведені не всі вірні відповіді, то відповідь вважається неправильною. Якщо серед вірних відповідей до завдання вказаний один або декілька невірних, то відповідь також вважається неправильною.

За кожне правильно розв'язане завдання команда отримує 2 бали. За вгадану кількість правильно вирішених завдань (правильну ставку) команда отримує додатково бонус 5 балів. Якщо команда розв'язала правильно більше завдань, ніж вказала в ставці, вона отримує бали лише за розв'язані завдання. Якщо команда розв'язала правильно більше завдань, ніж зазначено в ставці, вона отримує бали лише за розв'язані завдання. Якщо команда розв'язала правильно менше завдань, ніж зазначено в ставці, то вона отримує бали за розв'язані завдання і штраф за кожне відсутнє завдання в 2 бали. Таким чином, в одному блоці можна набрати від - 10 до 15 балів.

Перемагає команда, яка набрала в результаті 6 блоків найбільшу кількість балів.

Продемонструємо один із блоків завдань для даної гри.

Блок I

№1 Яке одне і теж число треба відняти і від чисельника, і від знаменника дробу $\frac{29}{64}$, щоб отримати дріб $\frac{2}{9}$?

Відповідь:19

№2 Художник почав писати картину в останню п'ятницю лютого, а закінчив у першу середу березня. Скільки днів працював художник?

Відповідь:6 або 13

№3 Коли до повного числа десятків забракло 2 яєць, їх перерахували дюжинами. Залишилося 8 яєць. Скільки було яєць, якщо їх було більше 300, але менше 400?

Відповідь: 308; 368

№4 У виразі 2: 3: 4: 5: 6 = 5 розставте дужки, щоб вийшла правильна рівність.

Відповідь: (2:3):((4:5):6)

№5 На шахівниці 8×8 стоять 10 шахових фігур (слони і тури), що не б'ють один одного. Яке найбільше число тур може виявитися на дошці?

Відповідь: 6 тур

Висновки. Проаналізувавши математичні змагання, можна зробити висновок, що їх можна і треба використовувати для розвитку математичних здібностей дітей будь-якого віку. Часто школярі виконують велику кількістю обчислювальних вправ, орієнтованих на здобуття технічних навичок, та мало часу та уваги приділяють логічним, цікавим, нестандартним задачам. Проведення математичних змагань, дає змогу задовольнити дитячу цікавість, розвинути мислення, підняти інтерес до вивчення математики в цілому та розвинути їх математичні здібності

Література

1. Бабінська І. Л. Задачи математических олимпиад / І. Л. Бабінська – М., «Наука», 1975. – 112с.
2. Басанько А. С. За лаштунками підручника математики, 6 клас / А. С. Басанько – Х., «Гімназія», 2013 – 80 с.
3. Берлянд І. Є. Игра как феномен сознания, Кемерово/ І. Є. Берлянд – «АЛЕФ», 1992 – 96 с.
4. Яглом А. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении / А. М Яглом, І. М. Яглом – М., «Наука», 1954.

Анотація. *У даній статті розглянуто математичні змагання, як засіб розвитку математичних здібностей у дітей шкільного віку, а також подано приклади задач для таких змагань.*

Ключові слова: *математична задача, нетрадиційна задача, змагання, олімпіада.*

Пугач Олена Сергіївна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ В СИСТЕМІ ПОЗАУРОЧНОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ

Вступ. В умовах реформування системи освіти, відтворення і зміцнення інтелектуального потенціалу нації, виходу вітчизняної науки, техніки, економіки і виробництва на світовий рівень, інтеграції в світову систему освіти, переходу до ринкових відносин і конкуренції будь-якої продукції, в тому числі й інтелектуальної, особливо актуальним стає забезпечення належного рівня математичної підготовки підростаючого покоління.

Математика має широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості: в першу чергу, розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, формування вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати ситуації та ін. Математика є засобом вивчення фізики, хімії, інформатики, обчислювальної техніки, астрономії, біології, загальнотехнічних і спеціальних дисциплін, мовою техніки, а розвинене логічне мислення сприяє засвоєнню гуманітарних предметів. Математичне моделювання широко використовується для розв'язування задач різних галузей науки, економіки, виробництва.

Мета даної статті: описати та проаналізувати роль шкільних олімпіад в позаурочній діяльності учнів. Оцінити перспективи розвитку математичного олімпіадного руху в Україні.

Виклад основного матеріалу. Невід'ємною частиною добре організованого навчання учнів математики стає позакласна робота з математики. До позакласної роботи з математики відносять усі добровільні заняття, які проводять вчителі у позаурочний час у школі, або поза школою і на яких учні розглядають питання математики. Ця робота спрямована на задоволення інтересів і запитів учнів.

Основні завдання позакласної роботи з математики:

1. Пробудження і розвиток стійкого інтересу учнів до математики;

2. Забезпечення глибшого розуміння важливих ідей математики;

3. Допомога в оволодінні головними методами математики;

4. Розвиток математичних здібностей учнів (логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, пам'яті тощо), прищеплення учням певних навичок науково-дослідного характеру;

5. Розвиток позитивних рис особистості (розумової активності, пізнавальної самостійності, пізнавального інтересу, потреби в самоосвіті, здатності адаптуватися до умов, що змінюються, ініціативи, творчості та ін.) та навичок самостійно і творчо працювати з учбовою та науково-популярною літературою з математики.

6. Ознайомлення учнів з історією математики, з іменами та біографіями видатних учених, які створювали математику, зокрема видатних українських математиків М. Остроградського, В. Буняковського, Г. Вороного, М. Кравчука та ін.

7. Ознайомлення з найважливішими відкриттями в галузі математики.

8. Розглядання застосування математики в різних галузях науки і техніки та її роль у пізнанні навколишнього світу; формування навичок математизації ситуацій під час дослідження явищ природи і суспільства.

9. Формування наукового світогляду, загальнолюдських духовних цінностей, виховання національної свідомості, поваги до національної культури і традицій України; формування позитивних рис характеру (чесності і правдивості, наполегливості й волі, культури думки й поведінки, обґрунтованості суджень, відповідальності за доручену справу тощо).

10. Створення активу, здатного надати вчителю математики допомогу в організації ефективного навчання математики всього колективу (допомога у виготовленні наочних посібників у заняттях з відстаючими, у випуску шкільної математичної преси, поширювати та пропагувати математичні знання серед інших учнів).

Роботу з учнями в позаурочний час можна розмежувати на два типи:

1. Додаткові уроки, що сприяють покращенню засвоєння програмового матеріалу, тобто мають допоміжний характер щодо основних занять.

2. Факультативні та групові заняття, до яких залучаються всі бажаючі учні.

Незважаючи на необов'язковість для школяра, другий тип занять заслуговує особливої уваги вчителя. Саме під час цих занять керівник має змогу залучити учнів до розв'язування нестандартних задач, сприяти успішній участі в математичних олімпіадах. Сучасна школа повинна не тільки сформувати в учнів певний набір знань, але й пробудити їх прагнення до самоосвіти, реалізації своїх здібностей.

Олімпіади – один із символів ХХ століття. В кінці XIX століття вони являли собою всесвітній спортивний рух, а сьогодні він вийшов за рамки спорту. Тепер це масштабні інтелектуальні змагання по багатьом галузям знань серед школярів.

Для участі в олімпіаді учні повинні мати відповідні знання, бути психологічно та фізично підготовленими, повинні вміти правильно розподіляти час на виконання завдань, долати можливі труднощі. Разом з тим, такі олімпіади мають велике виховне значення. Вони привчають школярів до організованості, виробляють у них самостійність і гнучкість мислення, зміцнюють віру у свої сили, виховують наполегливість і волю до перемоги.

Але й цього недостатньо. Для досягнення високих результатів у математичних олімпіадах необхідно мати розвинене нестандартне мислення, чому можуть сприяти факультативні та групові заняття.

Проведення усіх олімпіад передбачає відповідну підготовку учнів. Тому в кожній школі повинні систематично працювати різноманітні гуртки за класами або паралелями класів. Гуртки більш високого рівня організовуються при вузах, в районах – при математичних школах або районних методкабінетах. Також систематично повинна проводитися індивідуальна робота з учнями, які проявляють інтерес до математики, або з найбільш сильними учнями.

Кожний школяр, який бере участь в олімпіаді – мріє про перемогу. Але діти не завжди можуть та й не повинні усвідомлювати, наскільки значною подією в їхньому житті є участь в олімпіаді. Про це мусять пам'ятати дорослі, має думати держава. Сам факт участі в олімпіаді вже на першому турі, на шкільному етапі, створює атмосферу свята та значущості події. Монотонне шкільне життя на кілька днів починає вирувати: міняється розклад занять, скасовуються окремі уроки, учні відпускаються з уроків для участі в олімпіаді. У ці дні у школі панує святкова метушня. Саме атмосферу інтелектуального свята й повинні відчути та запам'ятати діти.

На олімпіадах будь-якого школяра, якщо він там уперше, чекає відкриття: виявляється, предмет не обмежується рамками шкільних підручників, і запитання можуть ставитись нестандартні, і, виявляється, когось цікавить твоя думка або начитаність поза межами шкільного курсу.

Зрозуміло, що олімпіадна форма мотивації школярів до навчання на високому науковому рівні є важливим чинником їх майбутньої успішної соціалізації. Гуманітарна формула «Не хлібом єдиним живе людина» є дійовою і для багатьох прагматично-продуктивних сфер суспільного життя.

Олімпіади сприяють виявленню та розвитку математичних здібностей учнів. Часто на уроках учень отримує, і цілком об'єктивно, тільки трійки, зрідка четвірки і двійки. Приходить на шкільну олімпіаду спробувати свої сили. Адже це так цікаво! І раптом ми помічаємо, що він непогано розв’язує логічні задачі, завдання з родзинкою, які є непосильними відмінникам. Після олімпіади учень, імовірно, більш серйозно займеться математикою. Учитель допоможе цьому учневі в його заняттях, знайде шляхи розвитку його математичних здібностей, порекомендує йому математичну літературу, завдання і т.д.

Сутність місії шкільного олімпіадного руху полягає не стільки у виявленні унікальних талантів (життя саме винесе їх рано чи пізно на гребінь слави), як у мотивації школярів активно долучитись до наукових досягнень сучасності. Звісно, що для успішної участі в олімпіадах потрібні додаткові щодо поточного розкладу діяльності школяра та вчителя зусилля.

Олімпіадна задача з математики – це задача підвищеної складності, нестандартна як за формулюванням, так і за методами розв’язання. Серед олімпіадних задач зустрічаються такі, для розв’язання яких потрібні незвичні ідеї та спеціальні методи, так і задачі більш стандартні, але деякі із них можна розв’язувати оригінальними способами. Практично в кожній олімпіадній роботі зустрічається, як мінімум, одна задача з геометрії. Саме геометричні олімпіадні задачі викликають найбільші труднощі в учнів, і це не тому, що учні погано знають геометрію, а тому, що найбільше штучних прийомів, додаткових побудов використовується саме при розв’язуванні геометричних задач.

Складання завдань для математичної олімпіади (або інших типів математичних занять) повинно відповідати певним вимогам. Зважаючи на психологічні аспекти треба так складати завдання ,щоб принаймні одну із запропонованих задач міг розв'язати кожен учасник олімпіади.

Висновки. Сучасна педагогічна практика закономірно ставить питання зміцнення взаємозв'язку факультативних занять з класними та позаурочною роботою, подання учням допомоги у свідомому виборі факультативних курсів.

Дуже бажано, щоб зусилля вчителів, спрямовані на позакласну роботу, відбивалися на наслідках навчання математики. Важливо забезпечити таку взаємодію між класними, факультативними та позакласними заняттями в школі, щоб весь навчально-виховний процес являв єдине ціле, коли класні та позакласні заняття, зберігаючи свої специфічні особливості, цілеспрямовано впливали один на одного, сприяючи підвищенню спільної ефективності навчання, виховання та розвиток школяра.

Без перебільшення, однією із найбільш важливих видів позакласної та позашкільної діяльності з математики є шкільна олімпіада. Математичні олімпіади доречно і необхідно використовувати для здійснення виховної роботи зі школярами. Для успішного проведення такого роду змагань необхідне виконання в першу чергу наступних умов: 1) систематичне проведення усієї позакласної роботи з математики; 2) забезпечення регулярності проведення олімпіад; 3) серйозна, змістовна та цікава підготовча робота перед проведенням кожної олімпіади; 4) хороша організація проведення олімпіад; 5) цікавий математичний зміст змагань.

Література

1. Колягин Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе / Колягин Ю. М., Оганесян В. А., Санников В. Я. – М.: «Просвещение», 1980. – 462с.
2. Соколова А. В. Из опыта преподавания математики в средней школе: Пособие для учителей / Соколова А. В., Пикан В. В., Оганесян В. А. – М.: Просвещение, 1979. – 36с.
3. Эрдниев П. М. Преподавание математики в школе (из опыта обучения методам укрупненных упражнений) / Эрдниев П. М. – М.: «Просвещение», 1978. – 303с.
4. Ясінський В. А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Геометрія. / В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко – Вінниця : ТОВ Нілан ЛТД, 2014. – 224 с.
5. Ясінський В. А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра. / В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко – Вінниця : Середняк Т.К., 2015. – 272 с.

Анотація. *У статті розповідається про шкільну олімпіаду, як ефективний метод позакласної діяльності з математики. Адже підготовка до такого виду змагань розширює світогляд учня та виводить його кругозі за межі шкільної програми.*

Ключові слова: *позакласний та позашкільний захід з математики, факультатив, шкільна олімпіада, олімпіадна форма мотивації школярів, олімпіадна задача.*

Стецюк Анастасія Валеріївна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

ПЛАНУВАННЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ У КОНТЕКСТІ ПІДГОТОВКИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ЗМАГАНЬ

Вступ. Позакласна робота з математики – це заняття, які відбуваються в позаурочний час, ґрунтуються на принципі добровільної участі, мають на меті підвищення рівня математичного розвитку учнів і цікавості до предмета завдяки поглибленню і розширенню основного змісту програми. Позакласні заняття, зокрема, як підготовку до математичних змагань, можна будувати як на матеріалі, незначно пов'язаному зі шкільною програмою, так і на матеріалі, який безпосередньо межує з темами обов'язкової програми, але не дублює цю роботу, а поглиблює та розширює її.

Амосова Н. В. вважає, що діти з величезним задоволенням займаються математикою в позаурочний час. У такий спосіб вони розвивають мислення, вчаться аналізувати, порівнювати і зіставляти, узагальнювати, конкретизувати, абстрагувати від часткового, робити умовиводи. Коли дитина, за своїм власним бажанням, відвідуватиме такі математичні позакласні заходи, то вона й на уроках буде більш зацікавлено ставитись до навчального матеріалу. Відповідно й покращаться її результати навчання з інших предметів загалом та математики зокрема [1].

Мета даної статті виокремити особливості підготовки учнів 5-6 класів до участі в математичних змаганнях.

Виклад основного матеріалу. Процес підготовки учнів до олімпіад безпосередньо пов'язаний з наявністю у навчальному закладі вчителів, які готові і здатні взяти на себе відповідальність за роботу з обдарованими учнями. У педагогічній діяльності творчість вчителя займає особливе місце. Адже, лише неформальне, творче ставлення до своїх обов’язків може дати позитивні результати.

Вчитель математики, Фірсіна Світлана Іванівна, виділяє такі складові готовності вчителя до роботи з обдарованими учнями:

- ✓ відповідний рівень і постійна підтримка фахово-інформаційного рівня роботи з обдарованими учнями (курси, семінари, конференції тощо);
- ✓ володіння методиками роботи з обдарованими учнями (індивідуальна робота, робота в групах тощо);
- ✓ володіння психологічними аспектами роботи з обдарованими учнями.

Робота вчителя з обдарованими учнями не повинна носити хаотичний, епізодичний характер, а має бути системною, неперервною, спланованою на перспективу. Доолімпіадний період починається на початку навчального року. Підготовка в себе включає повторення задач минулого олімпіадного сезону, уведення в групу олімпіадників нових учнів. Також розв’язуються завдання I та II етапів попередніх олімпіад. Заняття проводяться у формі «міні олімпіад» для поступового психологічного налаштування учнів [3].

Шкільні олімпіади проводяться в навчальних закладах вчителями математики. Участь беруть всі бажаючі. Підбір завдань повинен бути диференційованим, тобто включати завдання трьох рівнів:

- ✓ нескладні завдання, які може розв’язати більшість учасників;
- ✓ завдання, які потребують творчого підходу до розв’язання;
- ✓ завдання, рівень яких відповідає II (III) етапу олімпіади.

Умови проведення олімпіади повинні максимально відповідати умовам олімпіади наступного етапу [5].

Програма підготовки до математичних олімпіад для учнів 5-6 класів може включати такі розділи: «Математика майже без обчислень», «Задачі на відновлення», «Круги Ейлера», «Логічні задачі на впорядкування множин». У 5 класі варто робити акцент на розвитку в учнів зацікавленості до предмета і пропонувати вивчення тем: «Чи вмієте ви мислити логічно?», «Задачі на сірниках», «Задачі на переливання», «Задачі на зважування». Вивчення цих тем спирається на провідні вікові особливості учнів, а саме на їхній життєвий досвід та предметну діяльність. Опрацювання пропонованих тем сприяє зацікавленню математикою ще й формуванню в школярів просторової уяви, здатності до аналізу й послідовного мислення, пошукової активності, спонукає учнів до подальшого вивчення математики.

У 6 класі пропонується більше уваги приділити таким темам: «Задачі на відновлення», «Круги Ейлера і математика», «Логічні задачі на впорядкування множин». Учні ознайомляться з методикою розв'язування числових ребусів, криптограм; навчаться використовувати круги Ейлера при розв'язуванні логічних задач; ознайомляться з різними способами розв'язування задач на впорядкування множин і розв'язуватимуть їх, обравши найраціональніший спосіб [7].

При підготовці учнів до участі в математичних олімпіадах варто приділити увагу задачам на «Принцип Діріхле». На застосування цього принципу задачі потрібно підбирати арифметичні та геометричні, жартівливі й побутові. Учням цікаво в них вибирати щоразу «зайців» і будувати для них відповідні «клітки». За допомогою таких задач вчитель може внести в заняття гуртка елемент розваги, що важливо для учнів 5-6 класів. В той же час такі задачі є змістовними. При їх розв’язуванні школярі звичайно мають значні труднощі. Адже необхідно, по-перше, грамотно сформулювати стратегію, а по-друге, довести, що вона дійсно веде до виграшу. Тому завдання даного типу дуже корисні для розвитку розмовної математичної культури, чіткого розуміння того, що означає розв’язати задачу [4].

Варто було б, щоб кожен вчитель математики вів гурток, на якому відбувається підготовка учнів до участі в олімпіадах, готуються і проводяться інтелектуальні ігри («Брейн-ринг», «Найрозумніший», математичні КВК та інше).

Улюбленою грою учнів є міжнародна математична гра – конкурс «Кенгуру». Якщо зазвичай на олімпіадах незначна кількість призових місць, то за участь у «Кенгуру» весь клас може мати високі результати. Серед задач, які пропонуються на цьому конкурсі є такі красиві задачі, які мають дуже прості розв'язки, залишається тільки здогадатися, яку саме властивість треба застосувати. Така робота сприяє розвитку інтересу до математики і розвитку творчих здібностей школярів.

Популяризація математичних ідей та підтримка талановитих школярів, розвиток їх інтелектуальних здібностей, активізація творчої діяльності вчителів, створення дієвих передумов щодо інтеграції України до європейського та світового освітнього простору відбувається і у рамках Міжнародного чемпіонату з розв'язування логічних математичних задач. Всеукраїнський етап цього чемпіонату проводиться в Україні спільно з Міжнародним комітетом математичних змагань та Французькою федерацією математичних змагань на базі Вінницького міського центру з інтеграції до європейського та світового освітнього простору при середній загальноосвітній школі I-II ступенів – ліцеї №7 м. Вінниці.

Також є цікавими змагання з усного рахунку "Прангліміне" – це змагання з усного математичного рахунку в режимі онлайн, яке проводиться на освітньому сайті Міксіке http://lviv.miksike.net за підтримки Arengukoostöö Programm (Estonian Development Cooperation) Міністерства закордонних справ Естонії (http://vm.ee/en). Змагання розвивають навички усних математичних розрахунків, дають можливість активно спілкуватися між собою учасникам змагань із різних країн. Цього року у змаганнях беруть участь представники Естонії, Литви, Латвії, України та Словенії. Відповідно до правил, змагання відбуваються у таких вікових категоріях, як дослідники 4-6 класів.

Щодо літератури для підготовки учнів та вчителів до математичних олімпіад, то варто зупинитися на наступних посібниках. У посібнику авторського колективу Козлова О. М., Лискова С. М., Чатова С. О. представлено програму організації гуртка в 5-6 класах. Матеріал розбито на теми, серед яких є «Подільність чисел», «Комбінаторні задачі», «Задачі-забави», «Задачі-казки», «Принцип Діріхле», «Кола Ейлера», «Софізми», «Математична мозаїка» та інші. Кожна тема містить короткі теоретичні відомості, задачі, їх розв'язки, вказівки, відповіді [6].

Збірник розвиваючих задач для учнів 5-7 класів авторів Басанько А. М. та Романенко А. О. містить 700 задач, об'єднаних у 13 розділів. Матеріал кожного розділу поданий за рівнем складності, при цьому збірник містить велику кількість задач. Задачі розташовані за принципом спільності міркувань так, що кожній групі задач передує розв'язана задача-приклад. До більшості задач наводяться розв'язання (або вказівки) та відповіді [2].

Інтернет-джерело (http://www.olymp.vinnica.ua) або (http://netoi.org.ua) «Центр олімпіад школярів в Інтернеті» [9]. На сайті представлені тренувальні вправи для самостійного розв'язування. Багато із запропонованих задач з коментарями та вказівками. Також на сайті представлені авторські розв'язання задач.

На сайті Департаменту освіти Вінницької міської ради представлені завдання, розв'язки, критерії оцінювання завдань та підсумки олімпіад II, III, IV етапів, починаючи з 2010 року по 2015 рік. До того ж учасник олімпіади може легко переглянути результати своєї роботи.

Висновки. Обдаровані діти – майбутній цвіт нації. Завдання учителя полягає в тому, щоб дбайливо ростити нові таланти, починаючи з шкільного віку.

У сучасній школі учень досить рідко отримує можливість сприйняти математику в її різних проявах як єдину цілісну науку. А складний та захоплюючий процес математичного відкриття найчастіше залишається зовсім осторонь освіти. Вчені-математики вважають, що розв'язування олімпіадної задачі – це майже завжди шматочок «справжньої» математики, який дає, хай обмежене, але досить яскраве уявлення про ідеї, методи та естетику цієї науки. З цього приводу Борис Делоне – відомий представник московської математичної школи – якось зазначив: «Велике наукове відкриття відрізняється від ґрунтовної олімпіадної задачі лише тим, що для розв'язання олімпіадної задачі необхідно витратити 5 годин, а для отримання наукового результату – 5000 годин» [3].

Література

1. Амосова Н. В. Математические олимпиады школьников / Н. В. Амосова: Начальная школа, 1995. – №5. – С.13-19.

2. Басанько А. М. За лаштунками підручника з математики в 5-7 класах / А. М. Басанько, А. О. Романенко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2015. – 128 с.

3. Блог учителя математики Рябоволик Алли Констянтинівни [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://allarjabovoluk.blogspot.com/2015/12/blog-post_14.html.

4. Богданович М. Математичне джерельце / М. Богданович. – К.: Веселка, 1988. – 168 с.

5. Буковська О. І. Математична логіка в 5-9 класах / О. І Буковська. – Х.: Основа, 2005. – 174 с.

6. Козлова О. М. Математична логіка (гурток 5-6 класи) / О. М. Козлова, С. М. Лискова, С. О. Чамата. – Черкаси: Посібник, 2008. – 75 с.

7. Пометун О. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід / О. Пометун, Л. Пироженко. – К.: метод. посіб., 2002. – 136 с.

8. Рубльова Б. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України / Б. В. Рубльова. – Львів: Каменяр, 2010. – 549 с.

9. Центр олімпіад школярів в інтернеті [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.olymp.vinnica.ua.

Анотація. *У даній статті розглянуто особливості підготовки учнів 5-6 класів до математичних змагань. Виокремлено періоди підготовки та проведення олімпіад. Проаналізовано літературу та інтернет-джерела для підготовки учнів 5-6 класів до математичних змагань.*

Ключові слова: *підготовка до математичних змагань, основна школа, математична олімпіада, цікава математика, нестандартні завдання, позакласна робота, розвиток мислення, творчий потенціал.*

Тіманова Алла Володимирівна
студентка 3 курсу, спеціальність «Математика»*

ПЛАНУВАННЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ УЧНІВ 10-11 КЛАСІВ У КОНТЕКСТІ ПІДГОТОВКИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ЗМАГАНЬ

Вступ. Одним з ефективних засобів роботи з обдарованими дітьми, формування в учнів навиків самостійного мислення є математичні олімпіади. В сучасних умова практикується їх проведення в 4 етапи: шкільний, районний, обласний та республіканський. І тільки в тих школах, де вчителі з усією відповідальністю відносяться до підготовки і проведення олімпіад, є успіх і результати.

Мета статті. Розкрити поняття, основні ідеї, різні способи та методи планування позакласної роботи учнів 10-11 класів при підготовці до математичних олімпіад.

Виклад основного матеріалу. Для участі в олімпіаді учні повинні мати відповідні знання, бути психологічно і фізично підготовленими, повинні вміти вірно розподіляти час на виконання завдань, долати можливі труднощі.

Завдання олімпіад полягає втому, щоб виявляти і залучати до поглиблених занять улюбленим предметом талановитих учнів, щоб з них готувати майбутніх творчих працівників. На математичних олімпіадах пропонуються завдання, мета яких - виявляти рівень математичних здібностей і математичної підготовки учнів, рівень їх математичної культури, зокрема, володіння правилами логіки. Результати олімпіадних змагань значною мірою залежать від розвитку комбінаційних умінь і швидкості знаходження способу розв’язування нестандартних задач.

Формувати ці вміння і навички в учнів краще розпочинати якнайраніше. Але при цьому не треба забувати про посильність і доступність завдань. Готувати учнів до олімпіад краще індивідуально або невеликими групами з 3-5 осіб. Заняття з підготовки до олімпіад корисно пов’язувати з поглибленим вивченням математики. Вчитель, який навчає учнів в звичайному класі, повинен бути ознайомлений із програмою вивчення математики поглиблено . Адже слід враховувати, що переможці шкільної олімпіади в 10-11 класах будуть змагатися з учнями, які вивчають математику поглиблено.

Успіх роботи такої групи цілком залежить від роботи на уроці, занятті гуртка, від уміння вчителя зацікавити учнів предметом. Після того, як групу створено, вчитель планує свою роботу, складає перспективний план підготовки учнів до майбутніх змагань. Участь юних математиків в різних етапах олімпіад - результат великої роботи, що проводив вчитель протягом року. Щоб якісно підготувати учнів до олімпіади бажано ознайомити їх з усіма типами олімпіадних завдань,зокрема з такими:

а) на відшукання простих закономірностей ;

б) з глибоким підтекстом, що допускає природні узагальнення ;

в) на відшукання умов, при яких можуть існувати математичні об’єкти;

г) на застосування відомих математичних положень у нових умовах ;

д) задачами, які вимагають нестандартних форм розв’язання ;

е) задачами, що захоплюють дітей своєю фабулою ;

ж) задачами з оригінальними і цікавими розв’язаннями, які можна знайти лише глибоко проникаючи в суть математичних понять.

Розв’язування олімпіадних завдань є основою підготовки до майбутньої наукової діяльності, хоч це зазвичай не потребує знань, що виходять за межі шкільної програми. Такі задачі, як правило, сформульовано так, що вони не належать до жодного зі стандартних типів задач шкільного курсу математики. Тому розв’язування кожної з таких задач потребує особливого підходу, знаходження якого вимагає від учня інтенсивної творчої праці. Вміння розв’язувати нестандартні задачі свідчить про глибоке володіння математичним апаратом, а володіння предметом набагато важливіше, ніж тільки «чисті знання», які завжди можна поповнити за допомогою хороших довідників.

При розв’язуванні нестандартних задач часто допомагають загальні принципи:

1) перетворити задачу до вигляду, зручного для розв’язування ;

2) розглянути частковий, найбільш простий випадок, а потім узагальнити ідею розв’язання ;

3) припустити, що твердження задачі – неправильне. Якщо з цього припущення отримаємо протиріччя, то твердження задачі є правильним – доведення від супротивного ;

4) розбити задачу на кілька простих під задач ;

5) узагальнити задачу. Часто дослідження більш загальної проблеми вимагає менших зусиль, ніж дослідження її часткового випадку – «парадокс винахідника» .

На олімпіаді всі завдання різного типу. Розв’язувати задачі на математичні олімпіаді можливо багатьма методами. Ось один з них.

При розв’язуванні олімпіадних задач інколи виникає потреба обґрунтувати, що певна властивість виконується для довільного натурального числа .

Перевірити задану властивість для кожного натурального числа ми не можемо — їх кількість нескінченна. Тоді нам допоможе метод математичної індукції. Він є одним з універсальних методів доведення математичних тверджень, у яких містяться слова «для довільного натурального n» (можливо, не сформульовані явно). Доведення за допомогою цього методу завжди складається з двох етапів:

1) початок індукції : перевіряють, чи виконується розглядуване твердження при n =1;

2) індуктивний перехід : доводять, що коли задане твердження виконується для k, то воно виконується і для k +1.

Таким чином, почавши з n =1, ми на основі доведеного індуктивного переходу одержуємо справедливість сформульованого твердження для n =2,3,.., тобто для будь-якого натурального n.

Приклад 1.

Доведіть, що $2^n > 2n+1$, якщо $n \geq 3$, $n \in N$.

Розв'язання

Оскільки твердження повинно виконуватися починаючи з n=3, то перевірку проводимо саме для цього числа.

1. При n=3 одержуємо $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, тобто $8 > 7$ - правильна нерівність. Отже, при n=3 задана нерівність виконується.

2. Припускаємо, що задана нерівність виконується при $n = k$(де $k \geq 3$): $2^k > 2k+1$, тобто $2^k - 2k - 1 > 0$. (1)

3. Доведемо, що задана нерівність виконується і при $n = k + 1$, тобто доведемо, що $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$.

Розглянемо різницю:

$2^{k+1} - (2(k+1)+1) = 2^k \cdot 2 - 2k - 3 = 2(2^k - 2k - 1) + 2k - 1 > 0$ (оскільки вираз у дужках за нерівністю (1) додатний і при $k \geq 3$ вираз $2k - 1$ теж додатний). Отже, $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$, тобто задана нерівність виконується і при $n = k + 1$.

4. Таким чином, задана нерівність виконується при всіх натуральних $n \geq 3$.

Для проведення районних математичних олімпіад в 2013 - 2014 навчальному році були запропоновані по 5 завданнь в кожному класі. Наведемо приклади декількох завдань, які були запропоновані в 10 - 11 класах :

1. На вступних екзаменах в університет учень повинен відповісти на 80% питань правильно. Петро опрацював 15 питань. Він упевнений, що на 10 з них відповів правильно. Якщо Петро відповість правильно на всі питання, що залишились у тесті, він пройде тест рівно на 80%. Скільки питань у тесті?

Віповідь та вказівки: 25 питань.

Нехай тест має x завдань. Оскільки з перших 15 задач він зробив 10 правильно, а решта усі задачі він повинен був зробити правильно, щоб отримати 80% від усіх задач, то записуємо рівняння :

$$\frac{x-5}{x} = 0{,}8$$

$$0{,}2x = 5$$

$$x = 25$$

2. Знайти квадратний тричлен з цілими коефіцієнтами такий, щоб один із його коренів був $1 - \sqrt{3}$.

Вказівки: Якщо квадратний тричлен має корінь $1 - \sqrt{3}$, то він також матиме корінь $1 + \sqrt{3}$. Використовуючи теорему Вієта, матимемо:

$x^2 - ((1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3}))x + (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = x^2 - 2x - 2$.

3. Від правильного трикутника відрізали трикутник так, що утворилась рівнобічна трапеція. Дві такі трапеції приклали сторонами так, що утворився паралелограм. Периметр цього паралелограма на 10 см більший від периметра даного трикутника. Яким є периметр цього трикутника?

Відповідь та вказівки: 30см.

Нехай a – сторона правильного трикутника, а x – менша основа трапеції, що утворилася після відрізання кута. Тоді периметр утвореного паралелограма $P = 2 \cdot ((a + x) + (a - x)) = 4a$. Звідси $a = 10$.

4. У новосформованому десятому класі деякі учні виявилися вже знайомими між собою, а деякі – ні. В перший день навчання кожна дівчинка замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну з незнайомих дівчат. Усього було 117 замріяних поглядів. Скільки в класі хлопців і скільки дівчат, якщо всього в класі не більше 40 учнів?

Відповідь та вказівки: 9 хлопців і 13 дівчат або 13 хлопців і 9 дівчат. Нехай у класі було x хлопчиків та y дівчаток. У кожній парі дівчина-хлопець був рівно один замріяний погляд, тому $xy = 117$. Оскільки $117 = 1 \cdot 117 = 117 \cdot 1 = 3 \cdot 39 = 39 \cdot 3 = 9 \cdot 13 = 13 \cdot 9$, тому умову задачі задовольняють $x = 9$, $y = 13$ або $x = 13$, $y = 9$.

Висновки. Отже, здавалося б, що для учасників олімпіад цілком достатньо тих знань з математики, яких вони здобули в школі (на жаль такі переконання мають і окремі вчителі). Проте багато навіть кращих учнів розгублюються під час проведення олімпіад і не можуть розв’язати запропоновані задачі. В цьому випадку вина саме вчителя, який розвиває у дітей стандартне мислення, по шаблону. Проте, якщо у завданні з’являється щось нове, нестандартне - учні стають безпорадними. І це не дивно - вони засвоїли не способи міркувань, які ведуть до знаходження відповідей, а типові прийоми розв’язування деяких задач.

Завдання олімпіад полягає втому, що б виявляти і залучати до поглиблених занять улюбленим предметом талановитих учнів, щоб з них готувати майбутніх творчих працівників.

Тому завдання гуртка для підготовки до математичної олімпіади полягає у повторенні пройденого матеріалу і вивченні нових шляхів для розв’язування завдань.

Література

1. Конет І. М. Обласні олімпіади з математики / І. М. Конет, В. М. Радченко, Ю. В. Теплінський. За ред. І. М. Конета. – Кам`янець-Подільський: Абетка, 2010. – 388 с.
2. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів : профільн. рівень / Є. П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010.— 416 с.
3. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язання / В. А. Ясінський. – Т.: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 208 с.

Анотація. *У даній статті розглянуто планування позакласної роботи при підготовці до математичних олімпіад, приклади завдань минулорічних олімпіад, помилки які виникають при підготовці учнів до математичних олімпіад.*

Ключові слова: *планування позакласної роботи з математики, підготовка до математичних олімпіад.*

Тютюнник Діана Олегівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика*»

ПОБУДОВА СИСТЕМИ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗАНЯТЬ МАТЕМАТИЧНОГО ГУРТКА З МЕТОЮ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Вступ. Задачний підхід є одним із сучасних напрямів у методиці навчання математики і передбачає організацію освітнього процесу за допомогою включення в нього сконструйованих, залежно від дидактичних цілей, систем задач. Одним із важливих методів розвитку математичних здібностей учнів є розв’язування нестандартних задач.

Формування та розвиток математичної компетентності учнів значно залежить від майстерності вчителя відібрати, створити та оптимально використати в процесі навчання математики цілісну систему задач, в якій чітко вбачаються вчителем і навчальні, і розвивальні, і виховні, і прогностично-діагностичні функції. Одна із специфічних особливостей навчання математики в школі полягає в тому, що саме в процесі методично грамотного розв'язування вдало відібраних задач створюються оптимальні умови для осмислення, сприйняття і застосування навчального матеріалу. Математична підготовка в загальноосвітній школі насамперед спрямована на засвоєння учнями основних алгоритмів розв’язування задач стандартних типів, тому значна роль у вирішенні поставленого завдання належить різним формам позакласних занять. Своєрідним підсумком таких занять можна розглядати математичні олімпіади школярів.

Розв’язування олімпіадних завдань з математики зазвичай не вимагає знань, що виходять за рамки шкільної програми. Такі завдання, як правило сформульовані так, що вони не належать до жодного з стандартних типів завдань шкільного математичного курсу. Розв’язання кожної олімпіадної задачі вимагає особливого підходу, наявність здатності до інтенсивної творчої праці.

Щоб вивчення математики позитивно впливало на інтелектуальний розвиток особистості учня, необхідна відповідна організація навчального процесу. Ключовим елементом у методичному забезпеченні цього процесу є система завдань.

Мета даної статті: розглянути та обґрунтувати місце і роль методично виважених систем задач для занять математичного гуртка з метою підготовки школярів до математичних олімпіад.

Виклад основного матеріалу. Під системою задач ми будемо розуміти сукупність упорядкованих і підібраних, відповідно до поставленої мети, завдань, що діють як одне ціле, взаємозв'язок і взаємодія яких призводить до заздалегідь наміченого результату.

Робота вчителів над розробкою систем математичних задач повинна бути організована з урахуванням психологічних особливостей учнів. Розгляд нового матеріалу на заняттях математичного гуртка слід розпочинати з простих вправ, оскільки вони призначені для початкового осмислення учнями сутностей понять, фактів, тверджень, відпрацювання навичок в стандартних ситуаціях. На наступному етапі проведення гурткової роботи варто запропонувати більш складні завдання. У більш складних завданнях умова може бути сформульована незвично або розв’язання вимагає особливого підходу, кмітливості та нестандартних ідей учнів. Бєляєва Я. І. зауважує, що самостійне правильне розв’язання учнями складних задач є, звичайно ж, бажаним, але не є обов'язковою умовою для побудови вчителем системи задач на заняття.

Зупинимось детальніше на задачах, які варто розглядати на математичних гуртках з метою підготовки учнів до олімпіад. Як приклад вдалої побудови системи задач для занять математичного гуртка, з метою підготовки учнів до математичних олімпіад, розглянемо розробку Бєляєвої Я. І. [2, с.8-10], яка пропонує систему завдань з теми «Теорема Чеви». Ця тема не віднесена до систематичного курсу шкільної планіметрії, проте окремі автори підручників геометрії для школи включають її в додаткові розділи [1, с.217]. Теорема Чеви зручна в застосуванні й легка в запам'ятовуванні, при цьому вона дає загальний метод розв'язування низки задач (на перетин в одній точці висот, медіан, бісектрис, так званих чевіан трикутника). Теорема Чеви дозволяє розв'язати завдання певного типу за допомогою однієї і тієї ж ідеї. Система задач на одне, окреме заняття з теми «Теорема Чеви» може мати вигляд:

Завдання 1. Доведіть, що три медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Завдання 2. Доведіть, що три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Завдання 3. Доведіть, що прямі, що з'єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного кола на протилежних сторонах трикутника, перетинаються в одній точці.

Завдання 4. На сторонах трикутника ABC ззовні побудовані правильні трикутники BCA_1, CAB_1, ABC_1. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

Завдання 5. На чевіані AA_1 трикутника ABC взята довільна точка M. Прямі BM і PM перетинають прямі CA і BA відповідно в точках B_1 і C_1. Розгляньте різні можливості для чевіани AA_1: висота, медіана, бісектриса. а) Доведіть, що чотирикутник BCB_1C_1 – трапеція. б) Чи завжди можна показати, що даний чотирикутник – трапеція?

Завдання 6. Доведіть, що для того, щоб діагоналі AA_1, BB_1, CC_1 вписаного в коло шестикутника $AB_1CA_1BC_1$ перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалося співвідношення: $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A$.

Методичний коментар. Завдання 1, 2 і 3 припускають наявність уміння учнів узагальнювати. Після розв'язування цих задач доцільно нагадати учням, як вони розв'язували ці завдання без застосування теореми Чеви, порівняти отримані розв'язання і обрати більш раціональні. У задачі 3 використовується нове поняття – чевіана. Завдання 4 на застосування теореми Чеви і теореми синусів. Ця задача вимагає розгляду різних видів трикутника ABC, тобто передбачає ґрунтовний аналіз умови. Завдання 5а є завданням з недоліком даних. Завдання 5б передбачає перебір випадків та їх аналіз. Завдання 5б дозволяє застосувати теорему Чеви в нестандартній ситуації – для доведення властивості ділення відрізків у рівних відношеннях. Завдання 6 вимагає вміння «побачити» самостійно, де і в якій формі можна використовувати теорему Чеви і передбачає не цілком очевидний перехід від синусів вписаних кутів до хорд, на які спираються ці кути.

На нашу думку, для закріплення сформованих знань під час розв'язування данної системи задач, варто запропонувати учням домашнє завдання, наприклад, таку задачу: Нехай P - внутрішня точка трикутника ABC. Доведіть, що хоча б один з кутів ABP, BCP, CAP не більший за $30°$ [4].

Крім теореми Чеви, вважаємо необхідним звернути увагу ще на одну тему, побудова системи задач з якої для математичного гуртка є актуальною. Функціональні рівняння фактично не розглядаються в програмі шкільного курсу математики, але пропонуються на математичних олімпіадах різних рівнів починаючи з 9 класу. Розглянемо власну розробку системи завдань з теми: «Функціональні рівняння».

Завдання 1. Покажіть, що задана функція $y = f(x)$ задовільняє задане функціональне рівняння:

1) $f(x) = x + \dfrac{1}{4x}, 4f\left(\dfrac{1}{x}\right) - f(x) = \dfrac{15}{4x}, x \neq 0.$

2) $f(x) = 3x^2, f(\sin x) + f(\cos x) = 3.$

3) $f(x) = \cos x, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y).$

Завдання 2. За яких a функція $f(x) = 1 - x - a$ буде розв'язком функціонального рівняння: $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

Завдання 3. Знайти функцію, яка визначена для всіх дійсних x і задовольняє рівняння: $f(x^n y) = y^n f(x^n)$.

Завдання 4. Знайти на множині дійсних чисел функцію $f(x)$, яка задовольняє співвідношенню: $2f(x)+f(1-x)=x^2$.

Завдання 5. Знайти всі функції $f:R\setminus\{0,1\}\to R$, які задовольняють рівняння

$$f\left(\frac{x}{1-x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=x.$$

Завдання 6. Знайти всі функції $f:R\setminus\{0,a\}\to R$, які задовольняють рівняння $f(x)+2f\left(\frac{a^2}{a-x}\right)=x$, де a - стала, відмінна від 0.

Завдання 7. Знайти всі функції f такі, що рівність $f(x-f(y))=f(y^{2008}-x)+x\cdot f(y)$ виконується для всіх дійсних x,y, а рівняння $f(x)=0$ має тільки один розв'язок.

Методичний коментар. Завдання 1, 2 не є складними і для їх розв'язування достатньо використати мінімальні теоретичні відомості. Формулювання задач спрямоване не лише на закріплення поняття про розв'язок функціонального рівняння, а й на розкриття ідеї одного з методів розв'язування функціональних рівнянь – методу підстановок, який безпосередньо застосовується в 4 завданні. Необхідно наголосити учням, що для змінних, які входять до даного рівняння, використовують деякі підстановки, що не виходять за область визначення шуканої функції; так отримують систему рівнянь, де одним із невідомих є шукана функція. 5, 6 завдання містять невідомі функції, які утворюють групу. Основні труднощі полягають у відшуканні групи та потребують значної уваги при перетворенні рівнянь та розв'язуванні складених систем рівнянь. У 7 завданні необхідно припустити, що дана функція існує та розглянути випадки, коли аргументи функції дорівнюють 0, оцінити їхні значення. Важливим є те, що при розв'язуванні будь-якого завдання із вказаної системи задач необхідно здійснювати взаємоперевірку. Розв'язуючи не окреме завдання, а систему спеціально підібраних вправ і завдань, учень ознайомлюється з новими алгоритмами, опановує нові способи діяльності.

При роботі з такими завданнями учні мають змогу навчитись ставити питання по суті, встановлювати взаємозв'язки, аналізувати ситуацію, приймати правильні рішення. До таких завдань можна віднести ті, які включають елементи дослідження, завдання і вправи на відшукання помилок, завдання з нестачею або надлишком даних, завдання на доведення, цікаві завдання.

Висновки. При побудові системи завдань, які володіють структурною повнотою, необхідно враховувати, що для кожного учня кількість завдань є індивідуальною. Система завдань, яка задовольняє принципу цілісності, структурної повноти, є тією інструментальної складовою, яка може бути використана для якісної підготовки учнів до математичних олімпіад.

Література

1. Апостолова Г. В. Геометрія: Підручник для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. – К.: Генеза, 2005. – 256 с.
2. Бєляєва Я. І. Система задач в математиці як один із засобів розвитку інтелектуальних вмінь.
3. Дюмина Т. Ю. Система задач по математической логике: формирование интеллектуальной компетентности студентов / Т. Ю. Дюмина, М. Е. Маньшин // Изв. Волгогр. гос. пед. ун-та. Сер. : Педагогические науки., 2012. – №7(71). – С. 77-80.
4. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі з геометрії / В. А. Ясінський. – К.: Шкільний світ, 2008. – 128 с.

Анотація. *Розглянуто питання побудови систем задач для занять математичного гуртка з метою підготовки учнів до математичних олімпіад. Пропонується система завдань з математики, спрямована на формування математичної компетентності в учнів.*

Ключові слова: *математичний гурток, математична олімпіада, система задач, методика розв'язування задачі, математична компетентність учнів.*

РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ ТА РОЗВИТОК ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ З АЛГЕБРИ У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ ЇХ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Бак Тетяна Юріївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика*»

РОЗВИТОК КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ УЧНІВ У ВИКОРИСТАННІ РІЗНИХ МЕТОДІВ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ ЇХ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Вступ. Нерівності відіграють дуже важливу роль у математичному моделюванні реальних процесів. Стан математичних компетентностей учнів у процесі розв'язування та доведення нерівностей викликає стурбованість як у вчителів так і в науковців, які досліджують проблеми шкільної математичної освіти. Учні допускають багато помилок при розв'язуванні нерівностей та в завданнях на доведення навіть простих нерівностей. У школі вивчають лише окремі методи доведення нерівностей. На нашу думку, в позакласній роботі з учнями варто розглядати якомога більше методів доведення нерівностей. Це дає можливість учням навчитися у певному завданні обрати самостійно той метод, який є найбільш раціональним та доцільним. Розв'язування вправ на доведення нерівностей, в яких застосовуються різні методи доведення, допоможуть підвищити пізнавальну активність дітей, сприятимуть розвитку в них логічного мислення, вмінню аналізувати, порівнювати, синтезувати та здійснювати узагальнення, розвитку уявлень про деякі важливі ідеї та методи доведення нерівностей, а головне, підвищити рівень математичної підготовки учнів. На математичних олімпіадах школярів є чимало завдань, при виконанні яких учні мають показати своє вміння доводити нерівності. Засвоєння методів розв'язування олімпіадних задач вимагає від учнів напруженої, активної та клопіткої роботи.

Мета даної статті: виокремити прийоми формування умінь учнів використовувати різні методи доведення нерівностей на етапі підготовки їх до різного рівня шкільних математичних олімпіад.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо завдання, запропоноване учням 9 класу на II етапі Всеукраїнської олімпіади з математики 2013 року:

Довести, що $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 8$

Доведення

1 спосіб

1) Подамо ліву частину нерівності у наступному вигляді

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)=\left(1+\frac{y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)=1+\frac{y}{z}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+1=$$
$$=2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right). \quad (1)$$

2) Доведемо, що для довільних $a>0, b>0$ виконується нерівність

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2. \ (2)$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2 \Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0.$$

3) З урахуванням (2), для довільних $x>0, y>0, z>0$ мають місце нерівності $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$, $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2$, $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\ge 2$. (3)

З урахуванням (1) та (3) маємо, що

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)=2+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\ge 2+2+2+2=8.$$

Нерівність доведена.

2 спосіб. Оскільки $x>0, y>0, z>0,$ то помноживши обидві частини нерівності $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 8$ на добуток $xyz>0,$ одержимо рівносильну нерівність $(y+x)(z+y)(x+z)\ge 8xyz.$ (4)

Доведемо, що для будь-яких $x>0, y>0, z>0$ справджується нерівність

$$a+b\ge 2\sqrt{ab}. \quad (5)$$

Тому для будь-яких $x>0, y>0, z>0$ мають місце нерівності $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ $x+z\ge 2\sqrt{xz}$, $y+z\ge 2\sqrt{yz}.$ (6)

З урахуванням (6) маємо, що

$$(y+x)(z+y)(x+z)\ge 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{xz}=8\sqrt{x^2y^2z^2}=8xyz.$$

Нерівність доведена.

3 спосіб. Застосуємо нерівність Коші $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, тому можна записати:

$\frac{1+\frac{x}{y}}{2}\ge\sqrt{1\cdot\frac{x}{y}}$; $\frac{1+\frac{y}{z}}{2}\ge\sqrt{1\cdot\frac{y}{z}}$; $\frac{1+\frac{z}{x}}{2}\ge\sqrt{1\cdot\frac{z}{x}}.$ Звідки $1+\frac{x}{y}\ge 2\sqrt{1\cdot\frac{x}{y}}$; $1+\frac{y}{z}\ge 2\sqrt{1\cdot\frac{y}{z}}$; $1+\frac{z}{x}\ge 2\sqrt{1\cdot\frac{z}{x}}.$ Тоді, маємо

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 8\cdot\sqrt{1+\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{1+\frac{y}{z}}\cdot\sqrt{1+\frac{z}{x}}=8\cdot\sqrt{\frac{xyz}{yzx}}=8.$$

Нерівність доведена.

Методичний коментар. Яким же чином вчитель має працювати з учнями, які братимуть участь у математичних олімпіадах, щоб підготувати їх до виконання подібних завдань? Перед тим як розпочати формувати знань та вмінь учнів про методи доведення нерівностей, слід створити умови для відтворення знань учнів щодо означення нерівності та переліку основних методів їх доведення. Учні мають уміти розкривати дужки, групувати, вміти використовувати формули скороченого множення, знати та вміти застосовувати опорні нерівності. На нашу думку, для формування вмінь учнів доводити нерівності в школі варто ознайомити їх із використанням наступних основних методів: метод різниці; метод математичної індукції; синтетичний метод; метод використання класичних нерівностей та інші. Для формування компетентностей учнів у використанні методу різниці (за означенням) доведення нерівностей у процесі підготовки їх до математичних олімпіад, вважаємо, ніяких додаткових умов не потрібно, бо це є традиційним завданням для вчителів згідно програм з математики. Як свідчить досвід, особливих проблем в учнів із засвоєнням методу різниці немає. Тому ми зосередимо увагу на інших методах доведення нерівностей.

Суть синтетичного методу доведення нерівностей полягає в тому, що за допомогою певних перетворень нерівність, яку потрібно довести, виводять із деяких відомих (опорних) нерівностей. У ролі таких найчастіше використовують нерівності:

а) $(a-b)^2 \geq 0,$

б) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0,\ b \geq 0,$

в) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ при $ab > 0,$

г) $ax^2+bx+c>0$ при $a>0, b^2-4ac<0,$

д) $a^2+b^2 \geq 2ab.$

Логічна схема такого доведення може бути представлена у вигляді імплікацій $A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_n \to B,$ де A_i - деяка початкова нерівність, $A_i (i=2,3,\ldots,n)$ отримані з неї рівні нерівності, *B* – нерівність, яку потрібно довести. Синтетичний метод доведення нерівностей є достатньо ефективним для отримання бажаного результату, проте учням не завжди зрозуміло, з яких опорних нерівностей потрібно розпочати доведення [3].

На нашу думку, вдала добірка вправ створена вчителем є визначальною для набуття учнями відповідних навиків доведення нерівностей та правильного обрання опорних нерівностей. Розглянемо класичний метод доведення нерівностей, а саме використання нерівності Коші: середнє арифметичне кількох невід’ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного, тобто $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Рівність досягається тільки тоді, коли всі числа рівні між собою. Нерівність Коші для двох чисел: при будь-яких невід’ємних a і b виконується нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ [1]. При навчанні доведень нерівностей класичним методом необхідно поступово підвищувати рівень складності завдань, що допоможе учням виробити навики розв’язування нерівностей. Відповідна добірка вправ буде корисною для того, щоб учні могли розуміти для яких невід’ємних чисел виконується нерівність.

Метод математичної індукції формулюється наступним чином: деяке твердження A_n істинне для будь-якого натурального *n*, якщо:

1) Воно істинне для $n=1$;

2) З того, що *A(n)* істинне для довільного натурального *k*=*n* випливає, що воно істинне для наступного натурального числа $n=k+1$.

Сформульований принцип належить до аксіом натуральних чисел.

Кожне доведення учнями методом математичної індукції передбачає реалізацію таких трьох етапів: на першому показуємо, що істинним є твердження *A(1);* на другому припускаємо, що істинним є твердження $A(k)$ і, виходячи з цього, доводимо, що істинним є твердження $A(k+1)$. Виконані міркування дозволяють стверджувати, що твердження *A(n)* істинне для будь-якого натурального *n*. Рідко використовують узагальнений принцип математичної індукції: твердження *A(n)* істинне для будь-якого натурального $n \geq m$, якщо воно вірне для натурального числа *n*=*m* і з того, що *A(n)* істинне для довільного натурального $n=k \geq m$ випливає, що воно істинне для наступного натурального числа $n=k+1$ [3]. На математичних олімпіадах є чимало завдань, які потрібно довести саме цим методом. На нашу думку, в умовах гурткової роботи на етапі підготовки учнів до математичних олімпіад варто розв’язувати якомога більше вправ на доведення таких нерівностей, які вибрані із текстів попередніх олімпіад школярів з математики. Для прикладу:

1) Для всіх дійсних *a* і *b* доведіть нерівність $9a^4+b^4+6 \geq 12ab$ (II етап Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики, 2011 р.).

2) Доведіть, що для будь-яких додатних чисел *a* і *b* виконується нерівність: $\left(a^2+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b}}$ (2012 р.).

3) Доведіть, що $2^n > 2n+1$, якщо $n \geq 3, n \in N$ (2012 р.).

4) Довести нерівність $a^4 + b^4 \geq a^3 b + b^3 a$ при $a \geq 0, b \geq 0$ (2011 р.).

Висновки. На уроках математики вчителі обмежуються лише деякими методами доведення нерівностей, які обумовлені навчальними програмами з математики. Проте це недостатні умови для формування необхідних умінь учнів. Доцільно ознайомити учнів із різними методами доведення нерівностей на математичних гуртках або іншій формі організації позакласної роботи.

Література

1. Барвінок Р. М. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом Ч.ІІІ. / Р. М. Барвінок, М. О. Козлова. – Черкаси, 2013.

2. Беседін Б. Б. Олімпіадні задачі: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2013 / Б. Б. Беседін, О. А. Кадубовський, В. С. Сьомкін, Н. І. Труш, О. В. Чуйко. – Слов'янськ: Маторін, 2014. – 60 с.

3. Собкович Р. Основні методи доведення нерівностей / Р. Собкович, Н. Кульчицька – Івано-Франківськ, 2014. – 100 с.

Анотація. *У статті описано декілька способів доведення нерівностей та обґрунтовано доцільність розширення умов навчання учнів доводити нерівності в школі.*

Ключові слова: *доведення нерівностей, синтетичний метод, нерівність Коші, метод математичної індукції.*

Баран Тетяна Романівна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика*»
Райковська Олександра Миколаївна
студентка 2 курсу, спеціальність «Математика*»

СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ УЧНІВ ПРО НЕРІВНОСТІ В ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Вступ. Кожного року одні з кращих юних знавців математики є учасниками різних етапів олімпіад з математики. Підготовка учнів до олімпіади вимагає від учителя великої підготовчої роботи. Участь в олімпіадах потребує від учнів не лише знань з основного курсу, а й засвоєння додаткових знань, вміння використовувати їх у нестандартних ситуаціях, трансформувати знання для розв’язання олімпіадних завдань. Але до цього учнів необхідно готувати цілеспрямовано та систематично, зокрема, вчити різні прийоми розв’язування задач.

У сучасній математиці нерівності відіграють велику роль. Є ціла низка окремих галузей сучасної математики, де нерівностям відводиться центральне місце. Задачі на доведення нерівностей, як правило, є необхідним елементом кожної математичної олімпіади.

Мета даної статті. Проаналізувати методи доведення нерівностей в шкільному курсі алгебри. Дослідити методи, які можна подати учням на додаткових заняттях та розглянути завдання учнівських математичних олімпіад різних етапів.

Виклад основного матеріалу. У шкільному курсі математики розглядаються такі методи доведення нерівностей: за означенням, синтетичний метод, метод від супротивного.

Доведення нерівностей за означенням полягає в тому, що розглядають різницю лівої та правої частини нерівності і доводять, що ця різниця набуває значень постійного знака при будь-яких значеннях змінних.

Синтетичний метод включає в себе прийоми спрощення нерівностей, застосування очевидної нерівності, застосування раніше доведених нерівностей.

Ці методи доцільно додатково розглянути на факультативних заняттях для кращої підготовки учнів до математичних олімпіад.

Розглянувши завдання II етапу всеукраїнських олімпіад з математики можна помітити, що матеріал поданий у шкільній програмі є достатнім для розв'язування поданих нерівностей.

1. $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$, де $x>0, y>0$

(Доцільно використати метод за означенням)

2. $\frac{a^2+4}{2}\geq\sqrt{a^2+3}$

(Доцільно скористатися синтетичним методом)

3. $\frac{b+c}{a}+\frac{b+a}{c}+\frac{a+c}{b}\geq 6$

(Доцільно застосувати нерівність $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, оскільки з умови відомо, що $a,b,c>0$)

4. $\sqrt{a+\sqrt{b}}\times\sqrt{b+\sqrt{a}}\geq\sqrt{a+\sqrt{a}}\times\sqrt{b+\sqrt{b}}$

(Доцільно скористатися методом доведення «від супротивного»)

5. Довести, що коли $a>0, b>0$ та $a+b=2$, то $a^6+b^6+\frac{a^4+b^4}{a^4b^4}\geq 4.$

(II етап 9 клас 1998-1999рр.)

(Доцільно застосувати нерівність Коші для двох чисел)

6. Довести, що $a^2+b^2+ab+a-b+3>0$ при будь-яких дійсних значеннях a і b.

(II етап 9 клас 2001-2002рр.)

(Доцільно скористатися нерівністю трьох квадратів)

Розглянувши завдання III етапу всеукраїнських олімпіад з математики бачимо, що цього навчального матеріалу недостатньо для доведення нерівностей. Саме тому варто на позаурочних заняттях розглянути додаткові прийоми доведення нерівностей або вивчати додаткові нерівності. Зокрема, можна запропонувати розгляд таких нерівностей :

1) $\frac{a^2}{b} \geq 2a - b,$ де $b > 0;$ $\frac{a^3}{b^2} \geq 3a - 2b,$ де $a > 0, b > 0.$

Загальний запис такого виду нерівностей

$$\frac{a^{n-1}}{b^n} \geq (n+1)a - nb, \text{ де } a > 0, b > 0 \text{ і } n \in N.$$

2) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y},$ де $x > 0, y > 0;$

$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$ де $x > 0, y > 0, z > 0.$

Загальний запис такого виду нерівностей

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}.$$

3) Нерівність Коші-Буняковського-Шварца

Нехай $\left.\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}\right\}$ два набори дійсних чисел

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

$$\bar{a}\left(a_1, \ldots, a_n\right), \ \bar{b}\left(b_1, \ldots, b_n\right).$$

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right)^2 \leq |\bar{a}|^2 \cdot |\bar{b}|^2 \Rightarrow \left|\left(\bar{a}, \bar{b}\right)\right| \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|.$$

Наведемо приклад застосування цих нерівностей для доведення нерівності:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b+c), \text{ при } a > 0, b > 0, c > 0.$$

Розв’язання*:*

1 спосіб**.** Застосуємо ключову нерівність, що

$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, де $x>0, y>0, z>0,$ маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{b+c+a+c+a+b}=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

2 спосіб. Використаємо тричі відому нерівність $\frac{a^2}{b}\geq 2a-b,$ маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}\geq\frac{1}{4}\frac{(2a)^2}{b+c}=\frac{1}{4}(4a-b-c);$$
$$\frac{b^2}{a+c}\geq\frac{1}{4}\frac{(2b)^2}{a+c}=\frac{1}{4}(4b-a-c);$$
$$\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{4}\frac{(2c)^2}{b+a}=\frac{1}{4}(4c-b-a).$$

Додамо отримані нерівності, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{4}(4a-b-c+4b-a-c+4c-a-b).$$

Отже, $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a+b+c).$

3 спосіб. Розглянемо два набори чисел $(\sqrt{b+c};\sqrt{a+c};\sqrt{b+a})$ і $\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}};\frac{b}{\sqrt{a+c}};\frac{c}{\sqrt{b+a}}\right)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\left(\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{a+c}\right)^2+\left(\sqrt{b+a}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a+c}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{b+a}}\right)^2\right)\geq$$
$$\left(\sqrt{b+c}\cdot\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{a+c}\cdot\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\sqrt{b+a}\cdot\frac{c}{\sqrt{b+a}}\right)^2,$$

тоді

$$(b+c+a+c+a+b)\cdot\left(\left(\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(\frac{b^2}{a+c}\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}\right)\right)\geq(a+b+c)^2,$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2x+2y+2z}.$$

Отже $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$[2].

Висновки. Вивчення додаткових нерівностей в основній школі сприяє формуванню системних знань з алгебри, та позитивного ставлення до навчального предмету. Навики використання яких перевіряються на математичних олімпіадах різних рівнів. Для доведення нерівностей використовують різні прийоми і потрібно пам'ятати, що універсального методу доведення нерівностей не існує, кожна нерівність потребує індивідуального підходу до доведення.

Література

1. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007-2008, 2008-2009, 2010 / А. Р. Арман, Є. О. Білокопитов, О. М. Добасевич, О. О. Клурман, Г. В. Крюкова. – Львів:Каменяр, 2010. – 549 с.
2. Барвінок Р. Л. Готуємося до математичних олімпіад і конкурсів разом (Ч ІІІ) / Р. Л. Барвінок, О. М. Козлова. – Черкаси, 2013. – 58 с.
3. Конет І. М. Обласні математичні олімпіади / І. М. Конет, В. Г. Паньков, В. М. Радченко, Ю. В. Теплінський – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2005. – 343 с.
4. Кравчук В. Алгебра: Підручник для 9 класу / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко – Тернопіль: Підручники і посібники, 2009. – 256 с.
5. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Боглан, 2005. – 208 с.

Анотація. *Розглянуто методи розв'язання нерівностей у шкільному курсі математики та досліджено методику використання цих методів при підготовці учнів до математичних олімпіад*.

Ключові слова: *нерівність, доведення нерівності, методи доведення нерівностей , олімпіадні задачі.*

Бикова Юлія Олександрівна
студентка 1 курсу, спеціальність «Математика»*

Павлишен Володимир Віталійович
студент магістратури, спеціальність «Математика»*

НАВЧАННЯ УЧНІВ ЗНАХОДИТИ ІНВАРІАНТ У ЗАДАЧАХ НА ДОВЕДЕННЯ

Вступ. Олімпіадні задачі в математиці – термін яким визначається широке коло задач, для вирішення яких обов'язково потрібно несподіваний і оригінальний підхід, гнучкість розуму та винахідливість.

Олімпіадні задачі отримали свою назву від популярних змагань школярів і студентів, так званих математичних олімпіад. Мета створення задач цієї категорії – виховання в школярів таких якостей як творчий підхід, нетривіальне мислення та вміння вивчити проблему з різних сторін. Існує досить велике коло ідей, ключових для розв’язання таких задач. Відповідно до кожної визначається спосіб розв’язання. Одним із таких способів є розв’язання задачі за допомогою інваріанту.

Мета даної статті. Надати рекомендацій щодо формування знань і вмінь учнів про інваріант у задачах на доведення.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо одне дуже важливе математичне поняття – інваріант. Буває воно в задачах, де ми маємо справу з якимись операціями, з якимось процесом, який змінює даний в умові об'єкт. От якщо у об'єкта є якась властивість або характеристика, яка не змінюється при цих операціях – вона і називається інваріантом. Інваріант – величина, або характеристика, яка не змінюється в результаті деяких операцій (наприклад, розрізання і перестановка частин фігур не міняє сумарної площі, перестановка цифр в числі не змінює їх суму). Якщо інваріант розрізняє два положення, то від одного не можна перейти до іншого. Як інваріант може використовуватися, наприклад, подільність на три або розфарбовування. [2]

Під час формування у учнів даного поняття слід не просто дати означення, потрібно розглянути його на конкретних прикладах, запропонувати їм самим навести ці приклади. Ключовим етапом до вміння знаходити інваріант в тій чи іншій задачі є власне розуміння самого поняття на рівні застосування [3].

При розв'язуванні задач інколи доводиться мати справу з такою ситуацією: заданий математичний об’єкт послідовно змінює свій стан, і необхідно визначити певну характеристику кінцевого стану. Повністю прослідкувати за всіма переходами буває складно, а то і неможливо, якщо кількість таких переходів досить значна. Тоді знайти розв'язок допомагає обчислення деякої величини, що характеризує стан і зберігається при всіх переходах або перетвореннях. Ця величина – інваріант даного об’єкту, і є ключовою для розв’язання цієї задачі. Найчастіше, задачі де використовується дане математичне поняття – це задачі на доведення того чи іншого факту [1].

Приклад. Задача 1**.** Доведіть, що остача від ділення квадрата цілого числа на 5 не може дорівнювати 3 [1].

Доведення. Спочатку прослідкуємо остачі від ділення квадрата цілого числа на 10. Квадрати натуральних чисел закінчуються цифрами: 0; 1; 4; 5; 6; 9. При їх діленні на 5 одержуємо 0, 1 або 4. Це є інваріантна властивість квадрата цілого числа. Отже, остача від ділення квадрата цілого числа на 5 дорівнювати 3 не може.

Проаналізуємо розв’язання даної задачі. Спочатку розглянуто множину квадратів натуральних чисел, а точніше множину останніх цифр цих чисел, оскільки саме про квадрати цілих чисел йдеться в умові задачі. Далі кожне з можливих закінчень поділили на 5. В результаті отримали обмежену кількість можливих варіантів, які є інваріантом даної задачі і доводять необхідне нам твердження.

Інваріантом може бути властивість або закономірність при зміні математичного об’єкта, розглянемо іще одну задачу, на знаходження інваріанту.

Задача 2 . В таблиці 4х4 плюси та мінуси розставлені так, як показано на малюнку 1. Дозволяється змінити знак на протилежний одночасно у всіх клітинках, розташованих в одному рядку, в одному стовпчику або вздовж прямої, паралельної одній з діагоналей (зокрема, в будь-якій кутовій клітинці). Довдеіть, що не можна отримати таблицю, що не має жодного мінус [2].

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис.1

Розглянеме доведення потрібного нам факту, для цього розглянемо дану таблицю як набір значент, де плюсам відповідає 1, а мінусам -1. Якщо провести операції, дозволені в умові, то можна помітити, що не буде змінюватися добуток чисел в клітинках, зафарбованих, як показано на малюнку 2.

+	+	-	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис.2

А точніше він завжди буде дорівнювати -1. Бо кількість -1 завжди буде непарною. Це і буде інваріантною властивістю даної таблиці і ключем до доведення потрібного твердження. Адже в таблиці де не буде жодного -, дана властивість виконуватись не буде, тому і отримати її неможливо.

Для відшукання інваріанту в описаній вище задачі, учні повинні самостійно здійснити кілька описаних в умові операцій. Перехід від плюсів і мінусів до 1 і -1 не обов'язковий, він просто спрощує розуміння і сприймання того, що відбувається. Далі слід розглянути можливі операції з елементами таблиці, логічно що додавання і віднімання тут не підходить, а от множення даватиме змінний результат в залежності від того, до якого набору значень застосовуватиметься. Таким чином, логічними міркуваннями ми приходимо до того, що добуток виділеної області завжди даватиме -1 в незалежності від кроку перетворення, отже це і є інваріантна властивість.

Окремо, варто відмітити задачі на розфарбовування шахової дошки. Саме вони найчастіше потребують використання інваріантів. Як приклад розглянемо іще одну задачу. Задача 3. Дана шахова дошка. Дозволяється перефарбувати в другий колір одразу всі клітинки якої-небудь горизонталі чи вертикалі. Довести, що в результаті таких перетворень, не може утворитися дошка з лише однією чорною клітинкою [1].

Розглянемо доведення.

При перефарбуванні горизонталі чи вертикалі даної дошки, яка містить n чорних та $8-n$ (оскільки горизонталь чи вертикаль містять 8 клітинок) білих клітинок, отримаємо $8-n$ чорних та n білих клітинок. При цьому кількість чорних клітинок зміниться на парне число, тобто $(8-n)-n=8-2n=2(4-n)$. Таким чином парність чорних клітинок зберігається, із початкових 32 (всього на дошці $8\cdot 8=64$ клітинки, їх половина чорні) чорних клітинок ми не можемо отримати одну чорну клітинку. Доведено. Інваріант даної задачі шукається досить легко, потрібно лише прослідкувати на скільки буде змінюватись кількість шуканих клітинок.

Аналогічним може бути доведення задачі, де буде потрібно довести, що дошку таким чином можна перефарбувати, щоб усі клітинки були однакового кольору.

Висновки. Отже, позакласна робота з учнями, спрямована на формування вмінь і навичок розв'язувати олімпіадні задачі допоможе розвинути в несподіваний і оригінальний підхід, гнучкість розуму та винахідливість.

Мета створення задач такого типу – формування і виховання в школярів таких якостей як : нетривіальне мислення, вміння вивчити проблему з різних сторін та творчий підхід. Серед усіх можливих підходів до розв'язування таких задач, досить важливе місце посідає ідея знаходження інваріанту.

Задачі на відшукання інваріанту важливі , як серед задач на доведення, так і серед усіх олімпіадних задача в цілому. Уміння знаходити і застосовувати інваріанти розширює звичні підходи до розв'язання задач і розвиває в учнів креативність та гнучкість розуму, його творчу сторону в аспекті математики, а також поповнює інструментарій юного математика, щодо розв'язування задач, в цілому.

Література

1. Інваріанти. Інваріант в задачах. [Електронний ресурс] / Блог учителя математики та інформатики Каляфіцької Інни Миколаївни. – Режим доступу: http://kaljafitska.blogspot.com/2015/02/blog-post_11.html?m=1

2. Королев Д. Н. Инварианты в задачах по математике. / Д. Н. Королев // Потенциал,2005. –№9.

3. Математика, которая мне нравитьс [Електронний ресурс] / Сайт математика, которая мне нравится. Инвариант. – Режим доступу: http://hijos.ru/2012/05/02/invariant/

Анотація. *В статті розглянуто задачі на інваріанти та навчання знаходження інваріантів в задачах на доведення*

Ключові слова: *інваріант, доведення, олімпіадна задача.*

Боцюра Катерина Юріївна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика*»

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

Вступ. Нерівність з параметрами – математична нерівність, розв’язання якої залежить від значень одного чи декількох параметрів [3]. Розв’язання завдань з параметрами є одним з найважчих розділів шкільної математики. При розв’язанні завдань з параметрами потрібно, крім належного знання стандартних методів розв’язання рівнянь і нерівностей, вміння проводити досить розгалужені логічні побудови, акуратність і уважність для того, щоб не втратити розв’язки і не отримати сторонні. Це вимагає від школяра більш розвиненого логічного мислення і математичної культури, але, у свою чергу, ці завдання самі сприяють їх розвитку.

Мета даної статті розглянути особливості розв’язування лінійних нерівностей з параметрами.

Виклад основного матеріалу. Багато методистів, досвідчених учителів пропонують різноманітні шляхи формування вмінь учнів розв’язувати нерівності. Зрозуміло, що формування цілісних знань учнів про нерівності в основній школі має складатись із кількох послідовних кроків. Зокрема, формування вмінь розв’язувати лінійні нерівності із однією змінною, систем лінійних нерівностей із однією змінною, формування вмінь розв’язувати квадратні нерівності із однією змінною, систем квадратних нерівностей із однією змінною. Навчання розв’язуванню окремого типу нерівностей передбачає формування наступних умін:

1) вміння розв’язувати найпростіші нерівності; 2) вміння розв’язувати нерівності, що зводяться до найпростіших, шляхом «нескладних» тотожних перетворень (додавання числа до обох частин нерівності, ділення обох частин нерівності на число, зведення до спільного знаменника та інші); 3) розв’язування нерівностей із змінною під знаком модуля; 4) вміння

розв’язувати найпростіші нерівності з параметрами і нерівності, що зводяться до них, шляхом «нескладних» тотожних перетворень; 5) вміння розв’язувати нерівності, що зводяться до найпростіших, шляхом «складних» перетворень (використання формул скороченого множення, замінна змінних, розкладання на множники, властивості функцій і їх графіків та інше); 5) вміння розв’язувати нерівності з параметрами, що зводяться до найпростіших, шляхом «складних» перетворень.

Вчитель, починаючи пояснення, розглядає конкретний приклад: розв’язати нерівність $ax \le 2$.

Розв’язання. При розв’язуванні нерівності слід розглянути випадки $a < 0,\ a = 0,\ a > 0.$

1) $a < 0$. Поділимо ліву і праву частини нерівності на число a. Оскільки $a < 0$, то при діленні на від’ємне число знак нерівності змінюється на протилежний. Маємо $x \ge \frac{2}{a}$.

2) $a = 0$. Маємо $0 \cdot x \le 2,$ x – будь-яке число.

3) $a > 0$. Поділимо ліву і праву частини нерівності на число a. Оскільки $a > 0$, то при діленні на додатне число знак нерівності не змінюється. Маємо $x \le \frac{2}{a}$.

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x \ge \frac{2}{a}$; якщо $a = 0$, то x – будь-яке число;

якщо $a > 0$, то $x \le \frac{2}{a}$. [1]

Таким чином, свідоме засвоєння – одна з необхідних умов міцності знань. Але свідомість засвоєння забезпечується активною розумовою діяльністю учнів. Тому необхідною умовою міцності знань є придбання їх активним чином. Однак цієї умови не достатньо. Несистематизовані, що не пов'язані між собою спільними ідеями знання не можуть бути міцними. Систематичність забезпечується науковістю навчання. Для забезпечення міцності знань необхідна ще і відповідна організація навчання, що враховує результати досліджень механізму запам'ятовування.

В лінійних нерівностях може відбуватися параметризація: вільного члена, коефіцієнта при змінній чи, навіть, ці два випадки одночасно. Тому доцільно учням запропонувати алгоритм розв’язання такого виду нерівностей (Рис.1).

$$ax>b$$

$a>0$ $x>\frac{b}{a}$	$a<0$ $x<\frac{b}{a}$	$a=0$ $b>0$ розв’язків немає	$a=0$ $b<0$ безліч розв’язків

Рис. 1

З отриманою схемою досить легко розв’язувати лінійні нерівності, але вчителеві потрібно звернути увагу і на нестандартні підходи до розв’язування таких завдань: при будь-якому значенні параметра a розв’язати нерівність $\frac{a+2}{a-1}x-\frac{2}{3}<2x-1.$

Розв’язання. Знаємо, що якщо $a=1$, то $x\in\varnothing$.

Якщо $a\neq 1$, то $\left(\frac{a+2}{a-1}-2\right)x<-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{a+2-2a+2}{a-1}x<-\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4-a}{a-1}x<-\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow \frac{a-4}{a-1}x>\frac{1}{3}.$

Розглянемо випадки: 1) $\frac{a-4}{a-1}=0$, звідси $a=4$, тоді $0x>\frac{1}{3}\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

2) $\frac{a-4}{a-1}>0$, звідси отримуємо, що $a\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$, маємо $x>\frac{a-1}{3(a-4)}.$

3) $\frac{a-4}{a-1}<0$, звідси $a\in(1;4)$, а $x<\frac{a-1}{3(a-4)}$.

Відповідь. Якщо $a=1$ або $a=4$, то $x\in\varnothing$;

якщо $a \in (-\infty;1) \cup (4;+\infty)$, то $x > \dfrac{a-1}{3(a-4)}$;

якщо $a \in (1;4)$, то $x < \dfrac{a-1}{3(a-4)}$ [5].

Отже, до розв'язувань лінійних нерівностей з параметрами існує загальний алгоритм, але є нерівності, в яких використовується нестандартний підхід.

Висновок. Урок розв'язання таких вправ доцільно проводити із використанням сучасних інформаційних технологій. Для успішного формування і вмінь учнів розв'язувати нерівності з параметрами доцільно скласти добірку вправ, яка містить вправи, що пропонувалися у завданнях державної підсумкової атестації.

Література

1. Кушнір І. Нерівності / І. Кушнір. – Київ: АСТАРТА, 1996. – 541 с.

2. Михайленко Л. І. Задачі з параметрами / Л. І. Михайленко, Т. Г. Платова. // Математика в школах Україна, 2008. – №16-18. – С. 1-77.

3. Мочалов В. В. Рівняння та нерівності з параметрами: Навчальний посібник / В. В. Мочалов, В. В. Сильвестров. – Москва: ЧувГУ, 2006. – 192 с.

4. Фалілеєва М. В. Методичні аспекти розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами / М. В. Фалілеєва // Фундаментальні дослідження, 2013. – № 4.– С. 1230-1235.

5. Шаригін І. Ф. Факультативний курс з математики: навчальний посібник для 10 класу/ І. Ф. Шаригін. – М., 1989. – 348 с.

Анотація. *У даній статті розглянуто особливості розв'язання нерівностей з параметрами, які пов'язанні з розміщенням параметрами. Також наведено зручний алгоритм розв'язання таких завдань.*

Ключові слова: *нерівність, рівняння, нерівності з параметрами, квадратна нерівність, лінійна нерівність.*

Бурлачук Ірина Миколаївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика*»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД ШКОЛЯРІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІВ

Вступ. Починаючи з 7 класу учні навчаються в школі розв'язувати системи лінійних рівнянь з двома невідомими. На олімпіадах та різноманітних математичних конкурсах учні можуть зустрічатися із системами лінійних рівнянь з трьома невідомими. В шкільній програмі з математики розглядаються три способи розв'язування систем рівнянь: спосіб підстановки, спосіб додавання та графічний спосіб. Перші два способи використовуються найчастіше, проте вони змушують виконувати алгебраїчні обчислення, що бувають досить громіздкими. Третій спосіб учні розглядають для подальшого використання його при розв'язунні рівнянь з параметрами. На нашу думку, варто ознайомити учнів, що готуються до математичних олімпіад, із цікавим методом розв'язування систем рівнянь – метод графів.

Мета даної статті: виокремити та обґрунтувати методичні рекомендації щодо технології ознайомлення учнів у процесі позакласної роботи із методом графів для розв'язування систем рівнянь.

Виклад основного матеріалу. Перед тим як розпочати формувати знання учнів про метод графів потрібно ознайомити їх з основними поняттями елементів теорії графів. Учні мають знати, що таке граф, ребро, орієнтоване ребро, орієнтований граф, степінь входу та степінь виходу вершини.

Щоб навчитися розв'язувати системи рівнянь за допомогою графів учні мають зрозуміти наступне. Для розв'язування систем рівнянь користуються орієнтованими графами. Вершина графа відповідає змінній, ребро, що виходить із вершини – коефіцієнту при цій змінній. Кожна вершина характеризується змінною системи (x , y , тощо), а ребро – числами a , b, c . Ребро можна будувати, якщо коефіцієнт при змінній відмінний від 0. В орієнтованих графах будемо розрізняти чотири види вершин. Вершина, у якої степені виходу і входу дорівнюють 0, називається ізольованою. Вершина, у якої степінь виходу більша 0, а степінь входу дорівнює 0, називається джерелом. Вершина, у якої степінь входу більша 0, а степінь виходу дорівнює 0, називається стоком. Вершина, у якої і степінь входу і степінь виходу більші 0, називається простою каскадною [4]. На рис. 1 вершина E – ізольована, F – джерело, D – сток, A, B, C – прості каскадні

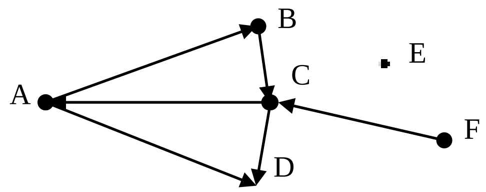
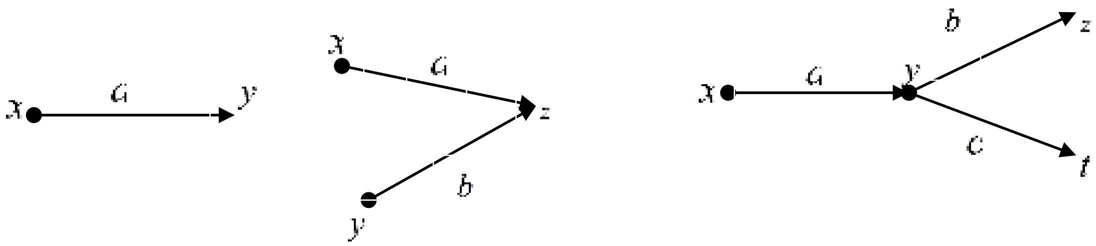


Рис. 1

Якщо початок наступного ребра збігається з кінцем попереднього, то такі ребра називаються послідовними. Ребра, які виходять з однієї і тієї ж вершини і входять в одну і ту ж вершину, не проходячи через інші, називають паралельними.

Побудуємо модель лінійного рівняння або системи рівнянь за допомогою графів. На рис. 2 подано окремі приклади таких моделей. Щоб виключити якусь змінну на графі, потрібно перетворити відповідну вершину у вершину з входом та виходом (каскадну).



$y = ax$ $\qquad$ $z = ax + by$ $\qquad$ $\begin{cases} y = ax, \\ z = by, \\ t = cy. \end{cases}$

Рис. 2

На рис. 3 представлено основні перетворення графів і відповідні алгебраїчні перетворення рівнянь або систем, які використовуються при розв’язуванні рівнянь та систем рівнянь [3].

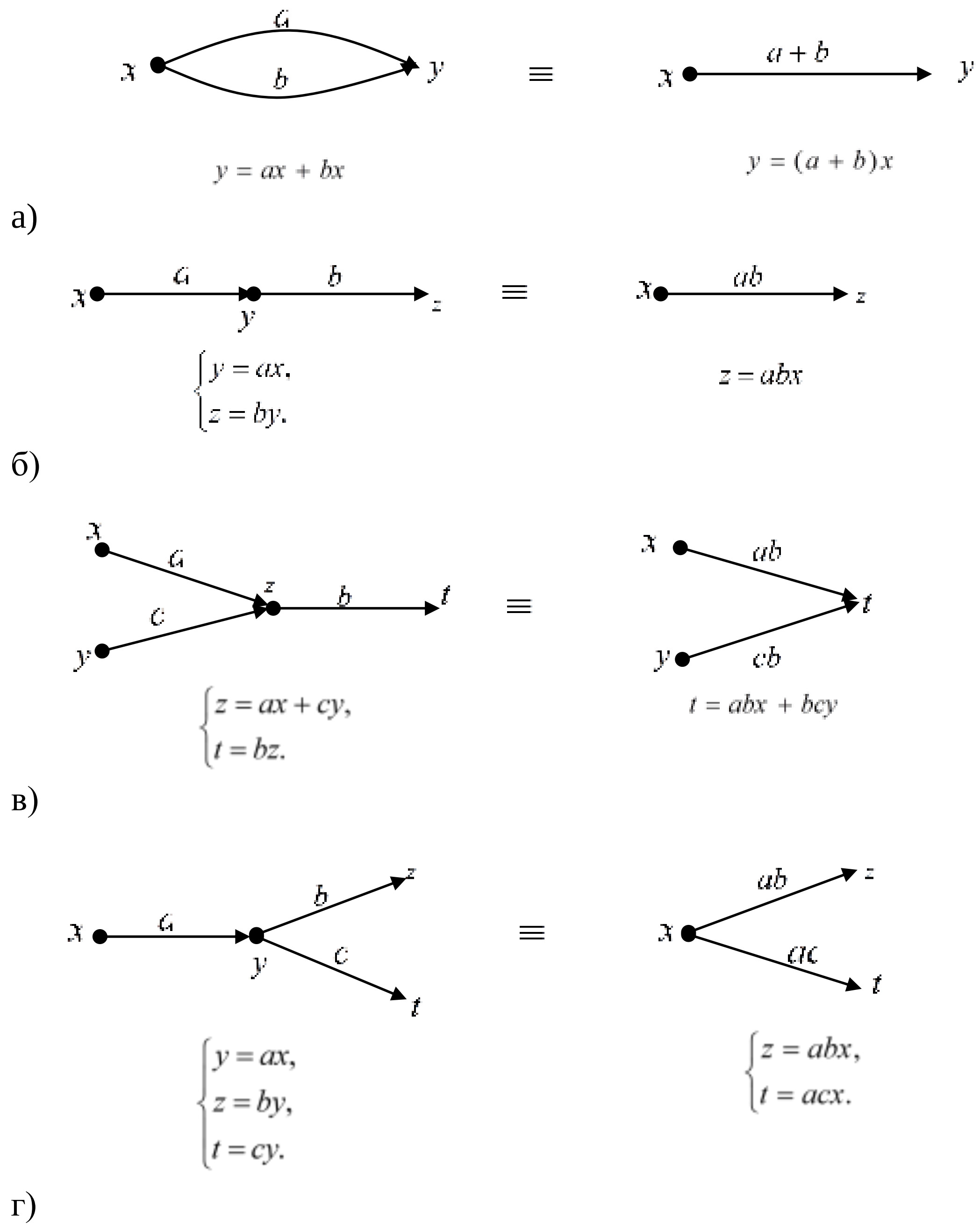


Рис. 3

Дані перетворення (рис. 3) треба розуміти так:

А) два або кілька паралельних ребра можна замінити одним, яке дорівнює сумі паралельних ребер (рис. 3 а);

Б) два або кілька послідовних ребер можна замінити одним, яке дорівнює добутку послідовних ребер (рис. 3 б).

Для того, аби учні краще засвоїли перетворення, які можна виконувати з графами та відповідні їх алгебраїчні перетворення, необхідно кожне з перетворень закріпити розв'язуванням декількох простих рівнянь з допомогою графів.

Щоб виразити одну змінну через інші, необхідно вершину, яка відповідає цій змінній зробити входом. На рис. 4 показано як зміниться ребро при зміні входу.

Рис. 4

Якщо вихід і вхід міняються місцями (рис. 4), то ребро на новому графі виражається числом, оберненим значенню ребра на початковому графі.

При зміні входу ребра, яке виходить із того самого виходу, наприклад y, ребро на новому графі буде виражатися числос, що дорівнює добутку числа, протилежного значенню ребра ($-b$), яке спочатку виходило з цього виходу (рис. 5), і нового ребра, яке змінило напрям (рис. 4).

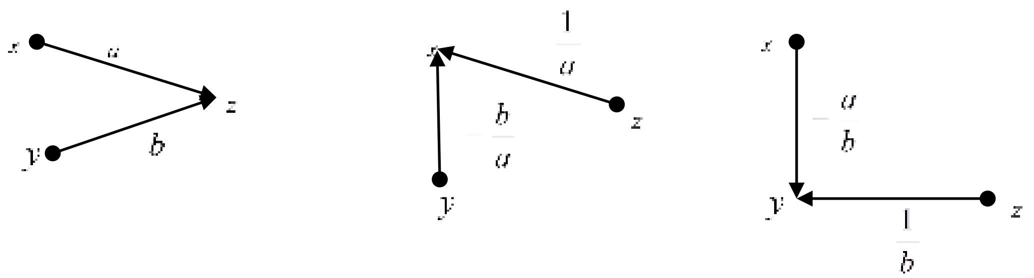


Рис. 5

Дане перетворення є складнішим для розуміння та запам'ятовування, тому, можливо, його потрібно буде декілька раз пояснити та закріпити на прикладах, оскільки, при розв'язанні систем рівнянь за допомогою графів, дане перетворення використовується постійно.

У процесі перетворення графа потрібно прагнути до поступового перетворення вершин-джерел у прості каскадні.

Розглянемо для прикладу завдання, яке було запропоноване на II етапі Всеукраїнської олімпіади з математики 2014 року у Донецькій області для 8 класу: Хлопчик записує на дошці одне за одним числа. Кожне число, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. Відомо, що четверте число дорівнює 6, а шосте дорівнює 15. Чому дорівнює сьоме число?

Після здійснення деяких міркувань дана задача зводиться до системи рівнянь $\begin{cases} a+2b=6, \\ 3a+5b=15. \end{cases}$

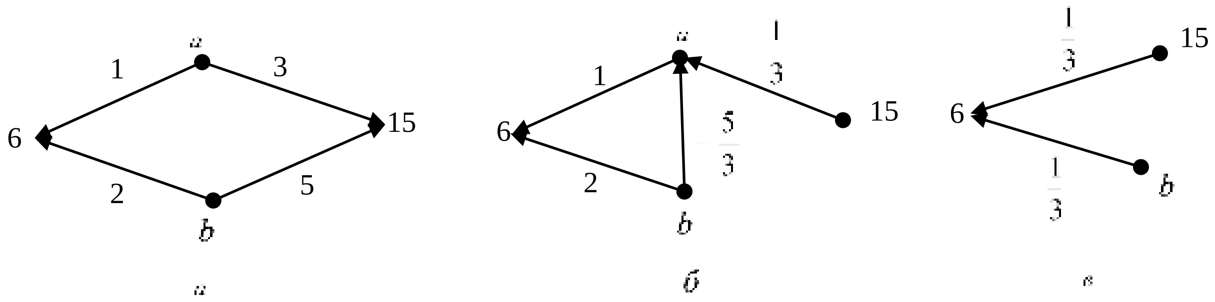


Рис. 6

Граф, поданий на рис. 6 а, відповідає базовій системі. Граф на рис. 6 б, отримали шляхом зміни стоку. Вершина-джерело a перетворилася в просту каскадну вершину. Граф на рис. 6 в, дістали, змінивши послідовні й паралельні ребра графа (рис. 6 б) окремими ребрами. Розв'язування системи зводиться до розв'язання рівняння першого степеня з однією змінною, яке відповідає графу, зображеному на рис. 6 в: $6=15\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b$; $\frac{1}{3}b=1$; $b=3$.

Щоб знайти a, треба в рівняння, що відповідає графу, поданому на рис. 6 б, замість змінної b підставити її значення. Оскільки ребра, що виходять з вершини, на її значення не впливають, досить розглянути частину графа, де вершина x є стоком (рис. 7) і записати відповідне рівняння: $a=-\frac{5}{3}b+15\cdot\frac{1}{3}$; $x=0$

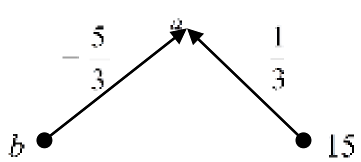


Рис. 7

Далі за готовою формулою обчислюємо сьомий член послідовності.

Висновки. У процесі ознайомлення учнів із способом графів використовуються лише ті знання і уміння, які учні отримали під час уроків математики при вивченні розв'язування лінійних рівнянь з одним невідомим. Як відомо, будь-яка пропозиція щодо внесення чогось нового з математики для вивчення або ознайомлення учнів викликає супротив вчителів через брак часу на вивчення математики в школі. На нашу думку, запропонований нами матеріал може бути опрацьований під час позакласної роботи, у формі гуртка або індивідуальних занять.

Література

1. Глобин А. И. Методика обучения решению текстовых алгебраических задач с применением графов (6-8 класс).: Дисс. канд. пед. наук: 13.00.02 – К., 1988. – 180 с.
2. Лисенко В. І. Розв'язування системи лінійних рівнянь за допомогою графів // У світі математики. 1974,. – № 5. – с. 48-56.
3. Попов В. М. Дидактика математики: проблеми і дослідження // 2004. – Вип.21.
4. Уилсон Р. Введение в теорию графов // М.: Мир, 1977. – 208 с.

Анотація. *Показано один із нетрадиційних методів розв'язування систем лінійних рівнянь з використанням теорії графів. Наведено приклад олімпіадного завдання з мать тематики, з його розв'язанням методом графів*

Ключові слова: *теорія графів, орієнтований граф, вершина-джерело, стокова вершина, ізольована вершина, каскадна вершина.*

Ваколюк Ганна Андріївна
студентка 3 курсу, спеціальність «Математика*»

ДОБІР ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОГО ХАРАКТЕРУ, ЯКІ РОЗВ'ЯЗУЮТЬСЯ ШЛЯХОМ ЗНАХОДЖЕННЯ БІЄКЦІЇ

Вступ. Комбінаторні задачі є складним типом задач з математики. Задачам з комбінаторики відводиться зовсім небагато навчального часу, проте для роботи із здібними до математики учнями бажано було б в межах позакласної роботи познайомити їх з основними методами і прийомами розв'язування комбінаторних задач. Разом з тим не можна із впевненістю сказати, що розроблена чітка методика навчання розв'язування комбінаторних задач. Одному із методів розв'язування комбінаторних задач – побудові між даною множиною (кількість елементів якої ми хочемо порахувати) і деякою іншою множиною (кількість елементів якої легше обчислюється) присвячена дана стаття.

Мета даної статті ознайомити з методом розв'язування комбінаторних задач на побудову взаємно однозначного відображення між множинами; висвітлити добірку задач для закріплення навичок розв'язування задач вказаним методом.

Виклад основного матеріалу. Відображення f множини A в множину B називають ін'єктивним, якщо різним елементам множини A відповідають різні елементи з множини B, тобто, якщо з $x_1 \neq x_2$ слідує $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$.

Легко зрозуміти, що якщо множини A і B скінченні, а між ними можна встановити ін'єктивне відображення, то кількість елементів множини A не більша за кількість елементів множини B.

Відображення f множини A в множину B називають сюр'єктивним, якщо кожний елемент множини B має свій прообраз, тобто для кожного $y \in B$ існує $x \in A$ такий, що $f\left(x\right) = y$.

Якщо множини A і B скінченні, а між ними можна встановити сюр'єктивне відображення, то кількість елементів множини A не менша за кількість елементів множини B.

Відображення $f: A \to B$, яке одночасно є ін'єктивним та сюр'єктивним, називається бієкцією, або взаємно однозначною відповідністю.

Якщо f – бієкція, то існує оборотна функція f^{-1}, для якої

$$f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y \text{ [5].}$$

Найважливішим при цьому є таке твердження: якщо множини A і B є скінченними, і між ними можна встановити взаємно однозначне відображення, то ці множини містять однакову кількість елементів.

Цим самим виникає такий метод розв'язування комбінаторних задач. Припустимо, що є задача обчислити кількість елементів в деякій множині A. Ми конструюємо таку нову множину B, що, по-перше, її кількість елементів легше обчислити і, по-друге, між нею та множиною A встановлюється взаємно однозначна відповідність. Якщо це вдається здійснити, то на основі викладеного вище, ми стверджуємо, що кількість елементів множини A дорівнює кількості елементів множини B.

Відмітимо, що відшукання гарних взаємно однозначних відповідностей в комбінаториці – завдання більш глибоке, ніж пошук простих явних формул для кількості об'єктів. Адже дуже часто таких формул просто немає [3].

Розглянемо певну добірку задач на ілюстрацію цього методу.

Приклад 1. Кожній підмножині множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ можна співставити її «код» – рядок довжини *n* із цифр 0 або 1 (на *i*-му місці стоїть 1, якщо *i* входить в підмножину, і 0 – якщо ні). Це – добре відома універсальна бієкція. Вона дозволяє навіть занумерувати всі 2^n підмножини: адже «код» - рядок із 0 та 1 – можна розглядати як двійковий запис числа від 0 до 2^{n-1}.

Задача 1. Скільки існує підмножин множини S, яка містить 5 елементів? Скільки підмножин має множина, що містить *k* елементів?

Розв’язання. Є декілька способів визначення кількості підмножин. Розглянемо два з них.

Перший спосіб. Нехай a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – елементи множини S. Установимо взаємно однозначну відповідність між множиною S і множиною бітових стрічок довжиною 5, за якою кожній підмножині s множини S відповідає стрічка, в якій i-й біт дорівнює 1, якщо $a_i \in S$, i = 0, якщо $a_i \notin S$. Таким чином, підмножина $\{a_1, a_2, a_4\}$ відповідає стрічці 11010, підмножина $\{a_2, a_5\}$ відповідає стрічці 01001, порожній множині відповідає стрічка 00000, а множині S відповідає стрічка 11111. Отже, встановлено взаємно однозначну відповідність між підмножинами множини S і бітовими стрічками довжини 5. З попереднього прикладу відомо, що існує 2^5 бітових стрічок довжини 5. Тому існує 2^5 підмножин множини з 5 елементів. Використовуючи аналогічні міркування, дістанемо відповідь на друге запитання -2^k.

Другий спосіб. Цей спосіб полягає в тому, щоб для кожної підмножини $s \subset S$ визначити функцію f_s із S у множину $\{0,1\}$. Функція f_s визначена співвідношенням $f_s(a_i) = 1$, якщо $a_i \in s$ і $f_s(a_i) = 0$, якщо $a_i \notin s$. Навпаки, нехай задана функція f із множини S у множину $\{0,1\}$. Якщо покласти $s = \left\{ a_i \middle| f(a_i) = 1 \right\}$, то функція f є функцією f_s. Тому маємо взаємно однозначну відповідність між підмножинами множини S і функціями з S $\{0,1\}$, тобто бієкцію, а це означає, що існує 2^5 функцій з S у $\{0,1\}$. Аналогічно знаходиться відповідь на друге питання -2^k.

Задача 2. Кожна вершина правильного дев’ятикутника пофарбована або в синій, або в червоний колір. Довести, що існують два рівних трикутники, усі вершини яких мають однаковий колір.

Розв’язання. Назвемо трикутник синім, якщо всі його вершини сині; червоним, якщо всі червоні. Згідно з принципом Діріхле можна стверджувати, що принаймні п’ять вершин одного кольору. Не порушуючи загальності нехай вони червоні. Тоді є $C_5^3 = 10$ червоних трикутники. Залишається довести, що серед них знайдеться два однакових.

Нехай $A_1,..A_n$ вершини дев'ятикутника, ω описане коло навколо нього. Вершини ділять його на 9 дуг (назвемо їх «шматками»). Нехай $A_iA_jA_k$ такий трикутник, що $A_iA_j \le A_jA_k \le A_kA_i$. Позначимо через a_{ij} кількість шматків, що містяться в дузі $\smile A_iA_j$. Встановимо відповідність між трикутниками $A_iA_jA_k$ та трійками $a_{ij}a_{jk}a_{ki}$. Рівні трикутники відображаються в рівні трійки, а рівні трійки в рівні трикутники. Отже, ми побудували бієкцію між класом різних трикутників і класом невпорядкованих трійок (a,b,c) таких, що $a \le b \le c$, $a+b+c=9$. Перерахуємо усі такі трійки: (1,1,7), (1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3). Їх 7. Тому принаймні два червоних трикутники мають належати одному класу.

Наведемо без розв'язання ще кілька задач, які розв'язуються шляхом побудови бієкції.

Задача 3. Нехай n – натуральне. Скількома способами можна подати число n у вигляді суми кількох (принаймні двох) натуральних чисел? (Подання, які відрізняються лише перестановкою доданків вважати різними. Наприклад, існує три способи подання числа 3: $3=1+1+1=2+1=1+2$).

Вказівка. Розглянемо $n-1$ пропуск між n одиничками в записі

$$(111...1).$$

На місце кожного пропуску поставимо або «+», або «)+(«.

Відповідь. $2^{n-1}-1$.

Задача 4 [5]. Скількома способами можна обрати п'ять чисел із перших вісімнадцяти натуральних чисел так, щоб кожні два з обраних чисел відрізнялись принаймні на 2?

Вказівка. Нехай (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5), $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ – деякий набір 5 чисел з перших вісімнадцяти. Поставимо йому у відповідність набір (b_1,b_2,b_3,b_4,b_5), такий, що

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 - 1,\ b_3 = a_3 - 2,\ b_4 = a_4 - 3,\ b_5 = a_5 - 4.$$

Встановлена відповідність є бієкцією, а всього існує $C_{14}^5 = 2002$ п'ятірки чисел $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$.

Відповідь. 2002.

Висновки. В статті ми окреслили суть методу розв'язування комбінаторних задач на побудову бієкції, розкрили методику розв'язання деяких задач, що ілюструють вказаний метод.

Література

1. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей / Н. Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1976. – 48 с.
2. Комбинаторика и логика / Составитель А. А. Егоров – М.: Бюро Квантум, 2003. – 128 с. – (Прил. к журналу «Квант» №1/2003)
3. Морозович Я. Ю. Комбінаторика. – Х.: Вид. група «Основа», 2009. – 144 с. – (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 11 (83)).
4. Верещагин Н. К., Лекции по математической логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень. – 2-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2002. – 128 с.
5. Andreescu T. 102 Combinatorial Problems : From the Training of the USA IMO Team / T. Andreescu, Z. Feng. – Birkhauser Boston INC, 2003. –115 p.
6. Andreescu T. A path to combinatorics for undergraduates. Counting strategies / T. Andreescu, Z. Feng. – Birkhauser Boston INC, 2004. – 230 p.

Анотація. *У статті висвітлюється суть методу розв'язування задач комбінаторного характеру на побудову бієкції, розглядається низка прикладів розв'язування задач цим методом.*

Ключові слова: *комбінаторні задачі, бієкція, взаємно однозначна відповідність.*

Дурач Вікторія Вікторівна,Ількевич Ірина Олегівна
студентки 3 курсу, спеціальність «Математика»*

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Вступ. В процесі вивчення математики в загальноосвітній школі теоретичний матеріал тісно пов'язаний із методами розв'язування задач, проте не кожен метод можна використати до розв'язання певної задачі. Так для розв'язування рівнянь з параметром не існує єдиного універсального методу, а тому, лише у процесі розв'язування завдань такого типу, можна до певної міри опанувати їх. За браком часу на уроках, на нашу думку, розв'язувати рівняння із параметром варто на математичних гуртках або факультативних заняттях з математики. На таких заняттях учням варто демонструвати різні методи розв'язування завдань з параметром. Одним із таких методів є метод невизначених коефіцієнтів.

Мета даної статті: на конкретних прикладах проілюструвати можливості методу невизначених коефіцієнтів у процесі розв'язування рівнянь з параметром.

Виклад основного матеріалу. Перед безпосереднім застосуванням методу невизначених коефіцієнтів до розв'язування рівнянь із параметром коротко викладемо його суть. Метод невизначених коефіцієнтів полягає у визначенні тотожної рівності двох многочленів. Цей метод ґрунтується на трьох наступних твердженнях:

1. Два многочлени можуть бути тотожно рівними тоді, і лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні між собою, тобто при

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x = b_1x^n + b_2x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

маємо:

$$\begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ \quad \dots \\ a_n = b_n. \end{cases}$$

2. Будь-який многочлен третього степеня розкладається на добуток лінійного та квадратного множників.

3. Будь-який многочлен четвертого степеня розкладається на добуток многочленів другого степеня [2].

Припустимо, що в результаті деяких перетворень утворюється многочлен, коефіцієнти якого невідомі. Ці коефіцієнти позначають буквами і розглядають як невідомі. Далі для визначення цих невідомих коефіцієнтів складається система рівнянь.

Розглянемо на прикладі [3]: нехай треба розв'язати рівняння $x^3-3x^2+4x-2=0$. Будемо шукати многочлени $\beta_1 x^2+\beta_2 x+\beta_3$ і $x-a$ такі, щоб виконувалась тотожність: $x^3-3x^2+4x-2=(x-a)(\beta_1 x^2+\beta_2 x+\beta_3)$. Розкривши дужки в правій частині цієї тотожності та звівши подібні члени, отримаємо: $x^3-3x^2+4x-2=\beta_1 x^3+(\beta_2-\alpha\beta_1)x^2+(\beta_3-\alpha\beta_2)x-\alpha\beta_3.$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях у лівій і правій частинах останньої рівності, одержуємо систему рівнянь для знаходження $\alpha;\ \beta_1;\ \beta_2;\ \beta_3$, тобто введених невизначених коефіцієнтів, які вважаються цілими числами:

$$\begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2-\alpha\beta_1=-3, \\ \beta_3-\alpha\beta_2=4, \\ \alpha\beta_3=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2=\alpha-3, \\ \beta_3=\alpha\left(\alpha-3\right)+4, \\ \alpha\beta_3=2. \end{cases}$$

Оскільки α і β_3– цілі числа, то знайдемо всі можливі пари цих чисел з рівності $\alpha\beta_3=2$: $\alpha=1,\ \beta_3=2;\ \alpha=2,\ \beta_3=1$ або $\alpha=-1,\ \beta_3=-2;\ \alpha=-2,\ \beta_3=-1.$

Єдина пара, що задовольняє систему: $\alpha = 1,\ \beta_3 = 2.$ Розв'язуючи далі систему в цілих числах, отримаємо: $\alpha = 1,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = -2,\ \beta_3 = 2.$

Отже, маємо рівняння $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$, розв'язком якого є $x = 1$.

Зупинимося детальніше на застосуванні методу невизначених коефіцієнтів при розв'язуванні рівнянь з параметрами. Розглянемо на прикладах [1].

Приклад 1. При яких значеннях параметра a корені рівняння $\boldsymbol{x^3 + ax^2 + 14x + 8 = 0}$ (1) утворюють геометричну прогресію?

Розв'язання. Нехай x_0, x_0q, x_0q^2 – корені рівняння (1), які складають геометричну прогресію, де q – знаменник прогресії. Тоді $x^3 + ax^2 + 14x + 8 = (x - x_0)(x - x_0q)(x - x_0q^2)$ (2).

Розкривши дужки в правій частині отриманої рівності, звівши подібні доданки і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему:

$$\begin{cases} x_0 + x_0q + x_0q^2 = -a, \\ x_0^2q + x_0^2q^2 + x_0^2q^3 = 14, \\ x_0^3q^3 = -8. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь цієї системи слідує, що $ax_0q = -14.$ З третього рівняння випливає рівність $(ax_0q)^3 = -8a^3$ і, таким чином, $a^3 = 7^3$ тобто $a = 7$.

Приклад 2. При яких значеннях параметра a три корені рівняння $\boldsymbol{x^3 + 6x^2 + 11x + a = 0}$ (3) утворюють арифметичну прогресію?

Розв'язання. Нехай $x_1 = p - d,\ x_2 = p,\ x_3 = p + d$ – корені рівняння (3), які утворюють арифметичну прогресію, де d – різниця прогресії. Тому справедливою є наступна рівність:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + a = (x - p + d)(x - p)(x - p - d).$$

Розкривши в цій рівності дужки, звівши подібні доданки і прирівнюючи коефіцієнти при x^2, знайдемо, що $p=-2$. Підставивши отримане значення кореня x_2 в початкове рівняння (3), знаходимо, що шукане значення параметра a – це $a=6$.

Приклад 3.Розв'язати рівняння $x^4+4a^3x-a^4=0$ (4), де a – параметр.

Розв'язання. При $a=0$ коренем рівняння є $x=0$. Нехай тепер $a\neq 0$. Вважаючи в цьому випадку, що $y=\frac{x}{a}$, рівняння (4) зводиться до вигляду: $y^4+4y-1=0.$ Знайдемо тепер сталі A, B, C, D такі, щоб $y^4+4y-1=\left(y^2+Ay+B\right)\left(y^2+Cy+D\right)$ (5).

Розкривши дужки у правій частині, звівши подібні доданки і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях y в лівій і правій частинах рівності (5) отримуємо систему:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+AC+D=0, \\ BC+AD=4, \\ BD=-1. \end{cases} \quad \text{або систему} \quad \begin{cases} A=C, \\ B=-\dfrac{1}{D}, \\ D-\dfrac{1}{D}=C^2, \\ C\left(D+\dfrac{1}{D}\right)=-4. \end{cases}$$

Підносячи два останніх рівняння до квадрату, отримаємо підсистему:

$$\begin{cases} C^4=D^2+\dfrac{1}{D^2}-2, \\ C^2\left(D^2+\dfrac{1}{D^2}+2\right)=16, \end{cases}$$

розв'язавши яку, ввівши заміну $C^2=u$, $D^2+\frac{1}{D^2}=v$, знаходимо $u=2$, $v=6$. Повертаючись до вихідної системи, з врахуванням перевірки, отримаємо два розв'язки:

$A=\sqrt{2}$, $B=1-\sqrt{2}$, $C=-\sqrt{2}$, $D=1+\sqrt{2}$ і $A=-\sqrt{2}$, $B=1+\sqrt{2}$, $C=\sqrt{2}$, $D=1-\sqrt{2}$.

Ці розв'язки приводять рівняння (5) до одного і того ж вигляду: $y^4+4y-1=\left(y^2+\sqrt{2}y+1-\sqrt{2}\right)\left(y^2-\sqrt{2}y+1+\sqrt{2}\right)$.

Вираз у других дужках завжди набуває додатніх значень**,** тому розв'язання задачі зводиться до розв'язання рівняння: $y^2+\sqrt{2}y+1-\sqrt{2}=0$**,** розв'язавши яке, отримуємо $y_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right]$.

Врахувавши заміну $x=ay$ отримаємо $x_{1,2}=\frac{a}{\sqrt{2}}\left[-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right]$.

Висновки. На конкретних прикладах ми продемонстрували можливості методу невизначених коефіцієнтів при розв'язуванні рівнянь з параметрами. Цей метод учні також можуть застосовувати при спрощенні певних виразів, для знищення ірраціональності у знаменнику дробу, для представлення дробу у вигляді найпростіших дробів, для знаходження інтегралів тощо.

Література

1. Амелькин В. В. Задачи с параметрами: Справ. пособие по математике. / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – Минск: Асар, 2004. – с.122-124.
2. Метод невизначених коефіцієнтів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://disted.edu.vn.ua/courses/learn/6251.
3. Схема Горнера. Метод невизначених коефіцієнтів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.zhu.edu.ua/mk_school/mod/folder/view.php?id=5481.

Анотація. *У статті описано суть методу невизначених коефіцієнтів та наведено приклади розв'язання рівнянь з параметром за допомогою цього методу.*

Ключові слова: *метод невизначених коефіцієнтів, рівняння з параметром.*

Дученко Ольга Олександрівна, Чукарук Інна Юріївна
студентки 3 курсу, спеціальність «Математика*»

ЗАДАЧІ НА РОЗТАШУВАННЯ КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА

Вступ. Поняття квадратного тричлена є одним із основних понять, які вивчаються у школі. У шкільному курсі алгебри вивчають лише найпростіші властивості квадратного тричлена, за допомогою яких виводять формулу коренів квадратного рівняння, будують графік квадратичної функції, досліджують умови існування коренів, їхні знаки тощо. Проте існує велика кількість різноманітних задач, особливо олімпіадних, для розв’язання яких зазначених властивостей недостатньо. До таких задач можна віднести задачі на розташування коренів квадратного тричлена. Варто зауважити, що при розв’язуванні таких задач безпосереднє обчислення коренів призводить до технічних складностей, тому тут варто використовувати необхідні і достатні умови розміщення коренів квадратного тричлена. Зрозуміло, що за браком часу на уроках, такий матеріал слід вивчати на факультативних заняттях з математики або в процесі підготовки учнів до математичних змагань.

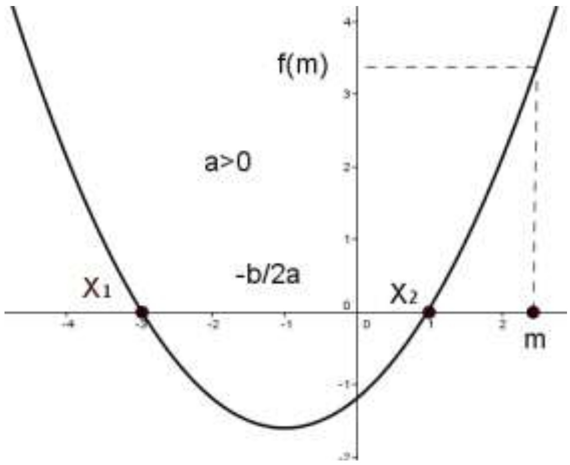
Мета даної статті: висвітлити основні необхідних і достатніх умови розташування коренів квадратного тричлена та застосування їх до конкретних прикладів.

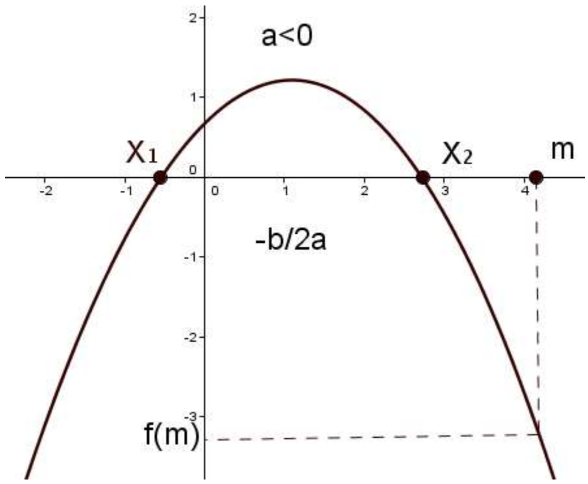
Виклад основного матеріалу. Зробимо певні теоретичні викладки. Функція ax^2+bx+c, в якій x – незалежна змінна, а a, b, c – дійсні числа причому $a \neq 0$, називається квадратним тричленом. Числа a, b, c - коефіцієнти квадратного тричлена. Квадратний тричлен називають також квадратичною функцією і записують у вигляді: $f(x)=ax^2+bx+c$. Значення x, при яких квадратний тричлен $f(x)=ax^2+bx+c$ перетворюється в нуль, називають коренями тричлена. Отже, для знаходження коренів квадратного тричлена потрібно розв’язати квадратне рівняння: $ax^2+bx+c=0$.

Розв’язування задач, пов’язаних із розташуванням коренів квадратного тричлена (де m та n – задані числа), переважно рівносильні виконанню таких умов:

1. $x_1, x_2 < m,$

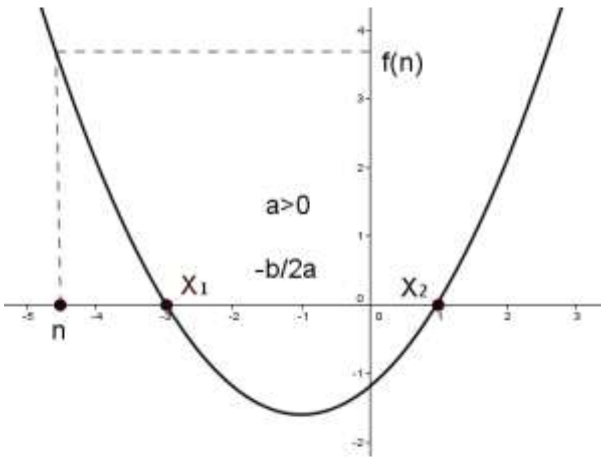
$$\begin{cases} D \ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < m, \\ a\,f(m) > 0. \end{cases}$$

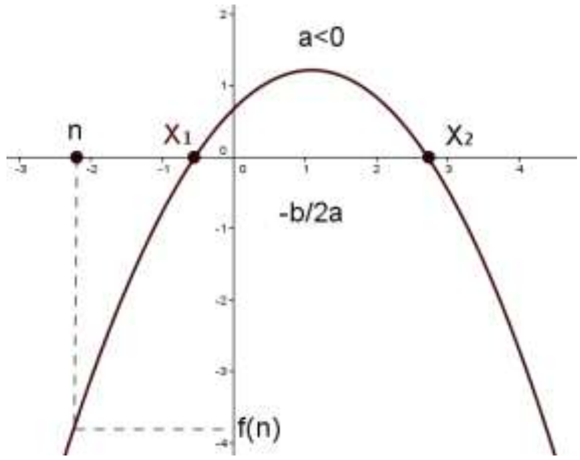




2. $x_1, x_2 > n,$

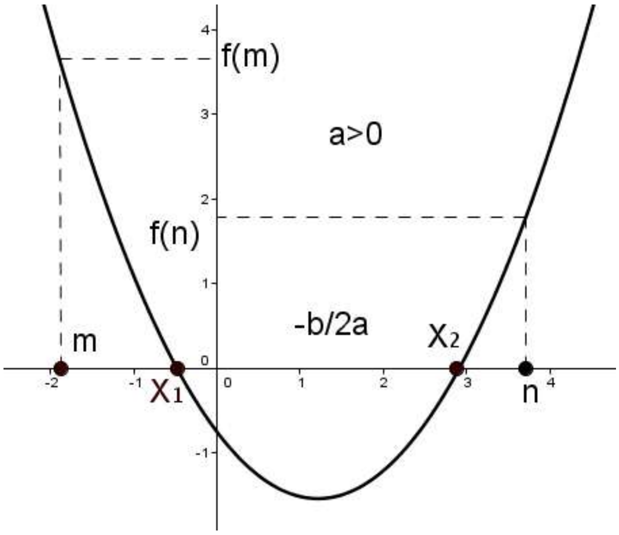
$$\begin{cases} D \ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > n, \\ a\,f(n) > n. \end{cases}$$

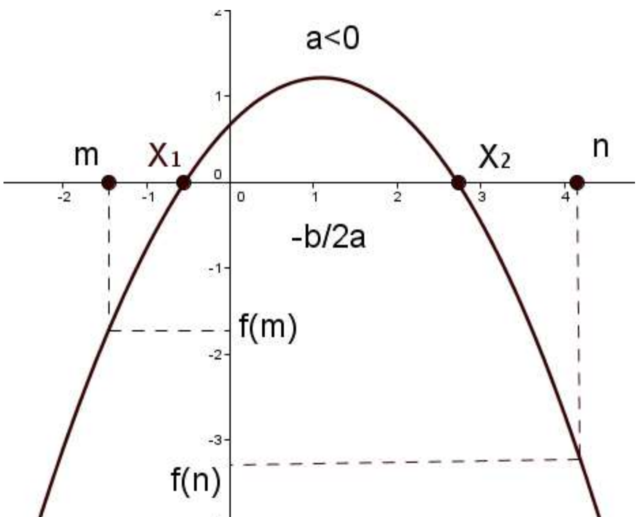




3. $m < x_1, x_2 < n,$

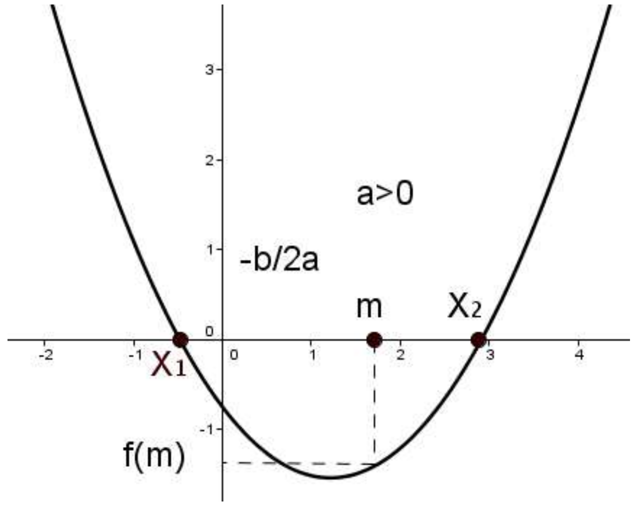
$$\begin{cases} D \geq 0, \\ m < -\dfrac{b}{2a} < n, \\ a\,f(m) > 0, \\ a\,f(n) > 0. \end{cases}$$

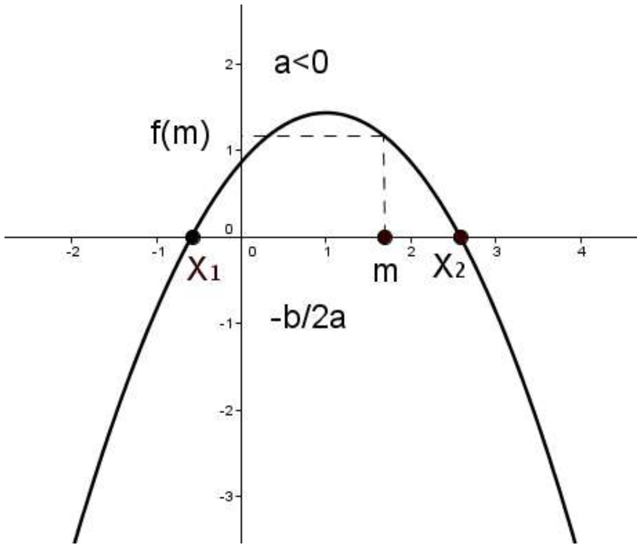




4. $x_1 < m < x_2,$

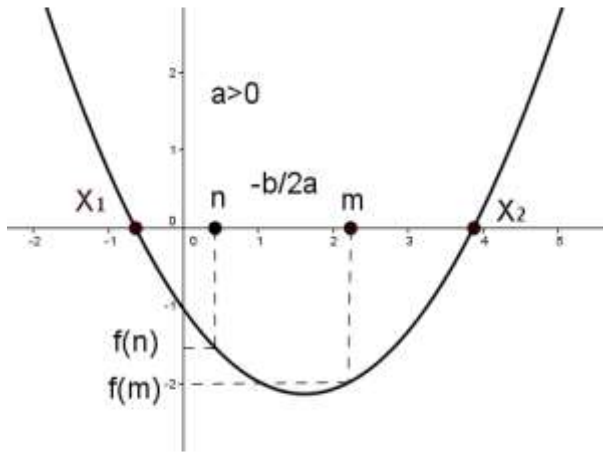
$$a\,f(m) < 0.$$

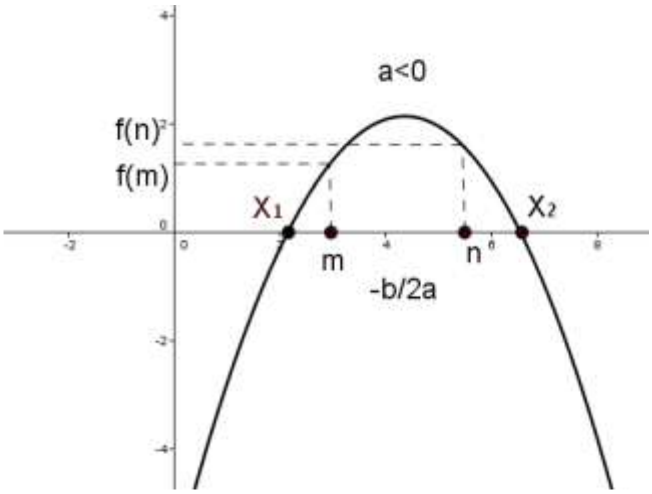




5. $x_1 < m < n < x_2,$

$$\begin{cases} a\,f(m) < 0, \\ a\,f(m) < 0. \end{cases}$$





Проілюструємо використання цих умов на конкретних прикладах.

Приклад 1. При яких значеннях параметра a корені рівняння $ax^2-(2a+1)x+3a-1=0$ будуть більші за 1?

Розв’язання. Очевидно, що задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a корені квадратного тричлена $f(x)=ax^2-(2a+1)x+3a-1$ більші за 1? Перехід від одного формулювання задачі до іншого підкреслює ідею, яка пов’язана з описом тих чи інших властивостей квадратного тричлена (Див. рис.1).

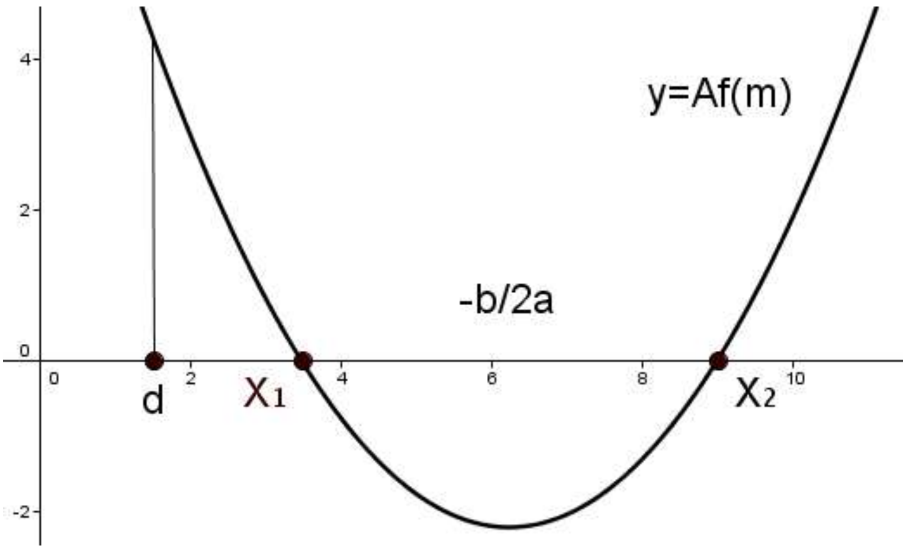


Рис.1

Зокрема, для того щоб корені квадратного тричлена $f(x)=Ax^2+Bx+C$, $(A\neq 0)$ були більші за число d, необхідно і достатньо щоб виконувались

$$\text{умови: } \begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{B}{2A} > d, \quad (1) \\ A\,f(d) > 0. \end{cases}$$

Вимога того, щоб корені квадратного тричлена були менші числа d, означає виконання вимог $\begin{cases} D \geq 0, \\ A\,f(d)>0, \\ A\ f'(d)<0. \end{cases}$

де D - дискримінант, а f' – похідна квадратного тричлена.

Повертаючись до вихідної задачі, помічаємо, що при $a = 0$ рівняння має корінь $x = -1$, який не відповідає вимогам задачі.

Розглянемо випадок $a \neq 0$. При таких a умови (1) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} (2a+1)^2 - 4a(3a-1) \geq 0, \\ \dfrac{2a+1}{2a}>1, \\ a(a-(2a+1)+3a-1)>0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо, що $a \in \left(1; \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

Відповідь. $a \in \left(1; \dfrac{2+\sqrt{6}}{4}\right]$.

Приклад 2. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $(a^2-2)x^2+(a^2+a-1)x-a^2+a=0$ більший числа a, а другий менший числа a ?

Розв'язання. Задача рівносильна наступній: при яких значеннях параметра a корені квадратного тричлена $g(x)=(a^2-2)x^2+(a^2+a-1)x-a^2+a$ лежать на головній осі по різні сторони від точки $x = a$?

Для розв'язання цієї задачі, а саме, щоб корені квадратного тричлена лежали на головній осі по різні сторони від числа d, необхідно і достатньо, щоб виконувалась наступна вимога $A\,f(d) < 0$.

В нашому випадку ця вимога приймає вигляд $(a^2-2)\,g(a)<0$.

Отже, вимогу задачі задовольняє розв'язання нерівності $(a^2-2)((a^2-2)a^2+(a^2+a-1)a-a^3+a)<0$, де $a^2-2\neq 0$ ($a=\pm\sqrt{2}$ не задовольняє вимоги задачі).

Розв'язуючи отриману нерівність, знаходимо, що $a\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$

Відповідь. $a\in\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{2}\right)$.

Висновки. Розв'язування багатьох задач з параметрами базується саме на властивостях розміщення коренів квадратного тричлена, тому ці задачі є важливими на початковому етапі вивчення рівнянь з параметром. Розв'язуючи задачі на розташування коренів квадратного тричлена шляхом безпосереднього їх обчислення призводить до значних труднощів у техніці обчислень, тому при розв'язуванні завдань такого типу варто використовувати властивості квадратного тричлена. Загалом розв'язування такого типу задач сприятиме кращому розпізнаванню учнями квадратного тричлена у всіх його різноманітних формах та вмінню застосовувати властивості квадратного тричлена для розв'язання задач.

Література

1. Клочко І. Я. Квадратний тричлен та його застосування / І. Я. Клочко, А. В. Кравчук. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. – 80 с.

2. Амелькин В. В. Задачи с параметрами : Справ. пособие по математике. – 3-е изд. доработ. / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – Минск: Асар, 2004. – 464 с.

Анотація. *У статті розглянуто можливості та способи розв'язування задач з параметрами.*

Ключові слова: *параметр, тричлен другого степеня, квадратний тричлен.*

Забазнова Анастасія Олегівна, Шалавінська Вікторія Олександрівна
студентки 3 курсу, спеціальність «Математика»*

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ СУМИ

Вступ. Математична освіта в загальноосвітній школі спрямована, в основному, на засвоєння учнями алгоритмів розв'язування типових навчальних задач, проте цього недостатньо для потреб практики і розвитку здібностей до самостійного математичного мислення. Слід приділяти увагу позаклакласним заняттям та тематичним гурткам, оскільки за допомогою такої форми роботи з учнями вчитель проводить ефективну підготовку учнів до участі у математичних олімпіадах. Задачі, що пропонуються учасникам математичних олімпіад різних рівнів, відрізняються від звичайних шкільних задач своєю специфікою, яка полягає в наступному: нестандартному формулюванні їх умов; неочевидному результаті, який часто буває несподіваним; неспроможністю застосувати методи розв'язування, що вивчаються за програмою; специфічних підходах до переформулювання умови задачі в ході її розв'язування.

Мета даної статті: розглянути можливості застосування методу математичної індукції, зокрема для розв'язування олімпіадних задач на знаходження сум.

Виклад основного матеріалу. Відповідно до навчальної програми тема «Метод математичної індукції» вивчається в 9 класі з поглибленим вивченням математики наприкінці навчального року. В той же час, серед завдань математичних олімпіад починаючи з 9 класу зустрічаються задачі, у розв'язуванні яких використовується метод математичної індукції. Тому для належної підготовки учнів для участі в математичних олімпіадах необхідно навчити їх застосовувати метод математичної індукції, зокрема, у ході роботи математичних гуртків і факультативних занять.

За своїм змістом слово «індукція» застосовується до міркувань, за допомогою яких одержують загальні висновки, спираючись на ряд частинних тверджень. Найпростішим методом міркувань такого роду є повна індукція. Повна індукція полягає в тому, що загальне твердження складається з доведень кожного з можливих випадків.

Іноді загальний результат вдається визначити після розгляду не всіх, а досить великого числа окремих випадків (так звана неповна індукція). Результат, отриманий неповною індукцією, залишається лише гіпотезою, поки він не буде доведений точним математичним міркуванням, що включає всі частинні випадки.

Доведення методом математичної індукції здійснюється наступним чином.

Спочатку твердження перевіряється для $n=1$, тобто встановлюється істинність висловлення $A(1)$. Цю частину доведення називають початком або базою індукції.

Наступна частина доведення називається кроком індукції. У цій частині доводять справедливість твердження для $n=k+1$ у припущенні справедливості твердження для $n=k$, де k – натуральне число (припущення індукції), тобто доводять, що $A\ (k)\Rightarrow A\ (k+1)$.

Уперше такий спосіб запропонували Б. Паскаль і Я. Бернуллі.

Метод математичної індукції широко використовується для доведення теорем, тотожностей, нерівностей, для розв'язуванні задач на подільність, тощо. Розглянемо використання методу неповної та повної математичної індукції для розв'язування задач на знаходження сум.

Приклад 1. Вивести формулу для обчислення значення суми:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$$

Розв'язання. Скористаємося методом неповної математичної індукції. Для цього знайдемо суму перших n доданків:

$n=1: S_1=\frac{1}{5};$

$$n=2: S_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 9}=\frac{10}{5\cdot 9}=\frac{2}{9};$$

$$n=3: S_3=\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}=\frac{3}{13};$$

$$n=4: S_4=\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 17}=\frac{4}{17};$$

Можна зробити припущення, що:

$$S=\frac{n}{4n+1} \tag{1}$$

Доведемо цю гіпотезу методом повної математичної індукції. Раніше ми перевірили справедливості формули (1) при $n=1$, таким чином ми довели базу індукції.

Нехай формула виконується при $n=k$, тобто

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1}. \tag{2}$$

Покажемо, що рівність виконується при $n=k+1$, тобто

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}. \tag{3}$$

Додамо до обох частин рівності (2) вираз $\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$. Звівши доданки у лівій частині отримаємо:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}.$$

Знайдемо корені квадратного тричлена, який знаходиться в чисельнику дробу в правій частині рівності $4k^2+5k+1$. Розв'язавши відповідне квадратне рівняння, отримаємо:

$$k_1=-1,\;\; k_2=-\frac{1}{4}.$$

Отже, маємо:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{(4k+1)(k+1)}{(4k+1)(4k+5)}.$$

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}.$$

Отже, припустивши, що формула (2) є правильною при $n=k$, ми довели, що вона є правильною і при $n=k+1$. А з урахуванням (1) робимо висновок, що гіпотеза є правильною і $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$.

Приклад 2. Вивести формулу для обчислення значення суми:

$$-1+3-5+7-9+...+(-1)^n(2n-1), \text{ де } n\in N.$$

Розв’язання. Скористаємось методом неповної математичної індукції. Для цього знайдемо суму перших n доданків:

$n=1: S_1=-1;$

$n=2: S_2=-1+3=2;$

$n=3: S_3=-1+3-5=-3;$

$n=4: S_4=-1+3-5+7=4;$

Можна зробити припущення, що:

$$S=(-1)^n n. \qquad (4)$$

Доведемо цю гіпотезу методом повної математичної індукції. Вище ми перевірили справедливість формули (4) при $n=1$, таким чином ми довели базу індукції.

Нехай формула виконується при $n=k$, тобто

$$-1+3-5+7-9+...+(-1)^k(2k-1)=(-1)^k k. \qquad (5)$$

Покажемо, що рівність виконується при $n=k+1$, тобто

$$-1+3-5+7-9+...+(-1)^k(2k-1)+(-1)^{k+1}(2k+1)=(-1)^{k+1}k+1. \qquad (6)$$

Додамо до обох частин рівності (5) вираз $(-1)^{k+1}(2k+1)$. Звівши доданки у лівій частині отримаємо:

$$-1+3-5+7-9+...+(-1)^k(2k-1)+(-1)^{k+1}(2k+1)=(-1)^k k+(-1)^{k+1}(2k+1)=$$
$$=(-1)^k(-k-1)=(-1)^{k+1}(k+1)$$

Отже, припустивши, що формула (5) є правильною при $n=k.$, ми довели, що вона є правильною і при $n=k+1$.

А з урахуванням (4) робимо висновок, що гіпотеза є правильною і

$$-1+3-5+7-9+...+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n \quad .$$

Приклад 3. Знайдіть суму квадратів натуральних чисел $S_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2$.

Розв’язання. Розглянемо часткові випадки:

$n=1:1=1$

$n=3:1+2^2+3^2=1+4+9=14$

$n=4:1+2^2+3^2+4^2=1+4+9+16=30$

$n=5:1+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=55$

Очевидно можна зробити припущення, що сума перших n членів натурального ряду:

$$S_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Доведемо цю гіпотезу одержану в результаті неповної індукції методом математичної індукції.

Доведення. При $n=1$ твердження справедливе, так як $1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

Припустимо, що воно правильне при $n=k$, тобто

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Доведемо, що тоді воно правильне при $n=k+1$, тобто

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Насправді

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Тим самим доведена справедливість твердження для будь-якого натурального n.

Висновок. Метод математичної індукції є потужним засобом для розв'язування олімпіадних математичних задач певного типу. Звичайно, крім розглянутих прикладів, даний метод має більш широке застосування, зокрема для розв'язування інших задач, доведення рівностей, нерівностей, теорем. Тому слід формувати в учнів уміння застосовувати метод математичної індукції при розв'язуванні математичних завдань. Зокрема, на прикладі задач про знаходження суми можна доступно пояснити суть даного методу. Таким чином це не лише розширить коло доступних для учнів задач, а і дасть можливість учням зрозуміти суть методу математичної індукції та можливість використовувати його для розв'язування задач інших типів.

Література

1. Супрун А. Індукція. Принцип. Методи. Задачі. Методичний посібник / А. Супрун, В. Супрун. – Кіровоград: Методичний центр Кіровоградського обласного комплексу (гімназія-інтернат – школа мистецтв), 2010. – 40с.

2. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. А. Ясінський // Математика в школах України, Вип. 1 (25) – Х.: Основа, 2005. – 96 с.

Анотація. *На конкретних прикладах розглянуто можливості застосування методу математичної індукції при розв'язання математичних задач в процесі підготовки учнів до математичних змагань.*

Ключові слова: *метод математичної індукції, повна індукція, неповна індукція.*

Кобець Наталія Миколаївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика*»

ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ УЧНІВ ВИКОРИСТОВУВАТИ ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОЛІМПІАДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Вступ. Сучасна реформа школи вимагає посилення зв'язку між навчанням, вихованням та розвитком дітей. Значні резерви у вирішенні поставленого завдання має взаємозалежна урочна і позаурочна робота учнів з різних предметів, зокрема, з математики. Одним із ефективних шляхів розвитку здібних до математики учнів є їх участь у математичних олімпіадах. На олімпіадах з математики часто включають задачі на принцип Діріхле, які зазвичай за своїм змістом мало відрізняються від формулювання самого принципу. Сам принцип Діріхле можна пояснювати учням на гуртковій роботі починаючи з 5 – 6 класу.

Мета даної статті: виокремити та обґрунтувати методичні рекомендації щодо технології ознайомлення учнів із використання принципу Діріхле при розв'язуванні математичних задач в процесі позакласної роботи; надати вчителям та учням певну допомогу в розвитку вміння розв'язувати олімпіадні задачі з використанням принципу Діріхле.

Виклад основного матеріалу. Принцип Діріхле (також принцип коробок Діріхле, принцип голубів і кліток) — комбінаторне твердження, сформульоване німецьким математиком Діріхле в 1834 році, яке встановлює зв'язок між об'єктами («кроликами») і контейнерами («клітками») при виконанні певних умов. Принцип Діріхле застосовується, зокрема, в теорії діофантових наближень при аналізі систем лінійних нерівностей [4].

При поясненні принципу Діріхле варто дати учням різні формулювання. Зокрема:

1) якщо в k клітках більше, ніж nk зайців, то хоча б в одній клітці сидять більше ніж n зайців;

2) якщо сума площ декількох фігур менша за S, то ними не можна покрити фігуру, площа якої дорівнює S;

3) якщо на відрізку довжиною l розташовано декілька відрізків з сумою довжин l, то знайдеться точка цього відрізка, яка буде накрита не більше ніж $[l]$ цими відрізками;

4) якщо середнє арифметичне декількох чисел більше a, то хоча б одне з цих чисел більше a [5];

5) якщо $nk+1$ предмет розкладено в n ящиків, то принаймні в одному з них знаходиться не менше як $k+1$ предмет.

Варто розглянути доведення одного з формулювань принципу. Зупинимося на п'ятому варіанті формулювання.

Для доведення пронумеруємо ящики числами $1,2,\dots,n$.

Нехай x_i – число предметів, які знаходяться в ящику з номером i.

За умовою

$$X_1+X_2+\dots+X_n=nk+1.$$

Припустимо, що

$$x_1\le k, x_2\le k,\dots,x_n\le k.$$

Тоді

$$X_1+X_2+\dots+X_n<nk.$$

Дістали суперечливу нерівність

$$nk+1=X_1+X_2+\dots+X_n<nk.$$

Отже, твердження принципу Діріхле є вірним.

При поясненні специфіки розв'язування задач з використанням принципу Діріхле, дуже важливо підібрати правильно слова, які описують розміщення предметів. Якщо в умові задачі будуть присутні не предмети, а люди, то фраза «розмістимо людей по ящикам» буде недоречною. В даному випадку краще вжити замість ящиків слово «кімната».

У кожній конкретній задачі часом нелегко зрозуміти, що є «зайці», а що «клітки» і чому зайців більше, ніж кліток, не завжди за умовою задачі можна визначити необхідність використання принципу Діріхле. Принцип Діріхле, не зважаючи на його надзвичайну очевидність і простоту, часто використовується при розв'язуванні задач у різних розділах математики.

Деякі задачі з геометрії розв'язуються методами, що деякою мірою аналогічні принципу Діріхле.

Сформульовані далі твердження неважко довести методом від супротивного:

1) Якщо на відрізку довжиною 1 розміщено кілька відрізків, сума довжин яких більша від 1, то принаймні два з них мають спільну точку.

2) Якщо на колі радіуса 1 розміщено кілька дуг, сума довжин яких більша за 2π, то принаймні дві з них мають спільну точку.

3) Якщо всередині фігури площею 1 розміщено декілька фігур, сума площ яких більша за 1, то принаймні дві з них мають спільну точку [3].

Розглянемо приклади деяких задач, при розв'язуванні яких використовується принцип Діріхле.

Задача 1. Розглянемо послідовність чисел $6, 6^2, 6^3, \ldots, 6^n, \ldots$ і випишемо для кожного з них останні чотири цифри. Дістанемо послідовність $0006, 0036, 0216, 1296, 7776, \ldots$. Довести, що, починаючи з деякого номера ця послідовність буде періодичною.

Розв'язання. Зазначимо, що існує лише скінченне число різних наборів чотирьох чисел. Справді, застосовуючи основне правило комбінаторики, впевнюємося, що це число дорівнює 10^4, тобто, в нескінченній послідовності останніх чотирьох цифр знайдуться два однакові набори.

Отже, є два натуральних числа r і m такі, що числа 6^m і 6^{m+r} мають останні чотири цифри однакові.

Якщо m і r такі числа, то $6^{m+r} - 6^m = 10^4 s$, де s – натуральне число. Тоді у чисел 6^{m+r} і 6^{m+r+1} останні чотири цифри теж однакові, бо $6^{m+r+1} - 6^{m+r} = 10^4 s$.

Таким чином, починаючи з номера m, набори останніх чотирьох чисел починають періодично повторюватись; при $n > m$ набори останніх чотирьох цифр чисел 6^n і 6^{n+r} однакові [1].

Задача 2. Яку максимальну кількість натуральних чисел від 1 до 50 можна вибрати так, щоб серед них не було двох чисел, одне з яких вдвічі більше за друге?

Розв’язання. Розіб’ємо всі числа від 1 до 50 на 33 групи таким чином: $\{1;2\}$, $\{3;6\}$, $\{5;10\}$,..., $\{25;50\}$, $\{27\}$, $\{29\}$,..., $\{49\}$ (всього 25 груп), $\{4;8\}$, $\{12;24\}$, $\{28\}$, $\{36\}$, $\{44\}$ (6 груп), $\{16;32\}$, $\{48\}$.

У нас рівно 33 групи, причому з кожної групи можна взяти не більше одного елемента, тому всього буде не більше 33-ч чисел. Взявши по першому елементу із кожної групи, ми одержимо шуканий набір, бо в розкладі кожного з цих елементів на прості множники двійка входить у парному степені (частка двох таких чисел або непарна, або ділиться на 4 і не може бути рівною 2).

Відповідь. 33 [5].

Задача 3. У квадраті зі стороною 15 розміщено 20 квадратиків зі стороною 1, які попарно перетинаються. Доведіть, що у великому квадраті можна розмістити коло радіуса 1 так, щоб воно не перетиналось із жодним з квадратів.

Розв’язання. Розглядаємо фігуру, яка складається з усіх точок, віддалених від квадратика зі стороною 1 на відстань не більшу ніж 1. Зрозуміло, що коло радіуса 1, центр якого розміщений поза цією фігуро, не перетинається із квадратиком. Площа такої фігури дорівнює $\pi + 5$.

Центр потрібного кола має також знаходитись на відстані більше ніж 1 від сторін великого квадрата, тобто всередині квадрата зі стороною 13.

Зрозуміло, що 20 фігур площею $\pi + 5$ не можуть покрити квадрат зі стороною 13, оскільки $20(\pi + 5) < 13^2$, що і потрібно було довести [3].

Висновки. Принцип Діріхле є насправді, не важким для сприйняття учнями твердженням. Кожна навіть не обізнана людина, розуміє, що розсадити

$n+1$ кроликів в n кліток так, щоб в кожній клітці було не більше від одного кролика, не можна. На перший погляд навіть не зрозуміло, чому це майже очевидне твердження є ефективним методом розв’язування задач. Часто при розв'язуванні задач, де застосовують принцип Діріхле, потрібно не лише показати, що чисел, які задовольняють певну властивість є не більше від деякого n , але й конструктивно вказати множину з n елементів, що таку властивість має. Завдання даного типу дуже корисні для розвитку розмовної математичної культури, чіткого розуміння того, що означає розв’язати задачу.

Література

1. Акуленко І. А. Готуємось до математичних олімпіад . навчально-методичний посібник / І. А. Акуленко, В. В. Атамась, О. М. Козлова. – Черкаси: ОІПОПП, 2008. – 48 с.
2. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад / И. Л. Бабинская. – М.: Наука. – 1975.
3. Іванова О. М. застосування принципу Діріхле під час розв’язування задач з геометрії / О. М. Іванова // Математика в школах України, 2008. – №7. – С. 30-32.
4. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле: Бібліотечка фізико-математичної школи / М. Й. Ядренко. – К.: Вища школа, 1985.
5. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2008. – 208 с.

Анотація. *Запропоновано різні формулювання принципу Діріхле та набір задач, зручних для формування умінь учнів використовувати принцип Діріхле при розв’язуванні олімпіадних математичних задач.*

Ключові слова: *принцип Діріхле, олімпіадні задачі, розв’язування задачі, метод розв’язування.*

Колеснік Дар’я Степанівна, Бойко Вікторія Володимирівна
студентки 2 курсу, спеціальність «Математика»*

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ ПРИ ПІДГОТОВЦІ УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Вступ. В системі позакласної роботи з математики особливе місце займають олімпіади різних рівнів, бо вони можуть пробудити в учнів віру в свої сили, підвищити інтерес до вивчення предмету, поглибити теоретичні знання та вплинути на розвиток їхніх творчих здібностей. Для успішної участі учнів у олімпіаді з математики необхідно систематично проводити змістовну і цікаву підготовчу роботу на заняттях математичного гуртка та факультативних заняттях. З найбільш підготовленими учнями, які глибоко цікавляться математикою, можна проводити індивідуальну роботу. Розглянемо приклади задач з комбінаторики на міських та районних математичних олімпіадах (ІІ етап) .

Мета даної статті: розглянути способи та особливості розв’язування комбінаторних задач при підготовці учнів до міських та районних олімпіад (ІІ етап).

Виклад основного матеріалу. У розробку проблем підготовки учнів до математичних олімпіад різних рівнів значний внесок зробили. видатні математики та методисти минулого століття Г. Бевз, Б .Гнєденко, Б. Делоне, А. Колмогоров, М. Кравчук, О. Смогоржевський та ін. Над цими питаннями працювали і працюють і сучасні вітчизняні науковці та вчителі-практики В. Лейфура, О. Крижанівський, І .Мітельман, В. Радченко, Б. Рубльов, М. Якір, В. Ясінський та ін.

Науковці вважають, що не існує єдиного методу розв’язання олімпіадних задач. Навпаки, кількість методів постійно поповнюється. Деякі задачі можна розв`язати кількома різними методами або комбінацією методів.

Характерна особливість олімпіадних задач в тому, що розв’язання з вигляду нескладної проблеми може зажадати застосування методів, що використовуються в серйозних математичних дослідженнях [1].

Проаналізувавши тексти олімпіадних завдань з математики для учнів різних класів за останні роки, спостерігаємо тенденцію до збільшення кількості комбінаторних задач різного рівня складності, метою яких є формування комбінаторного мислення як важливого компонента творчого мислення сучасної людини. Тому при підготовці учнів до олімпіад учителям слід приділяти увагу розв’язуванню задач такого типу, зробивши добірку вправ комбінаторного типу до кожного класу для певного етапу олімпіад.

Слід відмітити, що єдиного методу розв’язання олімпіадних задач не існує. Навпаки, кількість методів постійно поповнюється. Деякі задачі можна розв`язати кількома різними методами або комбінацією методів. Іноді, щоб розв’язати, на перший погляд, нескладне завдання необхідно застосування і методи, що використовуються в серйозних математичних дослідженнях [1].

Комбінаторика вивчає питання існування комбінаторних конфігурацій, алгоритми їх побудови, оптимізації таких алгоритмів, а також розв’язування комбінаторних задач, зокрема визначення кількості конфігурацій даного класу [3].

Основний прийом у задачах на підрахунок кількості різних комбінацій елементів скінченної множини – встановлення взаємно однозначної відповідності між множинами, заданими за допомогою різних умов [2].

У шостому класі головним методом розв'язування комбінаторних задач на рівні міських та районних олімпіад (ІІ етап) є метод перебору варіантів. Він може реалізовуватись у процес предметної діяльності з кулями, кубиками, намистинами, монетами тощо. З віком діти можуть перейти до моделювання предметів що розглядаються, за допомогою символів.

Проілюструємо це наступними прикладами.

Щоб відповісти на поставлені питання, потрібно вміти перебрати всі варіанти тієї чи іншої події, а потім підрахувати їхнє число. Це можна зробити різними способами, зокрема методом перебору.

Задача. Скількома способами монету в 25 копійок можна розміняти монетами вартістю 10, 5 і 2 копійки?

Розв'язання.

$$10+10+5= 10+5+5+5= 5+5+5+5+5= 10+5+2+2+2+2+2=$$
$$5+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=$$

Відповідь: 5 способів.

Задача. З коробочки, що містить три сині і дві червоні кульки навмання виймаються дві кулі. Яке число червоних куль можна очікувати найчастіше? Кулі однакового кольору чи різного кольору можна очікувати частіше?

Розв'язання.

Позначимо сині кулі цифрами $1,2,3$, а червоні наприклад, буквами $a,б$ тобто закодуємо предмети. Можливі такі варіанти вибору двох куль:

12 $1a$ $1б$ $aб$ 13 $2a$ $2б$ 23 $3a$ $3б$

Зауважимо, що варіант 12 означає, що витягли дві сині кульки $(1i2)$. Варіант 21 ми не пишемо, тому що він збігається з варіантом 12. Всього 10 варіантів, у трьох з них дві сині кульки (12, 13, 23), у шести одна синя кулька ($1a$, $1б$, $2a$, $2б$, $3a$, $3б$) і в одному - немає синіх куль ($aб$).

Зрозуміло, що якщо дослід повторити багато разів, то частіше будуть з'являтися варіанти з однією синьою кулею.

З двох наслідків – кулі однакового кольору і кулі різного кольору — під час багаторазового повторення досліду частіше зустрічається другий результат: шість варіантів з десяти проти чотирьох з десяти.

Окрім методу перебору, для розв'язування комбінаторних задач використовують дерево можливих варіантів, спосіб точок і відрізків, перебір варіантів за допомогою таблиць.

Розглянемо приклад олімпіадної задачі з комбінаторики II етапу XLVI Всеукраїнської олімпіади юних математиків за 2006 рік.

Задача. Під час першості класу з шахів двоє учасників, зігравши однакову кількість партій, захворіли й вибули з турніру, а інші учасники догравали турнір до кінця. Чи грали між собою гравці, що вибули, якщо всього було зіграно 23 партії? (Турнір проводився в одне коло: кожний з кожним зіграв рівно одну партію.)

Розвязання.

Ні, не грали.

У турнірі з 6-ти учасниками грається 15 партій з 7 учасниками - 21 партія, з 8-ми учасниками - 28 партій. Тому аби в турнірі брали участь, крім вибулих учасників A і B, 6 учасників і тому A і B брали участь у 8-и партіях, або - 7-ми учасників, і тоді A і B брали участь у двох партіях.

Тому, якби вони зіграли між собою, то вони зіграли б з іншими учасниками в 1-ому випадку 7 партій, а у другому - одну партію, тобто не змогли б зіграти однакову кількість партій.

Розглянемо приклад олімпіадної задачі з комбінаторики ІІ етапу міської олімпіади більш складного рівня для учнів 10-11 класів.

Задача. Дано дві коробки, що містять довільне число кульок. На початку обидві коробки не порожні. Дозволяється виконувати наступні операції:

а) виймати однакове число кульок одночасно з обох коробок;

б) подвоювати число кульок у будь-якій коробці.

Довести, що після виконання скінченого числа цих операцій обидві коробки можуть виявитись порожніми.

Розв’язання. Якщо в обох коробках ми маємо однакове число кульок, то можемо досягти мети, використавши лише одну операцію. В іншому випадку, ми виймемо з кожної коробки стільки кульок, щоб в одній з них залишилась лише одна кулька. Далі подвоюємо вміст коробки, яка містить одну кульку, і після цього з кожної коробки вилучаємо по одній кульці. Цей процес продовжуватимемо доти, поки в кожній коробці не залишиться по одній кульці. Цей шлях скінченний, оскільки після вказаних двох операцій кількість кульок з другої коробки зменшується на одиницю. Останньою операцією ми можемо зробити коробки порожніми, вийнявши з кожної по одній кульці [4].

Висновок. Метою розв'язування комбінаторних задач є формування комбінаторного мислення як важливого компонента творчого мислення сучасної людини. Розвиток креативності є одним з першочергових завдань сучасної школи, адже стрімкий ритм нашого сьогодення вимагає вмінь прогнозувати результати, виявляти творчий підхід у будь-якій діяльності. Вдалий підбір різнорівневих завдань з комбінаторики дозволить учням при підготовці до математичних олімпіад під керівництвом учителя чи самостійно познайомитись з різними методами розв'язування комбінаторних задач.

Література

1. Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики. Книга 1. — Х., 2008. – 128 с.
2. Тичинська Л. М. Теорія ймовірностей. Частина 1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості / Л. М. Тичинська, А. А. Черепащук – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 112 с.
3. Бевз Валентина Григорівна. Історія математики / В. Г. Бевз. – Х.: Основа, 2006. – 171 с.
4. Ясінський В. А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад / В. А. Ясінський. – Х.: Основа, 2006. – 123 с.

Анотація. *У статті розглянуті деякі особливості розв'язування комбінаторних задач при підготовці учнів до математичних олімпіад різних етапів, наведено приклади розв'язування задач різних типів складності.*

Ключові слова: *комбінаторні задачі, комбінаторне мислення, математична олімпіада.*

Куріцина Вікторія Сергіївна
студентка 2 курсу, спеціальність «Математика»*

ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ 9 КЛАСУ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

Вступ. Одним з основних завдань, які стоять перед сучасною системою освіти, є навчання учнів самостійно логічно мислити. Але школа повинна не тільки формувати в учнів міцну основу знань, а й максимально розвивати їх розумову активність: вчити мислити, самостійно оновлювати і розвивати знання. Математичне мислення є не тільки одним з найважливіших компонентів процесу пізнавальної діяльності учнів, а й таким компонентом, без розвитку якого неможливо досягти результатів в освоєнні школярами системи математичних знань, умінь і навичок. Одним із видів математичних задач які розвивають логічне мислення учнів є задачі на числові послідовності.

Мета даної статті: розглянути специфіку розв'язання завдань з теми «Числові послідовності: арифметична та геометрична прогресія» при підготовці учнів до математичних олімпіад; порівняти кількість даних задач у шкільних підручниках для учнів 9 класів.

Виклад основного матеріалу. Ще не так давно вважалося, що розвиток мислення відбувається в процесі навчання математики спонтанно. Роль математики в розвитку логічного мислення винятково велика. Оскільки вивчення математики формує не тільки логічне мислення, а й багатьох інших якостей людини: кмітливість, наполегливість, критичність. Вироблення вмінь учнів логічно мислити протікає швидше, якщо навчання правильно організовано. Систематичне використання на уроках математики різних задач і завдань, спрямованих на розвиток логічного мислення, розширює математичний кругозір школярів і дозволяє активніше використовувати математичні знання в повсякденному житті. Одним з ефективних способів розвитку логічного мислення є ров'язання задач на числові послідовності.

Послідовність – це множина будь-яких об’єктів, розташованих у певному порядку. Якщо членами послідовності є числа то її називають числовою послідовністю. Якщо кожен член послідовності можна визначити за його номером, то послідовність вважають заданою. Найважливішими та найпростішими прикладами послідовностей є арифметична та геометрична прогресія. Задачі на прогресії є одними із найцікавіших та найскладніших типів завдань. Через це зростає потреба у позакласній роботі з математики, під час якої учні отримують додаткову інформацію, поглиблюють свої знання та розвивають логічне мислення.

На даний час для учнів та вчителів 9 класів пропонується великий вибір підручників та посібників для вивчення числових послідовностей. Аналізуючи деякі з них ([1], [4], [3]) можна з впевненістю сказати, що там є велика кількість завдань на арифметичну (Рис.1) та геометричну (Рис.2) прогресію.

Рис.1

Рис.2

У запропонованих завданнях на арифметичну прогресію переважають такі типи задач: знаходження суми n членів арифметичної прогресії та знаходження деякого члена прогресії, а на геометричну прогресію – знаходження суми n членів геометричної прогресії. Також присутня велика кількість задач на доведення, знаходження знаменника геометричної прогресії та різниці арифметичної прогресії, тощо.

Завдання на числові послідовності пропонуються учням на різних олімпіадах, тому такі задачі мають важливе значення на факультативних заняттях.

Задача 1. (Київська шкільна олімпіада для учнів 9 класу, 1980 р.) Знайти суму $S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}\cdot\frac{1}{a_n}$, де числа a_1 , a_2 , … , a_n складають арифметичну прогресію [5, с. 17] .

Розв'язання. Нехай d – різниця арифметичної прогресії . Тоді для довільного простого натурального k маємо:

$$\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{1}{a_k-a_{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right),$$

$$S=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{a_n-a_1}{da_1a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

Задача 2. (Київська шкільна олімпіада для учнів 9 класу, 1982 р.)Нехай S_m – сума m перших членів арифметичної прогресії. Довести, що $S_{3m}=3\cdot(S_{2m}-S_m)$ [5, с. 21] .

Доведення. Позначимо через a_1 перший член арифметичної прогресії, а через d – її різницю. Тоді $S_m=\frac{2a_1+d(m-1)}{2}\cdot m$, $S_{2m}=\frac{2a_1+d(2m-1)}{2}\cdot 2m$, $S_{3m}=\frac{2a_1+d(3m-1)}{2}\cdot 3m$. З цього маємо, що $3(S_{2m}-S_m)=S_{3m}$.

Задача 3. (Київська шкільна олімпіада для учнів 9 класу, 1983 р.)

Відомо , що з арифметичної прогресії $a+d, a+2d,\ldots,a+nd\ldots$ $(d\neq 0)$ можна виділити послідовність, яка виявиться геометричною прогресією. Довести, що $\frac{a}{d}$ – число раціональне [5, с. 65] .

Доведення. Нехай три члени даної послідовності: $a+kd, a+ld, a+md,$ де $k<l<m$ – натуральні числа, які складають геометричну прогресію. За властивостями цієї прогресії $(a+ld)^2=(a+kd)(a+md)$. Позначивши $x=\frac{a}{d}$ і розділивши цю нерівність на d^2 , отримаємо $(x+l)^2=(x+k)(x+m)$, або $(2l-k-m)x=km-l^2$. З цього випливає, що $2l-k-m\neq 0,$ (оскільки коли

$2l-k-m=0=km-l^2$, тоді $(k+m)^2=4l^2=4km,\Rightarrow k=m$, а це неможливо). Отже, $x=\dfrac{(km-l^2)}{(2l-k-m)}$, де k, l, m – натуральні числа. Таким чином $x=\dfrac{a}{d}$ це раціональне число.

Задача 4. (Всеукраїнські олімпіадні змагання школярів у місті Чернігів, 1992 р.) Сума всіх членів арифметичної прогресії $a_1,a_2,\ldots,a_к$, $k\geq 92$ дорівнює 1992. Яких значень може набувати сума $a_{19}+a_{92}$ залежно від числа k [6, с. 35] ?

Розв'язання. Позначимо різницю арифметичної прогресії через d, а суму $a_{19}+a_{92}$ через b. Скориставшись відомими формулами суми n перших членів арифметичної прогресії та загального члена, отримаємо $S_k=\dfrac{a_1+a_k}{2}k=\dfrac{a_1+a_1+(k-1)d}{2}k=1992,\quad a_1+18d+a_1+91d=b.$

Тепер переформулюємо задачу таким чином: для яких значень b система

$$\begin{cases}\dfrac{2a_1+(k-1)d}{2}k=1992,\\ 2a_1+109d=b\end{cases}$$

Відносно невідомих a_1 і d має розв'язок? Отриману систему запишемо так:

$$\begin{cases}2a_1+(k-1)d=\dfrac{2\cdot 1992}{k},\\ (110-k)d=b-\dfrac{2\cdot 1992}{k}.\end{cases}$$

Очевидно, що у випадку $k\neq 110$ остання система має розв'язок для будь-яких значень b. Якщо $k=110$, то розв'язок існує за умови $\left(b-\dfrac{2\cdot 1992}{110}\right)=0$, тобто лише для $b=\dfrac{1992}{55}$.

На 50 Міжнародній математичній олімпіаді 2008 року, що проходила у місті Бремен (Німеччина), учні працювали над такою задачею.

Задача 5. Дано зростаючу послідовність натуральних чисел $s_1, s_2, s_3, \ldots$ таку, що кожна з двох послідовностей $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$ і $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots$ є арифметичною прогресією. Доведіть, що послідовність $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$ теж є арифметичною прогресією [2, с.74] .

Доведення. Позначимо через D різницю прогресії $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$ також визначимо послідовність $d_n = s_{n+1} - s_n$. Потрібно показати, що послідовність (d_n) є стаціонарною, тобто уся складається з однакових натуральних чисел. Покажемо, що (d_n) обмежена. Очевидно, що $d_n \ge 1$, $\forall n \in N$. Для обмеженості зверху для довільного натурального n маємо такі нерівності: $d_n = s_{n+1} - s_n \le d_{s_n} + d_{s_n+1} + \ldots + d_{s_{n+1}-1} = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = D$. З обмеженості послідовності визначимо $m = \min_n d_n$, $M = \max_n d_n$. Потрібно показати, що вони рівні. Припустимо, що $m < M$, і виберемо такий індекс n, що $m = d_n$, тоді $D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+m} - s_{s_n} \le d_{s_n} + d_{s_n+1} + \ldots + d_{s_n+m-1} \le mM,$ (1) при цьому рівність наступає, тоді і тільки тоді, коли усі доданки суми рівні M. Якщо тепер вибрати n таким, що $M = d_n$, то одержимо аналогічно, що $D = s_{s_{n+1}} - s_{s_n} = s_{s_n+M} - s_{s_n} \le d_{s_n} + d_{s_n+1} + \ldots + d_{s_n+M-1} \ge mM$, (2) у цьому випадку рівність можлива лише за умови, що усі доданки рівні m. Таким чином остаточно маємо, що $D = mM$ і при цьому виконуються умови: якщо $m = d_n$, то $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \ldots = d_{s_n+M-1} = M$, якщо ж $M = d_n$, то $d_{s_n} = d_{s_n+1} = \ldots = d_{s_n+M-1} = m$. З умови $d_n = m \Rightarrow d_{s_n} = M$. Оскільки $s_n \ge s_1 + (n-1) \ge n, \forall n \in \mathrm{N}$, більше того , $s_n > n$, якщо $d_n = n$, бо інакше $m = d_n = d_{s_n} = M$,що суперечить припущенню. Аналогічно, з умови $d_n = M$ випливає $d_{s_n} = m, s_n > n$. Таким чином ми маємо зростаючу послідовність n_1, n_2, … таку, що $d_{s_{n_1}} = M$, $d_{s_{n_2}} = m$, …. Оскільки послідовність d_{s_1}, d_{s_2} , … це послідовність попарно різних $s_{s_1+1},\ldots$ та $s_{s_1},\ldots$, тобто вона також є арифметичною прогресією, тому $M = m$.

Висновки. Завдання на числові послідовності є важливими під час підготовки учнів до математичних олімпіад. Вони подобаються учням через відносну простоту розв’язання. Такі завдання розвивають логічне та творче мислення учнів та формують у них цікавість до математики як науки .

Література

1. Бевз Г. П. Алгебра. Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – Київ: Зодіак-ЕКО, 2009. – 288 с.

2. Рубльова Б. В. Олімпіадні змагання школярів України 2007-2008 та 2008-2009 / Б. В. Рубльова. – Львів: Каменяр, 2010. – 500 с.

3. Мальований Ю. І. Алгебра 9клас. Підручник для класу загальноосвітніх навчальних закладів / Ю. І. Мальований, Г. М. Литвиненко, Г. М. Возняк. – Тернопіль: Богдан, 2009. – 285 с.

4. Мерзляк А. Г. Алгебра 9клас . Підручник для класу загальноосвітніх навчальних закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: «Гімназія», 2009. – 320 с.

5. Вышенский В. А. Сборник задач Киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский, Н. В. Карташов, В. И Михайловский, М. И. Ядренко. – Киев: Издательство при Киевском государственном университете «Вища школа», 1984. – 240 с.

6. Олімпіадні змагання школярів України 1991-2000 [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://ru.calameo.com/read/00359657872ae00b13bf6

Анотація. *У статті розглянуто використання задач на числові послідовності у позакласній діяльності учнів 9 класів. Також здійснено порівняльну характеристику кількості даних задач у підручниках для 9 класу.*

Ключові слова: *числова послідовність, арифметична прогресія, геометрична прогресія,логічне мислення.*

Люба Ангеліна Анатоліївна
студентка 3 курсу, спеціальність «Математика»*

ФОРМУВАННЯ КОМБІНАТОРНОГО МИСЛЕННЯ ШКОЛЯРІВ 5-7 КЛАСІВ

Вступ. Соціально-економічні зміни в нашому суспільстві обумовлюють потребу сформованості гнучкості, варіативності, критичності мислення, здатності висувати гіпотези перебігу подій та реальності їх підтвердження. Саме тому актуалізується необхідність включення комбінаторних знань і вмінь в інтелектуальний багаж кожної сучасної людини.

Людина постійно потрапляє до ситуацій планування своєї діяльності, вибору та прийняття оптимального рішення, його зміни в залежності від зовнішніх обставин. Більш успішно це робитиме людина з розвиненим комбінаторним мисленням, тому елементи комбінаторики включено в зміст освіти як важливу складову математичної культури кожного учня.

Сьогодні актуальність включення комбінаторики до змісту шкільного курсу математики визнана математиками, методистами, цей розділ увійшов до навчальних програм. Так, у програму з математики для 5 класу включено розв'язування комбінаторних задач. Комбінаторні знання можуть стати знаряддям математичного мислення тільки за умови послідовного й систематичного формування протягом усього часу вивчення математики [1].

Мета даної статті: обґрунтувати необхідність формування комбінаторного мислення, замість формального вивчення комбінаторики; розглянути добірку задач, які цьому сприяють.

Виклад основного матеріалу. Перш ніж перейти до розгляду системи задач, які сприяють формуванню комбінаторного мислення школярів V-VII класів, зупинимось на деяких важливих висновках [3]: 1) розпочинати вивчення основ комбінаторики і теорії ймовірності в старших класах малоефективно (досвід викладання цього матеріалу в школі на абстрактно-формальному рівні в 60-70-х роках дав негативні результати і призвів до виключення його з шкільних програм), так як в цьому віці в учнів сформовано прагнення до швидкої формалізації знань, бажання засвоїти перш за все набір правил і алгоритмів, що не сприяє формуванню комбінаторного мислення; 2) основи комбінаторики, перебір всіх можливих варіантів варто вводити в курс початкової школи; 3) найбільш сприятливим для формування комбінаторного мислення, імовірнісних уявлень та інтуїції є вік 10-13 років (V-VII клас).

Комбінаторика – класична тема так званої «олімпіадної» математики, тобто вона містить різноманітний матеріал для підготовки школярів до різного рівня математичних турнірів. Далі хотілось би зупинитися на двох основних моментах навчання «молодших» школярів розв'язувати комбінаторні задачі: 1) розв'язання важких задач повинно бути організовано так, щоб школярі самі знаходили шляхи їх розв'язання, наприклад, у вигляді блоків, які складаються з основної – проблемної задачі і задач, які сприяють якісній організації пошуку і розв'язку; 2) комбінаторні задачі – чудовий матеріал для формування дослідницьких умінь «молодших» школярів.

Формування комбінаторного мислення потрібно розпочинати в 5 класі з розгляду задач, які спираються на досвід дитини. Розв'язок задачі можна подати у вигляді таблиці, в якій будуть розглянуті усі можливі випадки. Після розбору такої задачі доцільно обговорити з учнями можливі інші шляхи оформлення задачі. Наведемо приклад однієї з таких задач.

Задача 1. Скількома способами можна розділити 5 цукерок між трьома дітьми так, щоб кожна дитина отримала хоча б по одній цукерці [2]?

Розв'язання. Подамо розв'язок у вигляді таблиці.

Спосіб	1-ша дитина	2-га дитина	3-тя дитина
1	*3*	*1*	*1*
2	*1*	*3*	*1*
3	*1*	*1*	*3*
4	*2*	*2*	*1*
5	*2*	*1*	*2*

6	*1*	*2*	*2*

Отже, всього є 6 способів.

Методичний коментар. Дану задачу можна використовувати при поясненні методу перебору. Це дасть змогу краще засвоїти новий матеріал.

Для зацікавлення учнів математикою вчителям варто залучати учнів до участі в олімпіадах усіх рівнів з математики. Зокрема, добираючи задачі для шкільної олімпіади з математики для 5 класу можна запропонувати таку задачу.

Задача 2. На кожному прапорці повинні бути смужки різного кольору: жовта, червона, зелена. Розфарбуй прапорці так, щоб вони відрізнялися один від одного. Скільки різних прапорців ти розфарбував? Чи можеш ти вказати спосіб, який дозволяє назвати число прапорців, не виробляючи безпосереднього їх підрахунку?

Методичний коментар. Відповідь на питання задачі передбачалася після виконання наступної роботи.

Один колір дозволяє, очевидно, зробити один прапорець з однієї смужки, попередивши учнів про те, що починаємо з червоного кольору.

Другу кольорову смужку можна прикласти до цього прапорця двома способами за умови, що кожен колір ми хочемо використовувати тільки один раз. Другу смужку ми докладаємо зверху чи знизу.

Як можна додати до цих прапорців третю кольорову смужку? Ми поміщаємо її або зверху, або знизу, або посередині, між двома першими смужками. Таким чином, з трьох різнокольорових смужок можна скласти всього 6 прапорців.

Для розвитку інтересу до комбінаторних задач з дітьми молодшого шкільного віку можна розглянути ігрові завдання з теми комбінаторика.

Задача 3. Розмістіть числа 1,2,3,4,7,8,9,10,13,14,15,16 у кружечках так, щоб сума трьох чисел на будь-якій стороні кожного з трикутників дорівнювала 23.

Цю ігрову задачу можна запропонувати учням тоді, коли розглядаються комбінаторні задачі на перебір елементів заданої множини і виділення тих, які задовольняють певну умову.

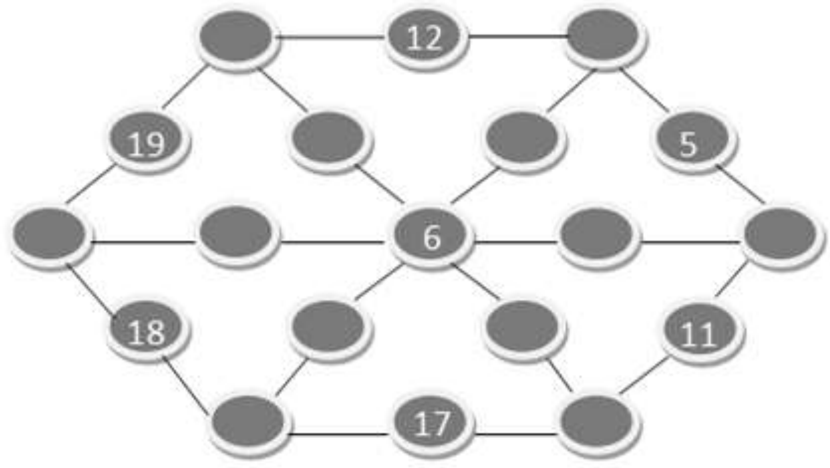


Рис.1

Для забезпечення мотивації розв'язування комбінаторних завдань можна запропонувати дітям завдання у вигляді ігор. Як приклад, розглянемо гру «День-ніч».

Правила гри «День-ніч». Беруть участь три гравці. Вони сідають на стільці. За командою «День» учасники встають і можуть пересуватися. За командою «Ніч» вони сідають на стільці, але так, щоб кожен раз порядок розташування їх був інший. Всі інші стежать за тим, щоб гравці виконували поставлену умову. Гра продовжується до тих пір, поки не виявляться всі можливі варіанти. Питання: скільки всього варіантів вийде?

Методичний коментар. Для того, щоб іншим учням було легше контролювати дотримання правил гри, вчитель може видати гравцям по геометричній фігурі (коло, трикутник і квадрат). Кожного разу, коли гравці по команді «Ніч» сідають, вчитель малює на дошці отриману комбінацію. Гра продовжується до тих пір, поки не виявляться всі можливі варіанти (їх шість).

У процесі гри можуть виникати ситуації, коли учасники повторюють розташування або не можуть знайти нове. Тоді їм можуть допомогти учні класу. До кінця гри необхідно, щоб учні усвідомили важливість введення правила, якого треба дотримуватися в грі. Аналізуючи отримані розташування, потрібно, щоб вони помітили, що кожному гравцю потрібно сідати на перше місце двічі, а двом іншим при цьому мінятися місцями. Гру можна запропонувати в якості фізкульт-хвилинки на уроці математики.

Далі можна пропонувати завдання, що показують можливість застосуванням комбінаторики в повсякденній діяльності людини («життєві» завдання). Дані завдання можна пропонувати учням наприкінці уроків математики.

Висновки. Формування комбінаторного мислення слід розпочинати з учнями у молодшому шкільному віці. Це допоможе вчителю у підготовці учнів до участі в математичних олімпіадах. Спершу слід розглядати задачі прикладного характеру та демонструвати їх наочно. Для зацікавлення учнів задачами такого змісту варто у роботі з учнями розглядати цікаві ігрові задачі комбінаторного змісту.

Література

1. Божко В. Г. Формування комбінаторних знань та вмінь у процесі вивчення математики в основній школі : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія і методика навчання маткматики» / В. Г. Божко. – К., 2006. – 15 с.
2. Істер О. С. Математика: підручник для 5 класів загальноосвітніх навчальних закладів / О. С. Істер. – К.: Генеза, 2013. – 368 с.
3. Христева А. В. Формирование комбинаторного мышления школьников V-VII классов / А. В. Христева. // Магнитогорский государственный университет.

Анотація. *У статті обґрунтовується необхідність формування комбінаторного мислення школярів, особливо у віці 10-13 років. Наведено низку розв'язаних задач, яку варто використовувати на уроках або на позакласних заходах для зацікавлення учнів комбінаторикою.*

Ключові слова: *комбінаторне мислення, ігрові завдання, «олімпіадна» математика, метод підбору.*

Мудрейко Вадим Олегович
студент 4 курсу, спеціальність «Фізика*»

НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТАМ КОМБІНАТОРИКИ В УМОВАХ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ

Вступ. Формування статистичного мислення учнів є одним з основних завдань сучасної математичної освіти. Елементи комбінаторики сьогодні вивчаються починаючи з основної школи в обсязі, що відповідає вимогам Державного стандарту. У старшій профільній школі ця змістова лінія суттєво розширюється, поглиблюється.

Якщо звернутись до історії цього питання, то можна з'ясувати, що до вивчення елементів комбінаторики у різні часи відносились по різному, визначаючи їх місце у навчальному процесі.

До 70-х років XX століття комбінаторика в середній школі вивчалася за підручником А. П. Кисельова [3]. Після впровадження нової програми і нових підручників, зокрема посібника з алгебри і початків аналізу за ред. А. М. Колмогорова [1], комбінаторику було виключено з програми. Але її вивченню приділялась належна увага у посібниках для факультативних занять, серед яких посібники [2], [4], співавтором яких є З. Г. Шефтель.

Мета даної статті: розкрити основні ідеї, різні способи та методи планування позакласної роботи при при вивченні елементів комбінаторики

Виклад основного матеріалу. Зупинимось на основних аспектах методики навчання учнів елементів комбінаторики, а саме на питаннях методики формування основних понять комбінаторики, доведення основних формул та методики навчання розв'язування комбінаторних задач.

У методиці навчання математики та в навчально-методичній літературі існують різні підходи до вивчення різних видів сполук залежно від їх трактування та послідовності запровадження. Успіх у формуванні цих математичних понять залежить від способу та послідовності їх введення.

За посібником для факультативних занять 9 класу [2] та за посібником для шкіл та класів з поглибленим вивченням математики [4] перед розглядом видів сполук означаються поняття «впорядкована множина» та «рівні впорядковані множини».

Означення 1. Множину M називають впорядкованою, якщо в ній встановлено відношення порядку що має такі властивості:

1) для будь-яких $a, b \in M$ або $a < b$ (a передує b), або $b < a$;

2) якщо $a < b,\ b < c$, то $a < c$ [4].

Означення 2. Дві впорядковані множини вважаються рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів і однаково впорядковані [4].

Сполуки без повторень розглядаються в наступній послідовності: розміщення, перестановки, комбінації. Поняття «перестановка» є видовим поняттям по відношенню до поняття «розміщення». Згадані поняття вводяться абстрактно-дедуктивним методом, спочатку означають поняття, а потім наводять приклади його практичного застосування.

Означення сполук, запропоновані у згаданих посібниках зрозумілі та нескладні для усвідомлення учнями, які знайомі з поняттями «множина» та «підмножина». Сформулюємо їх.

Означення 3. Нехай M є n -елементною множиною, $k \leq n.$.Розміщенням з n елементів по k називають будь-яку впорядковану k -елементну підмножину множини M [4].

Означення 4. Розміщення з n елементів по n називається перестановками з n елементів [4].

Означення 5. Нехай M є n -елементною множиною, $k \leq n$.Комбінацією з n елементів по k називають будь-яку k -елементну підмножину множини M [4].

Зупинимось на декількох задачах запропонованих у посібнику [4].

Задача 1 [4, с.188, №1]. Скількома способами можна розсадити 5 учнів на 12 місцях?

Задача 2 [4, с.189, №5]. У шаховому турнірі беруть участь 7 чоловік. Скількома способами можуть розділитися місця між ними?

Задача 3 [4, с. 192, №1]. Скількома способами можна вибрати три фарби з п'яти різних фарб?

У сформульованих задачах йдеться про скінченні множини та підмножини, складені з елементів довільної природи. Залежно від умови задачі розглядаються скінченні множини, в яких істотним є або порядок їх елементів, або належність певних елементів до цих множин, або перше і друге одночасно. Використовуючи означення 3-5, учням нескладно визначити вид сполуки про яку йдеться в задачі. Продемонструємо це з допомогою наступної таблиці.

Початкова множина	12 місць	7 місць	5 фарб
Нова(створена) множина чи підмножина	підмножина	множина	підмножина
	5 місць для учнів	7 місць для учасників турніру	3 фарби
Впорядкована	+	+	-
Сполука	розміщення	перестановка	комбінація

Багато теорем і формул комбінаторики ґрунтується на так званому правилі добутку.

Приклад 1 [4, с.185]. На тарілці лежать 3 яблука і 5 груш. Скількома способами можна взяти одне яблуко і одну грушу?

Роз'язання. Щоб відповісти на це запитання, перенумеруємо окремо яблука і груші. Ми можемо взяти перше яблуко з будь-якою з п'яти груш; це дає п'ять способів. Так само можна взяти друге або третє яблуко з будь якою з п'яти груш, і для кожного з яблук дістанемо по п'ять способів. Отже, загальна кількість способів вибору дорівнює $3 \cdot 5 = 15$.

Відповідь.15 способів.

Правило добутку. Нехай об'єкт a можна вибрати m способами і при кожному з цих виборів об'єкт b можна вибрати n способами. Тоді вибір пари (a, b) можна здійснити $m \cdot n$ способами [4].

Правило добутку легко узагальнюється на випадок кількох виборів.

Узагальнене правило добутку. Нехай об’єкт a_1 можна вибрати m_1 способами, об’єкт $a_2 - m_2$ способами, об’єкт a_k можна вибрати m_k способами. Тоді послідовний вибір всіх об’єктів $(a_1, a_2, ..., a_k)$ можна здійснити $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$ способами.

Підхід до доведення формул комбінаторики певною мірою залежить від послідовності вивчення окремих видів сполук і попереднього ознайомлення учнів з методами доведень. Так для розуміння учнями доведення формули кількості розміщень з n елементів по k : $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$, де n, k - довільні натуральні числа $(k \le n)$, учні мають бути попередньо ознайомлені з методом математичної індукції.

Є також і інше доведення цієї формули переконаємось в цьому, розглянувши доведення.

Доведення. З’ясуємо скількома способами можна скласти k-елементну впорядковану множину $(a_1, a_2, ..., a_k)$ з елементів заданої n -елементної множини M. За a_1 можна прийняти будь-який елемент множини M, тобто a_1 можна вибрати n способами. За a_2 можна прийняти будь-який елемент M, відмінний від a_1 , отже a_2 можна вибрати $n-1$ способами. Аналогічно a_3 можна вибрати $n-2$ способами і т.д. Тому за узагальненим правилом добутку шукане число способів дорівнює добуткові k множників $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

Послідовність вивчення окремих видів сполук дає можливість, з доведеної тільки що формули, безпосередньо одержати формулу кількості перестановок з n елементів: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$, оскільки $P_n = A_n^n$.

Для доведення формули кількості усіх комбінацій з n елементів по k :

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

використовуються раніше виведені формули A_n^k, P_n.

Висновки. Методика навчання учнів розв’язування комбінаторних задач не зводиться лише до формування в учнів вміння визначати вид сполуки, про яку йдеться в задачі, і застосування відповідної формули для обчислення кількості сполук. Таким чином розв’язуються лише простіші комбінаторні задачі.

Література

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / А. М. Колмогоров, О. М. Абрамов, Ю. П. Дудніцин та ін.; За ред. А. М. Колмогорова. – К.: Рад. шк., 1992.–350 с.
2. Вивальнюк Л. М. Математика: Посібник для факультативних занять в 9 кл / Л. М. Вивальнюк, З. Г. Шефтель, Е. В. Рафаловський. – К.: Рад. шк., 1984.– 136 с.
3. Кисельов А. П. Алгебра. Ч II: Підруч. для серед. шк.–К.: Рад. шк., 1966.– 264 с.
4. Математика: Посібник для шк. та кл. з поглибл. вивченням математики / Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко та ін.– К.: Освіта, 1998.– 301с.
5. Програми: для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 класи; для класів з поглибленим вивченням математики, 8-11 класи; для класів гуманітарного напряму. Математика 10-11 класи // Математика.–2001.– №35, №37.

Антотація. *Ознайомити учнів з елементами комбінаторики можна на факультативних заняттях чи на засіданнях математичного гуртка.*

Ключові слова: *комбінаторика, розміщення, перестановки, комбінації, особливості методики навчання.*

Мукоїд Алла Павлівна
студентка 2 курсу, спеціальність «Математика»*

НАВЧАННЯ ГЕНЕРАЦІЙ ІДЕЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вступ. Пошук невідомих функцій за їхніми властивостями, які виражені певними співвідношеннями (рівностями та/або нерівностями) є задачею евристичного характеру і, безумовно, складною для учня. Саме тому такі задачі рідко можуть трапитись на основних уроках математики, проте є традиційним типом завдань математичних олімпіад. При розв'язуванні функціональних рівнянь можуть застосуватись найрізноманітніші методи: аналітичний, синтетичний, метод доведення від супротивного, усі типи індукційних міркувань, причому навіть в межах розв'язування однієї і тієї ж задачі. Із цієї точки зору, як зазначається в [5], жоден інший тип олімпіадних задач конкурентом виступати не може, чим підтверджується винятковий статус функціональних рівнянь у розмаїтті олімпіадного матеріалу.

Мета даної статті: виокремити та обґрунтувати методичні рекомендації щодо технології розв'язування функціональних рівнянь, надати вчителям та учням конкретну допомогу в розвитку вміння розв'язувати олімпіадні завдання з даної теми.

Виклад основного матеріалу. Функціональні рівняння постійно входять до завдань різних математичних змагань (зокрема це типовий вид завдань на Всеукраїнських олімпіадах юних математиків у 10 та 11 класах), оскільки вони не мають універсальних «рецептів» щодо розв'язання. Навіть зовні прості функціональні рівняння можуть виявитись достатньо складними задачами. Розв'язування кожного функціонального рівняння, навіть у випадку вдало установленого методу, перетворюється на невеличке самостійне дослідження, яке розвиває творчі здібності учня. Вивчення функціональних рівнянь сприяє глибшому засвоєнню таких понять, як функція, композиція функцій, границя послідовності й функції, неперервність та ін., що входять до програми шкільного курсу математики [1].

В Малій академії наук України вивчення методів розв'язування функціональних рівнянь проводять в гуртках і позакласній роботі з математики передбачають вирішення таких завдань [2]:

- Поглиблення знань учнів з теми «Числова функція».
- Розвиток інтересу до розв'язання нестандартних математичних задач та математики загалом.
- Знайомство з основними методами розв'язання функціональних рівнянь.
- Формування умінь і навичок складати математичні задачі.
- Активізація навчально-пізнавальної та пошуково-дослідницької діяльності учнів.
- Підготовка учнів до участі в олімпіадах і конкурсах.
- Посилення прикладної спрямованості курсу математики та підвищення фундаментальної математичної підготовки.

Вивчення теми потрібно розпочати з актуалізації деяких фактів про функції. Учні мають уявлення про числові функції та навички роботи з ними. Важливо, щоб розуміння поняття функції відповідало певному образу [2].

Зазвичай шукані функції є функціями однієї змінної, а внутрішні можуть залежати як від одної, так і від кількох змінних. Одну з них вважають незалежною, а інші називають вільними змінними. Теоретичні й практичні застосування саме таких рівнянь спонукали видатних математиків до їхнього вивчення. Досить лише навести рівняння Коші $f(x+y)=f(x)+f(y)$, яке використовується у проективній геометрії і теорії ймовірностей; рівняння $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$ до якого прийшов Даламбер, розв'язуючи проблему паралелограма сил; рівняння $f^2(x)=f(x-y)\cdot f(x+y)$, використане Лобачевським при визначенні кута паралельності у геометрії.

Розв’язком функціонального рівняння називається функція, яка на заданій множині перетворює рівняння в тотожність. Функціональне рівняння вважається розв’язаним, якщо знайдені всі його розв’язки або доведено, що їх немає [1].

Існує чимало методів розв’язування функціональних рівнянь.

Одним з найпростішим є метод підстановки. Суть якого полягає ось у чому. Припустимо, дане рівняння має розв’язок. Застосуємо до змінних, що входять в рівняння, деякі підстановки. Дістаємо систему рівнянь, одним із невідомих якої є шукана функція. Після розв’язування одержаної системи безпосередньою перевіркою необхідно переконатись, що знайдена функція задовольняє усім умовам задачі. Основна трудність цього методу полягає у виборі вдалих підстановок [4].

До методів розв’язування функціональних рівнянь ми додамо ще й певні ідеї й поради, які можуть допомогти при розв’язуванні задач [4].

1. Варто спробувати підібрати можливий розв’язок заданого рівняння. Підібравши можливий розв’язок $f_0(x)$, можна спробувати виконати таку заміну $f(x) = f_0(x) + g(x),\ f(x) = f_0(x) \cdot g(x)$ тощо з нового невідомою функцією $g(x)$. Це часто призводить до нового функціонального рівняння з невідомою функцією $g(x)$, яке є більш простим, ніж вихідне рівняння.

2. Шляхом підстановок конкретних числових значень незалежної змінної слід спробувати відшукати значення функції в певних точках. Це може наштовхнути на гіпотезу про те, які функції є розв’язком рівняння, та якими властивостями володіє шукана функція.

3. Якщо рівняння включає дві змінні, скажімо x і y слід спробувати здійснити такі підстановки $x = x(t), y = y(t)$, які приводять до рівняння з однією змінною t, яке є більш простим. Також це можна досягнути, скажімо, виконуючи підстановки для y в термінах x.

4. Якщо у функціональному рівнянні в одній частині записано вираз, який є симетричним відносно змінних x та y, а в іншій – ні, то провівши

заміну x на y, а y на x можна отримати нове функціональне рівняння, яке, можливо, лише розв'язати.

5. Слід спробувати визначити якомога більше властивостей шуканої функції. Наприклад, чи є вона монотонною, скільки вона може мати коренів, яких значень вона може набувати, як вона себе поводить при прямуванні аргумента до нескінченності тощо.

Знайомство з функціональними рівняннями можна почати у 8 класі. У підручнику Алгебра–8 (автори: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір) пропонується, зокрема, такі задачі:

1. Знайдіть функцію f, яка задовольняє умові $3f\left(x\right)+2f\left(-x\right)=-\dfrac{2}{x}$.

2. Знайдіть функцію f, яка задовольняє умові

$$2f\left(x\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^2-6}{x}\ .$$

Слід зауважити, що тут не пропонується розв'язати функціональне рівняння, а просто підібрати розв'язок. Разом з тим спосіб розв'язання цих завдань є одним з методів розв'язування функціональних рівнянь.

Приклад 1. [3] Знайти на множині дійсних чисел функцію $f(x)$, яка задовольняє співвідношення

$$2f(x)+f(1-x)=x^2$$

Розв'язання.

Зафіксуємо змінну x, тоді функціональне рівняння стане лінійним рівнянням з двома невідомими.

Введемо заміну $t=1-x$, тоді $2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2$

Отримаємо систему рівнянь: $\begin{cases}2f(x)+f(1-t)=t^2\\ 2f(1-t)+f(t)=(1-t)^2\end{cases}$

Знаходимо функцію: $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(t^2+2t-1\right)$

Отже, виконавши перевірку, робимо висновок, що функція $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)$ є розв'язком даного функціонально рівняння.

Відповідь. $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)$

Приклад 2. Знайти функцію, яка задовольняє співвідношення

$$f(x)+f(x+5)=10x+11$$

Розв'язання.

Розпочнемо конструювати розв'язок у вигляді лінійної функції $f(x)=ax+b,$ де $a\in R, b\in R$ Підставимо в аргумент шуканої функції $x+5$

$$f(x+5)=a(x+5)+b=ax+5a+b$$

Додамо праві частини отриманих рівностей , щоб отримати ліву частину початкового рівняння:

$$ax+b+ax+5a+b=10x+11,$$

$$2ax+5a+2b=10x+11.$$

Прирівнявши коефіцієнт перед x та вільні члени, отримаємо два рівняння

$$2a=10 \text{ та } 5a+2b=11.$$

З першого та другого рівняння знайдемо значення коефіцієнту $a=5$, підставивши його у друге рівняння отримаємо $b=-7$. Легко переконатися, що отримана $f(x)=5x-7$ задовольняє дане рівняння.

Отже, один з усіх можливих розв'язків даного функціонального рівняння буде функція $f(x)=5x-7$

Відповідь. $f(x)=5x-7$.

Зауважимо, що існують інші методи розв'язання функціональних рівнянь: метод Коші, який полягає в тому, що розв'язок рівняння, тобто функцію $f(x)$, знаходять спочатку для $N\in x$, потім для всіх $Q\in x$ і, нарешті, для всіх $R\in x$, цей метод застосовують за умови неперервності і монотонності функції $f(x)$; метод граничного переходу, метод диференціювання, метод крайнього, метод математичної індукції, метод зведення до рівняння у скінченних різницях. Ці методи базуються на методі підстановок і можуть вивчатися у 11 класі. Використання того чи іншого методу під час розв’язання функціонального рівняння залежить від умови задачі.

Висновок. Розв’язування функціонального рівняння, навіть у випадку успішного установленого методу, перетворюється на невелике самостійне дослідження, яке розвиває в учнях їх творчі здібності. Функціональні рівняння впливають на засвоєння понять, що входять до програми шкільного курсу математики. Функціональні рівняння вимагають творчого використання знань шкільного курсу математики, глибокого логічного мислення, знань основних і пошуку нетрадиційних способів їх розв’язування.

Література

1. Вороний О. М. Функціональні рівняння в олімпіадній математиці / О. М. Вороний. – Кіровоград: РВД КДПУ ім. В. Винниченка, 2010. – 68 с.
2. Войцехівська В. Функціональні рівняння / В. Войцехівська; [відп. за вип. О. Лісовий]. – К. : Праймдрук, 2012. – 48 с.
3. Долінко О. В. Задачі математичних олімпіад. Функціональні рівняння / О. В. Долінко. – Кіровоград, 2013. – 27 с.
4. Ясінський В. А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра / В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко. – Вінниця : Середняк Т.К., 2015. – 272 с.
5. Мітельман І. М. Розв’язуємо функціональні рівняння. Міркування від супротивного : навч.-метод. посіб. / І. М. Мітельман. – Одеса : ТЕС, 2014. – 67 с.

Анотація. *У статті розглядаються методи розв’язання функціональних рівнянь. Розглянуті ідеї й поради, які допоможуть при розв’язанні задач.*

Ключові слова: *функціональні рівняння, розв’язування рівняння, розв’язок, функція, метод розв’язання.*

Непомнящий Максим Ігорович
студент 4 курсу, спеціальність «Математика*»

ОРГАНІЗАЦІЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ УЧНІВ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ З n НЕВІДОМИМИ

Вступ. Традиційно одним з основних завдань шкільного курсу алгебри є навчити учнів розв'язувати рівняння та задачі, що зводяться до них. Загальноприйнята шкільна програма з математики зовсім «забула» про існування невизначених рівнянь (рівнянь, що мають кілька змінних або систем, де кількість змінних більша від кількості рівнянь). Діофантові рівняння зустрічаються або на математичних олімпіадах або вивчаються у 9 класах з поглибленим вивченням математики та на факультативних заняттях. Тому доцільно буде ознайомити учнів з найпростішими невизначеними, або діофантовими рівняннями в процесі роботи математичного гуртка.

Мета даної статті: виокремити методичні поради щодо технології навчання учнів розв'язуванню діофантових рівнянь першого порядку на факультативних та гурткових заняттях з математики.

Виклад основного матеріалу. Для початку потрібно зауважити, що не всі невизнечені рівняння називають діофантовими. Діофантовими називаються лише ті алгебраїчні рівняння з цілими коефіцієнтами, в яких кількість змінних більша, ніж кількість рівнянь, а знайти треба тільки цілі або раціональні розв'язки.

Перед тим як розпочати формувати знання учнів про діофантові рівняння необхідно ознайомити їх з поняттям діофантове рівняння першого степеня.

Діофантовим рівнянням першого степеня з n невідомими називається рівняння виду $a_1x_n + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, де $a_1, a_2, ..., a_n, b \in Z$.

Найпростішими діофантовими рівняннями першого степеня є рівняння з двома невідомими $ax + by = c$, де $a, b, c \in Z$.

При розв'язуванні рівнянь даного типу використовують наступні твердження.

Твердження 1. При взаємно простих коефіцієнтах $a_1, a_2, ..., a_n$ діофантове рівняння $a_1x_n + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 1$ має розв'язки в цілих числах.

Твердження 2. Нехай d - найбільший спільний дільник коефіцієнтів $a_1, a_2, ..., a_n$. Діофантове рівняння $a_1x_n + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ має розв'язки тоді і тільки тоді, коли $b \vdots d$. Кількість розв'язків такого рівняння дорівнює 0, або їх кількість нескінченна.

Доведення тверджень 1 і 2 можна розглянути у книзі Серпінського[3].

Наступне твердження доводиться учнями після ознайомлення з поняттям конгруенції.

Твердження 3. Нехай x_0 задовольняє конгруенцію $ax \equiv c(\mathrm{mod}\, b)$, то $\left(x_0, \frac{c - ax_0}{b}\right)$ є розв'язком діофантового рівняння $ax + by = c$.

Твердження 4. Нехай d - найбільший спільний дільник чисел a і b, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \vdots d$ і (x_0, y_0) - деякий розв'язок діофантового рівняння: $ax + by = c$. Тоді множина розв'язків рівняння $ax + by = c$ в цілих числах співпадає з множиною пар чисел (x', y'), де $x' = x_0 - \frac{b}{d}t$, $y' = y_0 + \frac{a}{d}t$, а t - будь-яке ціле число.

Доведення твердження 4 можна знайти у книзі Бухштаб[1].

Для кращого засвоєння учнями даних тверджень необхідно кожне з них закріпити за допомогою розв'язання декількох прикладів, в яких вони застосовуються. Також при розв'язуванні лінійного діофантового рівняння з двома невідомими використовують наступний алгоритм:

1) Перевірити умову розв'язності даного рівняння в цілих числах. Для цього спочатку ділять обидві частини рівняння на число $m = НСД(a,b,c)$, а потім перевіряють умову: $НСД(a:m, b:m) = НСД(p,s) = 1$, де $a:m = p$, $b:m = s$; якщо ця умова не виконується, тоді роблять висновок, що дане рівняння не має розв'язку в цілих числах.

2) Якщо рівняння має розв'язок в цілих числах, тоді треба знайти хоча б одну пару (x_0, y_0) цілих чисел, яка є розв'язком даного рівняння; (це можна зробити методом підбору та іншими методами).

3) Записують всю множину розв'язків лінійного діофантового рівняння з двома невідомими, як множину цілочисельних пар у вигляді $(x_0 - pt, y_0 + st)$, де t - довільне ціле число.

Як бачимо, кожен з етапів алгоритму для двох невідомих є узагальненнямвідповідних тверджень для діофантових рівнянь з n невідомими. Даний алгоритм є легким на перший погляд, проте в його реалізації виникають деякі проблеми. Наприклад, яким чином відшукати хоча б одну пару розв'язків (x_0, y_0), тому на це потрібно звертати більше уваги.

Для перевірки виконання даного алгоритму розглянемо приклад.

Приклад: розв'язати в цілих числах рівняння $3x + 5y = 7$.

Розв'язання:1) Перевіримо умову розв'язності: коефіцієнти рівняння $a = 3, b = 5, c = 7$, $НСД(3{,}5) = 1$. $7 : НСД(3{,}5) = 7 : 1 = 7$, отже, маємо ціле число, тому дане рівняння має множину розв'язківв цілих числах.

2) Знайдемо спочатку який-небудь конкретний розв'язок: спочатку знайдемо одну пару цілих чисел $(m; n)$, яка є розв'язком іншого, легшого, рівняння $3x + 5y = 1$, тоді матимемо правильну рівність: $3m + 5n = 1$, а для того, щоб знайти один розв'язок (x_0, y_0) для рівняння $3x + 5y = 7$, треба буде помножити рівність $3m + 5n = 1$ на 7. Продемонструємо цю ідею на прикладі. Оскільки легко встановити, що $3m + 5n = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$, то $3x + 5y = 3 \cdot (2 \cdot 7) + 5 \cdot (-7 \cdot 1) = 1 \cdot 7$ а, отже, $x_0 = 14, y_0 = -7$ – це один з розв'язків даного рівняння.

3) Отже, маємо дві рівності: $3x + 5y = 7$ та $3x_0 + 5y_0 = 7$. Віднімемо від першого рівняння друге, позначимо $x - x_0$ і $y - y_0$ через p і g, отримаємо $3p + 5g = 0$. Звідси ми бачимо, що g ділиться на 3, а p – на 5. Підставимо

$p=5k$, тоді $g=-3k$. Тут очевидно, що k може бути будь-якимцілим числом. Отже, ми отримуємонабір розв'язків:

$x-x_0=5k$; $x=14+5k$, де k – ціле число.

$y-y_0=-3k$; $y=-7-3k$, де k – ціле число.

Інших розв'язків немає.

Відповідь: $(14+5k;-7-3k)$, де k – довільне ціле число.

Висновки. Зважаючи, що діофантові рівняння зустрічаються на математичних олімпіадах різного рівня, вважаємо, що потрібно їх вивчати на гурткових та факультативних заняттях. Вивчення діофантових рівнянь сприяє розвитку логічного мислення учнів, оскільки не існує єдиного, універсального, способу їх розв'язання.

Література

1. Бухштаб А. А. Теория чисел / А. А. Бухштаб. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательствоминистерства РРФСР, 1960. – 378 с.
2. Гнезділова Т. Діофантові рівняння // Математика. – 2009. – №39.
3. Гнезділова Т. Діофантові рівняння // Математика. – 2009. – №42.
4. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах / А. О. Гельфонд. – М.: Наука, 1978. – 63с.
5. Серпинский В. О Решениуравнений в целых числах / В. О. Серпинский. – М.: Физматлит, 1961. – 88 с.

Анотація. *У статті розглянуто – діофантові рівняння, та алгоримт, за допомогою якого можна розв'язувати рівняння даного типу з двома невідомими. Наведено приклад діофантового рівняння першого порядку, та його розв'язання.*

Ключові слова: *лінійні рівняння, невизначені рівняння, діофантові рівняння, НСД, конгруенція, метод підбору.*

Озиранська Лілія Степанівна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика*»

РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ ЗНЗ У ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОДІЛЬНІСТЬ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ

Вступ. У класах з поглибленим вивченням математики часто доводиться вивчати різні питання з теорії чисел. Серед них поняття подільності, ділення з остачею, поняття простого числа, взаємно простих чисел та інші, що розглядаються в курсі математики основної школи. Тема подільності посідає особливе місце у роботі математичного гуртка. Задачі на подільність розвивають в учнів логічне та нестандартне мислення. Вивчення цих понять та доведення відповідних властивостей і теорем є важливими, оскільки вони дають потужний інструмент для розв'язання різноманітних задач, у тому числі й задач, що пропонуються учням на олімпіадах усіх рівнів та інших математичних змаганнях.

Мета даної статті: обґрунтувати важливість розв'язання задач на подільність у розвитку математичного мислення учнів ЗНЗ. Здійснити аналіз діючих підручників з математики для 6 класу та алгебри для 8 класу на наявність задач на подільність цілих чисел та розробити план-конспект факультативного заняття для учнів 7 класу ЗНЗ.

Виклад основного матеріалу. За чинною програмою тему «Подільність натуральних чисел» передбачено вивчати на уроках математики у 6 класі. Вивчення основної теореми арифметики, ознак подільності на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, означення взаємно простих чисел дозволяє розв'язувати задачі з відкритим формулюванням, в яких використовуються такі запитання, як: дослідіть…; знайдіть взаємозв'язок…; з'ясуйте, чи є…; існує, чи ні…тощо.

Наведемо приклади задач з відкритим формулюванням:

Задача 1 [3, с. 38]. Відомо, що ціле число n ділиться на 9 і на 5. Чи ділиться n на 45?

В учнів може виникнути думка, що ціле число завжди ділиться на добуток двох своїх дільників. Наступна задача свідчить, що це не так.

Задача 2 [3, с. 39]. Відомо, що $n \vdots 4$ і $n \vdots 6$. Чи правильно, що $n \vdots 24$?

Задача 3 [3, с. 40]. Які цифри можна поставити замість зірочок у записі $320*2*44$, щоб отримане число ділилося на 132?

Таке формулювання задач наштовхує учнів на таку розумову діяльність, як висунення гіпотези та її перевірку. У математиці дуже часто зустрічаються задачі, в яких потрібно довести те чи інше твердження. Тому час від часу варто формулювати завдання у вигляді задач на доведення. Адже така діяльність передбачає додаткову роботу над ними: порівняння, узагальнення, знаходження частинного випадку, складання нових задач на основі даної, проведення аналогій чи формулювання аналогічного твердження. У ході такої діяльності учні творчо долучаються до їх розв'язання та навчаються самостійно отримувати нові математичні факти та твердження.

Наведемо приклади задач на доведення:

Задача 4 [3, с. 39]. Нехай для цілих чисел a, b існують цілі числа m, n такі, що $am+bn=1$. Доведіть, що числа a, b взаємно прості.

Задача 5 [1, с. 28]. Доведіть, що при будь-яких a, b, c, d число $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ ділиться на 11.

Задача 6 [4, с. 38]. Доведіть, що для довільного натурального числа n різниця $3^{6n}-2^{6n}$ ділиться на 35.

Задача 7 [4, с. 38]. Доведіть, що сума $S=1^3+2^3+...+2009^3+2010^3$ ділиться на 2011.

У 8 класі при вивчені розділу «Основи теорії подільності» буде доречно розглянути більш складніші задачі на періодичність остач, НСД і НСК, алгоритм Евкліда, число натуральних дільників, рівняння у цілих числах. Наприклад: Задача 8 [4, с. 34]. Доведіть, що $2222^{5555}+5555^{2222}$ ділиться на 7.

Задача 9 [4, с. 35]. Знайдіть останню цифру числа 9^{9^9}.

Задача 10 [4, с. 39]. Розв'яжуть у цілих числах рівняння $x^3+x^2+x-3=0$

При вирішенні таких завдань розвиваються пам’ять, увага, гнучкість мислення, формуються вміння спостерігати, аналізувати явища, проводити порівняння, узагальнювати факти, робити висновки. Міркування учнів стають послідовними, доказовими, логічними, а мова – чіткою, переконливою і аргументованою.

Розв’язання даних задач розширює математичний кругозір, формує неординарність мислення, вміння застосовувати знання в нестандартних ситуаціях, розвиває наполегливість у досягненні поставлених цілей, прищеплює інтерес до вивчення математики.

Оскільки задачі на подільність розвивають в учнів математичне мислення та цікавість до математики, то проаналізуємо діючі підручники з математики на наявність задач на подільність цілих чисел.

Таблиця 1.

Кількість задач на подільність чисел в підручниках [6], [2]

Підручники / Навчальні теми	[8]	[2]
Дільники і кратні	31	25
Ознаки подільності на 10, на 5, на 2	28	15
Ознаки подільності на 9, на 3	23	16
Прості і складені числа	27	14
Найбільший спільний дільник	19	20
Найменше спільне кратне	13	14

Таблиця 2.

Кількість задач на подільність цілих чисел в підручнику [5]

Типи задач / Навчальні теми	Задачі на обчислення	Задачі на доведення	Задачі на дослідження
Подільність націло та її властивості	5	33	5
Ділення з остачею. Конгруенції та їх властивості	17	19	13
НСК і НСД двох натуральних чисел. Взаємно прості числа	8	13	6
Ознаки подільності	13	10	7
Прості і складені числа	20	17	7
Ділення многочленів	4	4	0

Корені многочлена. Теорема Безу	3	7	7
Ціле раціональне рівняння	2	2	0

Проаналізувавши підручники основної школи можна зробити висновок, що у них подана якісна добірка задач на подільність чисел, велику кількість яких можна розглядати при підготовці учнів до шкільних та районних олімпіад з математики.

Під час проходження педагогічної практики у ЗНЗ є можливість провести з учнями факультативне заняття на тему «Задачі на подільність цілих чисел» та розглянути багато цікавих задач розв’язавши їх у найраціональніший спосіб.

Розглянемо фрагмент плану-конспекту факультативного заняття у 7 класі.

ТЕМА: Задачі на подільність цілих чисел

МЕТА: вдосконалити та поглибити вміння і навички розв’язувати задачі на подільність при підготовці до математичних олімпіад та інших математичних змагань.

ХІД РОБОТИ

I. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Як встановити, чи ділиться одне число на інше без остачі? Для цього потрібно знати основні поняття і теореми, пов’язані з подільністю.

Ділення числа a на b можна виразити рівністю: $a = bq + r$, де q і r – цілі числа, q – частка, r – остача, $0 \le r < b$.

При діленні a на b можуть бути остачі: $0, 1, 2, ..., b-1$.

Якщо $r = 0$, то це означає, що a ділиться на b без остачі: $a = bq, a : b = q$.

Основні теореми, пов’язані з подільністю:

1. Якщо кожний з доданків ділиться на якесь число, то їх сума ділиться на це саме число: $a \vdots m$, $b \vdots m$, $c \vdots m$, то $(a+b+c) \vdots m$;

2. Якщо зменшуване і від’ємник діляться на яке-небудь число, то і різниця ділиться на це саме число: $a \vdots m$, $b \vdots m$, то $(a-b) \vdots m$;

3. Якщо всі доданки, крім одного, діляться на дане число, то сума не ділиться на це число: $a \vdots m$, $b \vdots m$, c не ділиться на m, то $(a+b+c)$ не ділиться на m;

4. Якщо один з множників ділиться на яке-небудь число, то їх добуток ділиться на це число $a \vdots m$, то $ab \vdots m$.

У 6 класі ми вивчали ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, означення взаємно простих чисел. Хто може їх сформулювати та сказати, які числа називаються взаємно простими?

II. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ У НЕСТАНДАРТНИХ СИТУАЦІЯХ

1. На яку цифру закінчується 2^{2016}?

2. Розв'яжуть у натуральних числах рівняння $x^2 - y^2 = 33$ [4, с. 39].

3. Розв'яжуть у цілих числах рівняння $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

4. Семеро рибалок ловлять рибу на озері. Перший рибалить щодня, другий – через день, третій – через 2 дні й т. д., сьомий – через 6 днів. Сьогодні всі рибалки зібралися на озері. Через яку найменшу кількість днів усі семеро рибалок знову зберуться разом на озері [1, с. 29]?

5. 72 бутерброди й 48 тістечок порівно розділили між учнями класу. Скільки учнів у класі, якщо відомо, що їх більше ніж 20 [1, с. 29]?

III. ПОВІДОМЛЕННЯ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Для кращого усвідомлення методів розв'язання такого типу задач доречно домашнє завдання подати у вигляді наступних задач.

1. Як розрахуватись за покупку, якщо ти повинен заплатити 19 грн і в тебе є банкноти по 3 грн, а в касира тільки по 5 грн?

2. Петрик розставив моделі літаків на 14 полицях, а потім переставив їх на 8 полиць, так, що на кожній полиці моделей літаків було порівно. Скільки моделей у Петрика, якщо відомо, що їх у нього більше ніж 100 і менше ніж 120?

3. Якою цифрою закінчується число 3^{2016}?

Висновки. Таким чином, задачі на подільність чисел є обов’язком компонентом навчання математики в основній школі. Аналізуючи підручники основної школи можна сказати, що у них подана якісна добірка задач на подільність чисел, велика частина яких розглядається в 6 класі, а більш складніші завдання у 8 класі у підручниках з поглибленим вивченням математики.

Література

1. Глюза О. О. Подільність чисел / О. О. Глюза // Математика в школах України. Позакласна робота., 2012. – №2. – С. 21-29.

2. Істер О. С. Математика: Підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – К. : Генеза, 2014. – 296 с.

3. Курченко О. Задачі на подільність цілих чисел / О. Кучеренко, К. Рабець // Математика в школі., 2010. – №4. – С. 37-41.

4. Курченко О. Задачі на подільність цілих чисел / О. Кучеренко, К. Рабець // Математика в школі., 2010. – №6. – С. 34-40.

5. Мерзляк А. Г. Алгебра: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2008. – 368 с.

6. Мерзляк А. Г. Математика: Підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2006. – 304 с.

Анотація. *Обґрунтовано важливість розв’язання задач на подільність у розвитку математичного мислення учнів ЗНЗ; подано порівняння кількості задач на подільність чисел у підручниках з математики для 6 класу та з алгебри для 8 класу з поглибленим вивченням математики; розроблено фрагмент плану-конспекту факультативного заняття для учнів 7 класу.*

Ключові слова: *задачі на подільність чисел, олімпіадні задачі з математики, ознаки подільності, ділення з остачею.*

Руда Ольга Григорівна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ГРАФІВ

Вступ. При підготовці до математичної олімпіади у процесі розв'язання задач часто виникає питання: яким методом розв'язати задачу? Серед різноманіття задач існує такий тип задач, який варто розв'язувати застосовуючи графи.

Подання даних у вигляді графів надає задачі наочність і простоту. Багато математичних доведень також спрощуються, набувають переконливість при використанні графів, а самі розв'язання, як правило, є простими, і на відміну від розв'язань іншими методами, не містять великих обчислень.

Загалом теорія графів знаходить застосування в різних галузях сучасної математики: геометрії та топології, теорії множин та математичній логіці, теорії ймовірності та математичній статистиці, теорії матриць та інших. Прикладами графів можуть бути схеми метрополітену, залізних доріг, структурні формули молекул і т. д..

Мета даної статті: розглянути можливості застосування теорії графів у процесі розв'язування олімпіадних задач з математики.

Виклад основного матеріалу. З метою зацікавлення учнів вивчати матеріал, на нашу думку, варто розпочати з інформаційної довідки. Леонард Ейлер – швейцарський математик, який зробив величезний внесок у розвиток математики. З його ім'ям пов'язана історія появи графів. Часто згадується його задача про Кенігсбергскі мости.

У місті Кенігсберзі (нині Калінінград) протікає річка Прегель, в місті побудовані мости зв'язують всі його райони. Під час прогулянки по місту Ейлер захотів пройти по всіх мостах, причому по кожному тільки один раз. Однак йому це не вдалося. Повернувшись додому, вчений склав схему, зобразив ділянки суші точками, а мости відрізками то і був перший граф.

Граф – це геометрична фігура, що складається з точок (вершини графа) і ліній, що їх з'єднують (ребра графа).

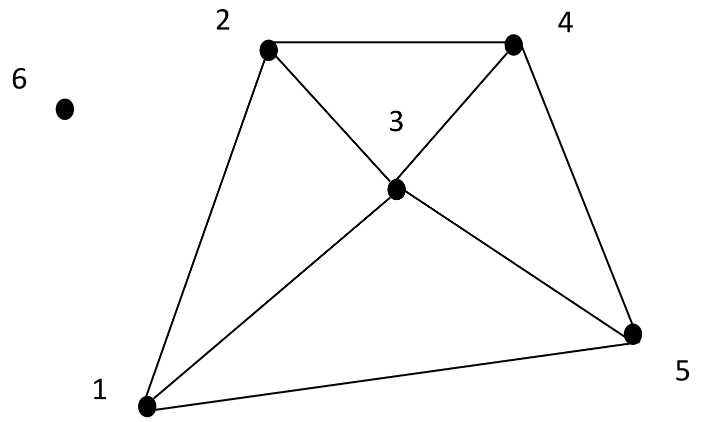


Рис. 1

На рис. 1 показано, що точки 1,2,3,4,5,6 – вершини графа, відрізки 12,24,45,51,13,34,23,35 – ребра графа.

Розв'язуючи задачу про Кенігсбергскі мости, Ейлер встановив властивості графа:

1. Число непарних вершин зв'язного графа завжди парне. Неможливо накреслити граф з непарним числом непарних вершин.

2. Якщо всі вершини графа парні, то можна одним розчерком (тобто не відриваючи олівця від паперу) накреслити граф, не проводячи по кожному ребру більше одного разу. При цьому можна починати з будь-якої вершини графа і закінчувати його в тій же вершині.

3. Граф лише з двома непарними вершинами можна накреслити одним розчерком, при цьому рух потрібно почати в одній точці з цих вершин і закінчити в другій непарній вершині.

4. Граф з більше ніж двома непарними вершинами неможливо накреслити одним розчерком [2].

Оскільки число непарних вершин графа в задачі про Кенігсбергські мости рівне 4, то такий граф неможливо зобразити одним розчерком, неможливо пройти по всіх мостах по одному разу.

При розв'язуванні олімпіадних задач, звичайно буває важко тримати в пам'яті багаточисленні факти, дані з умови, встановлювати зв'язок між ними, висловлювати гіпотези, робити часткові висновки і користуватись ними.

Використовуючи теорію графів, розв’язок задачі значно спрощується. Виділяючи з словесних міркувань головне – об'єкти і відношення між ними, графи представляють досліджувані факти в наочній формі. Методи розв'язання олімпіадних задач з використанням графів допомагають своєю природністю і простотою, позбавляють від зайвих міркувань, в багатьох випадках скорочують кількість даних необхідних для отримання відповіді. З однієї сторони, графи допомагають прослідити всі логічні можливі ситуації, що вивчаються, з іншої, завдяки своїй оглядовості допомагають в ході розв'язання задачі, класифікуючи логічні можливі ситуації, відкидаючи випадки, які не підходять, не використовуючи перегляд всіх випадків.

Розв'язання багатьох олімпіадних задач за допомогою графів цілком доступно уже школярам у 4 класах. Для цього їм достатньо мати лише інтуїтивні представлення про графи і найочевидніші їх властивості [2].

При розв'язуванні задач за допомогою графів найчастіше використовуються поняття: граф, вершина, ребро, дерево, степінь вершини, шлях, тому на них треба звернути більшу увагу.

Метод графів застосовується тоді, коли між об'єктами, про які йде мова в задачі, існує багато зв'язків. Граф дозволяє наочно уявити ці зв'язки і визначити, які з них не суперечать.

Якщо задача геометрична, на теорію графів, корисно зробити малюнок до неї і позначити на малюнку вхідні та вихідні дані. Намалювати малюнок, що відповідає прикладу вхідних даних умови задачі, придумати декілька прикладів вхідних даних і намалювати відповідні малюнки.

Розглянемо задачу з LII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики для 9 класу та способи її розв'язання.

Задача. У країні Олімпії 2012 міст, деякі з котрих сполучаються між собою прямими авіалініями (кожною авіалінією сполучаються між собою тільки два міста, причому будь-які два міста сполучені не більше, ніж однією авіалінією). Відомо, що кожне місто сполучається прямими авіалініями щонайбільше з 8 іншими містами. Доведіть, що в країні можна закрити не більше за 2012 авіаліній так, щоб серед будь-яких чотирьох міст хоча б два не сполучалися між собою прямою авіалінією [1].

Розв’язання. (І спосіб) Нехай G – граф задачі. Розіб’ємо множину V_G його 2012 вершин на три підмножини A, B і C так, що сума S кількостей ребер підграфів (підграф початкового графа — граф, що містить деяку підмножину вершин даного графа і всі ребра, інцидентні даній підмножині). $G(A), G(B)$ і $G(C)$ була мінімальною (зрозуміло, що це можливо). Припустимо, що в одній з підмножин (нехай це буде підмножина A) є така вершина X, що в підграфі $G(A)$ її степінь (степінь вершини — кількість ребер графа G, що інцидентні вершині) $\rho_{G(A)}(X) \geq 3$. Оскільки $\rho_G(X) \leq 8$, то вершина X не може сполучатись з кожним з підграфів $G(B)$ і $G(C)$ більше, аніж двома ребрами. Нехай вершина X з підграфом $G(B)$ сполучається щонайменше двома ребрами. Тоді для підграфів $G(A \setminus \{X\})$, $G(B \cup \{X\})$ і $G(C)$ сума S зменшується, що неможливо. Отже, в під графах $G(A), G(B)$ і $G(C)$ степінь усіх їхніх вершин не перевищує 2. Як відомо, у кожному графі сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєній кількості ребер, а тому в кожному з підграфів $G(A), G(B)$ і $G(C)$ кількість ребер не більше кількості вершин, тобто $S \leq 2012$. Видалимо всі ці S ребер (зробимо графи з множинами вершин A, B і C порожніми). Для будь-яких чотирьох вершин принаймні дві лежать в одній з цих трьох множин вершин, і після видалення ребер такі дві вершини не сполучаються ребром.

(ІІ спосіб). Доведемо такий допоміжний факт.

Лема. Якщо в графі G з n вершинами степінь кожної з вершин не перевищує p, то всі його вершини можна розбити на $q \leq p+1$ груп так, щоб у кожній з груп жодні дві вершини не сполучалися ребром.

Доведення леми. Скористаємося індукцією за порядком n графа. База індукції є очевидною. Припустимо, що твердження має місце для $n = k$.

Розглянемо граф G з $k+1$ вершиною, який задовольняє умову леми. Нехай X – його довільна вершина. Для підграфа $G(V_G \setminus \{X\})$ можна застосувати припущення індукції і розбити множину $V_G \setminus \{X\}$ усіх його вершин потрібним чином на $q \le p+1$ груп. Оскільки $\rho_G(X) \le p$, то вершина X не сполучається жодним ребром принаймні з однією з утворених груп. Залишається приєднати X до цієї групи, і лему доведено.

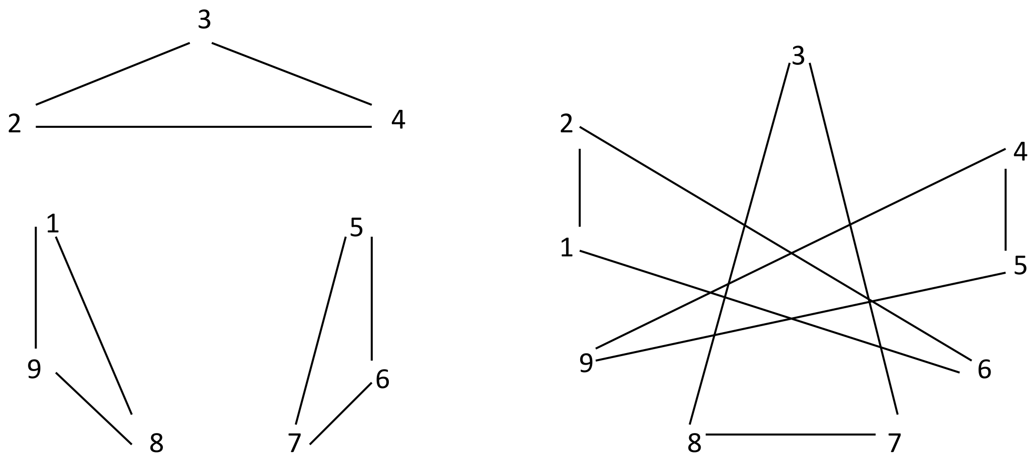


Рис. 2

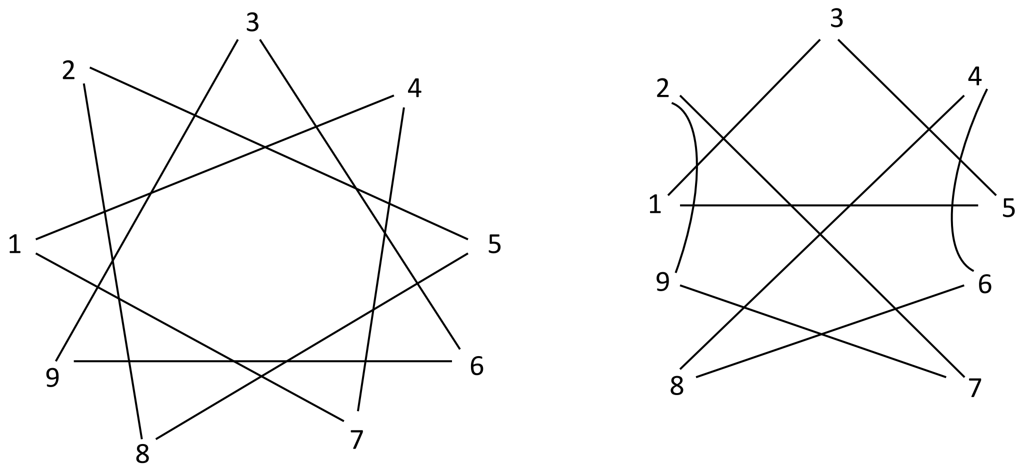


Рис. 3

Розіб’ємо – згідно з лемою – множину вершин графа G задачі на 9 груп (деякі можуть бути порожніми). Назвемо жмутком ребер усі ребра, які сполучають вершини двох різних груп. Загалом утворюється $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ жмутків ребер (деякі зі жмутків можуть не містити ребер). Розділимо їх на чотири групи по 9 жмутків у кожній так, як показано на рис. 2, 3. У кожній групі жмутки ребер утворюють три «трикутники», якими «охоплюються» всі 9 груп вершин. У графі G не більше за $\frac{2012 \cdot 8}{2} = 8048$ ребер, а тому хоча б в одній з чотирьох груп жмутків кількість ребер не перевищує $\frac{8048}{4} = 2012$. Видалимо всі ребра саме цієї групи. Які б чотири вершини не обрати, за принципом Діріхле щонайменше дві з них увійдуть до одного з утворених «трикутників». Зрозуміло, що такі дві вершини не сполучаються ребром.

Теорія графів дозволяє швидко і вишукано розв'язувати задачі, які досить важко розв'язувати іншими методами і дозволяє розв'язати не тільки одну окремо взяту задачу, але і шукати способи розв'язання цілого класу задач.

Висновки. Отже, розв'язуючи олімпіадні задачі з математики за допомогою теорії графів необхідно на кожному кроці, на кожному етапі розв'язання задачі застосувати творчість. З самого початку складність полягає в тому, щоб зуміти, проаналізувати і закодувати умову задачі. Наступна складність – схематичний запис, який полягає в геометричному поданні графів, і на цьому етапі елемент творчості дуже важливий тому, що далеко не просто знайти відповідності між елементами умови і відповідними елементами графа.

Література

1. Завдання LII Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики / І. М. Мітельман, В. А. Ясінський, Г. В. Шевченко, В. М. Радченко. – Кіровоград, 2012. – 17 с.
2. Трохимчук Р. М. Теорія графів Навчальний посібник для студентів факультету кібернетики – К.: РВЦ «Київський університет», 1998. – 43 с.

Анотація. *У статті продемонстровано як за допомогою теорії графів розв'язувати олімпіадні задачі з математики.*

Ключові слова: *граф, вершина, ребро графа, принцип Діріхле.*

Тимчишена Ірина Андріївна, Січкар Юлія Федорівна
студенти 2 курсу, спеціальність «Математика*»

МІСЦЕ І РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ В РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

Вступ. Математика – це наука, яка виникла у пошуках істини для практичних потреб людини вимірювати, рахувати, обчислювати. Вона дає можливість інтелектуально розвивати особистість, передусім розвивати її логічне мислення. В учнів логічне мислення, насамперед, розвивається в процесі різних математичних висновків та у процесі доведення тверджень. Одним із таких методів є метод математичної індукції. Місце, роль і велике значення методу математичної індукції в математиці загальновідомі. Зрозуміло, що будучи по своїй суті пов'язаним з поняттям натурального числа, він є ефективним в арифметиці, комбінаториці, алгебрі та теорії чисел, хоча застосовується в самих різноманітних галузях математики.

Мета даної статті: з'ясувати місце та роль методу математичної індукції в шкільному курсі алгебри і початків аналізу. Розкрити суть даного методу та показати межі його застосування. Розглянути шкільні олімпіади різних етапів та проаналізувати завдання, які розв'язуються методом математичної індукції.

Виклад основного матеріалу. Метод математичної індукції – це метод доведення загальних математичних тверджень, правильних для довільного натурального числа. Суть даного методу полягає в наступному. Нехай $T_1, T_2, T_3, \ldots$ послідовність тверджень, причому відомо, що: 1) твердження T_1 істинне; 2) якщо деяке твердження T_k істинне, то наступне твердження T_{k+1} також істинне.

Тоді принцип математичної індукції стверджує, що всі твердження цієї послідовності істинні. При цьому доведення істинності твердження T_1 називають базою індукції, а доведення того, що з істинності твердження T_k випливає істинність твердження T_{k+1} називають індукційним кроком [8].

Щоб довести справедливість твердження T_n при довільному натуральному n методом математичної індукції використовують наступну схему:

1. Перевіряємо, чи виконується дане твердження при $n=1$.

2. Припускаємо, що дане твердження справедливе при $n=k$, де $k \geq 1$, $k \in N$.

3. Доводимо істинність твердження і для $n=k+1$.

4. Робимо висновок, що за принципом математичної індукції дане твердження істинне для довільного натурального n [6].

Іноді твердження, яке розглядається, немає смислу, або неправильне при $n=1$, але стає справедливим при $n \geq 2$, або взагалі при $n \geq n_0$. В цьому випадку використовується інша форма методу математичної індукції, яка наведена у підручнику [1] так:

✓ Якщо деяке твердження T правильне для натурального числа n_0 і якщо за припущенням воно правильне для всіх натуральних чисел l, які задовольняють умову $n_0 \leq l < k$, випливає його правильність і для числа k, то твердження T правильне для будь-якого натурального числа $n \geq n_0$.

✓ Якщо деяке твердження T правильне для натурального числа m і якщо за припущенням воно правильне для натурального числа $l+1$ при умові $k < l+1 \leq m$, випливає і його правильність для попереднього числа l, то твердження T правильне для будь-якого натурального числа n такого, що $k \leq n \leq m$ [1].

У посібнику [7] трактування методу математичної індукції описано так: логічною основою цього методу є принцип математичної індукції, взятий в шкільному курсі за аксіому: якщо твердження $A(n)$, яке залежить від натурального числа n, виконується для $n=1$ або $n=n_0$ та за припущенням, що виконується для натурального числа $n=k$, де $k \geq n_0$, випливає, що воно виконується і для $n=k+1$, то це твердження виконується для будь-якого натурального числа $n(n \geq n_0)$.

Правило-орієнтир доведення тверджень методом математичної індукції містить три кроки.

1. Перевірити правильність твердження для $n=1$або $n=n_0$.

2. Припустимо, що твердження правильне при $n=k$, де $k \geq n_0$, і довести, використовуючи це припущення, що твердження правильне при $n=k+1$, тобто для наступного значення n.

3. Зробити висновок, що на підставі принципу математичної індукції твердження правильне для будь-якого натурального n, де $n \geq n_0$ [7].

Метод математичної індукції використовується для вивчення властивостей скінченних множин, в задачах на підсумування і для доведення тотожностей, для вивчення властивостей числових послідовностей, для доведення нерівностей, до задач на подільність, а також при розв'язуванні геометричних задач.

У школах з поглибленим вивченням математики, метод математичної індукції вивчається у 9 класі, на вивчення даного методу виділяється три години. У загальноосвітніх школах академічного і профільного рівнів метод математичної індукції вивчається у 10 класі. На вивчення даного методу виділяється дві години. У класах, які навчаються на рівні стандарту, така тема не вивчається.

За навчальною програмою метод математичної індукції пропонується використовувати для розв'язування задач на подільність. Зокрема учні повинні знати означення бази індукції, індуктивного переходу та вміти застосовувати даний метод при розв'язуванні задач.

Як бачимо, у навчальній програмі для учнів 9-10 класів досить мало годин виділяється для вивчення цього методу. Але задачі, що пропонуються учасникам олімпіад різних рівнів, відрізняються своєю специфікою від шкільних задач. Тому для підготовки учнів до участі в олімпіадах потрібні додаткові заняття з розв'язування задач методом математичної індукції для правильного застосування даного методу. Адже на олімпіадах використовуються задачі, які у загальноосвітніх школах можуть і не розглядатися.

Наталія Кугай у статті «Метод математичної індукції у шкільному курсі математики» стверджує, що ознайомлення учнів з методом математичної індукції може проходити за такою схемою:

- сформулювати принцип математичної індукції (як аксіому);
- пояснити суть принципу і методу математичної індукції на найпростішому і вже відомому учневі прикладі (наприклад, ця сама формула загального члена арифметичної та геометричної прогресії);
- разом з учнями скласти і уяснити правило-орієнтир доведення цим методом;
- з'ясувати межі застосування методу математичної індукції [з].

Проаналізувавши задачі всеукраїнських учнівських олімпіад з математики I-III етапів для учнів 9-10 класів за останні п'ять років, виявили, що на олімпіадах пропонується досить малий відсоток задач, які розв'язуються методом математичної індукції. Зазвичай це задачі на подільність і доведення нерівностей. Наведемо декілька прикладів таких задач:

Задача 1. (Завдання для учнів 10 класу. III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2011/2012 н. р.) Доведіть, що $3^{2\cdot n+1}+40\cdot n-67$ кратне 64 для довільного натурального числа n.

Розв'язання. Нехай $S(n)=3^{2\cdot n+1}+40\cdot n-67$. Доведення твердження здійснимо за індукцією $S(1)=3^3+40\cdot 1-67=0$ – кратне 64. Нехай $S(n)=64\cdot k$. Тоді

$$S(n+1)=S(n)+3^{2\cdot n+1}\cdot(9-1)+40=64\cdot k+8\cdot(3\cdot(9+1)^n+5)=64\cdot k+8\cdot 8\cdot m=64(k+m)$$ –

кратне 64.

Задача 2. (Завдання для учнів 10 класу. II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2012 р. у Миколаївській області.) Доведіть, що для будь-якого натурального n значення виразу $4^n+15\cdot n-1$ кратне 9.

Розв'язання. Використаємо метод математичної індукції. Якщо $n=1$, то $4^n+15\cdot n-1=4+15-1=18$ – кратне 9. Припускаємо, що дане твердження істинне і при $n=k$. Доведемо для $n=k+1$, що $4^{k+1}+15\cdot(k+1)-1$ – кратне 9. Маємо:

$$4^{k+1}+15\cdot(k+1)-1=4^k\cdot 4+15\cdot k+15-1=(4^k+15\cdot k-1)+(3\cdot 4^k+15)=(4^k+15\cdot k-1)+3\cdot(4^k+5).$$

Число $4^k+15\cdot k-1$ – кратне 9 (за припущенням). Оскільки $4^k=(3+1)^k$, то 4^k при будь-якому k при діленні на 3 дає остачу 1, а тому число 4^k+5 при будь-якому k кратне 3, а отже, вираз $3\cdot(4^k+5)$ при будь-якому k кратний 9. Тому вираз $(4^k+15\cdot k-1)+3\cdot(4^k+5)$ – кратний 9.

Задача 3. (Завдання для учнів 11 класу. II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2012 р. у Миколаївській області.)

Доведіть, що $2^n>2\cdot n+1$, якщо $n\geq 3$, $n\in N$.

Розв'язання. При $n=3$ одержуємо $2^3>2\cdot 3+1$, тобто $8>7$ - правильна нерівність. Отже, при $n=3$ задана нерівність виконується.

Припускаємо, що задано нерівність виконується при $n=k$ (де $k\geq 3$): $2^k>2\cdot k+1$, тобто $2^k-2\cdot k-1>0$.

Доведемо, що задана нерівність виконується і при $n=k+1$, тобто $2^{k+1}-2\cdot(k+1)-1>0$.

Розглянемо різницю $2^{k+1}-2(k+1)-1=2^k\cdot 2-2\cdot k-3=2(2^k-2\cdot k-1)+2\cdot k-1>0$ (оскільки вираз в дужках за нерівністю $2^k-2\cdot k-1>0$ додатний і при $k\geq 3$ вираз $2\cdot k-1$ теж додатний).

Отже, $2^k-2\cdot k-1>0$.

Таким чином, задана нерівність виконується при всіх натуральних $n\geq 3$.

Висновки. Метод математичної індукції – один з важливих методів доведення математичних тверджень, який ґрунтується на принципі математичної індукції. Цей метод є важливим у вивченні математики, оскільки завдяки йому в учнів розвивається логічне мислення.

Література

1. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел, ч. I / С. Т. Завало, В. Н. Костарчук, Б. І. Хацет. – Київ: Вища школа, 1974. – 464 с.

2. Колесник Т. Метод математичної індукції у шкільному курсі математики / Т. Колесник // Математика в рідній школі., 2015. – №11. – С. 24-32.

3. Кугай Н. Метод математичної індукції у шкільному курсі математики / Н. Кугай // Математика в школі., 2004. – №2. – С. 45-49.

4. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу підруник для 10 кл. згально-освіт.навчальн. закладів: профільн. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 442 с.

5. Мерзляк А. Г. Алгебра 9 клас (з поглибленим вивченням) / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2009. – 373 с.

6. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу підручник для 10 кл. загально-освіт. навчальн. закладів: профільн. рівень / Є. П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.

7. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник / З. І. Слєпкань. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища школа, 2006. – 582 с.

8. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навч. книга - Богдан, 2005. – 208 с.

9. Ясінський В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод «математичної індукції» / В. А. Ясінський. – Х.: Основа, 2005. – 96 с.

Анотація. *Проаналізовано особливості застосування методу математичної індукції у шкільному курсі математики. Досліджено використання цього методу у олімпіадах з математики різних рівнів для розв'язування задач на подільність і доведення нерівностей.*

Ключові слова: *метод математичної індукції, база індукції, індукційний крок, доведення нерівностей, подільність, олімпіадні задачі.*

Хомчак Наталя Володимирівна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика*»

ФУНКЦІОНАЛЬНА ЛІНІЯ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

Вступ. Математична освіта у загальноосвітній школі насамперед спрямована на засвоєння учнями алгоритмів розв`язування стандартних задач. Але при роботі з обдарованими учнями часто доводиться мати справу із задачами рівень складності яких, потребує не лише систематизацію усіх здобутих знань, а й їх творче використання вмінь і навичок під час їх розв'язування. Саме такими типами задач є олімпіадні задачі. На сьогоднішній день в Україні є багато підручників і посібників, у яких зібрані задачі різних рівнів складності (задач обласних, всеукраїнських та міжнародних математичних олімпіад, задачі математичного конкурсу «Кенгуру»). Автори цих збірників являються членами журі не лише Всеукраїнських, а й міжнародних математичних олімпіад і також є авторами цих задач. Серед них варто відмітити праці В.А. Ясінського – автора багатьох збірників олімпіадних задач та автора задач, які використовувались на міжнародних олімпіадах, В.М.Лейфури, І.М.Мітельмана та інших.

Мета даної статті: виділити прийоми і засоби узагальнення знань учнів про функції в систему.

Виклад основного матеріалу. Останнім часом все більше приділяється увага узагальненню і систематизації матеріалу, за допомогою якого учні не стільки повторюють пройдений матеріал, скільки приводять поняття в струнку систему, розкривають зв'язки і відношення між її елементами та набувають нові знання. Систематизація та узагальнення займає важливе місце у навчанні, розвитку мислення та пам'яті. Від узагальнення і систематизації на кожному уроці необхідно переходити до динамічного узагальнення відповідної теми в цілому, а від узагальнення і систематизації однієї, двох, трьох і так далі тем – до узагальнення і систематизації розділу і змістовної лінії. І кожного разу узагальнення і систематизація проводяться з обов'язковим виділенням і активізацією головних, основних знань, навичок і умінь учнів. [1]

Розв'язування задач з умовами практико-орієнтованого характеру забезпечує інтерес до навчання, мотивацію учня, можливість і бажання виконувати складні задачі, формує позитивне ставлення до предмету. В сучасній теорії навчання математики одним із прийомів розвитку евристичного та творчого мислення учнів є розв'язування нестандартних задач або задач підвищеного рівня складності, тобто олімпіадних задач.[4] Одним з ефективних засобів формування в учнів навичок самостійного мислення є математичні олімпіади. Підготовка до олімпіад з математики розпочинається на уроці. На цьому етапі підготовки передбачається розширення теоретичного матеріалу та наповнення курсу різноманітними цікавими і складними задачами з достатнім та високим евристичним навантаженням.

Важливим у підготовці учнів до олімпіад є курси за вибором, факультативи, індивідуальні заняття та гурткова робота. Теми гурткових та індивідуальних занять включають розв'язування олімпіаднихзадач з кожної змістової лінії. Метою організації занять є розширення кругозору учнів, розвиток математичного мислення, формування активного пізнавального інтересу до предмета, виховання світогляду і низки особистісних якостей, засобами нестандартного вивчення математики.

Оскільки одним з фундаментальних математичних понять у основній школі є поняття функції, і майже в кожній олімпіадній роботі зустрічається, як мінімум, одна задача з курсу алгебри на використання властивостей функцій, тому, мають бути окремі заняття з розв'язування олімпіадних задач з теми «Функції». Завдання таких занять: розширення і поглиблення знань і вмінь учнів про функції; розвиток здібностей та інтересів учнів; розвиток математичного мислення; формування активного пізнавального інтересу до предмета; знайомство з теоретичними відомостями, які не вивчаються в школі; аналіз деяких специфічних прийомів розв'язування математичних задач; вдосконалення навичок розв'язування нестандартних завдань.

Для відпрацювання практичних навичок розв'язування олімпіадних задач з теми «Функції» можна скористатись добіркою задач різнорівневої складності, нестандартні як за формулюванням, так і за методами розв'язання.

Задачі II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики [5]

- Побудувати графік функції $y=\frac{x}{|x|}+\frac{|x+2|}{x+2}+|x-2|$

- Побудувати графік функції $y=\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$. Знайти всі значення x, при яких $y<2$.

- Побудувати графік функції $y=\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{1-9x^2}{3x-1}-\frac{100-60x+9x^2}{3x-10}$

- Знайдіть всі функції $f:R\to R$ для яких при будь-яких x і y виконується рівність $f\left(x-f\left(y\right)\right)=1-x-y$

- Задачі на встановлення належності точок графіку функції

- На координатній площині відмітили 5 точок: $(-2;8)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3};1\right)$ та $\left(\frac{1}{4};\frac{4}{5}\right)$. Яка найбільша кількість точок може належати графіку рівняння $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$?

Задачі III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики [4]

- Побудуйте графік функції $\frac{x}{|x|}+\frac{|y|}{y}=2y$

- Знайдіть усі трійки (a,b,c) $(a\neq b,a\neq 0,b\neq 0)$ дійсних чисел, для яких параболи $y=ax^2+bx+c$ і $y=bx^2+cx+a$ мають спільну вершину.

Розв'язання. Помітимо спочатку, що обидві параболи проходять через точку $N(1;a+b+c)$. Нехай точка $A(x_0;y_0)$ – спільна вершина парабол, тоді заміна $x'=x-x_0$, $y'=y-y_0$ зсуває вершини парабол в точку O' – початок координат, тобто ми отримуємо параболи $y'=ax^2$ і $y'=bx^2$, які проходять через спільну точку $N\left(1-x_0;a+b+c-y_0\right)$. Якщо виконується умова $a\neq b$ ці параболи мають одну спільну точку O', тобто $N'=O'$. Це означає, що точка N є вершиною початкових парабол.

Звідси $-\frac{b}{2a}=-\frac{c}{2b}=1$ і $c-\frac{b^2}{4a}=a-\frac{c^2}{4b}$, тобто $b=-2a,\ c=4a, c=4a$.

Відповідь. $a=d, b=-2d,\ c=4d,\ d\neq 0$

- Графік функції $y=f\left(x\right)$ симетричний графіку функції $y=x^2$ відносно точки з координатами $\left(1;1\right)$. Розв'яжіть рівняння $f\left(x\right)=x^2$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння графіка функції $y=f\left(x\right)$. Нехай точка $P\left(p;p^2\right)$ – довільна точка параболи $y=x^2$, а $Q\left(q;f\left(q\right)\right)$ – точка графіка $y=f\left(x\right)$, яка симетрична точці P відносно точки з координатами $\left(1;1\right)$. Тоді за формулами для знаходження координат середин відрізка, матимемо:

$\frac{p+q}{2}=1,\quad \frac{p^2+f\left(q\right)}{2}=1$. Виключаючи з цієї системи рівностей p, знаходимо, що $f\left(q\right)=-q^2+4q-2$. Отже, рівняння симетричного графіка буде мати вигляд: $y=-x^2+4x-2$. Далі, нам потрібно розв'язати рівняння $x^2=f\left(x\right)$, яке еквівалентне таким рівнянням: $x^2=-x^2+4x-2$, $x^2-2x+1=0,\ x=1$.

Відповідь. 1

- При яких значеннях функції $y=\left(\sqrt{x}\right)^{2009}+\left(\sqrt{1-x}\right)^{2010}$ є цілими числами?

Задачі з підручників [3]

- Графік параболи $y=x^2+px+q$ перетинає осі координат в трьох різних точках. Через ці точки проводиться коло. Довести, що ці кола перетинаються в одній точці.

- На координатній площині намальовано три параболи $y=x^2+p_ix+q_i\ \left(1\leq i\leq 3\right)$. Вони перетинають вісь абсцис відповідно в точках

M_1 та M_2, M_2 та M_3, M_3 та M_4. Знайти всі коефіцієнти параболи $y = x^2 + px + q$, що проходить через точки M_1 та M_2.

- З'ясувати графічним способом, скільки розв'язків має рівняння $[x] + \{x\} + 1 = x|x|$, де $[x]$ – ціла частина числа, $\{x\}$ – дробова частина числа.

Висновки. В результаті розв‘язування даних вправ учні повинні: навчитися доводити твердження; правильно застосовувати основні поняття при розв‘язуванні нестандартних завдань; вміти працювати з додатковою літературою та інтернет ресурсами. Дана система вправ допоможе вчителеві формувати цілісні знання учнів про функцію.

Література

1. Беседін Б. Б. Узагальнення та систематизація знань при вивченні алгебри 7-9 класів / Б. Б. Беседін, А. О. Пономарьова // Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ., 2013.
2. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики / О. М. Вороний. – Харків: Видавнича група «Основа», 2008.
3. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад 8-11 класи / Т. В. Коваль. – Тернопіль: Мандрівець, 1998. – 80 с.
4. Фалилеева М. В. Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами / М. В. Фалилеева. // Фундаментальные иследования, 2013. – №4.
5. [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://matholymp.org.ua

Анотація. *У статті розглянуто узагальнення та систематизація знань учнів по функціональній лінії при підготовці до математичних олімпіад. Розглянуто типові задачі із розв'язанням, які зустрічаються на олімпіадах.*

Ключові слова: *узагальнення та систематизація, функція, олімпіада.*

Шведюк Анастасія Миколаївна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика*»

ЗАСТОСУВАННЯ НЕРІВНОСТІ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

Вступ. Нерівності відіграють дуже велику роль у сучасній математиці. Лінійне та нелінійне програмування, теорія ігор, дослідження функцій неможливе без нерівностей. Що стосується шкіл, то учні допускають багато помилок при розв'язуванні нерівностей, а завдання на доведення навіть простих нерівностей викликають неабиякі труднощі.

Спеціальної літератури присвяченої доведенню нерівностей дуже мало, тому завдання такого типу є чи не найважчими задачами шкільного курсу. Без доведення нерівностей не проходять і олімпіади з математики.

Мета даної статті: показати добірку олімпіадних задач, які доводяться за допомогою нерівності Коші-Буняковського та її наслідків, продемонструвати їх розв’язання.

Виклад основного матеріалу. Нерівність Коші-Буняковського: для будь-яких дійсних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ і $b_1, b_2, ..., b_n$ виконується нерівність $(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$.

Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли числа a_m і b_m пропорційні (якщо ці числа не дорівнюють нулю, то це значить, що $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$, а якщо якісь із цих чисел дорівнюють нулю, то пропорційність означає, що існує таке число $\lambda \neq 0$, що $a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, ..., a_n = \lambda b_n$).

Нерівність Коші-Буняковського для двох наборів чисел $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$ буде мати наступний вигляд: $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.

Цікавим є той факт, що дана нерівність застосовується не лише в задачах на доведення, а й в інших різнотипних завданнях, що надає їй досить важливого значення при вивченні.

Тепер розглянемо деякі олімпіадні задачі на доведення нерівностей.

Задача 1. Довести, що $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, якщо $a>0, b>0, c>0$.

Розв'язання

Розглянемо два набори чисел $(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c})$ і $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2)\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2\right)\geq$$

$$\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2,$$

отже, $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$.

Нерівність доведено.

Задача 2. Нехай a,b,c - додатні дійсні числа. Доведіть нерівність $\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$.

Розв'язання

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2,$$

де (a_1,a_2,a_3) і (b_1,b_2,b_3) дві трійки дійсних чисел.

Запишемо цю нерівність для таких двох трійок $(\sqrt{ab},\sqrt{bc},\sqrt{ca})$ і $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}(b+c)},\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}(c+a)},\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}(a+b)}\right)$:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\right)\geq$$

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

Далі слід скористатися відомою нерівністю: для додатних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

Таким чином $(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\right) \ge \frac{9}{4}.$

Звідси випливає потрібна нерівність.

Задача 3. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3x+4y$, якщо $x^2+y^2=25$.

Розв'язання

Розглянемо два набори чисел $(x;y)$ і $(3;4)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$(3x+4y)^2 \le (x^2+y^2)(3^2+4^2).$$

Використовуючи, що $x^2+y^2=25$, маємо $(3x+4y)^2 \le 25 \cdot 25$, $(3x+4y)^2 \le 625$, значить $-25 \le 3x+4y \le 25$.

Отже, найбільше значення виразу $3x+4y$ дорівнює 25, а найменше -25. [1]

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}=2|x-1|$.

Розв'язання

Перепишемо ліву частину рівняння так:

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1}$. До наборів $(\sqrt{3};1)$ і $(\sqrt{x};\sqrt{x^2-3x+1})$ застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$(\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1})^2 \le ((\sqrt{3})^2+1^2)((\sqrt{x})^2+(\sqrt{x^2-3x+1})^2).$$

Звідси

$$(\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1})^2 \le 4(x^2-2x+1);$$

$$\left|\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right| \le 2|x-1|;$$

$$\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1} \le 2|x-1|.$$

У ці нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число k, що $\sqrt{3}=k\sqrt{x},\ 1=k\sqrt{x^2-3x+1}$.

Звідси $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}}{1}$.

Отримане рівняння рівносильне заданому.

Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}=x^2-3x+1, \\ x\ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-10x+3=0, \\ x\ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, \\ x=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Відповідь. $3; \frac{1}{3}$. [5, с.14]

Задача 5. Знайдіть найбільше значення виразу $3x-y+z$, якщо $x^2+y^2+z^2=44$.

Розв'язання

Розглянемо два набори чисел $(x;y;z)$ і $(3;-1;1)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського, маємо

$$(3x-y+z)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(9+1+1)=44\cdot 11=22^2,$$

Тоді $|3x-y+z|\le 22$

Найбільше значення виразу $3x-y+z$ дорівнює 22. [1]

Відповідь: 22.

Висновки. У даній статті розглянуто добірку олімпіадних задач, у яких застосовується нерівність Коші-Буняковського. Оскільки дана нерівність застосовується не лише в задачах на доведення, а й в інших різнотипних завданнях, то це надає їй досить важливого значення при вивченні даної теми.

Література:

1. Барвінок Р. Л. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом / Р. Л. Барвінок, О. М. Козлова. // Шляхи підвищення якості природничо-

математичної освіти/ ЧОІПОПП: Черкаси, Видання підготовлено до друку та віддруковано редакційно-видавничим відділом ЧОІПОПП, 2013.

2. Копцюх М. Г. Доведення нерівностей / М. Г. Копцюх, Є. Ф. Савич – К.: Радянська школа, 1982.

3. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007-2009, 2008-2009, 2010 / А. В. Аннікушин, А. Р. Арман, Є. О. Білокопитов та ін. – Л.: Каменяр, 2010.

4. Обласні математичні олімпіади / І. М. Конет, В. Г. Паньков, В. М. Радченко та ін. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2005.

5. Пілявська Т. В. Доведення нерівностей у шкільному курсі математики. 9-10 клас: [Навчально-методичний посібник] / Т. В. Пілявська. – Хмельницький: Хмельницький ліцей № 17, 2014. – 26 с.

6. Сарана О. А. Математичні олімпіади / О. А. Сарана – К.: А.С.К., 2004. – 340 с.

7. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч / О. А. Сарана – Т.: Навчальна книга – Богдан, 2011.

Анотація. *Розглянуто декілька олімпіадних задач різного типу на застосування нерівності Коші-Буняковського, вміння розв’язування яких дасть можливість учням підвищити свій інтелектуальний та розумовий рівень, а також підготуватись до математичної олімпіади.*

***Ключові слова**: доведення нерівностей, нерівність Коші-Буняковського, олімпіадні задачі.*

Шмулян Ярослава Віталіївна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

НАВЧАННЯ УЧНІВ НЕСТАНДАРТНИМ МЕТОДАМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Вступ. Усе частіше в літературі зустрічаються рівняння, розв'язування яких стандартними способами важке, громіздке або неможливе. Тоді можна спробувати використовувати нестандартні методи розв'язування рівнянь. Іноді один з таких підходів приводить до більш простого і раціонального розв'язання.

Готуючись до олімпіад з математики, зустрічається значний обсяг рівнянь, які потрібно виконати за обмежений проміжок часу. Тому сьогодні дуже важливо оволодіти різноманітними можливостями правильного оформлення алгоритму розв'язування рівнянь, який би не містив громіздких викладень, але за допомогою їх ми б змогли продемонструвати яскраві, ефективні, а інколи і несподівані застосування теоретичного матеріалу. Ці прийоми тісно пов'язані з матеріалом, що вивчається в школі, але, крім того, їх нестандартне розв'язання привчає школярів, не задовольнятися шаблонами, алгоритмами, а вдумливо підходити до пошуку оригінальних розв'язань.

Мета даної статті: дослідити нестандартні методи розв'язування рівнянь шкільного курсу математики в олімпіадних завданнях.

Виклад основного матеріалу. Не всяке рівняння у результаті перетворень або за допомогою вдалої заміни змінної може бути зведене до рівняння іншого стандартного виду, для якого існує певний алгоритм рішення. У таких випадках іноді корисно використовувати інші методи рішення.

Серед нестандартних методів можна назвати:

- Графічне розв'язання рівняння четвертого степеня
- Застосування похідних до розв'язування рівнянь
- Рівняння з нескінченним числом квадратних радикалів
- Розв'язування деяких тригонометричних рівнянь за допомогою одиничного кола

- Рівняння, що містять змінну під знаком модуля

Графічне розв'язання рівняння четвертого степеня.

Маючи чітко і точно накреслений графік звичайної параболи $y = x^2$, можна за допомогою циркуля і лінійки розв'язувати графічно рівняння четвертого степеня. Щоб пояснити, як це робиться, сформулюємо дві леми.

Лема 1. Рівняння четвертого степеня $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ за допомогою заміни невідомого $z = x - h$, де $h = \frac{a}{4}$, зводиться до рівняння , що не містить куба невідомого, тобто до рівняння виду: $x^4 + px^2 + gx + r = 0$.

Лема 2. Рівняння $x^4 + px^2 + gx + r = 0$ рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \left(y - \frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{g}{2}\right)^2 = R, \\ y = x^2 \end{cases} \quad \text{де } R = \frac{g^4}{4} + \frac{(p-1)^2}{4} - r.$$

Тепер зрозуміло, що для знаходження коренів рівняння $x^4 + px^2 + gx + r = 0$ потрібно знайти абсциси точок перетину параболи $y = x^2$ і кола, що задається рівнянням $\left(y - \frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{g}{2}\right)^2 = R$ тобто кола з центром $Q\left(-\frac{g}{2}, \frac{p-1}{2}\right)$ і радіусом $\sqrt{R}$.

Якщо число R від'ємне, а також якщо $R \geq 0$, але коло не перетинає параболу, то рівняння не має розв'язків. В іншому випадку рівняння має від 1 до 4 коренів, в залежності від числа точок перетину.

Застосування похідної до розв'язування рівнянь.

У багатьох задачах дослідження функції елементарними засобами на монотонність, обмеженість, наявність максимумів і мінімумів є досить трудомістким, а інколи і зовсім не можливим. Та це дослідження суттєво спрощується при використанні похідної.

При якому значенні $a \in R$ має розв'язки рівняння: $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$.

Розв’язання [2]. Область визначення даного рівняння – інтервал [2;4]. Розглянемо на ньому функцію f **:** $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}$.

Тоді на інтервалі (2;4) $f'(x)>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{8-2x}}$,

$\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{\sqrt{8-2x}}>0$, $\sqrt{8-2x}>2\sqrt{x-2}$, $3x<8$, $x<\dfrac{8}{3}$.

Так що $\dfrac{8}{3}$ – єдина критична точка функції f , яка до того ж є точкою максимум, оскільки $f(2)=2$, $f(4)=\sqrt{2}$, $f\left(\dfrac{8}{3}\right)=\sqrt{6}$. Отже, f приймає найбільше значення при $x=\dfrac{8}{3}$, а найменше значення при $x=4$. Так як функція f неперервна, то її область значень є інтервал [$\sqrt{2}$;$\sqrt{6}$] між її найбільшим і найменшим значенням, тобто дане рівняння має розв’язок, якщо $a\in[\sqrt{2};\sqrt{6}]$.

Відповідь. $a\in[\sqrt{2};\sqrt{6}]$.

Рівняння з нескінченним числом квадратних радикалів.

В шкільному курсі алгебри і початків аналізу проходить знайомство з теоремою Вейєрштраса: якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона має границю [3].

Розглянемо як дана теорема застосовується до розв’язування рівнянь з нескінченним числом квадратних коренів.

Розв’яжемо рівняння $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=7.$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівності : $x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}=49$.

Так як другий доданок співпадає з лівою частиною початкового рівняння, то $x+7=49; x=42$.

Відповідь. 42.

Розв’язування деяких тригонометричних рівнянь за допомогою одиничного кола. Дуже корисним під час розв’язування деяких тригонометричних рівнянь частіше використовувати одиничне коло. Мова йде не тільки про рівняння $\sin x = 0; \sin x = \pm 1; \cos x = 0; \cos x = \pm 1,$ але й про рівняння виду $\pm\sin x \pm \cos x = \pm 1$. Ці рівняння можна розв'язати багатьма способами. Але розв'язок цього рівняння за допомогою одиничного кола – один з способів, що дозволяє знайти відповідь усно. Кожному з рівнянь $\pm\sin x \pm \cos x = \pm 1$ на інтервалі $[0;2\pi)$ задовольняє два з чотирьох чисел: $-\frac{\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi,$ що відповідають точкам $P_{-\frac{\pi}{2}};\ P_0;\ P_{\frac{\pi}{2}};\ P_\pi$ одиничного кола. Ці числа знаходять усною перевіркою, потім записують загальний розв'язок. Інших розв'язків немає, так як для всякої іншої точки P, відмінної від указаних $\sin\alpha$, і $\cos\alpha$ по модулю рівні довжинам катетів трикутника, довжина гіпотенузи якого дорівнює 1, і за властивістю сторін ні одна з рівностей $\pm\sin x \pm \cos x = \pm 1$ неможлива [1]. Наприклад, рівнянню $\sin x - \cos x = -1$ на проміжку $[0;2\pi)$ задовольняють числа $-\frac{\pi}{2}$ і 0.

Відповідь. $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n; n \in Z\right\}$.

За допомогою цього методу можуть бути розв'язані і більш складніші рівняння, тобто рівняння з олімпіадних завдань.

Розв'язування рівнянь, що містять змінну під знаком модуля.

Для розв'язування рівнянь, що містять змінну під знаком модуля, найчастіше використовуються такі методи: за означенням модуля, піднесенням до квадрату лівої і правої частини, метод інтервалів. Але можна розв'язувати ці рівняння, використовуючи формулу відстані між двома точками координатної прямої.

Розглянемо рівняння [4] : $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 3$.

Рівняння можна переписати так : $|x-2| + |x+2| = 3$.

Так як $|-2-1| = 3$, то розв'язком рівняння є весь інтервал [-2;1] .

Відповідь. [-2;1].

Отже, розв’язуючи рівняння, що містять змінну під знаком модуля, склавши допоміжне рівняння, ми ще до розв’язання рівняння встановлюємо, в яких проміжках потрібно шукати корені і скільки коренів має рівняння.

Висновки. В процесі навчання учнів нестандартним методам розв'язування рівнянь можна помітити, що всі вони зводяться до розв'язання переважно вже за відомими алгоритмами. Опанування цих алгоритмів є важливим завдання для кожного учня. Філософи навіть стверджують, що нема кращого способу створити умови для творчої діяльності як бездоганне знання цих алгоритмів. Розв'язання нестандартних рівнянь зводиться, зрештою, до розв'язання відомих опорних рівнянь, які мають формули розв'язання.

Література

1. Головчинська Ю. В. Нестандартні способи розв’язування рівнянь / Ю. В. Головчинська, О. В. Підборочинська . – К. 2010. – 39 с.

2. Ляшенко А. Ю. Нестандартні прийоми розв’язування рівнянь / А. Ю. Ляшенко, А. В. Овдієнко. – К.: 2009. – 31 с.

3. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-11 класи. – К.: Навчальна книга, 2003 – С.103-106.

4. Ясінський В. А. Вибрані конкурсні задачі з математики / В. А. Ясінський, К. І. Мазур, О. К. Мазур. – К.: Фенікс, 2002.

Анотація. *Описані нестандартні методи розв'язування рівнянь шкільного курсу математики, а саме в олімпіадних завданнях. Показанні приклади кожного з методів і пояснено застосування методу до певного виду рівнянь.*

Ключові слова: *рівняння, нестандартні методи, олімпіадні завдання, тригонометричні рівняння, модуль, похідна, квадратний радикал.*

Ярмолюк Ольга Анатоліївна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

ПОГЛИБЛЕННЯ ЗНАНЬ ПРО ПОХІДНУ У ПРОЦЕСІ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ В 11 КЛАСІ

Вступ. Поняття похідної – фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. У згаданих процесах та явищах стан тіл та їхні властивості постійно змінюються. Задача про визначення швидкості, з якою змінюється величина, і призводить до поняття похідної. Отже, темі «Похідна та її застосування» необхідно приділяти особливу увагу.

Мета даної статті показати як за допомогою факультативних занять та гуртків можна поглибити рівень знань учнів, отриманих при вивченні основного курсу про похідну та розкриття її змісту в алгебрі та початках аналізу; продемонструвати систему прикладних задач, за допомогою яких учні матимуть рівень знань, що відповідає рівню олімпіадних завдань.

Виклад основного матеріалу. Задачі, які розв’язуються за допомогою застосування похідної, учні починають розглядати в 11-му класі. Добірка задач у шкільних підручниках є досить гарною, але цих задач недостатньо, щоб готувати учнів до олімпіад. Тому важливо проводити факультативні заняття та гуртки для підвищення рівня знань учнів. Розглянемо декілька прикладів завдань, які можна запропонувати учням для покращення знань. Саме такі завдання здебільшого розглядають в позаурочний час. Проте для кращого засвоєння матеріалу задачі на застосування похідної можна поділити на типи:

1. Задачі, у яких використовується механічний зміст похідної;
2. Задачі, у яких використовується геометричний зміст похідної.

Розглянемо приклади задач з використанням геометричного змісту похідної. Є стандартні задачі, умови яких сформульовано мовою «класики жанру»: «знайти екстремум функції», «дослідити функцію на монотонність», «питання існування дотичних». В той же час об’єктом дослідження є функція, для якої вирішення питання не є тривіальним, а передбачає певні підходи та скрупульозний аналіз результатів, часто застосування додаткових прийомів.

Приклад 1. З кожної точки $(0;-a)$, де $a>0$ проведемо дотичні до параболи $y=ax^2$. Знайти множину точок дотику.

Розв’язання. Нехай x_1 - абсциса точки дотику, тоді ордината точки дотику $y_1=ax_1^{\ 2}$, а $B(x_1,ax_1^2)$. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці x_1 дорівнює $y'(x_1)=2ax_1$ (1).

З іншого боку $y'(x_1)=tg\alpha$ (2).

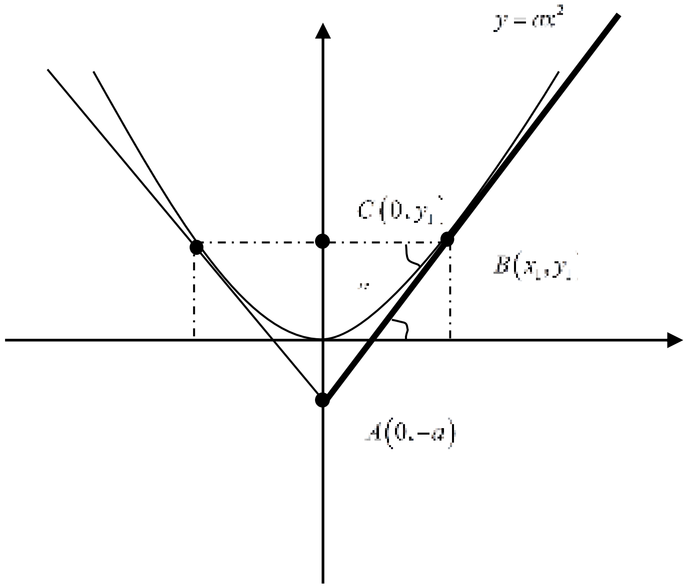


Рис.1

Із рис.1: $\alpha=\angle CBA$ - як внутрішні різносторонні. Із прямокутного ΔACB отримаємо: $tg\angle CBA=tg\alpha=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{y_1+a}{x_1}$ (3).

Прирівнюючи (1) і (3): $\dfrac{y_1+a}{x_1}=2ax_1$ або $y_1+a=2ax_1^{\ 2}$ (4)

Враховуючи, що $y_1=ax_1^{\ 2}$ із (4) маємо $ax_1^{\ 2}+a=2ax_1^{\ 2}$, тоді $ax_1^{\ 2}=a$, виконавши перетворення отримаємо $x_1^{\ 2}=1$. Тобто: $x_1=\pm1,\quad y_1=a>0$. Отже, шуканою множиною буде два промені із спільним початком $(0;-a)$ що проходять через точки $(1,a),(-1,a),a>0$ [2, с. 144-145].

Також можна розглянути завдання, які можуть бути розв'язані з використанням похідної, наприклад, при порівнянні чисел.

Приклад 2 [2, с. 147]. Порівняти числа π^e і e^π.

Розв'язання. Розглянемо допоміжну функцію $y=\dfrac{\ln x}{x}, \quad x>0$ (1)

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}, \quad y'=0:1-\ln x=0 \Rightarrow x=e$

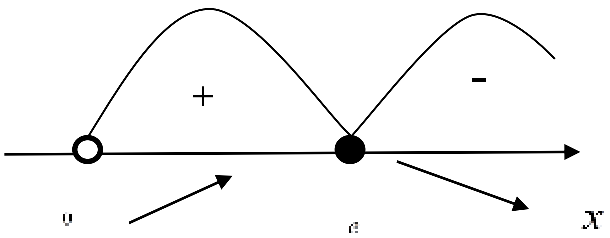


Рис.2

$\forall \in (e;+\infty)$, тому: $y(e)>y(\pi), (e<\pi)$, тобто

$$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln \pi}{\pi}; \quad \pi \ln e > e \ln \pi; \quad e^\pi > \pi^e$$

Декілька задач, які розв'язуються аналогічно, є у збірниках для підготовки до олімпіади з математики. Наприклад, порівняти:

1) $(\pi)^{5e}$ і $\left(\sqrt{5e}\right)^{\pi}$; 2) $\dfrac{\sin 1^0}{\sin 2^0}$ і $\dfrac{\sin 2^0}{\sin 3^0}$; 3) $\cos 2000$ і $1+\cos 2001$.

Розв'язувати найпростіші рівняння учні починають ще з 6-го класу і продовжують вивчати їх кінця свого навчання в школі. Є багато різних типів рівнянь, які розв'язуються з легкістю, але є такі, у яких не одразу можна перейти до відшукання невідомого. Розглянемо приклад рівняння, яке розв'язується за допомогою похідної.

Приклад 3. Знайти всі такі пари дійсних чисел a,b, що для будь-якого $x \in R$ справджується рівністьп $\sin 1999x+\sin ax+\sin bx=0$.

Розв'язання. Нехай $f(x)=\sin 1999x+\sin ax+\sin bx$. Тоді з умови $f(x)=0$ отримуємо: $f'(x)=1999\cos 1999x+a\cos ax+b\cos bx \equiv 0$.

$$f'''(x)=-1999^3\cos 1999x-a^3\cos ax-b^3\cos bx \equiv 0$$

Звідси при $x = 0$ отримаємо: $\begin{cases} 1999 + a + b = 0; \\ 1999^3 + a^3 + b^3 = 0. \end{cases}$

Розв'язавши систему нелінійних рівнянь, знаходимо значення параметрів: $a = -1999, b = 0$ або $a = 0, b = -1999$ [3, с. 254-255].

На сьогодні проблемою залишається пошук нових форм роботи з учнями, які приймають участь в олімпіадах.

Серед багатьох чинників, які спонукають до пошуку нових форм роботи математики-методисти виділяють такі:

1) невідповідність вивченого на даний момент матеріалу згідно діючих програм до рівня і тематики задач, що пропонують учнів на математичних турнірах;

2) відсутність в шкільній програмі спеціальних методів і прийомів, що широко використовуються при розв'язуванні математичних олімпіадних задачах [2, с. 143].

Наприклад, задача (Завдання Ш Миколаївського обласного турніру юних математиків імені професора В. Лейфури.) [2, с. 143].

Знайти спільну дотичну пряму для кривих $x^2 + y^2 = 2013$і $xy = 2013$.

Автори статті [2, с. 143].зауважують, що задача не є складною. Більше того вона є технічною. Проблема в тому, що з поняттям похідної учні ознайомляться в 11 класі, набагато пізніше проведення турніру. Нагадаємо також, що учасниками турніру є учні з 8-го класу і старші.

При підготовці учнів до олімпіад потрібно використовувати посібники із завданнями підвищеного рівня складності для формування логічного мислення, абстрактного уявлення. Тому що умови в шкільних підручниках сформульовані чітко та зрозуміло, а в олімпіадних задачах не завжди є зрозумілими, чіткими та повними.

Висновки. Ми акцентували увагу на деяких типах завдань, які варто пропонувати учням під час підготовки до олімпіад як шкільних, так і міських, районних тощо. Використання таких задач під час навчання учнів застосування похідної для дослідження функцій на монотонність та екстремум, при підготовці до математичних олімпіад потрібно поетапно (тематично), із врахуванням методичних особливостей даної змістової лінії за чинними підручниками. Отже, задачі, які розв'язуються за допомогою похідної обов'язково потрібно подавати у цікавій, не стандартній формі, щоб учням було цікаво на уроках, а особливо на факультативних заняттях.

Література

1. Завдання ІІІ Миколаївського обласного турніру юних математиків імені професора В. М. Лейфури [Електронний ресурс] – 2013 – Режим доступу: http://colegium.mk.ua/TYM-Leif-2013/Obl_TYM_2013_problems.pdf.

2. Майборода О. В. Система лекційно-семінарських занять з математики з обдарованими дітьми // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова / О. В. Майборода, О. О. Гайша – 2013. – №42. – С. 142 – 151.

3. Саранова О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене / О. А. Саранова. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 400 с.

4. Сколенко Л. Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу // Математика в рідній школі / Л. Сколенко, В. Швець, 2014. – №9. – С. 2-10.

Анотація. *У статті описано типи задач на застосування похідної, наведені приклади таких задач та показано методи їх розв'язання, виділено основні проблеми при підготовці учнів до олімпіад.*

Ключові слова: *задачі на застосування похідної, похідна, олімпіадні задачі.*

РОЗДІЛ 3. ФОРМУВАННЯ ТА РОЗВИТОК ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ З ГЕОМЕТРІЇ У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ ЇХ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Бабюк Діана Олександрівна
студентка 2 курсу, спеціальність «Математика*»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ ВИМІРІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ОБ'ЄМІВ

Вступ. Курс стереометрії має широкі можливості для інтелектуального розвитку учнів, насамперед логічного мислення, просторових уявлень і уяви.

Великий клас стереометричних задач розв'язується за допомогою методу об'ємів. Наприклад, об'єм трикутної піраміди можна обчислити різними способами [2].

Методом об'ємів ми називаємо прирівнювання двох відповідних виразів для об'єму, в результаті чого вдається обчислити шукану величину (відстань або кут). Цей метод можна використати, обчислюючи:

1) відстань від точки до площини;
2) кут між прямою і площиною;
3) кут між площинами;
4) відстань між прямими, що перетинаються.

Метод об'ємів доволі простий. Щоб його використати потрібно знайти відповідну трикутну піраміду і правильно провести обчислення.

Мета даної статті: проаналізувати та обґрунтувати метод об'ємів під час розв'язування стереометричних задач.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо один із способів обчислення об'єму в процесі знаходження відстані від точки до площини. Ефективність цього способу полягає в тому, що під час обчислення об'єму трикутної піраміди можна за основу вибрати будь-яку її грань, і представити шукану відстань як висоту відповідної піраміди. Припустимо, що нам потрібно знайти відстань від деякої точки C до деякої площини ABD. Розглянемо трикутну піраміду $ABCD$ (рис. 1). Тоді шукана відстань - це висота d цієї піраміди, проведена з вершини C [1].

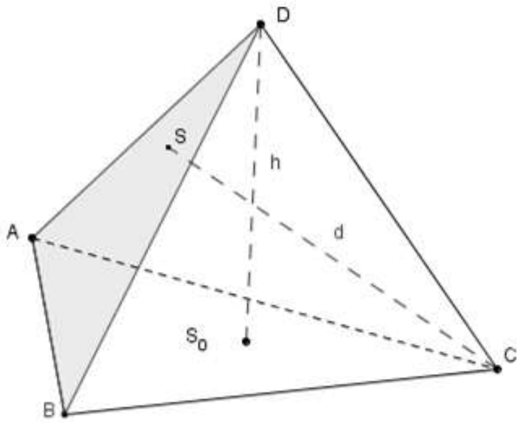


Рис. 1

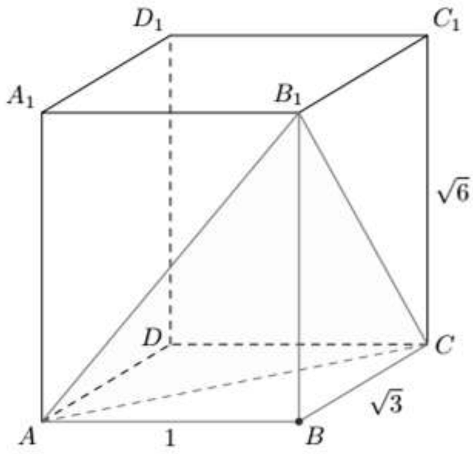


Рис. 2

Нехай S_0 - площа грані ABC, h - висота, опущена на цю грань, S - площа грані ABD. З одного боку, об'єм піраміди $ABCD$ може бути знайдений за формулою:

$$V = \frac{1}{3} S_0 h. \qquad (1)$$

З іншого боку, за основу можна вибрати грань ABD, і тоді

$$V = \frac{1}{3} Sd. \qquad (2)$$

Прирівнюючи праві частини формул (1) і (2), отримаємо:

$$S_0 h = Sd. \qquad (3)$$

Завдання 1. Задано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із сторонами $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$. Знайдіть відстань від точки B до площини AB_1C [3].

Завдання такого типу можна звести до завдання про обчислення висоти піраміди, яка і є шуканою відстанню від точки до площини. Але спочатку потрібно знайти об'єм цієї піраміди і виразити цю висоту.

Розв'язання.

Розглянемо паралелепіпед (рис. 2), усі грані якого є прямокутниками.

$$S_{ABC} \cdot BB_1 = S_{CAB_1} d \qquad (4)$$

Очевидно, що $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тепер знайдемо площу трикутника AB_1C , використовуючи теорему Піфагора: $AC = 2$, $AB_1 = \sqrt{7}$, $B_1C = 3$.

І за формулою Герона отримаємо:

$$S_{AB_1C} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}-1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Підставимо в (4), і отримаємо: $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

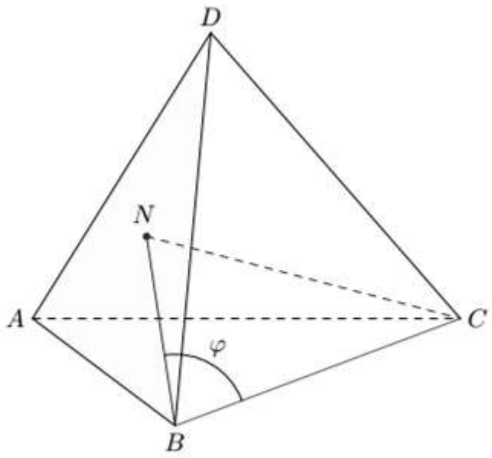


Рис. 3

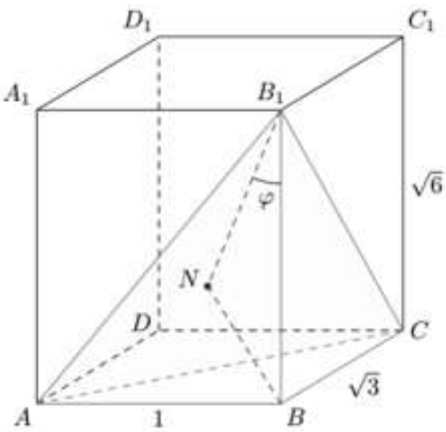


Рис. 4

Розглянемо другий спосіб обчислення об'єму в процесі знаходження кута між прямою і площиною.

Ідея обчислення кута між прямою і площиною дуже проста і грунтується на попередньому обчисленні відстані від точки до площини (рис. 3). Припустимо, що потрібно знайти кут φ між прямою BC і площиною ABD. Обчислюємо спочатку висоту CN, після чого знаходимо: $\sin\varphi = \frac{CN}{BC}$

Завдання 2. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомі ребра: AB = 1, $AD = \sqrt{3}$, $AA_1 = \sqrt{6}$ Знайдіть кут між прямою BB_1 і площиною AB_1C [1].

Розв'язання.

Розглянемо паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4). Відстань від точки B до площини AB_1C знайдено в попередньому завданні: $BN = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Залишається знайти шуканий кут φ: $\sin\varphi = \frac{BN}{BB_1} = \frac{1}{3}$

Відповідь: $\arcsin\frac{1}{3}$.

Розглянемо третій спосіб обчислення об'єму в процесі знаходження кута між площинами. Під час обчислення кута між площинами може виявитися корисною наступна формула для обчислення об'єму трикутної піраміди :

$$V = \frac{2}{3}\cdot\frac{S_1S_2}{a}\sin\varphi \qquad (5)$$

Тут S_1 і S_2 – площі двох граней піраміди, a – загальне ребро цих граней, φ - кут між площинами цих граней (рис. 5). Доведемо формулу (5). Нехай S_1 і S_2 - площі трикутників ABC і ABD відповідно і $a = AB$ і φ - кут між площинами ABC і ABD. З вершини D проведемо висоту h піраміди $ABCD$ і висоту h_a грані ABD.

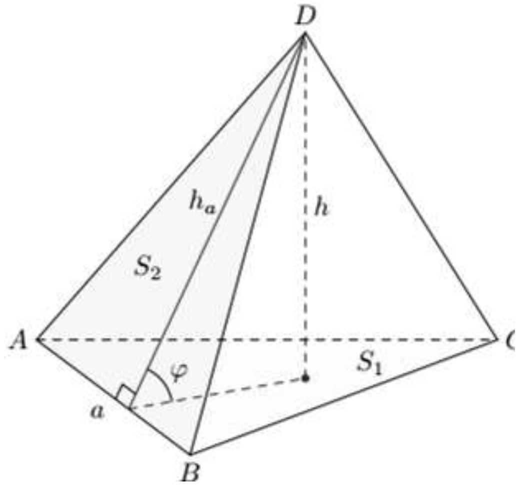


Рис. 5

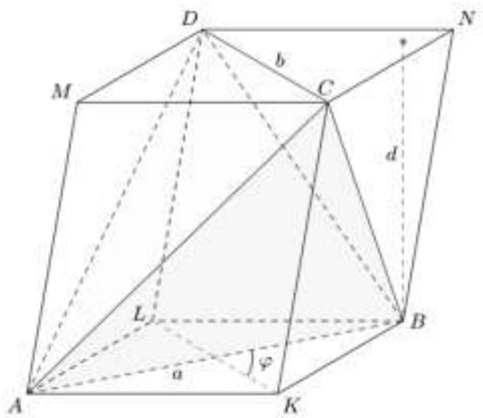


Рис. 6

Легко бачити, що $h = h_a\sin\varphi$. Тоді для об'єму піраміди маємо:

$$V = \frac{1}{3} S_1 \cdot h_a \sin\varphi \qquad (6)$$

З іншого боку, запишемо формулу для площі: $S_2 = \frac{ah_a}{2}$, звідки $h_a = \frac{2S_2}{a}$.

Цей вираз потрібно підставити в (6) : $V = \frac{1}{3} S_1 \frac{2S_2}{a} sin\varphi = \frac{2}{3} \frac{S_1 S_2}{a}\ sin\varphi$ [1].

Розглянемо четвертий спосіб обчислення об'єму під час знаходження відстані між прямими, що перетинаються. У процесі обчислення відстані між прямими, що перетинаються, може допомогти наступна формула для обчислення об'єму тетраедра :

$$V = \frac{1}{6} abd \sin\varphi. \qquad (7)$$

Тут a і b – ребра тетраедра, що перетинаються, d і φ – відповідно відстань і кут між ними (точніше, між прямими, що містять ці ребра).

Тетраедр $ABCD$, добудований до паралелепіпеда $AKBLMCND$ так: через кожне ребро тетраедра проведена площина, паралельна ребру, що перетинається з цим ребром (рис. 6). Покажемо, що об'єм V тетраедра $ABCD$ дорівнює одній третині об'єму V_0 одержаного паралелепіпеда.

Відріжемо від паралелепіпеда чотири тетраедри:

$$V = V_0 - V_{AKBC} - V_{BCND} - V_{ALBD} - V_{ACMD}.$$

Усі ці тетраедри мають рівний об'єм. Насправді, якщо S і d – відповідно площа основи і висота паралелепіпеда, то

$$V_{AKBC} = V_{BCND} = V_{ALBD} = V_{ACMD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S}{2} \cdot d = \frac{1}{6} SD = \frac{V_0}{6},$$

$$V = V_0 - 4 \cdot \frac{V_0}{6} = \frac{V_0}{3}.$$

Нехай $a = AB$, $b = CD$Відстань між прямими, що проходять через ребра a і b є відстанню між паралельними площинами AKB і MCN, тобто висотою d паралелепіпеда. Кут між ребрами a і b- це кут φ між прямими AB і LK.

Для площі основи паралелепіпеда маємо: $S = \frac{1}{2} AB \cdot KL \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} abd \sin\varphi$.

Отже, об’єм паралелепіпеда дорівнює: $V_0 = S_0 d = \frac{1}{2} abd \sin\varphi$ [1].

Висновки. Проаналізувавши та обґрунтувавши кожен спосіб обчислення об’єму в процесі знаходження кута між площинами; відстані від точки до площини; кута між прямою і площиною; відстані між прямими, що перетинаються – можна зробити висновок, що кожен із вказаних способів є ефективним і полягає у тому, щоб знайти відповідну трикутну піраміду і правильно провести обчислення. Отже, метод об’ємів є одним із найпростіших методів для роз’язування стереометричних задач на знаходження лінійних вимірів.

Література

1. Яковлев И. В. Материалы по математике: подготовка к олимпиадам и ЕГЭ [Електронний ресурс] / Игорь Вячеславович Яковлев – Режим доступу до ресурсу: MathUs.ru.

2. Стереометрія у старшій школі: Посібник для вчителя / Я. С. Бродський, В. Ю. Гречук, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 404 с.

3. Куликова А. Ю. Нахождение расстояния от точки до плоскости [Електронний ресурс] / Анастасия Юрьевна Куликова // стаття – Режим доступу до ресурсу: www.sibac.info.

Анотація. *Розглянуто та обґрунтовано застосування методу об’ємів в процесі розв’язування стереометричних задач на знаходження кута між площинами; відстані від точки до площини; кута між прямою і площиною; відстані між прямими, що перетинаються.*

Ключові слова: *метод об’ємів, кут між площинами, трикутна піраміда, відстань від точки до площини, кут між прямою і площиною.*

Вінтоненко Валентина Олександрівна
Долюк Анастасія Павлівна
студентки 4 курсу, спеціальність «Математика*»

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ ВИМІРІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ РОЗГОРТКИ

Вступ. Формування в учнів навичок для самостійної діяльності, творчого потенціалу і здатності використовувати знання на практиці є важливим завданням сучасного вчителя. У розвитку названих якостей особистості школяра велике значення має позакласна робота. В процесі позакласної роботи є можливість підтримати в дітей інтерес та переключити негативні інтереси на позитивні [2].

Підготовка учня до олімпіади, де участь направлена на отримання позитивного результату, потребує чимало сил, адже, дитина має не лише розвинути творче та інтелектуальне мислення, а й вивчити чималий набір нових методичних посібників. Тому одним з основних завдань вчителя є розвиток в учня дивергентного мислення – мислення, що спрямоване на відхилене від стандартів, пошук нових методів вирішення проблем та бачити всі можливі варіанти розв'язання поставленої задачі [5].

Мета даної статті: розглянути та обґрунтувати розв'язання стереометричних задач на знаходження лінійних вимірів із застосуванням методу розгортки.

Виклад основного матеріалу. Розгорткою поверхні називається плоска фігура, що утворюється при суміщенні поверхні даного тіла з площиною. Між поверхнею і її розгорткою встановлюється взаємно однозначна відповідність, тобто кожній точці і лінії на поверхні відповідає точка і лінія на розгортці. До поверхонь, що розгортаються відносять багатогранники і лінійні поверхні обертання [1, с. 107]. Метод розгортки – один з найбільш розповсюджених методів, за допомогою якого просторова задача зводиться до однієї або декількох планіметричних задач. Цей метод дуже зручний при розв'язуванні задач, в яких потрібно знайти найкоротший шлях між двома точками по поверхні багатогранника, циліндра або конуса [3, с. 70].

У процесі застосування методу розгортки до розв'язування задач, необхідно пам'ятати, що під час розгортки зберігаються довжини ліній, розташованих на поверхні, величини кутів між лініями і площі фігур, обмеженими замкнутими лініями. Після побудови рисунка розгортки поверхні, задача зводиться до розв'язання планіметричної задачі.

У позакласній роботі з учнями доцільно розглядати, не лише завдання на розв'язання, але й на доведення.

Задача 1. Довести, якщо у тетраедра суми плоских кутів при трьох вершинах дорівнюють $180°$, то всі його грані – рівні трикутники [3, с. 70].

Доведення.

У четвертій вершині сума плоских кутів дорівнює $180°$. Позначимо даний тетраедр $ABCD$ і зробимо розгортку його поверхні по ребрам DA, DB, DC (рис. 1). Оскільки суми плоских кутів при вершинах A, B і C дорівнюють $180°$, то при розгортці отримаємо трикутник $D_1D_2D_3$, в якому A, B і C – середини сторін. Отже, насправді всі грані тетраедра $ABCD$ рівні між собою.

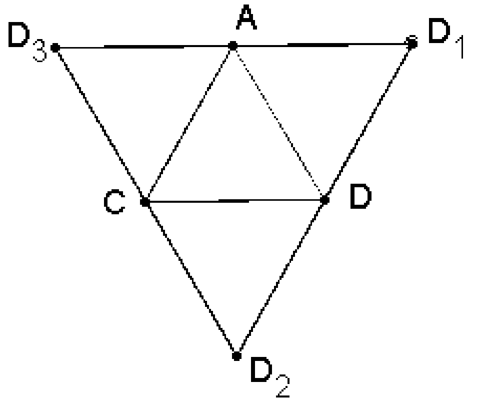


Рис. 1

Що й потрібно було довести.

Задача 2. Сторона основи правильної шестикутної піраміди $MABCDPK$ дорівнює α, кут між бічними ребрами і стороною основи, яку воно перетинає, $80°$. Жук почав повзти по поверхні піраміди з точки A і, побувавши на всіх бічних гранях, повернувся в точку A. Визначити найменшу можливу довжину шляху жука [3, с. 143].

Розв'язання.

Накреслимо розгортку бічної поверхні даної піраміди (рис. 2). Легко бачити, що $\angle AMA' = 120°$. Мінімальний шлях на розгортці зобразимо відрізком AA'.

Зрозуміло, що $AM = \dfrac{a}{2\cos 80°}$; $AA' = 2AM \cdot \cos\angle MAA' = \dfrac{2a \cdot \cos 30°}{2\cos 80°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\cos 80°}$.

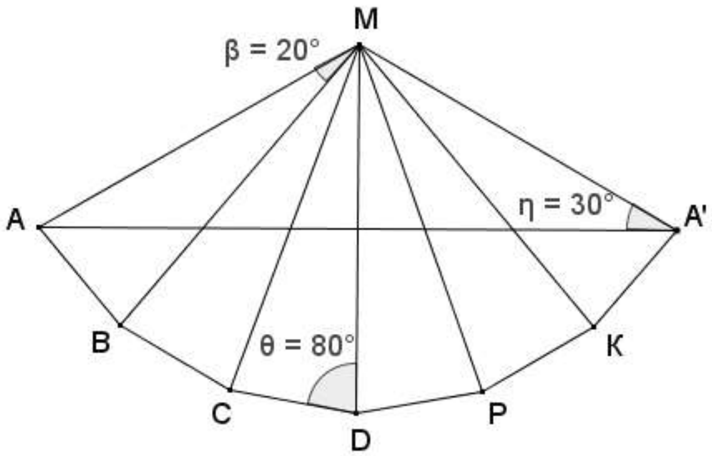


Рис. 2

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2\cos 80°}$.

Задача 3. В правильній піраміді $MABCD$ кожне з ребер дорівнює 6. Точки P і K - середини ребер відповідно сторін AB і MC. Знайдіть найкоротший шлях по поверхні піраміди між точками P і K [3, с. 72].

Розв'язання.

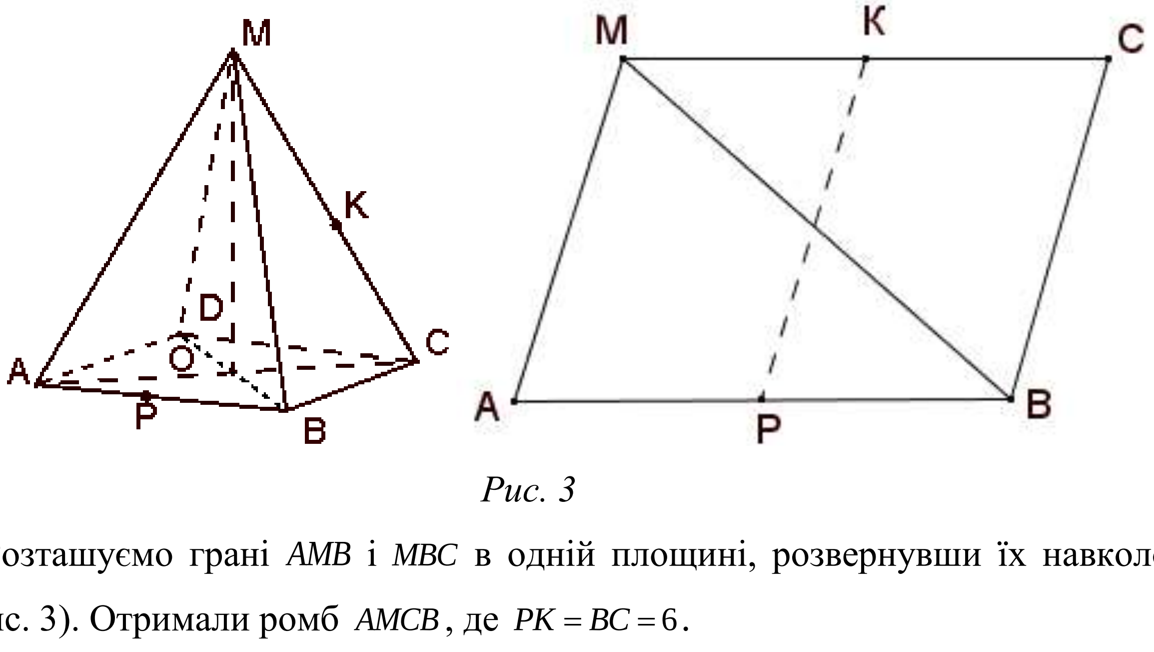


Рис. 3

Розташуємо грані AMB і MBC в одній площині, розвернувши їх навколо MB (рис. 3). Отримали ромб $AMCB$, де $PK = BC = 6$.

Відповідь: найкоротший шлях між точками P і K.

Задача 4. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зі сторонами $AB = 12$, $AD = 12$, $AA_1 = 30$ точка M лежить на грані $ABCD$, причому $MA = MB = \sqrt{37}$. Точка N, яка лежить на протилежній грані $A_1B_1C_1D_1$ симетрична до точки M відносно точки перетину діагоналей паралелепіпеда. Знайдіть довжину найкоротшого шляху, що проходить по поверхні паралелепіпеда і з'єднує точки M та N [6, с. 135].

Розв'язання.

1) Шлях перетинає грань DD_1C_1C. Побудуємо переріз (рис. 7). Довжину найкоротшого шляху в даному випадку знайти легко. Вона дорівнює: $30+11+1=42$.

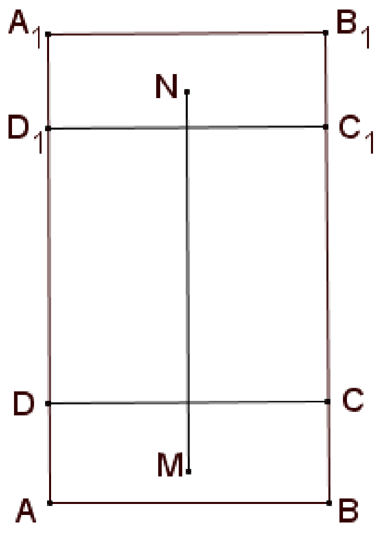


Рис. 4

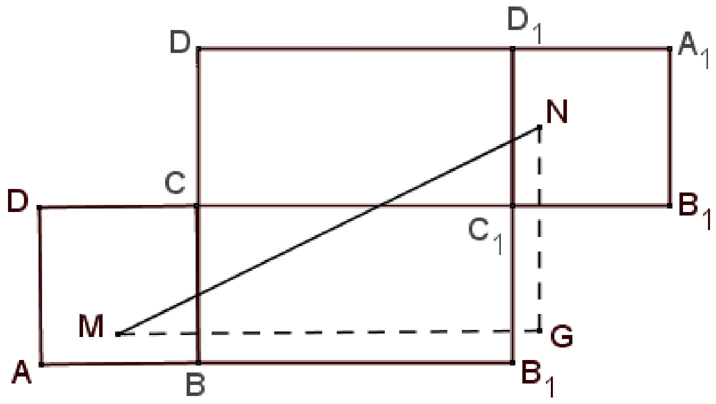


Рис. 5

2) Шлях послідовно перетинає ребра BC, CC_1, C_1D_1. Зробимо розгортку (рис. 8). Для спрощення будемо позначати точки на розгортці так само, як і на паралелепіпеді. За теоремою Піфагора:

$$MN = \sqrt{MG^2 + NG^2} = \sqrt{37^2 + 17^2} = \sqrt{1658}.$$

Відповідь: $\sqrt{1658}$.

Висновки. Найпоширеніші задачі, які розв'язуються методом розгортки – це задачі де потрібно знайти найкоротший шлях між двома точками на поверхні многогранника, циліндра або конуса. Цей метод є важливим у вивченні математики, оскільки завдяки йому в учнів розвивається просторове і логічне мислення. Метод розгортки актуально застосовувати в позакласній роботі, а також під час підготовки учнів до олімпіади.

Література

1. Джеджула О. М. Курс нарисної геометрії. Навчальний посібник / О. М. Джеджула, С. І. Кормановський : ВНАУ, 2011. – 200 с.
2. Карпенко С. Позакласна робота вчителя [Електронний ресурс] / Світлана Карпенко – Режим доступу до ресурсу: http://svetlana-karpenko.blogspot.com/p/blog-page_16.html.
3. Обласні математичні олімпіади. Друге видання, доопрацьоване і доповнене / І. М. Конет, В. Г. Паньков, В. М. Радченко, Ю. В. Теплінський. // За загальною редакцією І. М. Конета – Кам’янець-Подільський: «Абетка»., 2005. – 344 с.
4. Разумова О. В. Задачи повышенной трудности по геометрии. Часть II: Учебно-методическое пособие / О. В. Разумова – Казань: Казан. ун-т, 2012. – 112 с.
5. Субач К. В. Методика підготовки до предметних олімпіад [Електронний ресурс] / Катерина Вікторівна Субач – Режим доступу до ресурсу: http://buki.com.ua/blogs/Metodyka-pidhotovky-do-predmetnykh-olimpiad/.
6. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.

Анотація. *У статті наведено приклади задач з стереометрії на знаходження лінійних вимірів із застосуванням методу розгортки.*

Ключові слова: *метод розгортки, стереометрична задача, розгортка поверхні, тетраедр, прямокутний паралелепіпед.*

Дерепащук Людмила Михайлівна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»*

ФОРМУВАННЯ ТА РОЗВИТОК МИСЛЕННЯ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ ГУРТКОВОЇ РОБОТИ З КОМБІНАЦІЯМИ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Вступ. Гурткова робота з математики – це одна з найбільш дієвих і ефективних форм позакласної роботи. Найчастіше, особливо в старших класах, це робота із здібними до математики учнями. Часто такі учні є учасниками олімпіад школярів з математики різного рівня. Розвиток ключових та математичних компетентностей здібних до математики учнів важливе, на нашу думку, завдання для кожного вчителя математики. Така робота має бути систематичною і, очевидно, організовуватись не лише перед олімпіадами, а й впродовж усього навчального року. Саме активна робота учнів на уроках та гуртках з математики, на яких розглядаються різноманітні розвивальні задачі, дає позитивні результати на олімпіадах.

Мета даної статті: розглянути методичні особливості підготовки і проведення математичного гуртка на тему «Комбінації тіл обертання», якщо вчитель має на меті створити ефективні умови для оптимального розвитку мислення у здібних до математики учнів.

Виклад основного матеріалу. «Шкільна геометрія – це також (а може й насамперед) мистецтво розв’язувати геометричні задачі. Мистецтво ж розв’язувати геометричні задачі ґрунтується на гарному знанні теоретичної частини курсу, знанні достатньої кількості геометричних фактів, що не ввійшли в цей курс, і володінні певним арсеналом прийомів і методів розв’язування геометричних задач» – в одній із своїх статтей написав заслужений вчитель України В.А. Ясінський [4, с. 28]. Під час розв’язування стереометричних задач в учнів розвивається творчі здібності, самостійне мислення, набуваються навички практичного застосування теоретичних положень геометрії.

Під час розв’язування учнями задач на комбінації тіл серед основних труднощів необхідно зазначити відсутність у довготривалій пам'яті учня деякого базового набору образів типових комбінацій тіл і їх зображень; навичок роботи із завданнями на комбінації тіл, для розв'язування яких зовсім не потрібно наявності повного проекційного зображення.

Розглянемо задачі, які варто, на нашу думку, запропонувати учням на занятті гуртка на тему «Комбінації тіл обертання».

Задача 1. В кулю вписаний конус і циліндр, який має з конусом спільну нижню основу і однаковий об'єм. Площа поверхні кулі дорівнює $5\sqrt{10}$. Знайти площу бічної поверхні конуса. [2, с. 22]

Розв'язання.

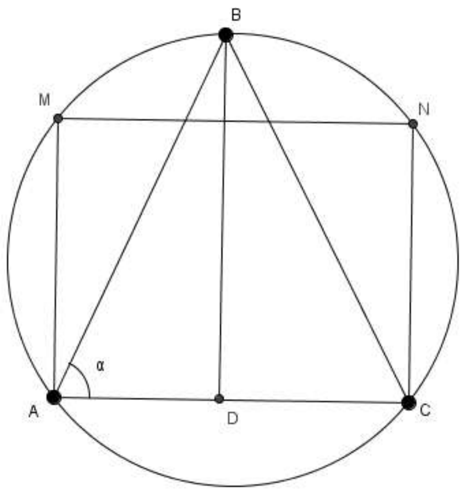


Рис. 1

На рис. 1 осьовий переріз комбінації заданих фігур. Якщо радіус основи конуса $AD = r$ і кут між твірною конуса і площею його основи $\angle BAD = \alpha$, то об'єм конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^3 tg\alpha$. Оскільки $\angle ANC = \angle ABC = \pi - 2\alpha$, то висота циліндра $NC = -2rctg2\alpha$, а його об'єм – відповідно $V_2 = -2\pi r^3 ctg2\alpha$. Рівність $V_1 = V_2$ перетворюється в $tg^2\alpha = \frac{3}{2}$ або $\cos^2\alpha = \frac{2}{5}$. Далі радіус кулі $R = \frac{2r}{2\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{r}{\sin 2\alpha}$, так що площа її поверхні $S_1 = \frac{4\pi r^2}{\sin^2 2\alpha}$. Площа бічної поверхні конуса $S_2 = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha}$, тому $\frac{S_1}{S_2} = \cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)$ і $S_2 = 5\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot (1 - \frac{2}{5}) = 6$.

Відповідь*: 6.*

Задача 2. У конусі твірна дорівнює l і утворює з основою кут α. Знайдіть R і r – радіуси описаної і вписаної куль відповідно. [з, с. 35]

Розв'язання. Нехай на рис. 2 дано зображення конуса, твірна якого $SA = l$ і утворює з площиною основи кут α, тобто $\angle SAO_1 = \alpha$. З $\triangle SAO_1$ ($\angle SAO_1 = 90^\circ$):

$$AO_1 = l \cdot \cos\alpha \cdot$$

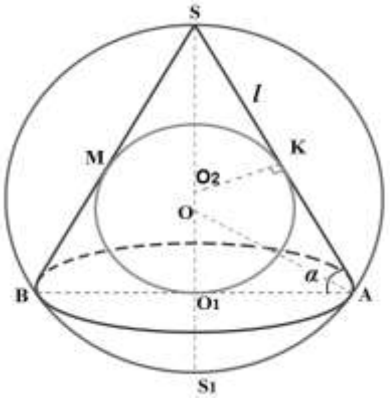


Рис. 2

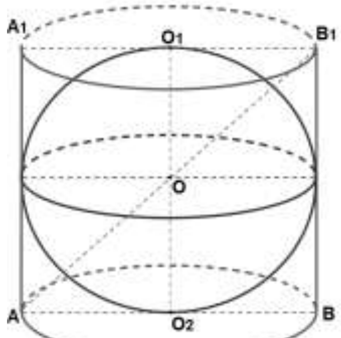


Рис. 3

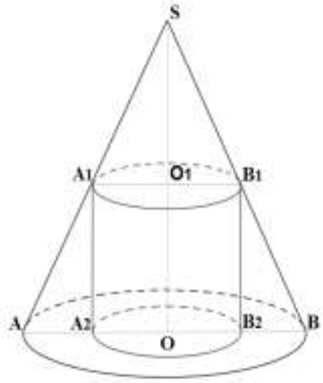


Рис. 4

Цей конус є вписаним в кулю і описаним навколо кулі. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник $\triangle SAB$, тому центр кулі описаної навколо конуса і центр кулі вписаної в конус лежить на бісектрисі SO_1. Нехай центром описаної кулі буде точка O, а центром кулі, вписаної в конус буде точка O_2. В $\triangle SAB$ кут $\angle ASB = 180^\circ - 2\alpha$, тоді в $\triangle SO_1A$ кут $\angle O_1SA = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$.

Центр кола, описаного навколо трикутника лежить на перетині серединних перпендикулярів, проведених до сторін трикутника, отже, $SA = \frac{l}{2}$, а радіусом буде довжина відрізка SO. З $\triangle SKO$ ($\angle SKO = 90^\circ$):

$$SO = \frac{l}{2\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{l}{2\sin\alpha}.$$

Центр кола, вписаного в трикутник лежить на перетині бісектрис кутів, отже, $\angle OAO_1 = \frac{\alpha}{2}$, а радіусом буде довжина відрізка O_2O_1. З $\triangle O_2O_1A$

$(\angle O_2O_1A = 90^\circ)$: $O_2O_1 = l \cdot \cos\alpha \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $R = \dfrac{l}{2\sin\alpha}$, $r = l \cdot \cos\alpha \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 3. Навколо кулі описано циліндр. Знайдіть відношення поверхонь цих тіл. [3, с. 39]

Розв'язання. Нехай на рис. 3 дано зображення прямого циліндра, в який вписано кулю. Оскільки,вписати кулю можна тільки в рівносторонній циліндр, тобто в такий де висота циліндра дорівнює діаметру основи: $BB_1 = AB$.

Візьмемо радіус циліндра $AO_2 = x$, тоді $AB = BB_1 = 2x$. Звідси з $\triangle ABB_1$ $(\angle ABB_1 = 90^\circ)$ за теоремою Піфагора $AB_1 = 2x\sqrt{2}$, то радіус кулі $AO = x\sqrt{2}$.

Виходячи з цього маємо відношення поверхонь цих тіл:

$$\frac{S_{кулі}}{S_{пов.цил.}} = \frac{4\pi R_{кулі}^2}{2S_{осн.} + S_{бічн.цил.}} == \frac{4\pi x^2}{2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 2x} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь. $\dfrac{S_{кулі}}{S_{пов.цил.}} = \dfrac{2}{3}$.

Задача 4._Радіус основи конуса дорівнює 39 см, а висота – 52 см. У нього вписано циліндр такої висоти, що його бічна поверхня рівновелика бічній поверхні малого конуса, який стоїть на його верхній основі. Знайдіть висоту циліндра. [3, с. 40]

Розв'язання. Нехай на рис. 4 дано зображення конуса, радіус основи якого $OB = 39см$, висота $SO = 52см$. В цей конус вписано прямий циліндр,бічна поверхня якого рівновелика бічній поверхні малого конуса, тобто

$S_{бічн.цил.} = S_{бічн.кон.SA_1B_1}$, а $S_{бічн.цил.} = 2\pi R_ц H_ц$, то $S_{бічн.кон.} = \pi R_к l$,

$2\pi \cdot O_1B_1 \cdot OO_1 = \pi \cdot O_1B_1 \cdot SB_1$, звідси $2 \cdot OO_1 = SB_1$, тобто $SB_1 = 2OO_1$.

З $\triangle SOB$ $(\angle SOB = 90^\circ)$ за теоремою Піфагора: $SB^2 = SO^2 + OB^2$,

$SB = \sqrt{52^2 + 39^2} = \sqrt{4255} = 65см$.

Оскільки, $\triangle SOB \sim \triangle SO_1B_1$ за І ознакою подібності трикутників, то

$\dfrac{SO}{SO_1} = \dfrac{OB}{O_1B_1} = \dfrac{SB}{SB_1}$, де $SO_1 = SO - OO_1 = 52 - OO_1$.

Звідси $\dfrac{SO}{SO_1} = \dfrac{SB}{SB_1}$, $\dfrac{52}{52 - OO_1} = \dfrac{65}{2 \cdot OO_1}$, $OO_1 = 20 см$.

Відповідь*: 20 см.*

Доречним, на нашу думку, під час гурткової роботи з теми «Комбінації тіл обертання» є використання програмних засобів, за допомогою яких можна будувати просторові рисунки. Ефективне їх застосування передбачає оволодіння геометричною мовою і символікою, розвиток просторових уявлень, уміння будувати геометричні креслення, вміння вирішувати завдання.

Готові зображення моделей дозволяють учневі змінювати розміри і розташування розглядуваних тіл відносно один одного. Такі моделі можна демонструвати, наприклад, в GeoGebra.

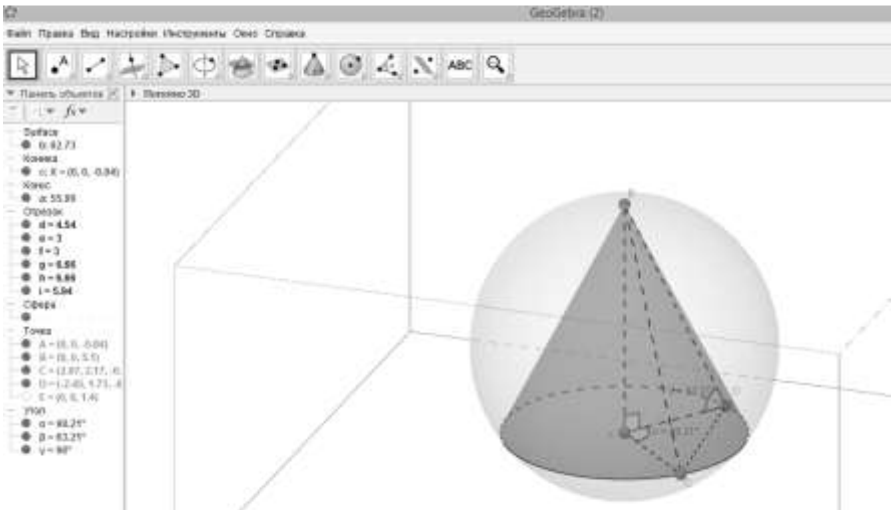


Рис. 5

За допомогою GeoGebra можна створити інтерактивну наочність в якій учень самостійно може вибрати потрібні йому для відображення елементи, змінити основні параметри геометричних фігур та на малюнку побачити як це впливає на комбінації фігур в цілому. При цьому вчитель може надавати певні поради з розгляду рисунка під час розв’язування задачі і тим самим підводячи учня до правильного методу розв’язання, також учні краще розуміють різні властивості геометричних фігур наочно перевіривши їх за допомогою даного програмного засобу.

Для прикладу розглянемо зображення рисунка до наступної задачі.

Задача 5. В основі конуса проведено хорду a, яку видно з центра основи під кутом α. Твірна конуса нахилена до основи під кутом β. Знайдіть об'єм описаної кулі [1, с. 96]. *(*Відповідь*:* $V = \frac{4\pi \cdot \sin^3 2\beta \cdot 2\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{3 \cdot a^3}$*)*

Змінюючи положення точок учні спостерігають, що і змінюються величини відповідних кутів. Продемонструвавши учням утворену комбінацію заданих тіл, можна приступати до безпосереднього розв'язування задачі.

Висновки. Отже, гурткова робота на тему «Комбінації тіл обертання» може створити широкі можливості щодо формування та розвитку просторового і творчого мислення учнів, повторення і узагальнення актуальної теорії.

Література

1. Литвиненко Г. М. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту. Частина II / Г. М. Литвиненко, Л. Я. Федченко, В. О. Швець. – Львів: ВНТЛ, 1997. – 72 с.
2. Писаревський Б. М. Задачи по стереометри. Тела вращения / Б. М. Писаревський // Математика в школе., 2005. – №4.–С. 21-24.
3. Шелег Т. В. Практикум розв'язування стереометричних задач на комбінації геометричних тіл / Тетяна Василівна Шелег. – Лубни, 2015. – 48 с.
4. Ясінський В. А. Опорні задачі – факти олімпіадної геометрії / В. А. Ясінський, О. Л. Коношевський // Математика в сучасній школі., 2012. – №9. – С. 28-33.

Анотація. *Описано особливості підготовки і проведення математичного гуртка з теми «Комбінації тіл обертання», виокремлено низку зручних для досягнення мети задач.*

Ключові слова: *гурткова робота, комбінації тіл обертання, конус, куля, циліндр.*

Дідух Яна Валеріївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПОХІДНОЇ

Вступ. Люди давно помітили, що навколишній світ влаштований за екстремальними законами. Один із найвидатніших математиків Леонард Ейлер говорив: «У світі не відбувається нічого, у чому не було б видно сенсу якогось максимуму або мінімуму». До того ж, серед цих задач багато красивих, які цікаво й приємно розв'язувати. Ще Евклід, який жив близько 300 р. до н. е., у своїх знаменитих «Початках» показав, що з усіх прямокутників заданого периметра найбільшу площу має квадрат [7, с. 4].

До другої половини XVII століття не існувало жодних загальних прийомів розв'язання задач на екстремум. Необхідність їх знаходження значною мірою стимулювало створення математичного аналізу. Перший загальний метод, за допомогою якого пропонували дослідити задачі на знаходження найбільшого і найменшого значення описав П.Ферма (близько 1630 р.). Сучасною мовою він звучить так: у точці екстремуму (деякої функції однієї змінної) похідна дорівнює нулеві і тому екстремум необхідно шукати серед коренів похідних.

Теорію задач на знаходження найбільших і найменших величин називають теорією екстремальних задач, або теорією оптимізації, або інколи теорією оптимального керування. В процесі використання останнього терміну розуміють зв'язок задачі з практичними застосуваннями.

Мета даної статті: розглянути стереометричні задачі на максимум і мінімум, які за своїм змістом і методами розв'язування зводяться до знаходження умов, за яких дана функція набуває найбільшого або найменшого значення.

Виклад основного матеріалу. На уроках математики необхідно виховувати не тільки звичку до логічного мислення, а і математичну інтуїцію, яка дозволяє передбачити кінцевий результат. У розв'язанні цієї проблеми значну роль відіграють творчі задачі, які в математиці є найбільш важливі, оскільки в них відсутній певний алгоритм розв'язання. Вони вимагають від учня нестандартного мислення, спонукають до самостійної роботи над книгою [5, с.129].

Процес розв'язування таких задач включає в себе три взаємопов'язані між собою складові процеси: розуміння, формування гіпотези, апробація результатів.

Не варто захоплюватися розв'язанням однотипних задач. Адже, розв'язавши дві-три аналогічні задачі, учні механічно засвоюють спосіб їх розв'язування і далі роблять це механічно, не вникають навіть у зміст. Тому задачі бажано добирати і за характером даних залежностей і відношень, однаковою математичною структурою, але по суті зовсім різні.

У процесі розв'язування екстремальних задач на вписані і описані стереометричні фігури особлива увага звертається на виконання малюнка, бо від цього значною мірою залежить успішне розв'язування задачі. Зображення виконується методом паралельного проектування, що є необхідною умовою його правильності [2, с.177]. Екстремальні задачі мають важливе практичне значення. Саме тому в підручнику з геометрії для середньої школи включені задачі на геометричні екстремуми. Основний спосіб їх розв'язування – широке використання відображень, які є окремими видами функцій.

Розв'язуючи екстремальні задачі, вчитель ставить перед собою мету:

1. виділити найважливіші типи їх розв'язування;
2. розглянути доступні учням методи щодо їх розв'язку;
3. розробити методику розв'язування екстремальних задач.

Усі задачі на максимум і мінімум, незважаючи на їх різноманітність, своїм змістом і методами розв'язування зводяться до знаходження умов, за яких дана функція набуватиме найбільшого або найменшого значення.

Під час розв’язування таких задач спочатку умову потрібно перекласти на мову математики – створити математичну модель, для створення якої можна використати таку послідовність:

1. За умовою задачі виділити величину, яку необхідно оптимізувати.
2. Вибрати зручну змінну, що може бути аргументом функції, яка описує досліджувану величину.
3. Знайти аналітичний вираз для функції.
4. За умовою задачі визначити проміжок, на якому розглядають отриману функцію.

Дану задачу зведено до знаходження найбільшого або найменшого значення функції на деякому проміжку. За допомогою похідної або іншими засобами розв’язують отриману задачу. Після цього з’ясовується, який реальний зміст має результат, отриманий у термінах функцій [1, с.184-185].

Наведемо приклади екстремальних стереометричних задач розв’язаних із застосуванням похідної.

Задача 1. Яких розмірів мають бути радіус основи і висота відкритого циліндричного бака, щоб при заданому об’ємі V на його виготовлення було витрачено найменшу кількість листового матеріалу [3, с.181-182]?

Розв’язання. Побудуємо математичну модель. Умову задачі переформулюємо так: знайти розміри прямого кругового циліндра із об’ємом V, що має найменшу площу поверхні. Величина, яку потрібно оптимізувати, є площа повної поверхні циліндра з врахуванням того, що він відкритий. Площа повної поверхні циліндра залежить від радіуса основи та висоти циліндра. Отже, визначити радіус основи R і висоту H циліндра так, щоб при заданому об’ємі площа його поверхні була найменшою $S = \pi R^2 + 2\pi RH$. Найменше значення цієї функції і потрібно обчислити.

Нехай умові задачі задовольняють радіус R і висота H. Тоді $V = \pi R^2 H$, а отже, $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$.

На виготовлення бака потрібна така кількість металу (враховуючи те, що він відкритий): $S = \pi R^2 + 2\pi RH$. Маємо функцію $S(R) = \pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} = \pi R^2 + \frac{2V}{R}$, $(R > 0)$; $S'(R) = 2\pi R - \frac{2V}{R^2} = 2 \cdot \frac{\pi R^3 - V}{R^2}$; $S' = 0$, якщо $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. Досліджуємо знак похідної: $S'\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \frac{V}{2\pi} - V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} < 0$; $S'\left(\sqrt[3]{V}\right) = 2 \cdot \frac{\pi \cdot V - V}{\left(\sqrt[3]{V}\right)^2} > 0$.

Отже, $R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ – точка мінімуму, в цьому разі $H = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Відповідь. Висота і радіус основи по $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

Розглянемо аналогічну задачу для конкретного значення об’єму.

Задача 1*. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об’ємом 250π $см^3$. Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу [4, с.89-90]?

Побудуємо математичну модель. Оптимізуємо площу повної поверхні (залежить від радіуса основи та висоти циліндра) циліндра. Для цього визначимо радіус основи R і висоту H циліндра так, щоб при заданому об’ємі площа його поверхні була найменшою $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. Найменше значення цієї функції і потрібно обчислити. $V = \pi R^2 H = 250\pi$. $H = \frac{250\pi}{\pi R^2} = \frac{250}{R^2}$, тоді

$$S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{250}{R^2} = 2\pi R^2 + \frac{500\pi}{R}.$$

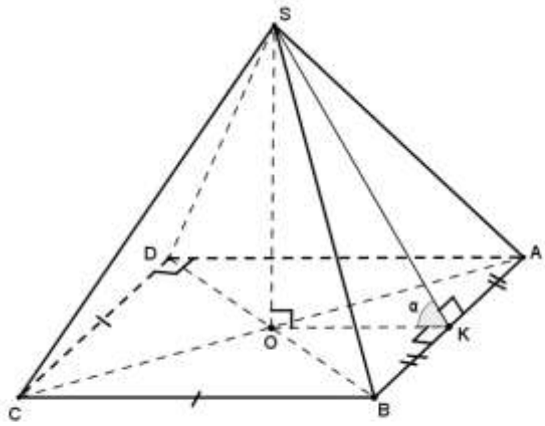
Отже, математичною моделлю даного завдання є задача: знайти найменше значення функції $S(R) = 2\pi R^2 + \frac{500\pi}{R}$.

1. Область визначення $R > 0$. 2. Знаходимо похідну: $S'(R) = 4\pi R - \frac{500\pi}{R^2}$.
2. Знайдемо критичні точки: $4\pi R - \frac{500\pi}{R^2} = 0$, $4\pi R^3 = 500\pi$, $R^3 = 125$, $R = 5$.

3. Досліджуємо знак похідної: $S'(4)=4\pi\cdot 4-\frac{500\pi}{4^2}<0$, $S'(6)=4\pi\cdot 6-\frac{500\pi}{6^2}>0$; отже, $R=5$ – точка мінімуму, в цьому разі $H=\frac{250}{5^2}=10$.

Відповідь. $R=5$ *см* $H=10$ *см*.

Задача 2. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди має сталу задану площу і нахилена до площини основи під кутом α. При якому значенні α об'єм піраміди є найбільшим [7, с.18]?



Розв'язання. Побудуємо математичну модель. Нехай $SABCD$ – правильна чотирикутна піраміда і площа грані SAB дорівнює m^2, де m – число. Точка K – середина AB, SO – висота піраміди, $\angle SKO=\alpha$ за умовою.

Позначимо $AB=x$. Маємо $m^2=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot SK$; $SK=\frac{2m^2}{x}$.

У ΔSOK: $\cos\alpha=\frac{OK}{SK}=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2m^2}{x}}=\frac{x^2}{4m^2}$. Звідси $x=2m\sqrt{\cos\alpha}$. Тоді $OK=m\sqrt{\cos\alpha}$.

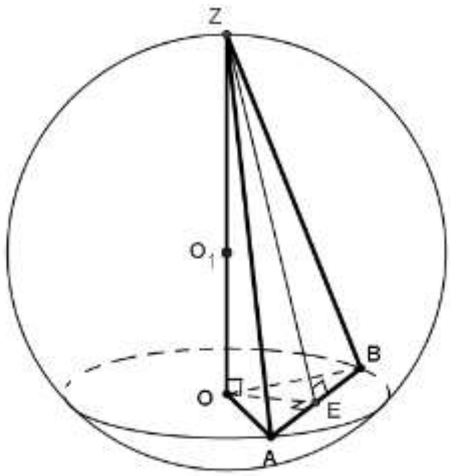
У ΔSOK: $SO=OK\cdot tg\alpha$. Обчислимо об'єм піраміди: $V=\frac{1}{3}x^2\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot 4m^2\cos\alpha\cdot m\sqrt{\cos\alpha}\cdot tg\alpha=\frac{4}{3}m^3\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt{\cos\alpha}$, де $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Розглянемо функцію $y(\alpha)=\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}$, де $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Похідна $y'=\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha}+\sin\alpha\cdot\frac{-\sin\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}}=\frac{2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}}$, $y'=0$, якщо $tg^2\alpha=2$. Враховуючи $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, дістанемо, що $\alpha=arctg\sqrt{2}$ – критична точка.

Досліджуємо знак похідної: $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}}>0$, $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}<0$. Отже,

$\alpha = arctg\sqrt{2}$ – точка максимуму.

Відповідь. $\alpha = arctg\sqrt{2}$.

Задача 3. В кулю радіусом R вписана правильна n-кутна піраміда, що має найбільший об'єм. Визначити двогранний кут при ребрі основи піраміди [6, с. 112].



Розв'язання. Нехай $\angle ZEO$ – лінійний кут шуканого двогранного кута. Нехай $\angle ZEO=\varphi$ і $\angle ZAO=\alpha$. Тоді $ZA=2R\sin\alpha$, $ZO=2R\sin^2\alpha$, $AO=R\sin 2\alpha$; $V_{\text{пір}}=\frac{1}{3}\cdot n\cdot\frac{1}{2}R^2\sin^2 2\alpha\sin\frac{2\pi}{n}\cdot$

$2R\sin^2\alpha=\frac{n}{3}R^3\sin\frac{2\pi}{n}\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha.$

Розглянемо функцію $y=\sin 2\alpha\sin\alpha$. Знайдемо її похідну

$$y'=2\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha+\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha\left(3\cos^2\alpha-1\right).$$

Неважко показати, що при $\alpha_1=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ функція набуває максимального значення. Визначимо тепер φ : $OE=AO\cos\frac{\pi}{n}=R\sin 2\alpha_1\cos\frac{\pi}{n}$,

$\mathrm{tg}\varphi=\frac{2R\sin^2\alpha_1}{R\sin 2\alpha_1\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{tg\alpha_1}{\cos\frac{\pi}{n}}$. З рівності $\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ знаходимо, що $tg\alpha_1=\sqrt{2}$.

Отже, $\mathrm{tg}\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{n}}$, $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{n}}$.

Висновки. Розв'язування екстремальних стереометричних задач сприяє розвиткові мислення учнів, вмінню орієнтуватись у співвідношеннях елементів геометричних фігур та широко використовувати дані співвідношення в процесі розв'язування задач із практичними застосуваннями, тобто пов'язувати теорію з практикою.

Література

1. Афанасьєва О. М. Математика. 11 клас. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. М. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.
2. Боровик В. Н. Математика: Посібник для факультативних занять у 10 класі / В. Н. Боровик, Л. М Вивальнюк, М. М. Мурач, З. Г. Шефтель, Тесленко І. Ф. – К.: Рад. шк., 1985. – 208 с.
3. Істер О. С. Методи розв'язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 2 / О. С. Істер. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. – 576 с.
4. Литвин І. І. Вища математика. Навчальний посібник / І. І Литвин, О. М. Конопчук, Г. О. Желізняк. – Київ: Центр навч. літератури, 2004. – 372 с.
5. Гарбич-Мороша О. Готовність особистості до розв'язання творчих математичних задач / Ольга Гарбич-Мороша. // Молодь і ринок., 2007. – С. 126-130.
6. Овчар О. Розв'язування оптимізаційних задач / Ольга Овчар. // Молодь і ринок., 2009. – С. 107-114.
7. Семенов В. О. 1300 й одна задача на екстремум. Стереометрія. Частина 1. – Х.: Основа, 2012. – 127 с.

Анотація. *Розглянуто стереометричні задачі на максимум і мінімум, які за своїм змістом і методами розв'язування зводяться до знаходження умов, за яких дана функція набуває найбільшого або найменшого значення.*

Ключові слова: *екстремальна стереометрична задача, функція, піраміда, процес оптимізації.*

Магдич Віталій Іванович
студент магістратури, спеціальність «Математика*»

КОЛО В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ

Вступ. Олімпіадні задачі визначають широке коло задач, для розв’язання яких необхідний оригінальний підхід та неабияка гнучкість розуму.

Розв’язування учнями нестандартних математичних задач сприяє розвитку їх здібностей до самостійного математичного мислення. Задачі, запропоновані учасникам олімпіад, відрізняються від звичайних шкільних задач рівнем складності й нестандартністю. І не завжди легко здогадатися яким методом розв’язується дана задача.

Мета даної статті: показати добірку олімпіадних задач, при розв’язаванні яких використовуються відомості про коло і його елементи та продемонструвати їх розв’язання.

Виклад основного матеріалу. У цій статті підібрані задачі різних етапів математичних олімпіад, при розв’язуванні яких використовується матеріал теми “Коло. Вписані й описані многокутники”.

Завдання на добудову вважаються складними для учнів і часто виносяться на олімпіади. Нерідко на олімпіадах з математики різних рівнів зустрічаються завдання на відшукання кутів. Прикладами подібних завдань можуть бути наступні задачі.

Задача 1: У $\triangle ABC: \angle A = 50^{\circ}, \angle C = 70^{\circ}$. D належить AB, F належить BC. Ці точки розміщені так, що $\angle DCA = \angle FAC = 30^{\circ}$. Знайти $\angle CDF$ (рис. 1).

Розв’язання.

1. $AF \cap CD = O$;

2. $\triangle AOC: \angle CAO = \angle ACO = 30^{\circ}$, отже $CO = AO \Rightarrow \angle COA = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$,

3. $VACB : PC = 70^{o}, PA = 50^{o}$ Ю $PB = 60^{o}$, $PCBA$ - вписаний,

$PCBA = \frac{1}{2} PCOA$,

$PCOA$ - відповідний центральний, отже O – центр кола, описаного навколо $VACB$.

4. $FODB : PFOD = 120^{o}, PB = 60^{o}$, $PFOD + PB = 180^{o}$ Ю навколо $FODB$ описуємо коло.

5. На хорду OF спираються $PODF$ і $POBF$. Вони рівні. Знайдемо $POBF$

$OA = OB = OC = r,$

$CO = OB$ Ю $PDCF = POBF = PCDF = 70^{o} - 30^{o} = 40^{o}.$

Відповідь: $PCDF = 40^{o}$

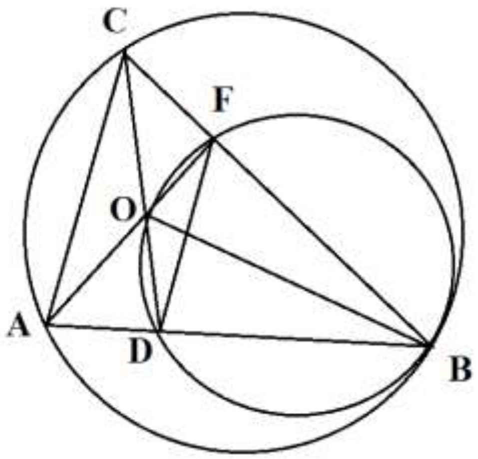


Рис. 1

Задача 2: У ромбі $ABCD$ величина кута B дорівнює 40^{o}, E – середина BC, F – основа перпендикуляра, опущеного з точки A на DE. Знайдіть величину кута DFC (рис. 2).

Розв’язання. Нехай прямі DE і AB перетинаються в точці G. Тоді трикутники DEC та GEB рівні (за стороною та прилеглими до неї кутами). Тоді $BG = CB = BA$. Тому точки A, G і C лежать на колі з центром у точці B, причому AG – діаметр.

Оскільки $PAFG = 90^{o}$, точка F лежить на тому ж колі.

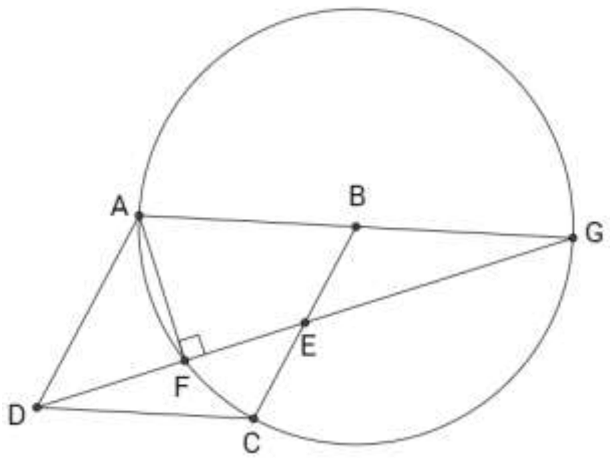


Рис. 2

Маємо: $\angle GFC = \frac{1}{2}\angle GCB = \frac{1}{2}(180^{\circ} - 40^{\circ}) = 70^{\circ}.$

Тоді $\angle DFC = 180^{\circ} - \angle GFC = 110^{\circ}$.

Відповідь: 110°.

Як бачимо використання властивостей кола для знаходження кутів фігур значно пришвидшує процес розв'язання. Але й інші елементи можна знаходити, за допомогою кола. В цьому ми можемо переконатись з наступної задачі.

Задача 3: У трикутнику ABC точка M - середина сторони BC. На стороні AB відмітили точку N так, що $NB = 2AN$. В-иявилось, що $\angle CAB = \angle CMN$. Чому дорівнює відношення $\frac{AC}{BC}$ (рис. 3)?

Розв'язання.

Відкладемо на промені CA точку D таким чином, щоб $CA = AD.$

Тоді для $\triangle BCD$ відрізки DM та BA є медіанами, тому в точці перетину T вони діляться у відношенні 2:1, якщо рахувати від вершини.

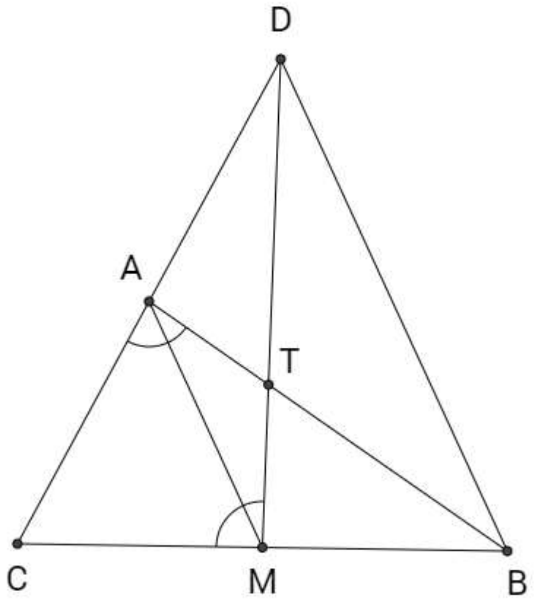


Рис. 3

Звідси випливає, що точки T та N збігаються. Тоді тому чотирикутник $BMAD$ - вписаний.

Оскільки $AM \parallel BD$, як середня лінія трикутника, то Р$CDB =$Р$CAM =$РCBD, звідки випливає, що $CD = CB$, тому $\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}DC}{DC} = \frac{1}{2}$.

Неважко переконатись, що умова задачі справджується для будь- якого трикутника з таким відношенням сторін.

Відповідь: $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$

Особливим типом задач в геометрії є задачі на доведення.

Задача 4: Відрізок AB – діаметр кола. Точки M та C належать цьому колу і розташовані у різних півплощинах відносно прямої AB. З точки M проведені перпендикуляри MN і MK на прямі AB і AC відповідно. Доведіть, що пряма KN перетинає відрізок CM у його середині (рис. 4).

Розв’язання.

Проведемо відрізки BC, AM. Тоді навколо чотирикутника $AKNM$ можна описати коло (рис. 4). Тому Р$NAM =$Р$NKM =$РBCM.

Оскільки $BC \perp AC$, то $MK \parallel BC$. Тому $\angle CMK = \angle BCM$. Звідси $\angle CMK = \angle NKM$. Отже $\triangle KMQ$ – рівнобедрений $KQ = QM$, тобто у прямокутному $\triangle CKM: KQ = QC = QM$, що й треба було довести.

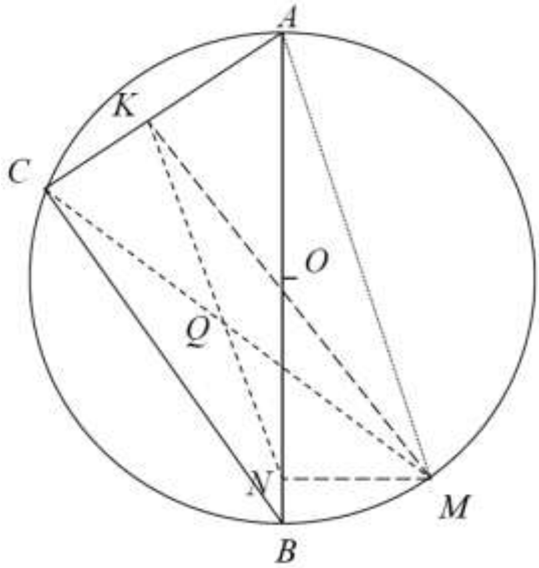


Рис. 4

Висновки. Багато різноманітних задач, зокрема олімпіадного характеру, розв’язуються з використанням властивостей кола. Тому коло займає доволі важливе місце в підготовці до математичних олімпіад школярів.

Література

1. Бурда М. І. Геометрія 8-9.Навчальний посібник для 8-9 класів шкіл з поглибленим вивченням математики/ М. І. Бурда, Л. М. Савченко. – К.: Освіта, 1996. – 240с.

2. Матеріали ІІ,ІІІ етапів Всеукраїнської олімпіади з математики 2011-2012р., м. Суми, Сумська область.

Анотація. *В даній статті розглянуто приклади різних олімпіадних задач з математики, для розв’язання яких потрібно володіти знаннями властивостей кола та його елементів.*

Ключові слова: *коло, доведення, олімпіадна задача.*

Микитчак Катерина Олександрівна
студентка 3 курсу, спеціальність «Математика*»

ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ В 5-6 КЛАСАХ

Вступ. Розв'язування задач за принципом Діріхле передбачає застосування матеріалу з розділу, який не включений до шкільної програми, однак без якого не обходиться жодна олімпіада школярів з математики. Ми переконані, що вивчати принцип Діріхле у процесі гурткової роботи вчителі зобов'язані, якщо прагнуть разом із своїми учнями досягти певних результатів, як учасники математичних олімпіад.

Метою даної статті є розгляд принципу Діріхле в 5-6 класах та обґрунтування можливості використання цієї теми для розв'язування різних задач підвищеної складності.

Виклад основного матеріалу. Вивчати матеріал з теми важливо не протягом кількох занять, а починаючи з 5-6 класів і до 11 класу по мірі вивчення програмового матеріалу, враховуючи психологічний та розумовий розвиток самої дитини.

В чому ж полягає принцип Діріхле? Для учнів 5-6 класів зручніше всього подавати його в жартівливій формі: «Якщо в N клітках сидить не менше N+1 кролика, то існує хоча б одна клітка, де сидить не менше, ніж 2 кролика» [6, с. 74].

Слід звернути увагу учнів на слова "не менше", "хоча б", оскільки саме ці фрази дозволяють, по-перше, розпізнати задачі на принцип Діріхле, а по- друге, тільки використовуючи такі формулювання можна розв'язувати ці задачі. Як же обґрунтувати цей принцип? Обґрунтування базується на міркуванні від супротивного.

Припустимо, що у кожній клітці сидить не більше одного (тобто один або жодного) кролика. Тоді в усіх клітках сидить не більше N кроликів. А це суперечить умові, оскільки кроликів є N+1. Отже, наше припущення було хибним, тобто знайдеться хоча б одна клітка, в якій сидить не менше 2 кроликів.

Але клітки і кролики є не в кожній задачі. Тому самим першим кроком при розв'язуванні задач вказаного типу є визначення того, кого прийняти за «клітки», а кого за «кроликів».

В україномовній математичній літературі це перший принцип із допомогою якого Діріхле отримав важливі результати про наближення ірраціональних чисел раціональними (в англомовній літературі цей принцип більше відомий як pigeon prіncipіe — "принцип голубів").

Зауважимо, що задачі цього розділу не претендують на оригінальність, більшість із них уже стала математичним "фольклором", і вже зараз складно встановити їх авторів.

Практичні завдання переконливо допомагають оволодіти принципом Діріхле, розвивають гнучкість математичного мислення, логічні міркування, збуджують інтерес до процесу розв’язування задач за допомогою принципу Діріхле.

Розглянемо різні варіанти застосування принципу Діріхле.

Задача 1. Довести, що з будь-яких десяти двозначних чисел можна вибрати дві різні групи чисел так, щоб суми чисел в обох групах були однаковими [3, с. 9].

Розв’язання. Підрахуємо спочатку число різних груп, які можна утворити з десяти чисел. Оскільки кожне число може або належати, або не належати до однієї групи, то, згідно з основним принципом комбінаторики, число всіх можливих груп, які утворюються з 10 чисел, дорівнює . При цьому враховуємо й групу, яка не містить жодного числа. Сума чисел у кожній з цих груп менша, ніж $99 \cdot 10 = 990$, тобто різних сум не більше як 990. Відповідно до принципу Діріхле, є дві групи, суми чисел в яких однакові.

Задача 2. У школі навчається 962 учні. Довести, що принаймні у двох учнів збігаються ініціали [6, с. 73].

Розв’язання. Зауважимо, що з двох букв можна утворити $2 \cdot 2 = 4$ різних пар ініціалів. (Якщо це, наприклад, букви А і Б, то матимемо: А.А., А.Б., Б.А., Б.Б.). В українському алфавіті 31 буква, що може входити до складу ініціалів. Тому всього можна утворити $31 \cdot 31 = 961$ різних пар ініціалів. Візьмемо 961 ящик і кожному з них нанесемо пару ініціалів. Напишемо для кожного учня його ініціали на картці і кожну картку покладемо у той ящик, на якому написано таку саму пару ініціалів. Оскільки розкладаємо 962 картки в 961 ящик, то, відповідно до принципу Діріхле, принаймні в одному ящику буде не менше від однієї картки

Задача 3. Довести, що серед довільних семи чисел можна знайти три, сума яких ділиться на 3 [2, с. 9].

Доведення. За «клітки» приймаємо різні остачі від ділення на 3. Їх усього три: 0, 1, 2. «Кроликами» вважатимемо остачі від ділення на 3 даних семи чисел. Їх усього 7. Як і в попередній задачі, розмістивши «кроликів» у «клітки» і використовуючи узагальнений принцип Діріхле, робимо висновок, що знайдуться три «кролики», що знаходяться в одній із «кліток». А це й означає, що знайдуться три числа, які дають однакові остачі від ділення на 3. Їх сума ділиться на 3.

Задача 4. Кожну грань куба зафарбовано у білий або чорний колір. Довести, що знайдуться однаково зафарбовані грані, що мають спільне ребро [5, с. 9].

Розв'язання. Розглянемо довільну вершину куба. У ній перетинаються три грані. Приймемо за «клітки» кольори, а за «зайців» — грані, що перетинаються в одній вершині. Їх усього три. Тому за принципом Діріхле знайдеться клітка, у якій міститься два «зайці». А це означає, що знайдуться дві грані, які мають спільне ребро (оскільки вони мають спільну точку) і зафарбовані однаково.

Задача 5. Дано 12 цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати 2, різниця яких кратна 11 [1, с. 31].

Доведення. Звернемо увагу учнів на те, що як тільки мова заходить про кратність, слід проаналізувати питання про остачі від ділення в даному випадку на 11. Таких остач може бути 11: 0, 1, 2, 3, ..., 10.

В якому ж випадку різниця кратна 11? Коли остача r=0. А це можливо лише тоді, коли зменшуване і від'ємник при діленні на 11 мають однакову остачу. Тобто задача звелася до того, щоб довести, що у двох із 12 цілих чисел є4 однакова остача при діленні на 11. За принципом Діріхле (для учнів це вже стає очевидним) дійсно, з 12 цілих чисел знайдеться хоча б 2 таких, що остачі r за модулем 11 будуть рівні. Тоді різниця цих чисел при діленні на 11 дасть остачу 0 за модулем 11, що і означає кратність 11.

Задача 6. Дано 12 цілих чисел. Довести, що з них можна вибрати два числа, різниця яких ділиться на 11 [4, с. 40].

Розв'язання. Приймемо за «клітки» різні остачі від ділення чисел на 11. Їх є усього 11. За «кроликів» приймемо остачі від ділення даних чисел на 11. Їх є усього 12. Розміщуючи «кроликів» у «клітки» аналогічно до попередніх задач, за принципом Діріхле отримаємо, що знайдуться два «кролики» в одній із «кліток». А це означає, що знайдеться два числа, які дають однакові остачі від ділення на 11. Зрозуміло, що різниця цих чисел буде ділитися на 11.

Принцип Діріхле використовують і при розв'язуванні задач на зафарбовування.

Задача 7. Кожну грань куба зафарбовано у білий або чорний колір. Довести, що знайдуться однаково зафарбовані грані, що мають спільне ребро [2, с. 13] .

Розв'язання. Розглянемо довільну вершину куба. У ній перетинаються три грані. Приймемо за «клітки» кольори, а за «кроликів» — грані, що перетинаються в цій вершині. Їх є усього три. Тому за принципом Діріхле знайдеться «клітка», у якій міститься два «кролики». А це означає, що знайдуться дві грані, які мають спільне ребро (оскільки вони мають спільну точку) і зафарбовані однаково.

Задача 8. На шаховій дошці розміром 8×8 клітинок розставлено 31 фішку. Довести, що знайдеться вільна від фішок фігура, яка складається з трьох клітинок, зображена на малюнку [6, с. 75] .

Розв'язання. Для того щоб не було вільної від фішок фігури, складеної з трьох клітинок, у будь-якому квадраті розміром 2×2 має розміститися не менше двох фішок. Оскільки можна покрити всю дошку 16-ма квадратами розміром 2×2, що не перекриваються, то всього фігур має бути не менше від 32, а у нас є 31. Отже, за сформульованим принципом знайдеться квадрат розміром 2×2, в якому є лише одна фігура. У ньому і міститься вільна від фішок фігура, що складається з трьох клітинок.

Задача 9. Гра починається з числа 7. За один хід дозволяється додати до наявного числа довільне, менше від нього натуральне число. Грають двоє, роблячи ходи позачергово. Виграє той, хто дістане число 1997. У котрого з гравців є виграшна стратегія [4, с. 36] .

Розв'язання. Проаналізуємо задачу з кінця. 1997 – виграшна позиція. Із позицій 999-1996 її можна досягнути за один хід. Тому всі ці позиції програшні. Із позиції 998 всі ходи ведуть у програшну позицію, тому 998 – виграшна позиція. Аналогічно встановлюємо: позиції 500-997 – програшні, 499 – виграшна, 250-498 – програшні, 249 – виграшна, 125-248 – програшні, 124 – виграшна, 63-123 – програшні, 62 – виграшна, 32-61 – програшні, 31 – виграшна, 16-30 – програшні, 15 – виграшна, 8-14 – програшні , і, нарешті, 7 – виграшна позиція. Отже, перемогу здобуде другий гравець, якщо своїми ходами послідовно займатиме такі виграшні позиції: 15, 31, 62, 124, 249, 499, 998, 1997.

Висновки. Незважаючи на очевидність принципу Діріхле, його застосування є досить ефективним методом розв'язування задач.

За допомогою принципу Діріхле зазвичай доводять наявність об'єкта, не вказуючи алгоритм його знаходження або побудови. Це дає можливість провести, так зване, неконструктивне доведення: ми не можемо сказати, у якій саме «клітці» сидять два «кролики», але ми знаємо, що така клітка існує.

Природа «кроликів» і «кліток» у різноманітних задачах може сильно відрізнятися. В основному принцип Діріхле використовують в алгебраїчних задачах, але в деяких випадках дуже зручно його використовувати і в геометричних задачах, такі приклади необхідно показувати учням. Освоєння принципу Діріхле корисне для майбутніх вчителів математики.

Вказана добірка задач може бути використана на заняттях математичного гуртка чи факультативу при підготовці до олімпіади школярів з математики.

Література

1. Генкін С. А. Ленінградські математичні гуртки / С А. Генкін, І. В. Ітенберг, Д. В. Фомін – К.:ТВіМС, 1997 – 272 с.
2. Конет І. М. Обласні метематичні олімпіади / І. М. Конет, В. Г. Паньков, В. М. Радченко, Ю. В. Теплінський – Кам'янець-Подільський: Абетка, 1998. – 340 с.
3. Конет І. М. Хмельницькі обласні олімпіади юних математиків / І. М. Конет, В. Г. Паньков, В. М. Радченко, Ю. В. Теплінський – Кам'янець-Подільський: Абетка, 1998. – 207 с.
4. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч / О. А. Сарана – К.: Видавництво А. С. К., 2004. – 344 с.
5. Ядренко М. Й. Принцип Діріхле: Бібліотечка фізико-математичної школи / М. Й. Ядренко – К.:Вища шк., 1985. – 80 с.
6. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. А. Ясінський – Вінниця, 1998. – 208 с.

Анотація. *У статті розглянуто поняття принципу Діріхле в 5-6 класах та показано можливість використання цієї теми для вирішення різних завдань підвищеної складності.*

Ключові слова: *принцип Діріхле, психологічний та розумовий розвиток, ірраціональні числа, клітки, кролики.*

Мошкатюк Леся Миколаївна
студентка 3 курсу, спеціальність «Математика*»

ГЕОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ

Вступ. У сучасній математиці нерівності відіграють важливу роль. Числові нерівності вивчаються учнями в основній школі, де вони знайомляться з основними методами розв'язання нерівностей та їх доведення. В алгебрі розглядають логарифмічні, лінійні, степеневі та інші нерівності. Важливою частиною планіметрії є геометричні нерівності. Задачі на доведення таких нерівностей трапляються не дуже часто, тому вони в основному є складними. Геометричні нерівності доводяться за допомогою відомих властивостей алгебричних нерівностей і є основою олімпіадних завдань. Щоб учні не боялися цієї теми і сміливо розв'язували задачі даного типу, важливо правильно розставити акценти.

Мета даної статті: навести основні геометричні нерівності та розглянути методи їх доведення у планіметричних задачах.

Виклад основного матеріалу. Геометричні фігури крім притаманних їм чисто геометричних властивостей, описуються також своїми кількісними характеристиками, зокрема довжинами відрізків, величинами кутів, площами, об'ємами, тощо. У практичній діяльності такі величини часто доводиться порівнювати, оцінювати ті межі, в яких вони змінюються. У результаті виникає ряд геометричних задач, пов'язаних із необхідністю оцінки геометричних величин та доведенням нерівностей, що виникають при цьому.

Нерівності між основними елементами трикутника і чотирикутника.

Основними елементами трикутника і чотирикутника є їхні сторони і кути. Спочатку розглянемо нерівність: якщо $\angle A > \angle B$, то $BC > CA$, і навпаки.

1) Якщо a, b і c – додатні числа, для яких виконуються нерівності $a < b + c$ $b < a + c$ і $c < a + b$, то існує трикутник, довжини сторін якого дорівнюють a, b, c.

2) Побудувати трикутник, довжини сторін якого $a < b < c$, можна лише тоді, коли виконується нерівність $c < a + b$.

3) Перетворення Раві. Побудувати трикутник, довжини сторін якого дорівнюють a, b і c можна лише тоді, коли існують додатні дійсні числа x, y, z, що $a = y + z$, $b = z + x$ і $c = x + y$. Геометричну суть чисел x, y і z, де $x = AZ$, $x = AY$, $z = YC$, $z = ZC$, $y = BX$ і $y = BZ$ видно на рис. 1. При цьому $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$, де $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – півпериметр трикутника ABC.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(x+y+z)xyz}.$$

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},\ R = \frac{abc}{4S_{ABC}} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}}.$$

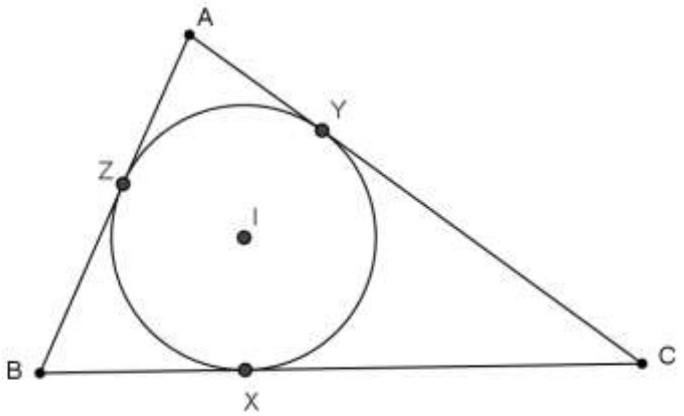


Рис. 1.

Нерівність Герона. Для довільного трикутника ABC виконується нерівність: $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \le abc$, де $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Доведення. Застосуємо перетворення Раві. Оскільки $a = y + z$, $b = z + x$ і $c = x + y$, то ліва частина матиме такий вигляд: $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 8(p - a)(p - b)(p - c) = 8xyz$, а права частина буде такою: $abc = (x + y)(y + z)(z + x)$. Отже нерівність, яку потрібно довести, еквівалентна такій нерівності: $8xyz \le (x + y)(y + z)(z + x)$, де $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Справедливість цієї нерівності випливає з нерівності між середніми арифметичними і середніми геометричними: $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, $\sqrt{yz} \le \frac{y+z}{2}$, $\sqrt{xz} \le \frac{z+x}{2}$ [3, с. 45].

Перемноживши їх, одержимо нерівність, яку потрібно було довести.

Нерівність Ейлера. Для довільного трикутника ABC виконується нерівність: $R \geq 2r$, де R – радіус описаного кола, а r – радіус вписаного кола в трикутник ABC. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли трикутник ABC – рівносторонній. Наведемо два способи доведення цієї нерівності.

Перший спосіб. Використовуючи формулу Ейлера: $OI^2 = R^2 - 2Rr$, де точки O і I – центри кіл описаного і вписаного в трикутник ABC. Так як $OI^2 \geq 0$, то $R^2 - 2Rr \geq 0$, звідки і випливає, що $R \geq 2r$.

Другий спосіб. Нехай γ_1 – коло вписане в трикутник ABC, а γ_2 – коло описане навколо трикутника ABC. Побудуємо «подвійний трикутник» $A_1B_1C_1$. Його сторони паралельні сторонам трикутника ABC і проходять через вершини цього трикутника. Проведемо дотичні до кола γ_2, паралельно сторонам трикутника $A_1B_1C_1$. Ці дотичні визначають новий трикутник $A_2B_2C_2$. Трикутник $A_1B_1C_1$ і ABC подібні з коефіцієнтом подібності $k = 2$. Оскільки трикутник $A_1B_1C_1$ лежить в середині трикутника $A_2B_2C_2$, то радіус R' кола , вписаного в трикутник $A_1B_1C_1$, не більший радіуса R кола γ_2, вписаного в трикутник $A_2B_2C_2$, з цього випливає, що $R' \leq R$. Оскільки $k = 2$, то $R' = 2r$. А це в свою чергу означає, що $R \geq 2r$. Що і треба було довести [1, с. 505].

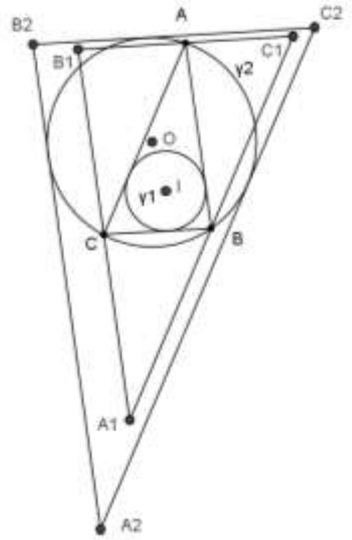


Рис. 2

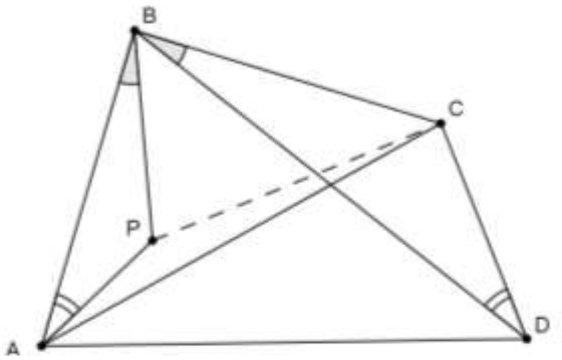


Рис. 3

Нерівність Птоломея. Для довільного опуклого чотирикутника $ABCD$ виконується нерівність. $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Рівність у цій нерівності досягається тоді і тільки тоді, коли чотирикутник $ABCD$ можна вписати в коло.

Доведення. Проведемо через вершини A і B чотирикутника $ABCD$ такі промені AP та BP (рис. 3), щоб $\angle BAP = \angle BDC$, а $\angle ABP = \angle DBC$. Тоді з подібності трикутників ABP і DBC (за двома кутами) маємо: $\frac{AB}{BD} = \frac{AP}{CD}$ і $\frac{AB}{BD} = \frac{BP}{BC}$. Звідси випливає, що $AP = \frac{AB \cdot CD}{BD}$. Далі, трикутники PBC та ABD – подібні (за двома сторонами $\frac{AB}{BD} = \frac{BP}{BC}$ і кутом між ними $\angle ABD = \angle PBC$). З подібності цих трикутників знаходимо $\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{AD}$, тобто $PC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$. За нерівністю трикутника маємо: $AP + PC \geq AC$. Тому $\frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{AD \cdot BC}{BD} \geq AC$. Звідси випливає, що $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$, що і треба було довести.

Знак рівності досягається лише тоді, коли точка P лежить на відрізку AC . Але тоді $\angle BAC = \angle BDC$, тобто точки A, B, C, D лежать на одному колі.

Наступна теорема корисна тим, що дає можливість продемонструвати алгебричний метод доведення геометричних нерівностей в дії [3, с. 47].

Теорема 1. Трикутник ABC вписаний у коло радіуса R і три кола Ω_i (радіусів ρ_i, $i = 1,2,3$) вписані в три утворені сегменти (рис. 4). Радіуси ρ_i і радіус r вписаного у трикутник ABC кола задовольняють нерівність

$$\frac{r}{2} \geq \frac{3}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}}. \qquad (*)$$

Рівність має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.

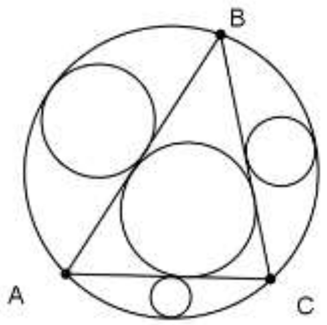
Доведення. Перш за все виразимо ρ_i і r в термінах R і кутів ΔABC (рис. 5)

$$R = |OM| = R \cdot \cos\alpha + 2\rho_1 \Rightarrow \rho_1 = R \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Аналогічно
$$\rho_2 = R \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2},\ \rho_3 = R \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

З іншого боку
$$r = 4R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (3)$$

Підставляючи (1) – (3) в геометричну нерівність (*), одержимо таку еквівалентну «кутову» її форму: $\dfrac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} + \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq \dfrac{3}{2}$ (4).



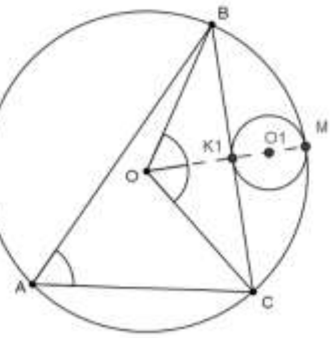


Рис. 4 Рис. 5

Тепер нам необхідні дві допоміжні нерівності – тригонометрична і алгебрична:
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}, \qquad (5)$$

$$\frac{a_2 a_3}{a_1} + \frac{a_3 a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_2}{a_3} \geq \sqrt{3(a_1{}^2 + a_2^2 + a_3^2)}, \qquad (6)$$

де α, β, γ є кути довільного трикутника, а a_i ($i = 1,2,3$) – довільні додатні числа. Наступний крок – перехід від «абстрактного» a_i в (6) до конкретної підстановки $a_1 = \sin\frac{\alpha}{2}$, $a_2 = \sin\frac{\beta}{2}$ і $a_3 = \sin\frac{\gamma}{2}$ в (6), після якої використання (5) завершить вивід шуканої нерівності (4) і, як наслідок, доведення теореми (*).

Щодо нерівності (5), яка виглядає «класичною», то зауважимо, що вона була вперше опублікована і доведена в 1957 році, доведення, якої «містить дві лінії»:
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{2}(\cos\beta + \cos\gamma) =$$

$$=\sin^2\frac{\alpha}{2}+1-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\geq\sin^2\frac{\alpha}{2}+1-\sin\frac{\alpha}{2}=\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}. \qquad (7)$$

Щодо нерівності (6), то вона також допускає доведення у вигляді «двох ліній»:

$$\frac{a_2a_3}{a_1}+\frac{a_1a_3}{a_2}+\frac{a_1a_2}{a_3}=\sqrt{\frac{\left(a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_1^2a_3^2\right)^2}{a_1^2a_2^2a_3^2}}\geq$$

$$\geq\sqrt{\frac{3\left[\left(a_1^2a_2^2\right)\left(a_2^2a_3^2\right)+\left(a_2^2a_3^2\right)+\left(a_3^2a_1^2\right)\left(a_1^2a_2^2\right)\right]}{a_1^2a_2^2a_3^2}}=\sqrt{3(a_1^2+a_2^2+a_3^2)}\,. \qquad (8)$$

За допомогою нерівності Ньютона: $\left(x_1+x_2+x_3\right)^2\geq3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\right)$, яке зводиться до такої форми: $\left(x_1-x_2\right)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\geq0$. Що й потрібно було довести. [4]

Висновки. Геометричні нерівності показують, що деякі об’єкти геометричних фігур є різними. Розв’язання задач на геометричні нерівності не потребує складних математичних знань або складної техніки, але вимагає творчого і логічного мислення.

Література

1. Кушнір И. А. Геометрия. Поиск и вдохновение / И. А. Кушнір – М.: МЦНМО, 2013. – 592 с.
2. Мавло Д. Середні в геометрії / Д. Мавло. // Математика в школі., 2004. – №9. – С. 55-60.
3. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. / Я. П. Понарин. – М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.
4. Ясінський В. А. Геометричні нерівності на математичних олімпіадах / В. А. Ясінський. // Математика в школі., 2007. – №1. – С. 44-53.

***Анотація**. У даній статті наведені основні геометричні нерівності в трикутниках, розглянуто методи доведення планіметричних нерівностей.*

***Ключові слова**: геометричні нерівності, трикутник, коло, трикутник вписаний в коло.*

Пересунько Владислава Євгенівна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика*»

ОРГАНІЗАЦІЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ УЧНІВ З РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ АЛГЕБРИЧНИМ МЕТОДОМ

Вступ. У багатьох задачах на побудову буває легко й зручно виразити співвідношення між шуканими елементами геометричної фігури алгебрично, у вигляді формули або рівняння. Користуючись цими формулами або рівняннями, можна величини окремих алгебричних виразів подати у вигляді довжин відрізків або міри кутів.

Ці обставини дають змогу доповнити методи конструктивної геометрії ще одним методом розв'язування задач на побудову, який називають алгебричним методом. Суть його така: припустивши, що задачу розв'язано, виділяємо на малюнку-ескізі шуканий елемент, до визначення якого зводиться розв'язування задачі. На підставі умови задачі і геометричних теорем складаємо рівняння, розв'язуючи яке, знаходимо для шуканого елемента алгебричний вираз. Побудувавши його за допомогою креслярських інструментів, знаходимо положення шуканого елемента, а отже, і спосіб розв'язування задачі.

Мета даної статті: поглибити та розширити знання про алгебричний метод та розглянути приклади розв'язування геометричних задач на побудову алгебричним методом у процесі підготовки до математичних олімпіад під час позакласної роботи.

Виклад основного матеріалу. На позакласній роботі заняття можна будувати як на матеріалі, лише посередньо пов'язаному зі шкільною програмою, так і на матеріалі, який безпосередньо межує з темами обов'язкової програми, але не дублює цю роботу, а поглиблює і дещо розширює її.

Під час підготовки учнів до математичних олімпіад варто на позакласній роботі розглянути геометричні задачі на побудову, які розв'язуються алгебричним методом, тому що, користуючись саме цим методом, легше визначити умову можливості існування розв’язків даної задачі, виявити їх кількість і деякі характерні особливості кожного розв’язку. Крім того, можна зводити різні задачі геометричного характеру до розв’язування і дослідження алгебричних рівнянь, а це, в свою чергу, дає змогу з’ясувати властивості креслярських інструментів і можливості виконання ними тих чи інших побудов.

Розв’язування задачі на побудову алгебричним методом складається, в основному, з таких чотирьох етапів:

а) складання рівняння;

б) розв’язування рівняння;

в) дослідження розв’язків за одержаними формулами;

г) побудова шуканих величин, виражених цими формулами і побудова шуканої фігури.

Формули для визначення шуканого елемента дають можливість узагальнити і повніше дослідити знайдену відповідь.

Знайдена після розв’язування рівняння формула часто вказує на спосіб її побудови.

Таким чином, алгебричний метод є найкращим в розв’язуванні питання про можливість виконати ту чи іншу побудову з допомогою циркуля і лінійки, і саме в цьому його найважливіше теоретичне значення.

Проте алгебричний метод не розкриває геометричної суті розв’язування задачі. До того ж ми, за необхідності, вводимо до рисунка допоміжні відрізки, кути, дуги, кола, чим затушовуємо геометричний зміст знайденого розв’язку.

Завершальним етапом розв’язування будь-якої геометричної задачі на побудову алгебричним методом є побудова виведеної алгебричної формули. Тому на позакласній роботі приділяємо увагу виробленню в учнів умінь будувати відрізки, задані найпростішими алгебричними формулами. Найпростіші формули, до яких зводиться побудова відрізків під час розв’язування задач на побудову, такі:

1) $x = a + b$;

2) $x = a - b$, $(a > b)$;

3) $x = \dfrac{p}{q}a$, $(p \in N, q \in N)$;

4) $x = \dfrac{ab}{c}$ (побудова четвертого пропорційного відрізка до трьох даних);

5) $x = \sqrt{ab}$ (побудова середнього пропорційного відрізка між двома даними відрізками);

6) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (x – гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами a і b);

7) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, $(a > b)$(x – катет прямокутного трикутника з гіпотенузою a і b).

Розглянемо декілька геометричних задач на побудову алгебричним методом, які доцільно, на нашу думку, розв'язати на позакласній роботі з геометрії з метою підготовки до математичних олімпіад.

Задача 1. За даними сторонами a, b, c і d побудувати чотирикутник, навколо якого можна описати коло [2].

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – шуканий чотирикутник, навколо якого можна описати коло (рис. 1). Позначимо $AB = a$, $BC = b$, $DC = c$, $AD = d$, $BD = x$. З трикутника BAD за теоремою косинусів випливає

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A. \tag{1}$$

Аналогічно з □DCB маємо $x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$. (2)

Оскільки $\cos\tilde{N} = -\cos A$, то $x^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$. (3)

Виключивши $\cos A$ з рівнянь (1) і (3) дістанемо

$$x^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc} = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Звідси

$$x = \frac{\sqrt{(ac + bd)(ab + cd)}}{\sqrt{ad + bc}} = \frac{\sqrt{ac + bd} \cdot \sqrt{ab + cd}}{\sqrt{ad + bc}}. \tag{4}$$

Розкладемо рівняння (4) на найпростіші формули, до яких зводиться побудова відрізків:

1) $m = \sqrt{ac}$; 2) $n = \sqrt{bd}$; 3) $p = \sqrt{ab}$; 4) $q = \sqrt{cd}$;

5) $r=\sqrt{ad}$; 6) $l=\sqrt{bc}$; 7) $y=\sqrt{ac+bd}=\sqrt{m^2+n^2}$;

8) $z=\sqrt{ab+cd}=\sqrt{p^2+q^2}$; 9) $w=\sqrt{ad+bc}=\sqrt{r^2+l^2}$; 10) $x=\dfrac{yz}{w}$.

Побудувавши діагональ x, будуємо спочатку трикутник BAD за трьома сторонами (a , d та x), а далі трикутник DCB. Чотирикутник $ABCD$ – шуканий.

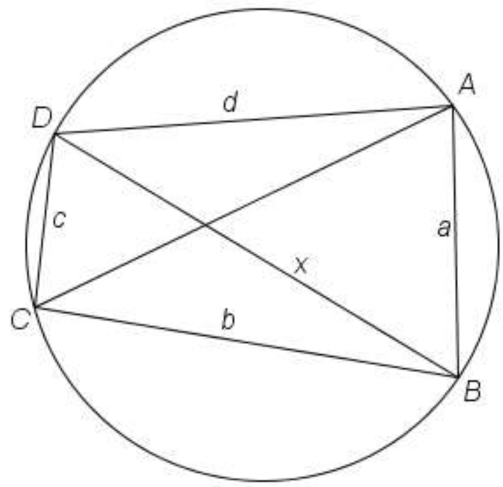


Рис. 1

Зауважимо, що існування чотирикутника, можливе тільки тоді, коли сума його протилежних кутів дорівнює $180°$.

Задача 2. Побудувати трикутник ABC за a , A, l_a (задача Паппа) [1].

Розв’язання. Опишемо на стороні BC дугу сегмента, що вміщує кут A (ГМТ – множина точок, з яких даний відрізок видно під даним кутом), і доповнимо її до кола (рис. 2). Продовжимо бісектрису AL_1 до перетину з цим колом у точці W . Відрізок WM_1 – заданий (M_1 – середина відрізка BC). Позначимо $WM_1=t$. Проведемо діаметр WD. Прямокутні трикутники WM_1L_1 і WAD – подібні. Нехай $WL_1=x$, $WD=d$, тоді $\dfrac{WL_1}{WD}=\dfrac{WM_1}{WA}$, або $\dfrac{x}{d}=\dfrac{t}{l_a+x}$.

Знайдемо x :

$$xl_a+x^2=dt; \qquad x^2+xl_a=dt; \qquad x^2+xl_a-dt=0; \qquad x=\frac{l_a}{2}\pm\sqrt{\frac{l_a^2}{4}+dt}.$$

Розкладемо останню формулу на найпростіші формули, до яких зводиться побудова відрізків:

1) $m=\frac{l_a}{2}$; 2) $p=\sqrt{dt}$; 3) $q=\sqrt{m^2+p^2}$; 4) $x=m\pm\sqrt{m^2+p^2}$.

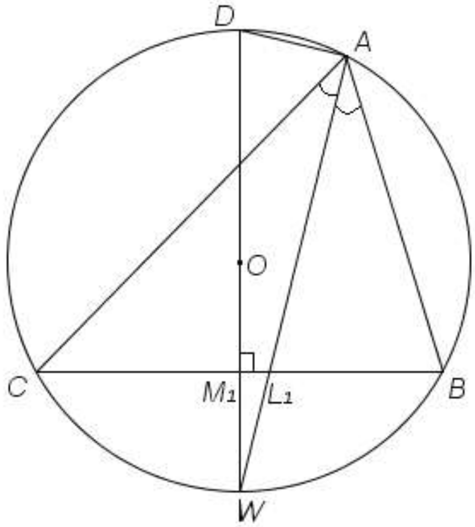


Рис. 2

Побудувавши відрізок x, з точки W проведемо дугу радіуса l_a+x, дістанемо точку A. Трикутник ABC – шуканий.

Задача 3. Побудувати трапецію за її бічними сторонами і діагоналями [2].

Розв'язання. У трапеції $ABCD$ введемо позначення: $AD=a$, $BC=b$, $AC=c$, $BD=d$, $DO=x$, $CO=y$ (рис. 3), $\angle COB=\varphi$. З трикутників AOD і COB за теоремою косинусів маємо

$$a^2=x^2+(c-y)^2-2x(c-y)\cos\varphi;$$

$$b^2=y^2+(d-x)^2-2y(d-x)\cos\varphi,$$

звідки $\frac{x^2-a^2+(c-y)^2}{2x(c-y)}=\frac{y^2-b^2+(d-x)^2}{2y(d-x)}$. Очевидно, що $y=\frac{c}{d}x$. Тому

$$x=\frac{d}{2}-\frac{a^2-b^2}{2(c^2-d^2)} \qquad (1) \qquad \text{і} \qquad y=\frac{c}{2}-\frac{a^2-b^2}{2(c^2-d^2)}c \qquad (2).$$

Розкладемо рівняння (1) і (2) на найпростіші формули, до яких зводиться побудова відрізків:

1) $m=\frac{d}{2}$; 2) $l=a-b$; 3) $n=a+b$; 4) $r=c-d$; 5) $q=c+d$; 6) $z=2rq$;

7) $w=\frac{c}{2}$; 8) $p=l\cdot n$; 9) $s=\frac{p}{z}$; 10) $t=\frac{p}{z}\cdot c$; 11) $x=m-s$; 12) $y=w-t$.

Виконавши 12 елементарних побудов та знайшовши x та y, будуємо $\triangle ADO$ або $\triangle BCO$ за трьома сторонами, а далі виконуємо деякі добудови і отримуємо трапецію. Трапеція $ADCB$ – шукана.

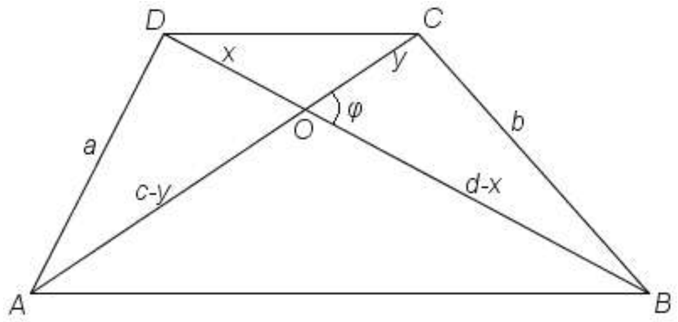


Рис. 3

Висновки. Побудова учнями геометричних задач на побудову алгебричним методом, дозволяє активізувати розумову діяльність учнів у процесі підготовки до математичних олімпіад. Раціональна методика навчання побудови геометричних задач відіграє істотну роль у формуванні високого рівня геометричних знань, умінь і навичок учнів.

Література

1. Кушнір І. 101 задача на побудову / Ісаак Кушнір. – К.: Факт, 2007. – 156 с.

2. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. Кн. для вчителя. / І. А. Кушнір. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.

3. Тесленко І. Ф. Алгебраїчний метод розв'язування конструктивних задач / І. Ф. Тесленко. – К.: Радянська школа, 1957. – 123 с.

Анотація. *У статті описано суть алгебричного методу та подано деякі геометричні задачі на побудову, які розв'язуються за допомогою алгебричного методу.*

Ключові слова: *геометричні задачі на побудову,алгебричний метод, найпростіші побудови.*

Печериця Іван Володимирович
студент 2 курсу, спеціальність«Математика*»

ДЕЯКІ ВАЖЛИВІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ, ЯКІ НЕ ВВІЙШЛИ ДО ШКІЛЬНОЇ ПРОГРАМИ

Вступ. Метою навчання геометрії в 7-9 класах є систематичне вивчення властивостей геометричних фігур на площині, формування просторової уяви, розвиток логічного мислення, засвоєння апарату, потрібного для вивчення суміжних дисциплін. Вивчення геометрії в шкільному курсі розпочинається в сьомому класі із розділу «Планіметрія». Навчальна програма пропонує велику кількість основних визначень і теорем, опанувавши які учень може розв'язувати різноманітні задачі: від найпростіших до складних. Проте для роботи із обдарованими учнями вчителю може виявитися замало матеріалу шкільної програми геометрії. Через брак навчального часу шкільна програма не включає в себе багато цікавих фактів, які могли б знадобитися учневі для розв'язування складних задач, та зацікавити його у вивчені геометрії.

Мета даної статті: розглянути та обґрунтувати необхідність подання деяких теорем та формул із планіметрії, які не включені до шкільної програми та можуть бути розглянути у позакласній роботі з учнями для більш глибокого знання геометричного матеріалу.

Виклад основного матеріалу. В даній статті буде розглянуто деякі цікаві факти з планіметрії, які часто залишаються поза увагою учителя.

1. Сума кутів довільного n-кутника (не обов'язково опуклого) рівна $180^\circ(n-2)$ [1].

На перший погляд може здатися, що це всім відома теорема, але це не так, адже тут мова йде не про опуклий многокутник, а про довільний. Із доведенням цієї теореми методом математичної індукції можна ознайомитись у праці [1].

Однією із захоплюючих і цікавих теорем геометрії по праву вважається теорема Морлея. Розглянемо її.

2.Точки перетин суміжних трисектрис (трисектрисою [2] називають один з двох променів, що проходять всередині кута і ділять його на три рівні частини) кутів довільного трикутника є вершинами рівностороннього трикутника(рис.1).

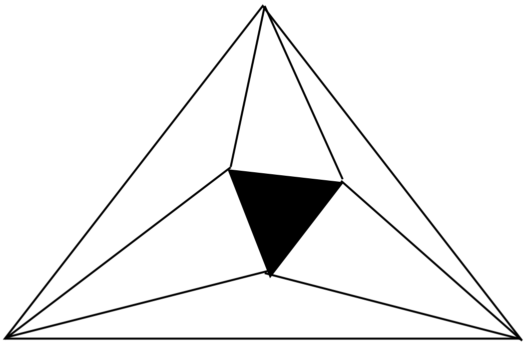


Рис. 1

Теорема була відкрита в 1904 році англійським математиком Франком Морлеєм. Тоді він розповів про цю теорему своїм друзям, а опублікував її двадцять років згодом в Японії.

У цієї теореми є один вагомий недолік. До недавнього часу були відомі лише доволі складні доведення цієї теореми. Вчитель як правило розповідає теорему, але не доводить її.

Доведення теореми Морлея можна розглянути у джерелах[1,3].

Далі розглянемо деякі факти з планіметрії, які можна було б розглянути у рамках позакласної роботи з учнями 9 класу.

Курс геометрії у 9 класі розпочинається з розділу розв’язування трикутників. Розглядаються теореми косинусів, синусів та задачі на застосування цих теорем. Доречно було б розглянути ще й теореми тангенсів та їх застосування. Розглянемо теорему.

3. Різниця двох сторін трикутника відноситься до їх суми, як тангенс піврізниці протилежних кутів до тангенсу півсуми цих кутів.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\,\frac{A-B}{2}}{tg\,\frac{A+B}{2}}$$

Доведення теореми можна розглянути у джерелі [4].

Тепер ми розглянемо формули для визначення довжин елементів трикутника. Їх є достатньо багато і варто ознайомити учнів хоча б із деякими з них.

4. Довжину бісектриси трикутника, яка проведена до сторони a, можна обчислити за формулами (тут використано стандартні позначення елементів трикутника):

$$l = \frac{\sqrt{bc(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)}}{b + c},$$

$$l = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b + c},$$

$$l = \frac{2R\sin\beta\sin\gamma}{\cos\frac{\beta - \gamma}{2}}.$$

Розглянути доведення вказаних формул можна у джерелі [5].

5. Доречно було б з учнями розглянути наступну формулу:

$$R = \frac{ab}{2h_c}.$$

Вона може використовуватись для доведення інших формул на встановлення метричних співвідношень між елементами трикутника. Розглянемо приклад її застосування для доведення такої формули: $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$.

Справді, з основної формули маємо:

$$abc = 2R \cdot h_c \cdot c = \frac{1}{2}h_c \cdot c \cdot 4R = p \cdot r \cdot 4R = 4p \cdot r \cdot R = 2(a+b+c)rR,$$

звідки $\frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$.

Доведення вказаної формули можна знайти у джерелі [6].

6. Розглянемо формулу, яка пов'язує довжини висот трикутника із довжиною радіуса вписаного в цей трикутник кола:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

Доведення [6].

$$h_a=\frac{2S}{a},\ h_b=\frac{2S}{b},\ h_c=\frac{2S}{c},$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{1}{r}.$$

7. Тепер ми розглянемо наслідок з відомої теореми Ейлера(яка стверджує, що відстань d між центрами вписаного і описаного кіл трикутника може бути визначено за формулою $d^2=R(R-2r)$):

$$R\geq 2r.$$

Рівність досягається тоді, коли центри описаного та вписаного кіл збігаються, тобто у рівносторонньому трикутнику [6]. Ця формула, окрім того, що є цікавою сама по собі, ще й має численні застосування до розв'язування інших задач, зокрема на доведення інших геометричних нерівностей.

8. Цікавими властивостями володіє рівнобедрений трикутник з кутом при вершині $20°$. Фактично усі задачі, в яких йде мова про цей трикутник є задачами підвищеного рівня складності і з'являлись на математичних олімпіадах різних рівнів[7]. Такі властивості цього трикутника можна розглянути поступово у 8, 9 та 10 класах (тут через a позначено основу трикутника BC, b – бічну сторону):

- довести, що $2a<b<3a$;
- на бічній стороні AC обрано такі точки E і K, а на бічні стороні AB таку точку F, що $BE=EF=FK=BC$. Довести, що $AK=BC$.
- на бічній стороні AC відкладено відрізок $AK=BC$. Знайти градусну міру $\angle BKC$.
- довести, що $a^3+b^3=3ab^2$.
- довести з допомогою властивостей цього трикутника таку рівність $ctg10°-4\cos 10°=\sqrt{3}$.

Висновки. Як ми побачили, у курсі шкільної геометрії не вказується багато цікавих фактів із планіметрії. Зацікавлені учні можуть бути ознайомлені із ними у межах позакласної роботи. Згадуючи основне завдання, яке стоїть на сучасному етапі перед школою, хочеться нагадати, що ми повинні виховати компетентну особистість, тому варто давати учням більш глибокі знання, ніж передбаченні шкільною програмою.

Література

1. Шклярский Д. О. Избраныезадачи и теоремы планиметрии / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. – М.: Наука, 1967.
2. Трисектриса [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://ru.wikipedia.org/wiki/Трисектриса.
3. Снова о теореме Морлея [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://geometry.ru/articles/morley.pdf.
4. Решение косоугольных треугольников [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://oldskola1.narod.ru/Trigonometrija/trig006.htm.
5. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – М. : МЦНМО, 2007. – 640 с.
6. Кушнір І. Геометричні формули, що не ввійшли до шкільних підручників / Ісаак Кушнір. – К.: Факт, 2002. – 114 с.
7. Филипповский Г. Школьна ягеометрия в миниатюрах / Г. Филипповский. –К. : Грот, 2002. – 240 с.

Анотація. *Розглянуто деякі теореми та формули, які не входять до шкільного курсу планіметрії, проте можуть бути предметом для обговорення з учнями в межах позакласної роботи з математики при підготовці до математичних олімпіад.*

Ключові слова. *Позакласна робота з геометрії, доведення, теорема, трикутник.*

Плюшко Владислав Володимирович
студент 4 курсу, спеціальність «Математика*»

ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ В ПЛАНІММЕТРІЇ

Вступ. Метод доведення математичних фактів за допомогою принципу Діріхле є досить потужним і стоїть поруч з такими методами як метод доведень від супротивного та метод математичної індукції.

В дані публікації ми робимо спробу поглибити знання учнів з планіметрії за рахунок розв'язування олімпіадних задач з використанням саме принципу Діріхле.

Мета даної статті: розробити добірку планіметричних задач для математичного гуртка, що розв'язуються за допомогою принципу Діріхле.

Виклад основного матеріалу. «Якщо в n клітках сидить більше n кроликів, то принаймні в одні клітці сидітиме більше одного кролика.»

Йóганн Пéтер Гýстав Лежен-Діріхлé

Задача 1. Доведіть, що правильний трикутник не можна покрити двома меншими правильними трикутникам [1].

Розв'язання.

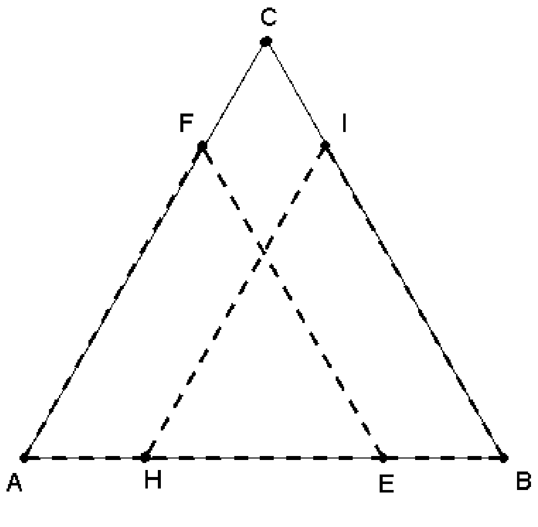


Рис. 1.

На рисунку зображено рівносторонній трикутник $\triangle ABC$, який майже покривають два менших рівносторонніх трикутники $\triangle AFE$ і $\triangle HIB$.

Кожен менший трикутник може накрити тільки одну вершину трикутника ABC, оскільки $\triangle AFE$ має менші сторони і при накладанні його на $\triangle ABC$ у ньому буде накритою лише одна із вершин: A або B або C. Отже, ми маємо два трикутника і три вершини. Припустимо протилежне умові задачі, тобто, що трикутник ABC можна накрити трикутниками AFE і HIB. Тоді відповідно до принципу Діріхле один трикутник має накривати дві вершини, що за попередніми міркуваннями неможливо. Отже наше припущення невірне. Тобто, двома меншими трикутниками не можна одночасно накрити три вершини великого трикутника, а тому і не можна покрити весь трикутник .

Задача 2. У квадраті $ABCD$ знаходяться 5 точок. Доведіть що відстань між будь-якими двома з них не перевищує $\frac{AC}{2}$ [2].

Розв’язання.

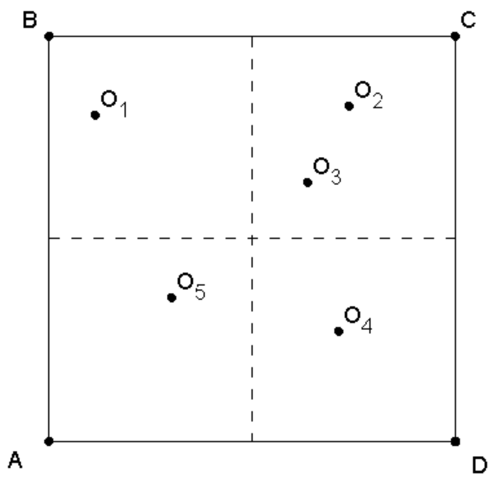


Рис. 2

На рисунку зображено квадрат $ABCD$ і п’ять точок в ньому: O_1, O_2, O_3, O_4, O_5. Проведемо через середини сторін квадрата прямі паралельні його сторонам. Отримані прямі розбивають квадрат на чотири менших квадрати. Згідно принципу Діріхле в одному з квадратів буде дві точки (кролики − точки, а клітки квадратики). Оскільки прямі проведені через середини сторін, то відстань між двома точками, які розміщаються в одному квадратику, не перевищує довжини його діагоналі $\frac{AC}{2}$.

Задача 3. У квадраті зі стороною 1 позначили 101 точку, причому будь-які три з них не лежать на одні прямі. Доведіть, що знайдеться трикутник з вершинами в цих точках площа якого не більша $\frac{1}{100}$ [1].

Розв’язання. Розіб’ємо квадрат на 50 рівних прямокутників, провівши 5 горизонтальних ліній і 10 вертикальних. За принципом Діріхле знайдеться прямокутник у який попаде щонайменше три точки, які утворять трикутник, тому що за умовою сказано, що будь-які три точки не лежать на одні прямій. Розглянемо варіант найбільшого трикутника, його площа буде дорівнювати половині площі прямокутника, тобто $\frac{1}{100}$, що задовольняє вимогу задачі. В інших випадках площа трикутника буде меншою $\frac{1}{100}$.

Задача 4. Не бачивши написаних на гранях куба чисел від 1 до 6, Ігор стверджує, що у цього куба є як мінімум дві пари сусідніх граней на яких написані сусідні числа. Чи правий Ігор?

Розв’язання. Серед чисел 1 − 6 є п’ять пар сусідніх (1;2), (2;3), (3;4), (4;5), (5;6). Числа кожної пари можуть бути написані по одному, або на двох сусідніх гранях куба, або на двох протилежних гранях. У куба є три пари протилежних граней, матимемо: клітки - це пари граней куба, їх 3, а кролики − пари чисел, їх 5. Відповідно до принципу Діріхле принаймні у двох клітках сидить по два кролика, тобто мінімум дві пари чисел займуть дві сусідні пари граней куба. Що і підтверджує правоту Ігоря.

Задача 5. Усередині рівностороннього трикутника зі стороною 1 лежать 5 точок. Довести, що знайдуться дві точки з п'яти, відстань між якими менше 0,5.

Розв’язання. Ділимо рівносторонній трикутник зі стороною 1 на чотири рівносторонніх трикутника зі стороною 0,5.

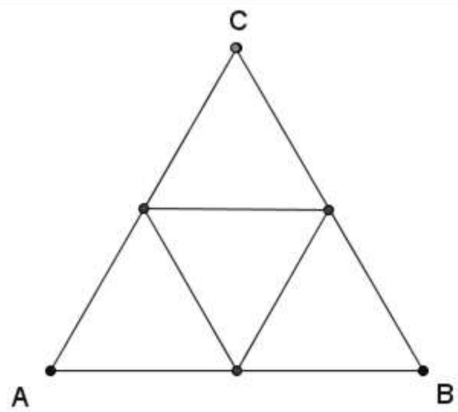


Рис. 3.

На рисунку зображено рівносторонній трикутник $\triangle ABC$, який розбито на менші рівносторонні трикутники. Кролики - це точки, а трикутники - це клітки за принципом Діріхле в одному з цих чотирьох трикутників лежать принаймні дві з даних точок. Відстань між цими двома точками менше 0,5.

Висновки. Проаналізувавши вище подану добірку планіметричних задач можна зробити висновок, що принцип Діріхле є досить потужним і заслуговує уваги. Добірка задач допоможе Вам сформувати уявлення алгоритму розв'язання олімпіадних задач за допомогою принципу Діріхле.

Література

1. Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачёв. – Москва: МЦНМО, 2004. – 559 с.

2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – Москва: МЦНМО, 2001. – 632 с.

Анотація. *Висвітлено добірку вправ які допоможуть вам у розумінні і розв'язанні планіметричних задач за допомогою принципу Діріхле, або ж вони стануть доцільними при роботі математичного гуртка.*

Ключові слова: *принцип Діріхле, планіметрія, кролики, клітки, Йоганн Петер Густав Лежен-Діріхле.*

Трофимчук Олександр Юрійович
студент 2 курсу, спеціальність «Фізика»*

ФОРМУВАННЯ ЗНАНЬ УЧНІВ ПРО ТЕОРЕМУ ПТОЛЕМЕЯ ТА УМІНЬ ЗАСТОСУВАТИ ЇЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Вступ. Теорема Птолемея є одним з класичних тверджень геометрії чотирикутника і відносно повно представлена в навчальній літературі з елементарної геометрії. Слід визнати, що теорема Птолемея її доведення нелегко сприймається учнями і можливо тому цей матеріал майже не висвітлюється в шкільному курсі геометрії. Аналіз літератури дозволяє стверджувати, що практичне значення теореми Птолемея, нажаль, залишається недооціненим в навчальній літературі з геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів. В представленій статті наведено декілька способів доведення теореми Птолемея, як можливі підходи до її використання при вивченні відповідних тем шкільного курсу геометрії.

Мета даної статті: розглянути особливості формування знань про теорему Птолемея та умінь застосовувати відповідні відомості до розв'язування задач.

Виклад основного матеріалу. Щоб сформувати в учнів знання про теорему Птолемея потрібно пригадати попередню Теорему Стюарта і з її наслідків перейти до самої теореми Птолемея. Теорема Птолемея звучить так

«У будь-якому опуклому чотирикутнику, вписаному до кола, добуток діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.»

Покажемо спосіб доведення теореми Птолемея який можна використовувати при вивченні цієї теореми. Використаємо метод площ разом із іншою геометричною ідеєю — «реконструкцією» чотирикутника. Візьмемо таку точку D_1 на дузі ADC (рис. 1), що $DD_1 \parallel AC$ (якщо сама точка D є серединою дуги AC, то наведене нижче доведення спроститься!).

Сенс такої додаткової побудови-реконструкції полягає в тому, що ми отримали трикутник AD_1C, рівний трикутникові ADC (чотирикутник ADD_1C є рівнобічною трапецією або ж прямокутником). І до того ж, замість площі чотирикутника *ABCD* ми можемо розглядати площу чотирикутника $ABCD_1$, яка, у свою чергу, дорівнює сумі площ трикутників BAD_1 і BCD_1.

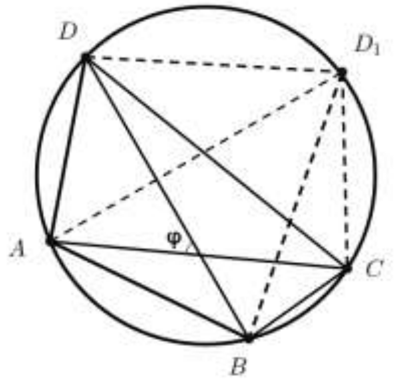


Рис. 1

За теоремою про величину кута між хордами, що перетинаються всередині кола, $\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{BC} + \mathrm{AD})$ за, хордами *AD* і CD_1 рівні, то рівними будуть і величини відповідних дуг *AD* і CD_1. Отже, $\varphi = \frac{1}{2}\left(BC + CD_1\right) = \frac{1}{2} BCD_1 = \angle BAD_1$.

З одного боку, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi$. З іншого боку, $S_{ABCD} = S_{ABCD_1} = S_{\triangle BAD_1} + S_{\triangle BCD_1} \frac{1}{2} AB \cdot AD_1 \cdot \sin\angle BAD_1 + \frac{1}{2} BC \cdot CD_1 \cdot \sin\angle BCD_1$

Так само, як і чотирикутник *ABCD*, чотирикутник $ABCD_1$ є вписаним до кола. А тому, $\angle BCD_1 = 180° - \angle BAD_1$ і $\sin\angle BCD_1 = \sin(180° - \angle BAD_1) = \sin\angle BAD_1 = \sin\varphi$.

Отже, $\frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} AB \cdot AD_1 \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} BC \cdot CD_1 \cdot \sin\varphi$, тобто

$AC \cdot BD = AB \cdot AD_1 + BC \cdot CD_1$, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Врахувавши, що $CD = AD_1$ і $AD = CD_1$. Теорему Птолемея доведено. Встановлений факт інколи називають першою теоремою Птолемея. Існує друга теорема Птолемея Формулювання її таке «Діагоналі вписаного чотирикутника відносяться, як суми добутків сторін, які «сходяться» в кінцях діагоналей» (рис. 2): описується такою формулою $\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$.

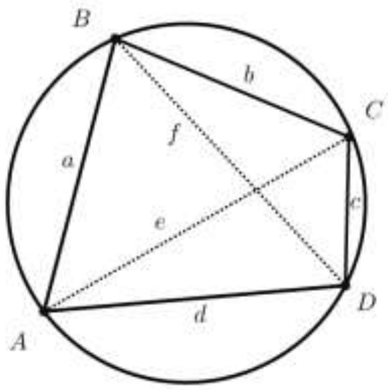


Рис. 2

Доведення.

Оскільки трикутники ABC і BAD вписані в одне й теж саме коло (його радіус позначимо R), то за узагальненою теоремою синусів, маємо: $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=2R$. Отже, $\frac{e}{f}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAD}$. Далі кути чотирикутника $ABCD$ будемо позначати тільки однією літерою і врахуємо, що синуси протилежних кутів вписаного чотирикутника рівні між собою (оскільки суми протилежних кутів дорівнюють $180°$). Виразимо площу S вписаного чотирикутника $ABCD$ двома способами: $S=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A$, $S=\frac{1}{2}ab\sin B+$ $+\frac{1}{2}cd\sin D=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B$. Отримуємо: $(ad+bc)\sin A=(ab+cd)\sin B$, $\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$. Теорему доведено.

Щоб сформувати уміння застосовувати теорему Птолемея, учні повинні розв'язувати задачі і використовувати теорію та раніше набуті знання. Приклади таких задач і їхніх розв'язань покажемо далі:

1.Знайдіть діагоналі вписаного чотирикутника, довжини послідовних сторін якого виражаються числами 9, 13, 18 і 26.

Розв'язання.

За першою й другою теоремами Птолемея: $ef=13\cdot 26+9\cdot 18=500$, $\frac{e}{f}=\frac{9\cdot 26+13\cdot 18}{9\cdot 13+18\cdot 26}=\frac{4}{5}$, розв'язавши систему отримуємо, що $\begin{cases} e=20, \\ f=25. \end{cases}$.

2. (Задача Архімеда) Доведіть, що якщо діагоналі вписаного до кола чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні, то квадрат діаметра цього кола дорівнює сумі квадратів будь-якої з двох пар протилежних сторін.[3]

Розв’язання.

Доведемо, що квадрат діаметра кола дорівнює $AD^2 + BC^2$, тобто $x^2 + y^2$ використовуючи «реконструкцію» чотирикутника $ABCD$ (рис. 3): проведемо хорду DK паралельно діагоналі $AC \Rightarrow AD = CK$.

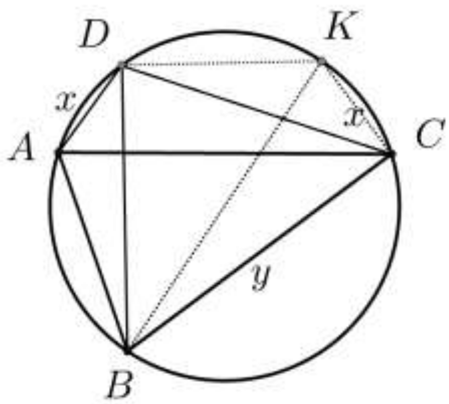


Рис.3

Оскільки $\angle BDK = 90°$ то, відрізок BK є діаметром кола, а тому $\angle BCK = 90°$, $BK^2 = CK^2 + BC^2 = x^2 + y^2$. Доведено.

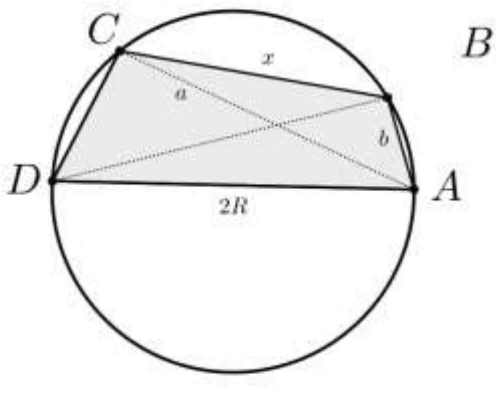


Рис. 4

3.Нехай дано коло радіуса R та дві його хорди $AC = a$, $AB = b$ (рис 4). Знайдіть довжину хорди BC, яка стягує дугу, що є різницею дуг AC і AB.

Розв’язання.

Проведемо діаметр AD. Із прямокутних трикутників $ACD(\angle C = 90°)$ та знайдіть CD і BD. Застосувши до вписаного чотирикутника $ABCD$ теорему Птолемея.

Відповідь. $x = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} - b\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$.

Висновки. Вказані в статті способи розв'язування задач, не вивчаються у загальноосвітніх школах, проте використовуються на олімпіадному рівні та при поглибленому вивченні математики. Дана теорема використовується лише у випадку вписаного в коло опуклого чотирикутника, що використовують на олімпіадних задачах, а також мотивує учителя методично сформувати відповідні теоретичні знання, та застосувати їх до розв'язування олімпіадних задач.

Література

1. Глейзер Г. И. История математики в школе VII—VIII кл. Пособие для учителей / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982 — 240 с.
2. Прасолов В. В. Геометрические задачи Древнего мира / В. В. Прасолов. — М.: Фазис, 1997 — 225 с.
3. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. В 2 т. — Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости / Понарин Я. П. — М.: МЦНМО, 2004 —321 с.

Анотація. *У даній статті зазначенні основні особливості даної теореми та приклади розв'язування задач необхідні для вдосконалення розвитку мислення учнів та студентів.*

Ключові слова: *діаметр, перпендикулярні, діагоналі, квадрат, трикутники, вписаного чотирикутника, теорема Птолемея.*

Шевчук Ганна Петрівна
студентка 3 курсу, спеціальність «Математика*»

ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У ПРОЦЕСІ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ

Вступ. Роль і значення геометричних перетворень в математиці як науці і, зокрема, в геометрії доволі значна. Ще в XIX столітті відомим німецьким математиком Ф. Клейном було обґрунтовано, що перетворення можуть бути покладені в основу визначення самого предмета геометрії. На важливість навчання школярів перетворенням вказували багато дослідників XX ст. Так, наприклад, В. Г. Болтянский відмічає: «Знання геометричних перетворень, уміння застосовувати їх в процесі доведення теорем і розв'язування задач - важливий елемент математичної культури, можливо, найважливіший метод, який повинні винести учні зі шкільного курсу геометрії» [1, с. 110]. На жаль, тема «Геометричні перетворення» в сучасному навчальному процесі займає далеко не перше місце. Проте, вона надзвичайно красива, цікава і повчальна. Вивчення даної теми розвиває просторове мислення, сприяє розвитку математичного та логічного мислення учнів, за допомогою геометричних перетворень доводять складні твердження з різних розділів геометрії, які виходять далеко за межі шкільного курсу.

Мета даної статті: розглянути застосування основних геометричних перетворень та їх властивостей у процесі доведення теорем.

Виклад основного матеріалу. В геометрії розглядають деякі функції, які кожній точці ставлять у відповідність точку. Ці функції називаються геометричними перетвореннями. Перетворення однієї фігури в іншу називається *рухом,* якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки X і Y першої фігури у точки X' і Y' другої фігури так, що $XY = X'Y'$ [4].

Відомості про різні види рухів і подібностей розглянемо у формі таблиці:

Назва	Позначення	Рід	Характерні властивості
		Рух	
Паралельне перенесення	$T_{\vec{a}}$, T_{AB}- перенесення на вектор $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$	1	Рух, що переводить будь-який промінь у співнапрямлений промінь
Поворот	$R_O^{\alpha}: O$ - центр, α – кут повороту	1	Рух, при якому кут між будь-яким променем і його образом однаковий
Ковзна симетрія	$S_l^{\vec{\alpha}}: l$ - вісь, $\vec{\alpha}$ - вектор	2	Будь-який рух 2-го роду (або невласний, або дзеркальний)
		Перетворення подібності	
Поворотна гомотетія (спіральна подібність)	$R_O^{k,\alpha}: O$ - центр, α - кут повороту, $k > 0$ - коефіцієнт	1	Кут між будь-яким променем і його образом однаковий. Існує єдина нерухома точка і немає нерухомих прямих
Дзеркальна подібність	$S_{O,l}^k: O$ - центр, $k > 0$ - коефіцієнт, l – *вісь*	2	Будь-яка подібність 2-го роду, що не є рухом
		Частинні випадки перетворення подібності	
Центральна симетрія	$Z_o = R_o^{\pi}: O$ - центр	1	Рух, при якому будь-який промінь переходить в протилежно напрямлений
Осьова симетрія	$S_l: l$ - вісь симетрії	2	Множина нерухомих точок – пряма
Гомотетія	$H_O^k: O$ - центр, k – коефіцієнт	1	Кожна пряма переходить в їй паралельну і є нерухома точка

Таб.1 Види рухів і перетворення подібностей.

Одним із основних методів розв’язування геометричних задач є метод геометричних перетворень. Рухи і подібність – один з провідних методів сучасної математики, який широко застосовується в шкільному курсі геометрії для доведення теорем, розв’язування задач. Зокрема, центральна симетрія – при вивченні поняття перпендикулярності, паралельне перенесення – вектори.

Наприклад, теорема про коло дев’яти точок тісно пов’язана із гомотетією. Використання гомотетії не лише дозволяє дати інше доведення цієї теореми, але й по новому розкриває її зміст [4, с. 49] .

Теорема. У будь-якому трикутнику основи висот, середини сторін і середини відрізків, що сполучають ортоцентр з вершинами, лежать на одному колі з центром в середині E відрізку OH і радіусом $\frac{1}{2}R$.

Доведення. Візьмемо до уваги, що точки, симетричні ортоцентру H трикутника відносно його сторін і середин сторін, належать описаному навколо трикутника колу. Задамо гомотетію з центром H і коефіцієнтом $\frac{1}{2}$. При цій гомотетії прообразами дев'яти точок, що розглядаються в теоремі, будуть

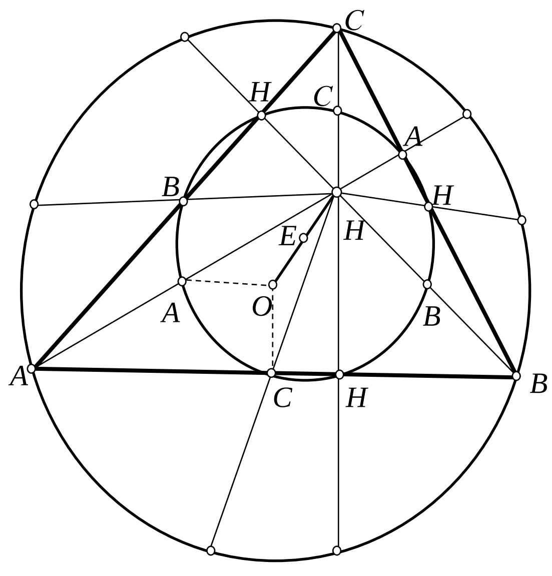


Рис. 1

точки описаного кола (рис. 1).

Гомотетія відображає описане навколо $\triangle ABC$ коло $(O; R)$ на коло $(E; \frac{1}{2}R)$, якому належать усі дев'ять точок, вказаних в теоремі. Оскільки $O \to E$, то $E = \frac{1}{2}OH$.

Яскравим прикладом застосування геометричних перетворень є теорема Наполеона, яка вперше була опублікована англійським математиком Уільямом Резерфордом в 1825 році, через 4 роки після смерті Наполеона. У різних джерелах наводяться різні доведення теореми Наполеона. Найчастіше можна зустріти доведення, що базуються на властивостях повороту [3, с. 76].

Теорема. Якщо на сторонах довільного трикутника в зовнішню сторону побудовані рівносторонні трикутники, то їх центри утворюють рівносторонній трикутник.

Доведення. Нехай O_1, O_2, O_3 - центри вказаних правильних трикутників A_1BC, B_1AC і C_1AB, побудованих на сторонах трикутника ABC. Тоді $\angle BO_1C = \angle CO_2A = \angle AO_3B = 120°$ (рис. 2).

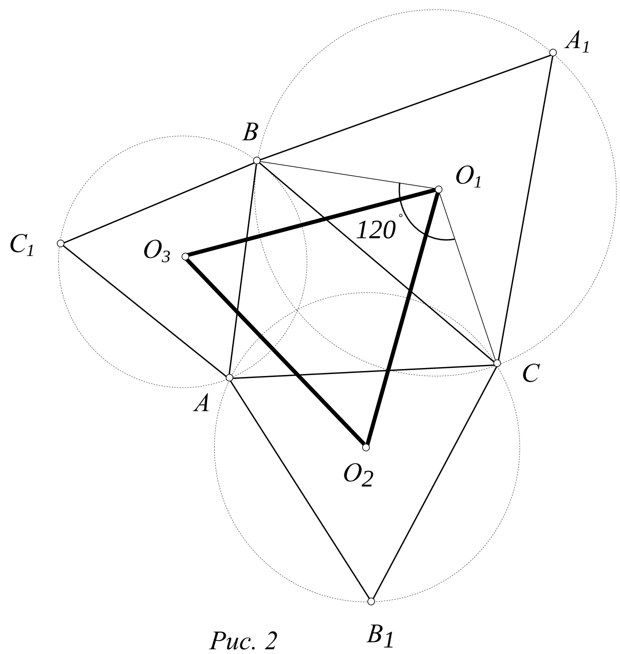


Рис. 2

При композиції поворотів на $120°$ навколо центрів O_1, O_2, O_3 точка B перейде в себе. Оскільки сума кутів цих поворотів дорівнює $360°$, то така композиція є паралельне перенесення, а оскільки B – нерухома точка паралельного перенесення, то це тотожне перетворення. Отже, композиція поворотів на $120°$ навколо точок O_1 і O_2 є поворот на кут $(-120°)$ навколо точки O_3. З іншого боку, кожен з цих поворотів можна представити як композицію двох симетрій : $R_{O_1}^{120°} = S_l \circ S_a$, $R_{O_2}^{120°} = S_b \circ S_l$, де l – це пряма O_1O_2, a і b – прямі, що проходять відповідно через точки O_1 і O_2 і утворюють з прямою l кути $60°$ і $-60°$. Тоді прямі a і b перетнуться в центрі повороту, що є композицією цих двох поворотів, тобто в точці O_3 . Отже, трикутник $O_1O_2O_3$ - рівносторонній.

Висновки. Тема «Геометричні перетворення» є дуже важливою і одночасно складною для учнів старших класів. Водночас метод геометричних перетворень є потужним методом доведення теорем та розв'язування задач з геометрії. Тому, на нашу думку, доцільно додатково вивчати її на математичних гуртках та факультативних заняттях.

Література

1. Болтянский В. Г. Поворот и центральная симметрия / В. Г. Болтянский // Математика в школе., 1989. – № 6. – С. 108-119.
2. Болтянський В. Г. Преобразование. Векторы / В. Г. Болтянський, И. М. Яглом. – М.: Просвещение, 1964. – 296 с.
3. Коксетер Г. М. Новые встречи с геометрией / Г. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер. – М.: Наука, 1978. – 223 с.
4. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. / Я. П. Понарин. – М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.

Анотація. *У статті наведено коротку характеристику основних геометричних перетворень та розглянуто на прикладах можливість їх застосувань в процесі доведення теорем з геометрії.*

Ключові слова: *геометричне перетворення, гомотетія, композиція повороту, доведення теорем з геометрії.*

Юзва Андрій Павлович
студент магістратури, спеціальність «Математика»*

РОЗВИТОК ПІЗНАВАЛЬНОЇ АКТИВНОСТІ УЧНІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Вступ. Однією з актуальних проблем на сучасному етапі розвитку педагогічної теорії та практики є активізація пізнавальної діяльності учнів. Саме від її вирішення залежить ефективність навчальної діяльності, яка проявляється в міцному засвоєнні знань, стимулюванні та розвитку інтересу до навчання, формуванні самостійної думки та підготовці до самостійного життя.

Мета даної статті виявити умови, методи й засоби активізації пізнавальної діяльності учнів при вивченні стереометрії.

Виклад основного матеріалу. У педагогічних дослідженнях найчастіше активізацію пізнавальної діяльності розглядають як організацію сприйняття навчального матеріалу учнями, коли засвоєння знань відбувається шляхом розкриття взаємозв'язку між явищами, порівняння нової інформації із вже відомою, а також конкретизації, узагальнення та оцінки навчального матеріалу з різних точок зору [4].

Пізнавальна активність формується в процесі діяльності і є необхідною умовою пізнання. Внутрішніми стимулами активності виступають потреби, інтереси, інтелект, воля, емоції, енергія та ін. [6].

Використання та удосконалення різних форм та методів навчання спонукає до активізації, в першу чергу, самого навчального процесу, а вже потім до активізації пізнавальної діяльності учнів.

Науковцями виділяються різні рівні пізнавальної активності учнів. У своїх дослідженнях О. С. Дубинчук встановила такі рівні пізнавальної активності [2]:

1. Репродуктивно-повторювальна активність, за допомогою якої досвід діяльності однієї людини накопичується завдяки досвіду іншої.

2. Пошуково-виконавча активність, яка передбачає такий ступінь самостійності учнів, яка дозволяє зрозуміти задачу та відшукати засоби її розв’язання без сторонньої допомоги.

3. Творча активність, яка дозволяє учню самостійно ставити певну задачу та вибирати нешаблонні, оригінальні шляхи її розв’язання.

Активізація пізнавальної діяльності учнів – це перехід до більш високого рівня активності та самостійності учнів у процесі навчання, який стимулюється розвитком пізнавального інтересу, та відбувається завдяки удосконаленню методів та прийомів навчального процесу.

Сьогодні в основі процесу навчання покладена мета створення умов для розвитку особистості. Тому вибір системи методів та прийомів навчання на цих засадах робить його розвиваючим та особистісно-орієнтованим. Розвиваюче навчання сприяє розвитку пізнавальної активності.

Під розвиваючим навчанням в педагогіці розуміють спрямованість принципів, методів та прийомів навчання на досягнення найбільшої ефективності розвитку пізнавальних можливостей школярів [1].

Одним із типів розвиваючого навчання є проблемне навчання. Дуже тонко пов’язує поняття проблемного та розвиваючого навчання М. І. Махмутов. «Розвиваючим навчанням, тобто яке веде до загального та спеціального розвитку, можна вважати тільки таке навчання, при якому вчитель, спираючись на знання закономірностей розвитку мислення, спеціальними педагогічними засобами приводить цілеспрямовану роботу по формуванню розумових здібностей та пізнавальних потреб своїх учнів в процесі вивчення основ наук. Таке навчання є проблемним» [3, с. 16].

Сьогодні під проблемним навчанням розуміється така організація навчальних занять, яка припускає створення під керівництвом учителя проблемних ситуацій і активну самостійну діяльність учнів по їх вирішенню, в результаті чого і відбувається творче оволодіння знаннями, вміннями, навичками, розвиток розумових.

Проблемні методи навчання є ефективними засобами активізації пізнавальної діяльності учнів. Вони сприяють інтелектуальному розвитку учнів і водночас формують світогляд, моральні та емоційні риси особистості.

Досягнення найвищого рівня емоційного стану, прояву пізнавальної активності та самостійності є прагненням активізації пізнавальної діяльності учнів за допомогою використання проблемного навчання. Для цього діяльність вчителя та учнів складається з певних кроків, які використовуються в роботі з будь-якими проблемними ситуаціями (див. табл. 1.)

Таблиця 1. Чотири рівні проблемності в навчальному процесі [5]

	Діяльність вчителя	Діяльність учнів
1рівень	активізує та контролює знання; ставить та формулює навчальну задачу; розв'язує проблему; закріплює знання учнів, організовує самостійну роботу.	розуміють необхідність актуалізації знань; розуміють суть проблемної ситуації; осмислюють хід її розв'язання; виконують вправи за зразком та тренувальні вправи в процесі виконання самостійної роботи.
2 рівень	керує підготовчою роботою; актуалізує опорні знання; діагностує можливості учнів до розв'язання навчальної проблеми; створює проблемну ситуацію; формулює проблему; направляє учнів на розв'язання проблеми; організовує самостійну роботу.	розуміють необхідність актуалізації знань та створеної проблемної ситуації; разом з вчителем розв'язують проблему; виконують вправи на перевірку та закріплення розв'язаної проблеми; тренуються у виробленні навичок.
3 рівень	керує підготовчою роботою; актуалізує опорні знання та створює проблемну ситуацію; керує розв'язанням навчальної проблеми; організовує самостійну роботу.	осмислюють актуалізовані знання та створену проблемну ситуацію; формулюють навчальну проблему; висувають гіпотезу та дедуктивно її обґрунтовують; перевіряють розв'язання; виконують самостійну роботу.

	Діяльність вчителя	Діяльність учнів
4 рівень	керує підготовчою роботою; ставить завдання; організовує, керує навчальним процесом; організовує самостійну роботу.	усвідомлюють необхідність самостійного засвоєння нових знань; формулюють навчальну проблему; висувають гіпотезу; обґрунтовують її дедуктивно; перевіряють правильність доведення; творчо застосовують здобуті знання на практиці.

Розвитку пізнавальної діяльності сприятиме вдало розроблена система уроків з використанням активних методів навчання. Розглянемо календарно-тематичне планування з геометрії для 11-го класу з теми: «Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл» з можливим використанням різних методів активізації пізнавальної діяльності учнів при вивченні даної теми (див. табл. 2).

Таблиця 2.

	Тема уроку	Тип уроку	Методи активізації
1	Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єм паралелепіпеда	Засвоєння нових знань	Робота в парах
2	Об'єм призми	Засвоєння нових знань	Традиційний урок
3	Об'єм призми та паралелепіпеда	Застосування знань, умінь і навичок	Робота в группах
4	Об'єм піраміди	Комбінований	Технологія «Мікрофон»
5	Об'єм піраміди	Комбінований	Традиційний урок
6	Об'єм піраміди	Комбінований	Робота в группах
7	Об'єм циліндра	Засвоєння нових знань	Фронтальна бесіда
8	Об'єм конуса	Засвоєння нових знань	Традиційний урок

9	Об’єм кулі	Засвоєння нових знань	Бліцопитування
10	Площа бічної та повної поверхонь циліндра	Засвоєння нових знань	Бліцопитування
11	Площа бічної та повної поверхонь конуса	Засвоєння нових знань	Бліцопитування
12	Площа сфери	Засвоєння нових знань	Технологія «Мікрофон», робота в парах
13	Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл	Узагальнення та систематизація знань, умінь і навичок	Робота в группах
14	Контрольна робота	Контроль і корекція знань, умінь і навичок	Традиційний урок

Крім використання на уроках активних методів навчання, розвитку пізнавальної активності сприятиме вдала добірка завдань.

1. Радіус основи прямого кругового конуса дорівнює R, а його висота H. Який з циліндрів, вписаний у цей конус, має найбільшу бічну поверхню?

Методичні вказівки. Вказана задача належить до класу екстремальних задач. По-суті геометрична задача зводиться до алгебраїчної: відшукання максимуму функції, яка є залежністю площі бічної поверхні циліндра від його радіуса основи та висоти. Задачу такого типу можна використовувати на гуртках в 11 класі, як ілюстрацію використання похідної до розв’язування задач.

2. Через центр правильного трикутника, в його площині проведена довільна пряма. Довести, що сума квадратів відстаней від вершин трикутника до цієї прямої не залежить від вибору прямої.

Методичні вказівки. Суть задачі полягає у доведенні того факту, що сума квадратів відстаней від вершин трикутника до цієї прямої є величиною сталою. Потрібно ввести в розгляд, наприклад кут нахилу прямої до відрізка BO, виразити через кут і сторону трикутника довжини відповідних відрізків і довести, що цільова функція (сума квадратів вказаних відстаней) не залежить від кута φ.

Висновки. Однією з головних проблем сучасної освіти є проблема розвитку пізнавальної активності учнів. Завдання вчителя полягає у створенні умов та засобів активізації пізнавальної активності учнів, зокрема при вивченні стереометрії.

Література

1. Груденов Я. И. Совершенствование методики роботы учителя математики / Я. И. Груденов. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
2. Дубинчук Е. С. Активизация познавательной деятельности учащихся средних професионально-технических училищ в процессе обучения математике / Е. С. Дубинчук. – К.: Высшая школа, 1987. – 101 с.
3. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А. М. Матюшкин. – М.: Педагогика, 1972. – 208 с.
4. Ростовецкая Л. А. Самостоятельность личности в познании и общении / Л. А. Ростовецкая. – Ростов-на-Дону: РГПИ, 1975. – 297 с.
5. Срода Г. В. Воспитание активности и самостоятельности учащихся в обучении / Г. В. Срода. – М.: АПН РСФСР, 1956. – 56 с.
6. Формування фахової компетентності майбутніх учителів математики засобами розвитку пізнавальної активності : дис. канд. пед. наук : 13.00.04 / Воєвода Аліна Леонідівна – Вінниця, 2009. – 241 с.

Анотація. *У статті розкрито суть пізнавальної активності учнів та запропонована система уроків з конкретної теми з використанням активних методів навчання, які в свою чергу сприятимуть розвитку пізнавальної активності.*

Ключові слова: *розвиваюче навчання, пізнавальна активність, проблемне навчання, активні методи навчання.*

РОЗДІЛ 4. СПЕЦІАЛЬНА ПІДГОТОВКА УЧНІВ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД ШКОЛЯРІВ

Борздих Анна Романівна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика*»

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА СУМІШІ І СПЛАВИ

Вступ. З допомогою розв'язування задач повідомляються знання про конкретні об'єкти та явища, створюються і розв'язуються проблемні ситуації, формуються практичні та інтелектуальні вміння, повідомляються знання з різних галузей наук, формуються творчі здібності учнів. Проте часто задачі розв'язують лише для тренінгу, кращого засвоєння правил, формул та законів. При цьому втрачається така важлива мета навчання, як розвиток творчих здібностей. Значний крок у цьому напрямі дає можливість зробити підготовку учнівського колективу до олімпіади з математики. На жаль, серед різних текстових задач, які зустрічаються в школі і пропонуються на конкурсах, найменше уваги приділено задачам на суміші і сплави. Тому серед актуальних завдань учителя є ознайомлення учнів із різноманітними способами розв'язування таких задач та вибір з них найраціональніших.

Мета статті: ознайомити з методикою, розкрити сучасні прийоми розв'язування олімпіадних задач на суміші і сплави; проаналізувати різноманітність і варіативність подачі таких задач у шкільних підручниках академічного та профільного рівнів.

Виклад основного матеріалу. Задачі на суміші і сплави є типовими у шкільних підручниках з математики. У 6-му класі основної школи учні знайомляться з типовими задачами при вивченні теми «Відсотки». Автори підручників з математики для 7-го класу розглядають один із методів розв'язування задач на суміші і сплави за допомогою систем лінійних рівнянь в розділі «Системи лінійних рівнянь з двома змінними». У курсі алгебри 8-го класу у розділі «Квадратні рівняння» однією із провідних змістових ліній є

«Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій», де учні ознайомлюються з задачами, які зустрічаються у другому рівні Державної підсумкової атестації та серед завдань зовнішнього незалежного оцінювання. У 9-му класі учні вже вміють розв'язувати найпростіші задачі на суміші і сплави як мінімум двома способами: за допомогою систем лінійних рівнянь та за допомогою звичайного рівняння. Під час вивчення теми «Відсоткові розрахунки» розглядаються задачі підвищеної складності.

Класифікація задач на суміші і сплави:

- задачі на суміш не більше 2-х рідких речовин або газоподібних;
- задачі на суміш не більше 2-х рідких речовин або газоподібних з відсотковою концентрацією;
- задачі на суміш 3-х і більше рідких речовин або газоподібних;
- задачі на сплав 3-х і більше тіл.

Пропонуються різні методи розв'язання, в залежності від рівня їх складності. У шкільному курсі математики розглядаються 4 методи розв'язування задач на суміші і сплави:

1) за допомогою складання рівняння;
2) за допомогою систем лінійних чи квадратних рівнянь;
3) з використанням «Квадрата Пірсона»;
4) за допомогою старовинного способу розв'язування таких задач з використанням схеми.

Розглянемо, наприклад, задачу зі шкільного підручника [3, с. 187].

В одному сплаві міститься 9% міді, а в іншому 24% міді. Скільки треба взяти від першого і скільки від друго сплаву, щоб сплавивши їх, одержати 260 г сплаву, що містить 15 г міді?

Дана задача міститься у підручнику під значком ** і запропонована в розділі «Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь». Розв'яжемо її кількома способами.

1 спосіб. Якщо за x г позначити масу першого сплаву, яку потрібно взяти, то масу другого сплаву можна знайти як $(260-x)$*г*. Тоді при визначення маси міді без домішок новому сплаві отримаємо з розв'язавши рівняння: $0,09x+0,24(260-x)=39$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо: $x=104$ *(г),* тоді $260-x=156$ *(г).*

2 спосіб. Якщо за x г позначити масу першого сплаву, яку потрібно взяти, то масу другого сплаву можна позначити через y. Тоді перше рівняння системи отримуємо за умови, що маса нового сплаву міді має становити 260 *г*. Тобто, перше рівняння системи матиме вигляд: $x+y=260$. Для того, щоб скласти друге рівняння системи, знайдемо масу чистої міді в новому сплаві, тобто: $0,15\cdot 260=39$ $(г)$. Оскільки маса чистої міді у першому сплаві 9%, то в новому сплаві її буде $0,09x(г)$. Аналогічно, маса міді з другого сплаву – $0,24y$ *(г).* Маємо друге рівняння системи $0,09x+0,24y=39$. Отже, потрібно розв'язати систему рівнянь, щоб знайти значення змінних:

$$\begin{cases} x+y=260, \\ 0,09x+0,24y=39. \end{cases}$$

Методом підстановки знаходимо невідомі: $x=156(г)$, $y=104(г)$.

3 спосіб. Тут ми використаємо так званий «Квадрат Пірсона» [5, с. 9].

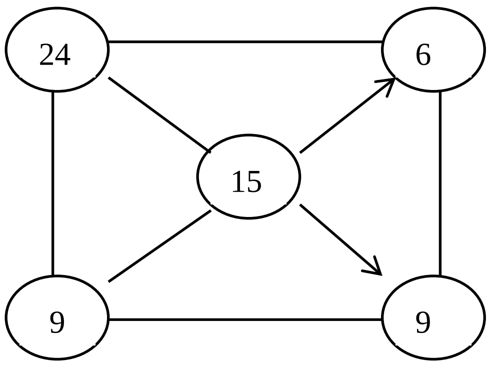


Рисунок 1. Розв'язування задачі за допомогою «Квадрату Пірсона»

Для нашої задачі будуємо «квадрат Пірсона» таким чином: в лівому верхньому куті проставимо більший відсотковий вміст міді у першому сплаві – 24%, а в нижньому – відсотковий вміст іншого сплаву – 9%. На перетині діагоналей квадрата ставимо відсотковий вміст шуканого сплаву – 15%. Після цього виконуємо віднімання відсоткових вмістів по діагоналях квадрата (від більшої величини - меншу): $24-15=9$; $15-9=6$ (Рис. 1).

Перше число записуємо у правому нижньому куті квадрата, друге – у верхньому. Таким чином, отримуємо кількість частин першого та другого сплаву, які треба взяти, щоб отримати шуканий сплав, тобто 6 і 9 або 2 та 3 частини. Для отримання маси кожного сплаву загальну кількість частин $(3+2=5):260:5=52(г)$ – це маса однієї частини. Тоді першого сплаву потрібно взяти $52\cdot3=156(г)$, а другого – $52\cdot2=104(г)$ [5, с. 9-10].

Цей спосіб засновано на специфічному вигляді кількості суміші, яка отримується (тобто в результаті розв'язання задачі ми отримуємо не масу кожної суміші, а відношення мас даних сумішей). Ця кількість дорівнює різниці концентрацій шуканої суміші та вихідних речовин.

4 спосіб. Старовинний спосіб розв'язування цієї задачі полягає у використанні схеми, що утворюється в такий спосіб:

- одне під одним пишуться значення відсоткового вмісту міді у першому сплаві та у другому;
- ліворуч від них – відсотковий вміст міді отриманої речовини;
- меншу величину віднімаємо від отриманої суміші, а результат записуємо праворуч від більшої величини.

Від більшої величини віднімаємо відсотковий вміст отриманого сплаву, а результат записуємо праворуч меншої величини.(Рис. 2)

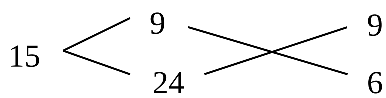


Рисунок 2. Розв'язування задачі за старовинним способом

Отримана схема дає можливість зробити висновок: 9%– го розчину потрібно взяти в 9 разів більше, ніж 24% – го.

Стандарт освіти визначає обов'язковий мінімум змісту основних освітніх програм і максимальний обсяг навчального навантаження учнів. Тому в школах текстові задачі, зокрема на суміші і сплави, розглядаються частіше на уроках узагальнення вивченого матеріалу. Хоча такі задачі показують практичне застосування математики, розвивають обчислювальні навички, просторову уяву.

Задачі на суміші і сплави пропонуються у 9-му класі при вивченні змістової лінії «Елементи прикладної математики» в темі «Відсоткові розрахунки.» [4, с. 220]. Підручник з алгебри академічного рівня [1, с. 218] містить задачі на суміші і сплави лише достатнього та високого рівнів складності, їх кількість – 9 завдань. Підручник профільного рівня містить 5 задач середнього, 3достатнього та 8 високого рівнів складності.

Пропоновані в підручнику на суміші і сплави є основою підготовки учнів до олімпіад саме за цією тематикою.

Цікаві задачі на суміші і сплави використовували в давнину. Так, у відомій «Арифметиці» Л. Ф. Магницького розглядаються задачі про змішування і сплави двох і трьох речовин. Вони мають стандартну структуру, але особливі своєю умовою та завданням. Пропонуємо декілька таких задач, що мають розв'язки будь-яким із методів, які представлені нами раніше [4, с. 25-26].

№1. Як змішати чай? Дехто має чай трьох сортів – цейлонський по 5 гривень за фунт, індійський по 8 гривень за фунт і китайський по 12 гривень за фунт. В яких частинах потрібно змішати цих три сорти, щоб отримати чай по 6 гривень за фунт?

№2. Як змішувати олію? В одного чоловіка була для продажу олія двох сортів: вартість однієї – 10 гривень за відро, а другої – 6 гривень за відро. Скільки частин кожної олії потрібно взяти, щоб отримати відро олії, вартістю 7 гривень?

Висновки. Задачі на суміші і сплави посідають особливе місце у шкільному курсі математики, оскільки зустрічаються в основній школі щороку, починаючи з шостого класу. Даний вид задач має свою класифікацію та різноманітні методи розв'язання, відповідно до вивчень змістових ліній. В олімпіадних завданнях є задачі на суміші і сплави поглибленого рівня, тому вони різного типу та мають складну структуру розв'язання. Отже, при підготовці учнів до олімпіади з математики розв'язуємо задачі одним способом та орієнтуємося на одну задачу з використанням декількох методів. На наступних заняттях розв'язування задач на суміші і сплави, крім спеціально підібраної добірки вправ і методики роботи з нею, важливо підтримувати активізацію пізнавальної діяльності за допомогою використання цікавих, нових для учнів завдань.

Література

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра – 9 кл. для загальноосвітніх навчальних закладів / Г. П. Бевз. – К.:Зодіак-ЕКО, 209. –288с.
2. Істер О. С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 9 кл. / О. С. Істер, О. І. Глобін, О. В. Комаренко. – К.: Генеза., 2011. – 107 с.
3. Мерзляк А. Г. Алгебра – 9 для класів з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Харків: Гімназія, 2009. – 230 с.
4. Олехник С. Н. Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов. – Москва: Дрофа, 2002. – 176 с.
5. Петрусевич С. Методичні особливості розв'язування задач на суміші і сплави за допомогою квадрата Пірсона / С. Петрусевич, О. Яковчук. // Математика в сучасній школі. – 2012. – №5. – С. 9-12.

Анотація. *У статті описано класифікацію задач на суміші і сплави, методи розв'язання таких задач на основі однієї. Вказана послідовність та поетапність підготовки учнів основної школи до олімпіади з математики на основі розгляду задач на суміші та сплави речовин.*

Ключові слова: *задачі на суміші і сплави, квадрат Пірсона, відсотки, системи лінійних рівнянь, старовинні задачі.*

Гризлій Катерина Анатоліївна
студентка 2 курсу, спеціальність «Математика»*

ЗАДАЧІ НА РОЗФАРБОВУВАННЯ,ЩО ДОВОДЯТЬСЯ МЕТОДОМ ІНВАРІАНТІВ

Вступ. В математиці існує велика кількість нестандартних задач. Їх нестандартність полягає в тому, що немає загальних правил і положень, що визначають чітку послідовність їх розв’язання. Однак, слід зауважити, що поняття «нестандартна задача» є відносним. Одна і та ж задача може бути стандартною або нестандартною, в залежності від того, чи знайомі ми з способом її розв’язання. До не стандартних задач відносяться і задачі на інваріант в яких використовується розфарбовування. При розв’язанні олімпіадних задач, інколи, для полегшення пошуку розв'язання необхідно використати розфарбовування клітинок. Для розв'язування задач такого типу потрібні знання і досвід, а також, володіння певними загальними підходами до їх розв’язання, які ми покажемо у нашій статті.

Мета даної статті: виокремити та обґрунтувати методичні рекомендації щодо технології ознайомлення учнів із використанням інваріанту та розфарбовування при розв’язуванні задач в процесі підготовки учнів до математичних олімпіад.

Виклад основного матеріалу. Для початку розглянемо поняття «інваріант». Інваріант – величина, яка не змінюється в результаті деяких операцій, наприклад, колір клітинки [2]. При підготовці учнів слід звертати увагу на те, що якщо інваріант розрізняє два положення, то від одного не можна перейти до іншого.

Одним із стандартних інваріантів є розфарбовування. Існують задачі де розфарбовування вже задано, де розфарбовування з даними властивостями потрібно придумати та де розфарбовування використовується як ідея розв’язання.

Серед першого типу задач можна виділити:

- Задачі на шаховій дошці;
- Задачі на розфарбовування площини;
- Задачі, в яких потрібно провести оцінку властивості розфарбовування;
- Задачі на перефарбовування.

Як ідея для розв’язання задач на розфарбовування використовують: заміщення і вирізання, переміщення, операції з числами, доведення обмеженості кількості клітинок площини.

Важливим класом задач на інваріант є задачі з використанням перетворень на клітинкових дошках. Або ми ходимо чим-небудь по дошці, або заставляємо дошку фігурами. При розв'язуванні деяких задач математичної олімпіади інколи клітинки, точки або інші фігури вважають розфарбованими в різні кольори в певному порядку. Тобто, розбивають множини всіх даних фігур на підмножини. Такий прийом робить розв'язання більш наочним тому полегшує міркування. Найбільш поширеними видами розфарбовування є:

– Шаховий (два кольори чергуються так, що будь-які дві сусідні клітинки, що мають спільну сторону, різних кольорів);

– «Матрац» (чергування рядків або стовпців, пофарбованих у два кольори);

– Збільшена шахова (у шаховому порядку фарбуються не окремі клітини, а цілі блоки 2×2, 3×3 і т.д.);

– Збільшений «матрац» (чергуються не рядки, а однакові по товщині блоки з рядків);

– «Матрац» в N кольорів (чергуються рядки, пофарбовані у кольори, 1-й, 2-й, ... N-й, 1-й, 2-й і т.д.);

– Шахова в N кольорів (наприклад, чергуються діагоналі, пофарбовані у кольори, 1-й, 2-й, ... N-й, 1-й, 2-й і т.д.).

При поясненні учням слід зверати увагу, що розфарбування має спростити та формалізувати шлях розв’язання, а не ускладнити його. Тому спершу потрібно підібрати таке розфарбування, яке, на перший погляд, буде зручним у даному випадку, а вже потім використати його властивості для подальшого розв'язання. Якщо у процесі подальшого розв'язання помітили, що розфарбування можна було виконати простіше, перейдіть до нього, адже чим простішим буде ваше розв'язання (розфарбування), тим менша вірогідність того, що учень заплутаєтеся у своїх думках.

В задачах на інваріант з використанням розфарбовування потрібно обережно підходити до питання «чи можна». Так, більша частина з них – з відповіддю «не можна», яка доводиться через інваріант. Але трапляються іноді завдання з відповіддю «можна», де треба будувати приклад. Іноді, захопившись пошуком інваріанта, можна не помітити існування простого прикладу.

Для прикладу розглянемо задачу [1]: дано квадрат паперу в клітинку розміром 8×8, в якому вирізані дві крайні діагональні клітинки (верхня-права і нижня-ліва). Чи можна отриману фігуру покрити прямокутниками розміром 1×2?

Роз'вязання. Розфарбуємо наш обрізаний квадрат за допомогою двох кольорів в шаховому порядку, так як показано на рисунку 1.

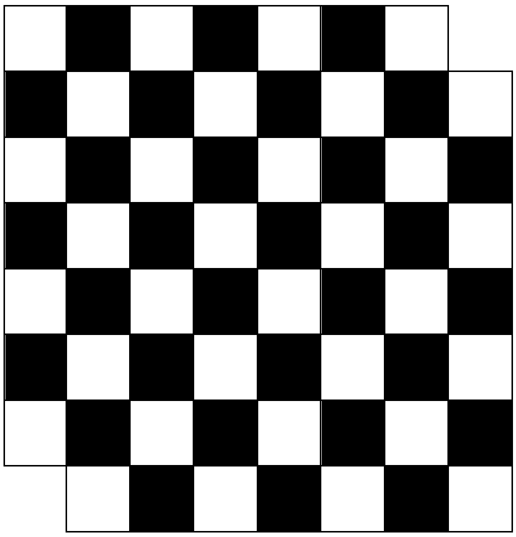


Рис. 1

Зауважимо, що відрізані діагональні клітинки будуть одного кольору. Відзначимо також, що в нашому розфарбованому квадраті будь-які сусідні дві клітинки, що мають спільну сторону, будуть різного кольору. Це означає, що будь-який прямокутник розміром 1×2, яким ми будемо намагатися покрити обрізаний квадрат,буде покривати клітинки обох кольорів. І якщо ми зможемо покрити обрізаний квадрат прямокутниками 1×2, то буде покрито однакову кількість клітинок з різними кольорами, тобто фігура повинна містити однакову кількість клітинок обох кольорів. Але так як ми відрізали діагональні клітинки одного кольору, то їх кількість в обрізаному квадраті на дві менше. Це означає, що ми не зможемо повністю покрити вказаний обрізаний квадрат прямокутниками 1×2. Відповідь. Не можна.

Інколи в задачах на цю тему фарби навіть не згадуються. В умовах задач фарби можуть замінятися числами або знаками «+» чи «-». Зрозуміло, що подібні зміни аж ніяк не впливають на принципи та методи розв'язування таких задач. Не зважаючи на простоту цих задач, на перший погляд, знайти їх розв'язання буває нелегко. Складність цих завдань полягає, по-перше в тому, що в умові завдання немає вказівок на метод їх вирішення. "Побачити " потрібне розфарбування буває вкрай складно та й здогадатися про те, що потрібно використати розфарбовування важко. По-друге, всі завдання на розфарбовування це насправді задачі на побудову прикладу або контрприкладу. А навести хороший приклад, що підтверджує або спростовує питання завдання, теж не просто.

Розглянемо ще одну задачу, яка була запропонована учням 11 класів на 40-й Всеукраїнській олімпіаді 2000 року [5]: дитячий конструктор складається із фігурок, зображених на рис. 2 (ліва фігурка утворена з семи кубиків $1\times1\times1$, а права – з чотирьох кубиків $1\times1\times1$). Чи можна за допомогою цих фігур скласти куб розмірами $11\times11\times11$, що не матиме порожнин?

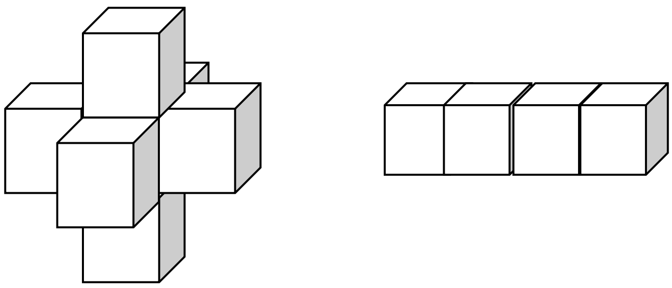


Рис. 2

Розв'язання. Не можна, тому що, якщо розфарбовувати кубики, з яких складаються дані фігурки і велика фігура, в шаховому порядку, то поряд з кубиком з білими гранями буде знаходитися кубик з чорними гранями. Тобто інваріантом в даному випадку є кількість чорних і білих кубиків: в обох випадках кількість білих і чорних кубиків, або однакова, або відрізняється на 5,а у великого куба розміром $11\times11\times11$ ні. Відповідь. Не можна.

Висновки. Задачі на інваріант часто трапляються в олімпіадних завданнях, тому під час позакласної роботи на них слід звертати велику увагу та підвищувати зацікавленість учнів до завдань даного типу.

Література

1. Екимова М. А. Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин – М.: МЦНМО, 2002. – 120 с.
2. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду/ А. А. Заславский, Д. А. Пермяков, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков, А. В. Шаповалов. – М.:МЦНМО, 2009. – 488 с.
3. Мингазетдинова Р. Н. Готовимся к олимпиаде. Инварианты. [Електронний ресурс] / Раисия Нуровна Мингазетдинова – Режим доступу до ресурсу: http://festival.1september.ru/articles/568930/.
4. Мітельман І. М. Розфарбуємо клітчасту дошку/ І. М. Мітельман. – Львів: Каменяр, 2001. – 48 с.
5. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. / А. О. Сарана. – К.: А.С.К., 2004. – 344 с.

Анотація. *Розглянуто поняття інваріанта та методику розв'язування задач з використанням перетворень на клітинкових дошках. Наведено приклад завдання з математики, з його розв'язанням за допомогою інваріанта.*

Ключові слова: *інваріант, розфарбовування дошки, задача, клітинка.*

Кальчук Анастасія Анатоліївна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

МІСЦЕ І РОЛЬ ЗАДАЧ НА ПЕРЕЛИВАННЯ ТА ЗВАЖУВАННЯ У ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ З МАТЕМАТИКИ

Вступ. Одним із засобів зацікавлення учнів математикою є добре продумана позакласна робота. Вона є однією з форм організації пізнавальної діяльності учнів різного віку, але разом з тим вимагає конкретних знань, ерудованості, широкої обізнаності з математичних дисциплін.

Математичні гуртки є основною формою позакласної роботи з математики. Заняття в них доповнюють роботу на уроках і дають можливість задовольнити інтереси та бажання учнів, що виходять за межі навчальної програми [1].

Щоб навчитися правильно міркувати, потрібно розв'язувати завдання на кмітливість. Одним з класів завдань такого типу є завдання на зважування та переливання, які потрібно включати в планування роботи математичного гуртка Варто зазначити, що ще у давнину завдання на зважування та переливання допомагали людям використовувати математику в повсякденному житті, розвивати логіку і мислення.

Мета статті: виокремити методичні поради щодо навчання учнів розв'язувати задачі на переливання і зважування у процесі роботи математичного гуртка.

Виклад основного матеріалу. Задачі на переливання традиційно зустрічаються на олімпіадах з математики різного рівня. Суть цих задач така: маючи кілька посудин різного об'єму, одна з яких наповнена рідиною, потрібно розділити цю рідину в якому-небудь відношенні або відлити яку-небудь її частину за допомогою інших посудин за найменшу кількість переливань. В задачах на переливання потрібно вказати послідовність дій, внаслідок яких здійснюється потрібне переливання і виконані всі умови задачі.

Найпростіший спосіб розв’язування задач на переливання полягає в переборі можливих варіантів. Зрозуміло, що такий спосіб не зовсім вдалий, оскільки в цьому випадку складно виділити який-небудь загальний підхід до розв’язування інших подібних задач. Більш системний підхід до розв’язування задач на переливання полягає у використанні певної послідовності дій. Задачі на переливання можна розв’язувати з кінця, зважаючи на те, що необхідно зробити і не зважаючи, що шукане вже знайдено.

Розв’язуючи задачі на переливання, доцільно враховувати такі зауваження:

- дозволяється наливати в посудину рівно стільки рідини, скільки в неї поміститься, щоб посудина була заповнена вщерть;

- дозволяється переливати всю рідину з однієї посудини в іншу, якщо вся рідина поміщається в цій посудині;

- дозволяється відливати з однієї посудини в іншу стільки рідини, скільки необхідно, щоб друга посудина була наповнена вщерть.

Кожну задачу на переливання можна розв’язувати двома способами:

1) почати переливання з більшої посудини;

2) почати переливання з меншої посудини.

Який зі способів є більш раціональним (тобто яким способом ми найшвидше отримаємо потрібну кількість рідини) залежить від умови задачі.

Для розв’язування задач на переливання можна дотримуватись такої послідовності дій.

1. Перелити рідину з більшої посудини в посудину проміжної ємності.

2. Перелити рідину з посудини проміжної ємності в найменшу посудину.

3. Перелити рідину з найменшої посудини в найбільшу.

4. Повторювати дії 2–3 до тих пір, поки посудина проміжної ємності не стане порожньою.

5. Якщо посудина проміжної ємності спорожніла, то повторити дії 1–5 до тих пір, поки не буде виконана умова задачі.

Розв'язання задач на переливання зручно систематизувати у вигляді таблиць [2].

Розглянемо на прикладах розв'язання деяких задач на переливання.

Задача 1. Як за допомогою 3-літрового і 5-літрового відер набрати 1 літр води? У нашому розпорядженні є водопровідний кран і раковина, куди можна виливати воду.

Розв'язання: Розв'язання цієї задачі можна записати у вигляді таблиці. Спочатку обидва відра порожні. Наповнюємо 3-літрове відро і виливаємо воду з нього у 5-літрове. Знову наповнюємо 3-літрове відро і виливаємо її у 5-літрове, поки воно не наповниться. У 3-літровому відрі залишиться 1 літр води.

3 літри	0	3	0	3	1
5 літрів	0	0	3	3	5

Задача 2 . Маємо дві ємності 5 і 7 *л*. Як за допомогою ємностей відміряти 6 *л* води з крана?

Розв'язання: Складемо таблицю розв'язання :

7 літрів	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6
5 літрів	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5

Задача 3 . Маємо три ємності: 9 *л*, 5 *л*, 3 *л*. Перша наповнена водою,а інші дві порожні. Як за допомогою цих ємностей відміряти 1 *л* води? Як відміряти 4 *л* води? [3].

Розв'язання:

3 літри	0	3	3	0
5 літрів	0	0	5	5
9 літрів	9	6	1	4

У задачах на зважування за допомогою терезів без гир пропонується за певну кількість зважувань виявити один з предметів, що відрізняється від інших лише масою. Найпростіші з таких задач ті, в яких відомо, чи більша маса шуканого предмета від маси інших чи ні. Крім того, цей предмет – один серед інших (тобто всі інші мають однакову масу). Загальний спосіб розв'язування таких задач полягає в тому, що задану сукупність предметів ділять на три рівні частини. Коли її не можна поділити без остачі, то дві частини роблять рівними, а третю – близькою до кожних з них (трохи меншою). При такому поділі за одне зважування виділяється частина, що містить шуканий предмет. Далі процес повторюється, аж поки виділена третина складатиметься з одного предмета. Якщо ми маємо a предметів, то легший (важчий) з них виділиться за n зважувань, де $3^{n-1} < a \leq 3^n$. Працюючи з учнями на занятті гуртка, починати розв'язування таких задач треба з найпростішого випадку (три предмети).

Детальніше процес розв'язування задач на зважування розглянемо на прикладах. Зауважимо, що умови наступних запропонованих задач легко змінювати (монети на камінці, пакети, каміння і т.д), отримуючи нові, що допомагає вчителю закріпити у учнів розуміння ідеї розв'язання.

Задача 1. Серед трьох монет одна фальшива (легша від двох інших, однакових за масою). За допомогою одного зважування на терезах без гир виділити фальшиву монету.

Розв'язання. Покладемо на кожну шальку терезів по одній монеті, а третю відкладемо. Якщо шальки перебувають у рівновазі, то відкладена монета і є фальшивою; у протилежному випадку терези покажуть легшу, тобто фальшиву, монету.

Задача 2. З 61 монети за 4 зважування виділити фальшиву (важчу за справжні).

Розв'язання. Розділимо монети на три групи: 21, 21 та 19. На терези покладемо перші дві групи по 21 монеті. При цьому можуть бути два випадки: 1) шальки терезів зрівноважені; 2) не зрівноважені. Розглянемо кожний з цих випадків.

1) Шальки врівноважені, отже, важча монета серед 19 відкладених. Розділимо ці 19 монет на три групи (7, 7 і 5) та порівняємо на терезах масу перших двох груп (це буде друге зважування). Знову може трапитись, що терези: а) врівноважені; б) не врівноважені.

У випадку а) фальшива монета серед п’яти відкладених. З них за наступні два зважування спочатку порівняємо 2 та 2 монети, відклавши п’яту; якщо п’ята не фальшива, то зважуємо дві монети з тієї шальки, що переважила.

У випадку б) фальшива монета серед 7 монет. Розділимо цю групу на 3, 3 і 1 монету та покладемо на шальки терезів по три монети і т. д. І в цьому випадку для розв’язування потрібно не більш, як чотири зважування.

2) Шальки з монетами (на кожній по 21) не врівноважені. Відклавши 7 монет, покладемо на кожну шальку по 7 монет. Це буде друге зважування. Отже, і в цьому випадку потрібно чотири зважування.

У тому разі, коли з умови задачі невідомо, яка маса «особливого» предмета (легший він чи важчий від інших), для його виділення необхідно, як правило, виконати додаткове зважування. Так, у задачі про виділення з 9 монет однієї фальшивої (невідомо, легша вона від справжніх чи важча) двома зважуваннями вже не обійтись, доведеться переважувати монети тричі.

Іноді такі задачі дещо видозмінюють, вводячи, наприклад, обмежену кількість гир певної маси.

Висновок. Розв’язування задач на переливання та зважування у процесі роботи математичного гуртка потрібно сприймати не лише як етап підготовки школярів до математичних змагань. Насамперед, це засіб активізації пізнавального інтересу школярів до вивчення математики через набуття практичних навичок та вмінь в процесі розв’язування задач такого типу. Вдало підібрані задачі забезпечать розвиток творчих здібностей, стимулюватимуть пізнавальну активність, емоційну сферу та інтелектуальні почуття школярів.

Література

1. Бойко А. В. Матеріали на виставку педагогічних ідей та знахідок «На допомогу керівнику гуртка з математики» [Електронний ресурс] / Аліна Василівна Бойко. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: http://alina07032012.blogspot.com/2015/10/blog-post_82.html.

2. Глущенко Л. І. Задачі на переливання / Л. І. Глущенко. // Математика в школах України. – №9.

3. Загуменна Я. С. Методи розв`язання олімпіадних задач та задач підвищеної складності з математики. 5-7 кл. [Електронний ресурс] / Я. С. Загуменна – Режим доступу до ресурсу: http://portal.prolisok.org/files/MR/Zagymenna/metodichka_olimpiadi_zagumenna.doc..

4. Маланюк М. П. Олімпіади юних математиків : Посібник для вчителів / М. П. Маланюк, В. І. Лукавецький. – Київ: Радянська школа, 1985. – 88 с.

5. Методична розробка з математики [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://www.google.com.ua/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjrqaO5lZHLAhUinXIKHXMgBKwQFghLMAc&url=http%3A%2F%2Fwww.teacherjournal.com.ua%2Fattachments%2F30037_%25D0%25AF%25D0%25BA%25D1%2589%25D0%25BE%2520%25D0%25B2%25D0%25B8%2520%25D1%2585%25D0%25BE%25D1%2587%25D0%25B5%25D1%2582%25D0%25B5%2520%25D0%25BD%25D0%25B0%25D0%25B2%25D1%2587%25D0%25B8%25D1%2582%25D0%25B8%25D1%2581%25D1%258F%2520%25D0%25BF%25D0%25BB%25D0%25B0%25D0%25B2%25D0%25B0%25D1%2582%25D0%25B8.doc&usg=AFQjCNGdUgPotbj4gR4krHfS18wX5tbGcA&sig2=PKnWE02nUdTUGrw6Ou766g&bvm=bv.115277099,d.bGQ.

6. Сухарева Л. С. Задачі на переливання, зважування, перекладання / Л. С. Сухарева. – Харків: Вид. група "Основа", 2007. – 48 с.

Анотація. *У статті розглянуто теоретичні відомості стосовно розв'язування задач на переливання та зважування; вказані методичні рекомендації щодо розв'язання таких задач; наведено приклади.*

Ключові слова. *Математичний гурток, задачі на переливання, задачі на зважування.*

Качанюк Світлана Сергіївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика»*

ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

Вступ. Позакласна робота з математики складає невід'ємну частину навчально-виховного процесу навчання математики, складного процесу впливу на свідомість та поведінку школярів, поглиблення та розширення їхніх знань та навичок таких факторів, як зміст самого навчального предмету – математики, всієї діяльності вчителя у поєднання з різнобічною діяльністю учнів. Зацікавити учнів математикою, показати її могутність і красу, примусити полюбити її - завдання кожного вчителя математики. Досвідчені вчителі створюють на кожному уроці позитивний емоційний фон, настрій, який полегшує сприймання будь-якого матеріалу. Уміння бачити цікаве й дивуватися приносить дітям радість, породжує творчі поривання, розвиває уяву, що особливо важливо на уроках математики. Таке вміння потрібно виховувати і розвивати в учнів систематично як на уроках, так і в позакласній роботі з математики.

Мета статті: Розкрити прикладне значення чисел Фібоначчі та розглянути базові задачі з даної теми.

Виклад основного матеріалу. Позакласна робота з математики є складовою частиною всього навчального процесу, природним продовженням роботи на уроці. У позакласний час учні різнобічно розвиваються, виділяються учні з особливими задатками до математики. У позакласній робот ми можемо знайти саме тих учнів, які зможуть взяти участь у олімпіаді. Адже на олімпіадах пропонують завдання, що не виходять за межі чинної програми з математики, але їх умови мають бути нестандартними. Для того щоб виконати такі завдання, учні повинні вміти самостійно і навіть сміливо мислити, мати гарну просторову уяву, стійкі навички раціональних обчислень та перетворень виразів [2].

Необхідно зазначити, що успіх проведення змагання школярів значною мірою залежить від якості підготовчої роботи. Треба організувати лекції, консультації, спеціальні випуски стінних газет, присвячені розв'язуванню олімпіадних задач. Засвоєння методів розв'язування таких задач вимагає від учнів напруженої активної розумової діяльності і є основою для майбутньої наукової роботи. Уміння розв'язувати нестандартні задачі свідчить про високий рівень володіння математичним апаратом.

Як уже говорилося олімпіадні задачі відходять від шкільної навчальної програми і включають багато різноманітних цікавих тем і окремих тематичних задач [4].

Мова в статті піде про «Числа Фібоначчі». Просто необхідно ознайомити учнів у позакласній роботі з даною темою. Числа Фібоначчі можна вивчати не лише у формі лекції, консультації, а й у формі екскурсії, оскільки дана тема має надзвичайно широке прикладне значення, числа Фібоначчі дуже яскраво

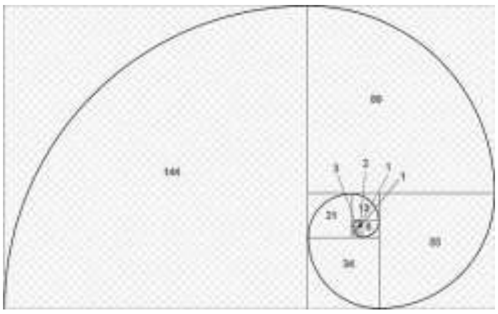


Рис. 1

проілюстровані природою.

Послідовність Фібоначчі вилилась ні у що інше, як спіраль Архімеда (рис.1). Тож використовуючи такий метод позакласної роботи, як екскурсії, практичні роботи тощо можна продемонструвати учням яскраві приклади природи, що керуються математичними законами (рис. 2).

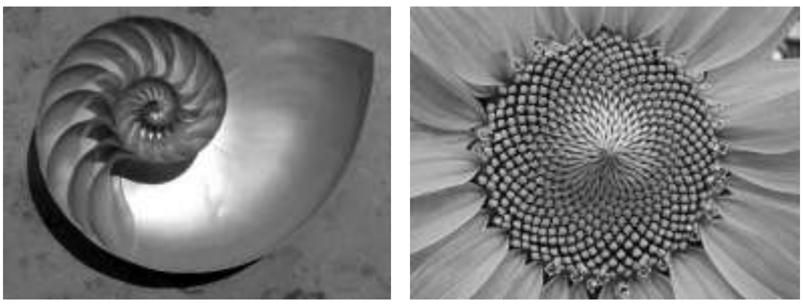


Рис. 1

Але все це лише для зацікавлення учнів цією темою. Варто продемонструвати учням математичну суть даного явища.

Числа Фібоначчі – це елементи послідовності натуральних чисел $U_1, U_2, \ldots$, які визначаються початковими значеннями $U_1 = U_2 = 1$ та рекурентним співвідношенням:

$$U_{n+1} = U_{n-1} + U_n, \text{ де } n > 2,$$

тобто, це числа ряду 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,34,.. [3].

Провідною задачею, що приведе учнів до розуміння теми і є задача „Про розмноження кроликів": „Скільки пар кроликів можна розвести протягом року маючи одну пару, якщо кожна пара кожного місяця породжує нову пару, яка з другого місяця здатна давати потомство, і при цьому кролики не гинуть" (рис. 3).

Розглянемо інші задачі, які також приводять до чисел Фібоначчі. Задача про кроликів та наступні усі є базовими для розв'язування олімпіадних задач, що вимагають знання послідовності Фібоначчі.

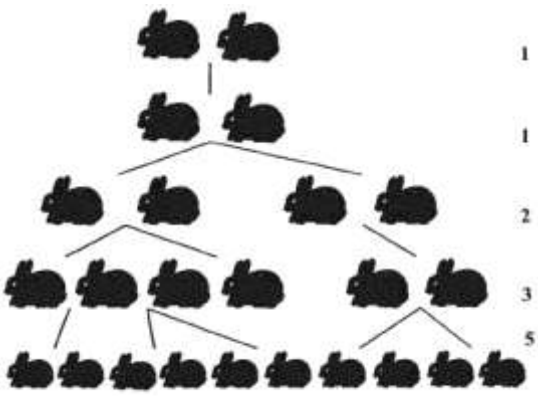


Рис. 2

Задача «Про розміщення листків на гілці».

Якщо листки на гілці розміщені поодинці, то вони завжди ростуть навколо стебла не по колу, а по гвинтовій лінії. При цьому для кожного виду рослин характерний свій кут розходження двох сусідніх листків, який, як стверджують ботаніки, буває більш-менш сталий в усіх частинах стебла. Цей кут звичайно подають дробом, який показує, яку частину кола він становить.

Так, у липи і у в'яза кут розходження листків дорівнює 12, у бука - 13. Якщо скласти послідовність найбільш поширених кутів розходження (в частинах кола) для рослин, які ростуть у нашій місцевості, то ряд знаменників для такої послідовності утворює послідовність чисел Фібоначчі.

Задача « Про фарбування будинків у містечку».

Будинки у містечку потрібно пофарбувати так, щоб кожен поверх виявився пофарбованим або в білий, або в блакитний колір. З естетичних міркувань ніякі два сусідні поверхи не повинні бути пофарбованими в блакитний колір. Скількома способами можна пофарбувати будинки в містечку, дотримуючись вказаних вимог, якщо число їх поверхів визначено?

Одноповерхові будинки можна пофарбувати двома способами, двоповерхові - трьома, триповерхові - п’ятьма способами. Це означає, що із

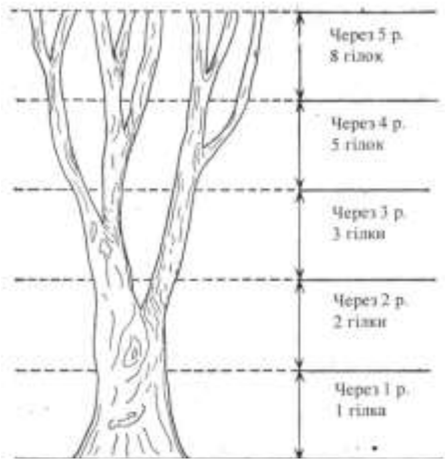


Рис. 3

збільшенням кількості поверхів, число способів зростає так: 2, 3, 5,... Якщо в містечку є будинки з більшою кількістю поверхів, цей ряд треба продовжити. Далі, знаючи скільки в містечку одно-, дво-, три- і т. д. поверхових будинків, неважко отримати розв’язок цієї задачі.

Задача «Про ріст дерев».

Нехай деяке дерево росте таким чином, що кожна нова гілка протягом першого року тягнеться догори або вбік, а потім (починаючи з другого року) щорічно дає по одному бічному пагону (рис. 4)

Скільки гілок буде на дереві, яке виросло із саджанця без жодного бічного паростка через 1, 2, 3, 4, 5, і т.д. років?

Ще деякі задачі, що приводять до поняття послідовності чисел Фібоначчі. Нескінченна доріжка розрізана на квадратики. Перед першим з квадратиків стоїть жабка, яка вміє стрибати стрибками двох видів – довгими і короткими.

Коротким стрибком жабка перестрибує на наступний квадратик, а довгим перестрибує через квадратик. Знайти число різних маршрутів, якими жабка може достребнути до третього квадрата; до четвертого квадрата; до сьомого квадрата.

Висновок. Завдання вчителя – зацікавити учня, схилити його на свій бік, переконати у важливості матеріалу, який вивчається. Звичайно, це має проходити без психологічного тиску. Другою сходинкою є підбір необхідних матеріалів, комплексу задач, які будуть найбільш актуальними при підготовці. Нарешті, бажано, щоб у процесі ознайомлення з інформацією та новими методами її освоєння дитина навчилась творчо мислити, залучати знання, отримані при вивченні різних дисциплін, але мають безпосереднє відношення до цільового предмету [1].

Література

1. Акуленко І. А. Готуємося до олімпіади / І. А. Акуленко, В. В. Атамась, О. М. Козлова – Черкаси: Видавництво «Місто», 2008.

2. Бевз Г. П. Методи навчання математики. – Х. : Видавнича група «Основа», 2003.

3. Воробйов Н. Н. Числа Фібоначчі. – М.: Наука,V1984.

4. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: навчальний посібник. – К. : Видавництво А. С. К., 2004.

Анотація. *У даній статті розглянуто особливості вивчення задач на застосування чисел Фібоначчі. Також розкрито прикладне значення теми,.*

Ключові слова. *Числа Фбоначчі, позакласна робота.*

Клєйманов Владислав Олександрович
студент 4 курсу, спеціальність «Математика»*

ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ НАВИЧОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ПОШУК ВИГРАШНОЇ СТРАТЕГІЇ ГРИ

Вступ. Для розв'язування задач, в яких йдеться про досягнення мети за допомогою послідовності ходів – зокрема, потрібно з'ясувати хто з гравців перемагає в тій чи іншій грі – тобто потрібно описати стратегії, правила вибору ходів, які забезпечують досягнення мети; у задачах про ігри при цьому потрібно довести, що стратегія забезпечує виграш при будь-яких діях партнера.

Мета даної статті: розробити добірку задач для математичного гуртка, що розв'язуються за допомогою пошуку виграшної стратегії гри.

Виклад основного матеріалу. «Люди завжди були вправними у винаході ігор, тут немає межі вільному польоту думки, залишається лише побажати, щоб було створено цілий курс ігор, які можна трактувати математично».

Ґотфрід Вільгельм Лейбніц

Деякі важливі ідеї математичної теорії ігор проявляються навіть в елементарних задачах на ігри двох осіб. Для свого розв'язання такі задачі потребують мінімуму фактичних знань з математики, але вимагають достатньо розвиненого мислення. Тому вони дуже популярні на математичних олімпіадах.

Відповідно до класифікації, ігри двох осіб – це конкурентні інтелектуальні ігри. Вони характеризуються такими основними рисами:

1) у кожній грі беруть участь двоє гравців;
2) суть гри у тому, що суперники по черзі виконують певні дії – ходи; кількість ходів скінченна (хоча, можливо, і як завгодно велика);
3) умовою гри обумовлено, в чому полягає заключна виграшна стратегія; виграє той з гравців, після чийого ходу ця позиція досягається;
4) гра є відкритою для обох гравців, тобто у будь-який момент гри кожен з гравців має повну інформацію про її перебіг. [2]

Такі задачі умовно можна розділити на три класи:

1) задачі, в яких виграшна стратегія базується на ідеї симетрії;
2) задачі, в яких міркування ведеться з кінця, для відшукання початкових виграшних позицій;
3) задачі, в яких результат гри не залежить від дій обох гравців.

Хочеться зробити ще й таке зауваження: у таких задачах гравці ходять по черзі, причому пропускати хід заборонено. [3]

Широковідомими іграми двох осіб є ігри в шахи та шашки. Навпаки, так звані азартні ігри – в кості, в доміно, в карти, навіть в «морський бій», не входять до окресленого кола ігор двох осіб, бо не є відкритими для обох осіб.

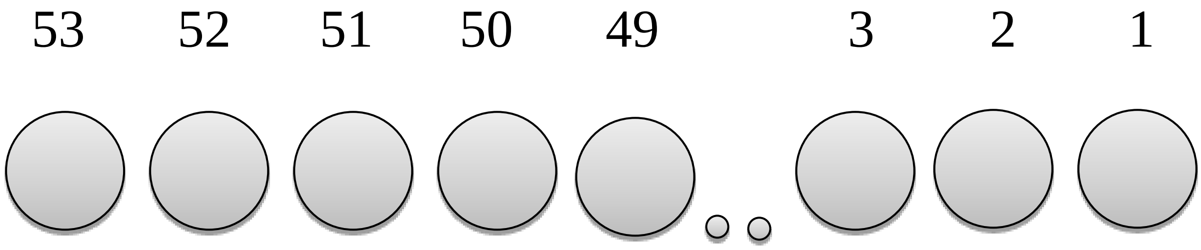
Гра в шашки, а особливо в шахи, виявилася по-справжньому геніальним винаходом людства. Не дивлячись на доволі прості і «прозорі» правила, повний аналіз цих ігор з виробленням конкретних стратегій для досягнення виграшу на сьогодні навіть не уявляється практично можливим.

Виграшною стратегією називається такий спосіб ведення гри одним з гравців, при якому він перемагає, незалежно від того, як грає інший. Зрозуміло, що виграшна стратегія може існувати лише для одного з гравців. А відповідь на запитання «для кого саме?», отже, залежить від того, за ким з гравців перший хід.

Універсальним методом для пошуку виграшних стратегій є аналіз гри «з кінця». Суть цього методу стане зрозумілою з прикладу, який зараз розглянемо.

Приклад 1. Правила грі такі. На купці лежать 53 камінці. Кожен із двох гравців за один хід може взяти будь-яку кількість камінців від 1 до 4. Виграє той, хто забере останній камінець. У кого з гравців – того, що робить перший хід (назвемо його першим), чи у його суперника (назвемо його другим), – є виграшна стратегія і в чому вона полягає?

Розв’язання. Розмістимо умовно дані камінці в ряд, пронумерувавши їх числами від 1 до 53 у порядку, зворотному до того, в якому вони братимуться з купки (тобто, вважатимемо, що першим братиметься камінець з номером 53, а останнім – з номером 1) (Рис. 1).



(Рис.1)

Для того, щоб останнім своїм ходом (нехай у нього буде номер n) забрати камінець з номером 1 (і таким чином виграти гру), першому гравцеві після попереднього $n-1$ ходу суперника повинна залишитися будь-яка кількість камінців від 1 до 4. Для того ж, щоб заставити другого гравця залишити саме таку кількість камінців, а не, скажімо 6 чи 7 (що для першого гравця було б «катастрофою»), першому гравцеві після $n-2$ ходу потрібно залишити рівно 5 камінців. Тоді, яку б кількість – 1, 2, 3 чи 4 – не взяв другий гравець, перший останнім своїм ходом зможе забрати залишок.

Відповідно після $n-4$ ходу першого гравця повинно залишитися 10 камінців, після $n-6$ ходу – 15 камінців і т. д. Отже, «вихід» на номери, кратні 5, забезпечує першому гравцеві можливість гарантовано здобути перемогу у грі. А для цього йому потрібно першим своїм ходом взяти 3 камінці з даних 53-х. Далі після кожного ходу суперника слід брати таку кількість камінців, щоб залишалося число кратне 5. Це і є виграшна стратегія, причому існує вона для першого гравця. [2]

Суттєве спрощення аналізу гри «з кінця» досягається з використанням понять виграшна та програшна позиції у грі.

Позицією у грі називають стан гри після чергового ходу. Так, у наведеному прикладі позиціями є всі можливі кількості камінців у купці. Кінцевий стан гри, яким визначається перемогу у грі, називається кінцевою позицією, а початковий стан, визначений умовою гри, – початковою позицією. Кінцевою позицією у згаданій грі є 0 камінців, а початковою – 53 камінця.

Цілком природно вважати програшною, зокрема, кінцеву позицію. Адже з неї уже немає ніяких ходів. Так само природно вважати виграшною кожну позицію, з якої до кінцевої позиції можна дійти одним ходом. Адже гравець, якому випало ходити з цієї позиції, може зайняти кінцеву позицію і, отже, здобути перемогу у грі. Цю визначальну характеристику останніх виграшних позицій приймають за означення усіх виграшних позицій у грі. А саме, позиція називається виграшною, якщо існує принаймні один хід, який перетворює її у позицію програшну. Якщо ж такого ходу немає, то позиція програшна, тобто будь-який хід з програшної позиції перетворює її на виграшну.

Для більшої зручності виділимо ці характеристики окремо:

1) кінцева позиція – програшна;
2) для кожної виграшної позиції існує принаймні один хід, який перетворює її у програшну;
3) будь-який хід із програшної позиції, яка не є кінцевою, перетворює її у виграшну.

Зрозуміло, що визначення усіх програшних позицій у грі рівносильне визначенню стратегії гри для здобуття перемоги, адже створення одним із гравців послідовних програшних позицій для суперника за умови скінченної кількості ходів неминуче призведе і до кінцевої програшної позиції (знову ж таки для суперника), тобто – до перемоги у грі. [2]

Симетричні стратегії – це виграшні стратегії, розроблені на основі симетрії стартової позиції гри. Аналіз розв'язувань таких задач показує, що в іграх із симетричною стартовою позицією здебільшого виграє той, хто не порушує її симетрію, а порушену суперником симетрію стартової чи ігрової позиції може поновити. Цей простий висновок часто допомагає здобути перемогу в ігрових задача з симетричною стартовою позицією.

Приклад 2. У таблиці розміром 1×13 клітинок хлопчик і дівчинка по черзі замальовують одну або дві сусідні клітинки. Перемагає той, хто замалює останню клітинку. Хто виграє – хлопчик, який починає гру, чи дівчинка?

Розв'язання. Позначимо буквою О сьому клітинку таблиці і розглянемо таблицю як симетричну фігуру відносно цієї клітинки. Хлопчик не порушить симетрії стартової позиції гри, якщо своїм першим ходом замалює клітинку О.

Симетрію ігрової позиції, напевно, порушить дівчинка, які б клітинки вона не замальовувала, а хлопчик, навпаки, завжди порушену симетрію може поновити – для цього йому слід замалювати клітинки, симетричні клітинкам відносно клітинки О, які замалювала дівчинка. Якщо хлопчик до закінчення гри триматиметься такої стратегії, то він виграє.

Приклад 3. Хлопчик і дівчинка по черзі фарбують клітинки таблиці розміром 1986×1986. За один хід дозволяється зафарбувати будь-які дві не зафарбовані раніше клітинки, що мають спільну сторону. Починає цю гру хлопчик, а переможцем вважається той, після ходу якого вже не можна продовжувати гру (у таблиці немає двох сусідніх вільних клітинок). Як слід грати дівчинці, щоб завжди перемагати у цій грі?

Розв’язання. Стартова позиція гри симетрична відносно точки О перетину діагоналей таблиці. Тому хлопчик будь-яким першим ходом порушує симетрію; дівчинці для перемоги треба фарбувати клітинки, які симетричні відносно точки О тим клітинкам, що їх зафарбував хлопчик, виконуючи свій хід.

Симетрія ігрових позицій забезпечує існування множини пар «прообраз – образ». У розглянутих задача такими є пари клітинок таблиць. Гравець, дбаючи про симетрію ігрової позиції, зберігав пари «прообраз – образ». Він давав можливість супернику під час виконання ходу використати «прообраз» і цим самим гарантував можливість виконання свого наступного ходу, використовуючи симетричний «образ».

Іноді пари, подібні симетричним парам, можна використовувати і в задачах, стартова позиція яких не є симетричною. Виграшну стратегію, яка передбачає використання пар, називають парною стратегією. Зазначимо, що конкретних порад щодо вибору «пар» не існує. Кожного разу виділення «пар» здійснюється, виходячи з умови конкретної задачі.

Приклад 4. Двоє грають у таку гру. Спочатку перший гравець ставить коня на довільну клітинку шахівниці 8×8, потім другий гравець робить хід цим конем, потім хід робить перший і т. д. При цьому забороняється ставити коня на клітинку, де він уже побував раніше. Програє той, хто не зможе зробити черговий хід. Хто виграє за правильної гри?

Розв’язання. «Пари» клітинок, які забезпечать другому гравцеві перемогу, містяться у прямокутниках розміром 2×4. Тому після першого ходу гравця, який почав гру, другий гравець подумки поділяє шахівницю на вісім прямокутників зазначених розмірів і виконує свій хід, залишаючи коня у виділеному прямокутнику. Відповідаючи у такий спосіб на кожний хід суперника, другий гравець досягне перемоги. [1]

Висновки. Проаналізувавши вище подану добірку задач на пошук виграшної стратегії гри, можна зробити висновок, що відшукання виграшної стратегії є досить важливим і заслуговує уваги. Добірка задач допоможе Вам сформувати уявлення алгоритму розв’язання олімпіадних задач з даної теми.

Література

1. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики. / О. М. Вороний. – Х.: Вид. група «Основа», 2008. – 255 с.
2. Тадеєв В. О. Неформальна математика. 6 – 9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається у школі. / В. О. Тадеєв – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. – 288 с.
3. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. / В. А Ясінський – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.

Анотація. *У данній статті висвітлено добірку вправ які допоможуть вам у розумінні і розв’язанні задач на пошук виграшної стратегії гри за допомогою гри «з кінця» та методу симетричної стратегії. Також вони стануть доцільними при підготовці до роботи математичного гуртка.*

Ключові слова: *виграшна стратегія гри, симетрія, симетрична стратегія, симетрія стартової позиції гри.*

Кузема Олександр Олександрович
студент 4 курсу, спеціальність «Математика»*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ОПТИМІЗАЦІЮ, ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ ПІД ЧАС ПІДГОТОВКИ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Вступ. Однією з актуальних проблем на сучасному етапі розвитку педагогічної теорії та практики є активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів. Саме від її розв'язання залежить ефективність навчальної діяльності, яка проявляється в міцному засвоєнні знань, стимулюванні та розвитку інтересу до навчання, формуванні самостійної думки та підготовці до самостійного життя.

Активний розвиток учнів сприяє їхній підготовці до математичних олімпіад. Одним з найважливіших компонентів цієї підготовки є розвиток творчого мислення учнів, в свою чергу під цим розуміється розв'язування нестандартних задач або задач стандартного вигляду, які розв'язуються нестандартними шляхами. До таких задач можна віднести задачі на оптимізацію.

Мета даної статті: оглядово показати як розв'язування задачі на оптимізацію допомагає підвищити навчально-пізнавальну діяльність учнів при підготовці до олімпіад з математики.

Виклад основного матеріалу. Задачі на оптимізацію – це задачі, суть яких полягає у знаходження найбільшого і найменшого значення величин. Ці задачі та їх розв'язання привертали до себе увагу на протязі всієї історії математики у великих фахівців та любителів. Довгий час кожна задача на оптимізацію розв'язувалась своїм індивідуальним шляхом. З часом з'явилось багато красивих, важливих, яскравих і цікавих задач в алгебрі, геометрії, фізиці, що пов'язувалися саме із пошуком максимумів і мінімумів. Особливого значення ці задачі набули у наші дні коли, як ніколи, відчувається потреба в найбільш ефективному використанні природних багатств, людських ресурсів, матеріальних і технічних засобів.

У шкільному курсі математики пропонується розв'язування задач на оптимізацію. Вони розвивають в учнів інтерес до дослідницької роботи, крім того забезпечують розвиток творчої активності. Така постановка задач на оптимізацію сприяє розширенню сфери використання навчального матеріалу, підвищує роль цих завдань в здійснені мети математичної освіти – навчити школярів застосуванню математики в різних галузях людської діяльності. Задачі на оптимізацію допоможуть дітям ознайомитись з деякими ідеями і прикладними методами математики, які часто застосовують в трудовій діяльності, в пізнанні навколишнього світу. Такі задачі можуть вплинути на зміст навчального матеріалу, на розуміння школярами можливостей використання теорії на практиці. Проте розв'язуванню такого роду задач у школі приділяється мало часу, ось тому їх розглядають на позакласних годинах, на гуртках, а також при підготовці до олімпіад обласного або всеукраїнського значень.

Математичні задачі на оптимізацію є одними з найскладніших у шкільному курсі математики і значною мірою сприяють активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, формуванню їх самостійної творчої діяльності, розумінню і закріпленню знань з різних тем шкільного курсу. Аналіз задач і вибір методу їх розв'язування дозволяють учневі глибше зрозуміти специфіку різних методів розв'язування [2].

Одним з яскравих прикладів задач на оптимізацію – це задачі, в умовах яких проситься оцінити значення якогось виразу. Звичайно, задачі такого типу розв'язуються методом оцінки, ним досить часто користуються і він має свої власні особливості. При розв'язуванні алгебраїчних задач, зазвичай цим методом доцільно розв'язувати задачі, що пов'язані з нерівностями, в тому числі і з нерівністю Коші (Коші-Буняковського-Шварца). Із задачами даного типу учні достатньо часто зустрічаються на олімпіадах: довести нерівність або ж знайти найбільше і найменше значення виразу, використовуючи нерівності, тому вчителі акцентують увагу на гуртках чи при підготовці до олімпіад саме на таких задачах. В чому ж полягає суть методу оцінки?

- ✓ Розглядається конкретний вираз.
- ✓ Відокремлюється одна або кілька величин, які характеризують даний вираз.
- ✓ Вимагається оцінити величину, яку виділили, або сукупність величин, тобто довести, що величина z задовольняє одну із нерівностей виду $z \geq m$ або $z \leq M$, де m та M визначені умовою задачі.

Щоб розв'язати задачу методом оцінки слід встановити справедливість однієї із нерівностей ($z \geq m$ або $z \leq M$), тобто довести, що для кожного z, що належить одній із нерівностей, має зміст даний вираз і, задовольняють нерівність, даний вираз немає змісту. Заключним етапом розв'язку задачі є визначення екстремальних значень m і M.

Давайте розглянемо приклад, який розв'язується саме з використанням методу оцінки.

Задача1. Знайти найбільше і найменше значення функції $\arcsin^3 x + \arccos^3 x$.

Розв'язання

Нехай $\arcsin x = \alpha; \arccos x = \beta; \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Тоді наш вираз набуде такого вигляду:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = y.$$

Найменшим значенням функції буде найбільше значення добутку $\alpha \cdot \beta$. Оскільки $\beta \geq 0$, то найбільше значення виразу $\alpha \cdot \beta$ слід шукати коли $\alpha > 0$. Так як $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, то за нерівністю Коші $\alpha \cdot \beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$. $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}; \alpha \cdot \beta \leq \frac{\pi^2}{16}$. Найбільше значення $\alpha \cdot \beta$ при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, тоді найменше значення функції:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4};\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad y_{\min} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2}\alpha\beta = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Найменше значення $\alpha \cdot \beta$, буде при $\alpha < 0$, хоча й абсолютні величини α і β були найбільші. При $x = -1$ буде $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ і $\beta = \pi$.

Враховуючи ці значення, добуток буде мінімальним, тому що α приймає мінімальні значення, а β - максимальні.

Отже, $x = -1$ при функція приймає найбільше значення:

$$y_{\max} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi}{2} \cdot \pi \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi^3}{8}$$

Відповідь: Найбільше значення $\frac{7\pi^3}{8}$, найменше значення $\frac{\pi^3}{32}$ [1].

При розв’язувані задач даним методом, учні мають можливість розвинути логічне мислення та творчу уяву. Крім того в школяра збільшується дослідницький інтерес, адже фактично він досліджує певну функцію, використовуючи при цьому знання, отриманні за попередні роки навчання.

Висновки. При підготовці учнів до олімпіади обласного чи всеукраїнського рівнів важливим чинником є зацікавленість школяра у самому процесі навчання, крім того під час цього має підвищуватись рівень навчально-пізнавальної діяльності. Це виражається через запитання, прагнення думати, пізнавальну самостійність у процесах сприйняття, відтворення, розуміння та творчого застосування.

На відміну від інших галузей у математиці даний результат досягається розв’язуванням різнотипових задач. Так при підготовці старшокласників досить часто використовують задачі на оптимізацію, адже досить часто саме в цих задачах просять знайти найбільше чи найменше значення тригонометричного виразу, як це було проілюстровано в даній статті, або при розв’язанні учень має використовувати похідні.

Задачі такого типу є зазвичай нестандартними, а тому слід звернути увагу, що під час їх розв’язування учні можуть оволодіти новими методами та прийомами, мають можливість засвоїти нові математичні факти, які вони можуть уже застосовувати під час розв’язування інших задач. Крім того задачі на оптимізацію корисні й тим, що зазвичай не містять алгоритмічних підходів, тобто, завжди потребують пошуків нових підходів, що стимулює пізнавальний інтерес учнів, формує навички проведення аналізу систематизації висування гіпотез, допомагає оволодіти дедуктивним методом, активізувати самостійну пошукову діяльність. А в свою чергу все раніше перераховане є саме запорукою підвищення навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Література

1. Нагібін Ф. Ф. Екстремуми / Федор Федорович Нагібін. – Москва: Просвещение, 1968. – 120 с.
2. Науменко А. А. Екстремальні задачі як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів під час вивчення геометричних перетворень // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету: збірник наукових праць звітно-наукової конференції викладачів університету за 2012 рік, 9-10 лютого 2013 року / укл. Г. І. Волинка, О. В. Уваркіна, О. П. Ємельянова. – К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. – С. 250-251.

Анотація. *Стаття присвячена можливостям розв’язування задачі на оптимізацію задля підвищення навчально-пізнавальної діяльності учнів при підготовці їх до математичних олімпіад.*

Ключові слова: *навчально-пізнавальна діяльність, задачі на оптимізацію, підготовка до математичних олімпіад.*

Наконечний Олег Олександрович
студент магістратури, спеціальність «Математика*»

НАВЧАННЯ УЧНІВ ПОШУКАМ ШЛЯХІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ

Вступ. Діофантові рівняння займають особливе місце серед різних типів рівнянь. Робота має на меті ознайомити учнів з діофантовими рівняннями та способами їх розв'язування. Водночас вони не являються програмною темою шкільного курсу математики. Найчастіше вони зустрічаються в ролі завдань математичних олімпіад. Ознайомити учнів з діофантовими рівняннями та різними способами їх розв'язування, можна на факультативних заняттях чи на засіданнях математичного гуртка. Кожен спосіб супроводжується теоретичним обґрунтуванням, прикладами розв'язаних задач та задачами для самостійного розв'язування.

Мета даної статті: розкрити поняття, основні ідеї, різні способи та методи розв'язування діофантових рівнянь першого степеня.

Виклад основного матеріалу. Рівняння виду $P(x, y, ...z) = 0$, де $P(x, y, ...z)$ - многочлен декількох змінних з цілими коефіцієнтами для яких потрібно знайти цілі розв'язки, називають діофантовими рівняннями. Названі вони ім'ям грецького математика Діофанта, який жив у III столітті н.е. Його книга «Арифметика» містила 189 задач з цілими числами, для кожної з яких наводилося один або декілька розв'язків.

Розв'язати діофантове рівняння означає:

a) з'ясувати, чи має рівняння хоча б один ненульовий розв'язок в цілих числах;

b) якщо рівняння має розв'язок в цілих числах, то з'ясувати скінченна чи нескінченна множина його розв'язків;

c) знайти всі цілі розв'язки рівняння.

Лінійні діофантові рівняння виду $ax+by=c$ навчились розв'язувати ще до Діофанта.

Стародавні греки знали, що якщо це рівняння має один цілий розв'язок $(x_0;y_0)$, то його буде задовольняти нескінченна множина пар $(x;y)$ виду $x=x_0+bk; y=y_0-bk$, де k - будь яке ціле число.

Математики Стародавньої Греції та Стародавньої Індії знали методи розв'язання деяких рівнянь другого степеня виду $ax^2+bxy+cy^2=dz^2$. Зокрема їм були відомі всі піфагорові трійки натуральних чисел x,y,z, що задовольняють рівняння $x^2+y^2=z^2$. Всі трійки взаємно простих піфагорових чисел стародавні математики знаходили за формулами $x=m^2-n^2, y=2mn, z=m^2+n^2$, m,n - натуральні числа причому $n>m$.

Особливе місце серед діофантових рівнянь займає рівняння $x^n+y^n=z^n$, де n – натуральне число. Французький математик П'єр Ферма довів, що при $n>2$ рівняння $x^n+y^n=z^n$ не має розв'язків в натуральних числах x,y,z.

Рівняння виду $ax+by=c$ де a,b,c – числа, а x,y – змінні, називають діофантовим рівнянням першого степеня з двома змінними. Для розв'язання рівняння застосовують наступні теореми.

Теорема 1. Якщо $a i b$ - взаємно прості числа, то для будь якого цілого c, рівняння $ax+by=c$ має хоча б один розв'язок в цілих числах.

Теорема 2. Якщо $a i b$ мають спільний натуральний дільник $d\neq 1$, а ціле число c не ділиться на d, то рівняння $ax+by=c$ не має розв'язків в цілих числах.

Теорема 3. Якщо $a i b$ взаємно прості числа, то рівняння $ax+by=c$ має нескінченну кількість розв'язків, які знаходять за формулами $x=x_0+bk; y=y_0-ak$, де $(x_0;y_0)$– будь який цілий розв'язок даного рівняння, $k\in Z$.

Частинний розв'язок $(x_0; y_0)$ можна знайти підбором, для малих $a i b$, а у випадку коли числа $a i b$ великі, то користуємось наступною теоремою.

Теорема 4. *НСД*$(a,b)=d$ може бути записаний у вигляді $d = am + bn$, де m,n цілі числа.

d знаходимо за алгоритмом Евкліда.

Розв'язати в цілих числах рівняння.

1. $13x + 21y = 55$

Розв'язання.

Так як *НСД(13,21)=1,* то дане рівняння має безліч розв'язків. Підбором встановлюємо частинний розв'язок $(x_0; y_0) = (1;2)$. Тоді загальний розв'язок має вигляд $x = 1 + 21k; y = 2 - 13k; k \in Z$. Відповідь: $x = 1 + 21k; y = 2 - 13k; k \in Z$.

Рівняння виду $ax + by + cz = d$, де a,b,c,d - числа, `x, y, z - змінні, називають лінійним діофантовим рівнянням першого степеня з трьома змінними.

Теорема 5. Лінійне діофантове рівняння $ax + by + cz = d$ має розв'язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли d ділиться на *НСД*(a,b,c).

Розв'язки знаходять за формулами $x = u_0 - mt + b_1k; y = v_0 - nt - a_1k; z = t$, де (u_0, v_0) - частинний розв'язок.

Розв'язати рівняння в цілих числах:

1. $5x = 3y + 7z$

Розв'язання.

Так як *НСД(5;-3;-7)=1* і 0ділиться на 1, то рівняння має розв'язки в цілих числах. Так як *НСД(3;7)=1* , то можна представити $5 = 3m + 7n$ де m,n - деякі цілі числа. Підбором знаходимо, що $m = 4; n = -1$.

Підставимо в умову замість $2183x - 1961y = 37$.

Маємо $(3m + 7n)x = 3y + 7z, m = 4, n = -1$, то

$$12x - 7x = 3y + 7z;\quad 12x - 7x - 3y - 7z = 0;\quad 3(4x - y) - 7(x + z) = 0;$$

$$3(y-4x)+7(z+x)=0.$$

Нехай $y-4x=u;\ z+x=v$, тоді маємо рівняння: $3u+7v=0$, частинний розв'язок якого $u_0=0;\ v_0=0$. Отже, загальний його розв'язок $u=7k;\ v=3k;\ k\in Z.$ Тепер $y-4x=7k;\ z+x=3k.$ Знаходимо загальний розв'язок данного рівняння: $x=t;\ y=7k+4t;\ z=3k-t;\ k,t\in Z$. Відповідь: $x=t;\ y=7k+4t;\ z=3k-t;\ k,t\in Z$.

2. $3x+2y-5z+t=0$

Розв'язання.

Запишемо рівняння у вигляді $3x+2y+a=0$, де $a=t-5z$ (тобто розглядатимемо як діофантове першого степеня з трьома невідомими).

Так як *НСД(3;2;1)=1* і 0 ділиться на 1, то рівняння має розв'язки в цілих числах. Так як *НСД(3;2)=1,* то можна представити $1=3m+2n$, де m,n- деякі цілі числа. Способом підбору $m=1;\ n=-1$. Підставимо в рівняння $3x-2y+a=0$ замість 1 (1=3-2). Маємо $3x+2y+(3-2)a=0$ $3x+2y+3a-2a=0;$ $3(x+a)+2(y-a)=0$. Нехай $x+a=u;\ y-a=v$, тоді маємо рівняння $3u+2v=0.$

Частинний розв'язок цього рівняння $u_0=0;\ v_0=0$, а загальний його розв'язок $u=2k;\ v=-3k,\ k\in Z$.

Тепер $x+a=2k;\ \ y-a=-3k,\ k\in Z$.

$x=2k-a;\ \ a=t-5z;$ то $x=2k-t-5z.\ k\in Z$

$y=-3k+a;\ \ a=t-5z;$ то $y=-3k+t-5z.\ k\in Z$

Знайдемо загальний розв'язок даного рівняння:

$$x=2k-p-5l;\ \ y=-3k+p-5l;\ \ z=l;\ \ t=p;\ \ k,p,l\in Z.$$

Відповідь: $x=2k-p-5l;\ y=-3k+p-5l;\ z=l;\ t=p;\ k,p,l\in Z$.

Розв'язування діофантових рівнянь розкладанням на множники.

Розв'язати в цілих числах рівняння:

1. $x^2-3xy-2=x-3y$

Розв'язання.

Перепишемо рівняння у вигляді $x^2-3xy-x+3y=2$.

Розкладемо на множники ліву частину рівняння. $(x^2-3xy)-(x-3y)=2;\ x(x-3y)-(x-3y)=2;\ (x-3y)(x-1)=2$.

Можливі випадки: $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-1=1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-3y=1 \\ x-1=2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x-1=-1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-3y=-1 \\ x-1=-2 \end{cases}$.

Маємо розв'язки систем: $(2;0);\ (3;\frac{2}{3});\ (0;\frac{2}{3});\ (-1;0)$, але пари $(3;\frac{2}{3})$ та $(0;\frac{2}{3})$ не задовольняють умові рівняння, т.я. $x, y \in Z$. Отже розв'язки рівняння $(2;0);\ (-1;0)$

Відповідь: $(2;0);\ (-1;0)$

2. $x^2-3xy+2y^2=3$

Розв'язання.

Розкладемо на множники ліву частину рівняння:

$$(x^2-2xy)-(xy-2y^2)=3;\ x(x-2y)-y(x-2y)=3;\ (x-2y)(x-y)=3.$$

Можливі випадки: $\begin{cases} x-2y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-2y=-3 \\ x-y=-1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x-y=-3 \end{cases}$

Маємо розв'язки рівняння: $(-1;-2);\ (5;2);\ (1;2);\ (-5;-2)$.

Відповідь: $(-1;-2);\ (5;2);\ (1;2);\ (-5;-2)$

Висновки. У даній статті ми розглянули методи розв'язування діофатових рівнянь першого степеня та допоміжні теореми які потрібні для розв'язування даних рівнянь.

Література

1. Бевз В. Програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 5-11 класи / В. Бевз, А. Мерзляк, З. Слепкань. // Математика в школі № 6. – 2003. – с. 1-14.

2. Лейфура В. М. // Математичні олімпіади школярів України 1991 – 2000 / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – К.: Техніка, 2003.

3. Thue A. Et par antydningertil en taltheoretiskmetode // Kra. VidenskSelsk. Forh.Monthly. 1902. Vol. 7. P. 57-75.

Анатоція. *У даній статті розглянуто методика розв'язування діофантових рівнянь першого степеня.*

Ключові слова: *діофантові рівняння першого степеня, методика розв'язування діофантових рівнянь першого степеня.*

Орлова Анастасія Русланівна
студентка 1 курсу, спеціальність «Математика*»

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ ГРАФІЧНИМ СПОСОБОМ ТА МЕТОДОМ КООРДИНАТ

Вступ. Одним із головних завдань навчально-виховного процесу в школі є активізація діяльності учнів, забезпечення розвитку інтелектуальних можливостей особистості. Використання нестандартних прийомів розвиває вміння швидко зорієнтуватись під час вирішення будь-яких типових чи нетипових задач.

Не завжди при розв’язуванні різноманітних математичних задач алгебраїчний метод є найраціональнішим. Часто задачі на розв’язування рівнянь, їх систем та інші завдання найпростіше розв’язуються за допомогою побудови графіків та з використанням методів координат.

Мета статті: ознайомити учнів з нестандартними способами розв’язування олімпіадних задач, зокрема, графічним способом та методом координат.

Виклад основного матеріалу. Суть методу координат як методу розв'язання задач полягає в наступному: виражаючи в координатах різні геометричні співвідношення, ми можемо вирішувати геометричні задачі засобами алгебри. Зворотно, користуючись координатами, можна тлумачити алгебраїчні та аналітичні співвідношення і факти геометрично і таким чином застосовувати геометрію до вирішення алгебраїчних задач. Методом координат найчастіше розв’язують задачі на відшукання геометричних місць точок та на доведення залежностей між лінійними елементами геометричних фігур.

Розв’язуючи задачу координатним методом, слід виконати такі дії:

1. Записати геометричну задачу мовою координат.
2. Перетворити вираз чи обчислити його значення.
3. Перевести знайдений результат на мову геометрії.
4. Записати відповідь.

Проілюструємо суть методу на прикладах.

Задача 1. Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він прямокутник.

Доведення:

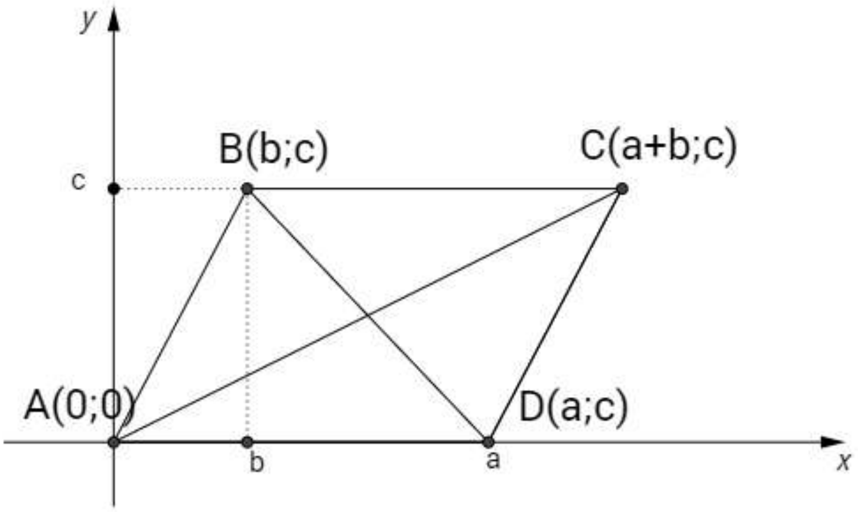


Рис. 1

Розмістимо паралелограм у системі координат так, щоб його вершини мали координати: A(0;0), B(b;c), C (a+b;c), D(a;0), причому a > 0, b $\geq$ 0, c > 0 (рис. 1). За умовою AC = BD. Виразимо відстані між точками A і C, B і D через їхні координати:

$$AC=\sqrt{\left(a+b-0\right)^2+\left(c-0\right)^2},\ BD=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}.$$

Тоді $\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}$,

або $(a+b-0)^2+(c-0)^2=(a-b)^2+(0-c)^2$, звідси $4ab=0$.

Оскільки a > 0, то b = 0, а це означає, що точка B (b;c) лежить на осі Oy. Тому кут BAD прямий. Звідси випливає, що паралелограм ABCD – прямокутник. Доведено.

Задача 2.

Знайдіть найменше значення виразу: $\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+9}$

Розв’язання.

Даний приклад можна розв‘язувати за допомогою похідної, але найбільш простим є наступне розв‘язання. Достатньо поглянути на рисунки:

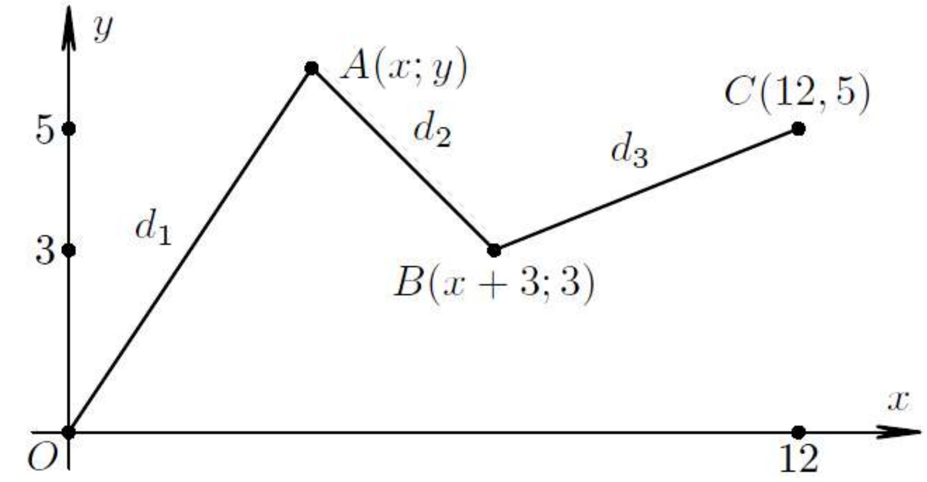


Рис.2

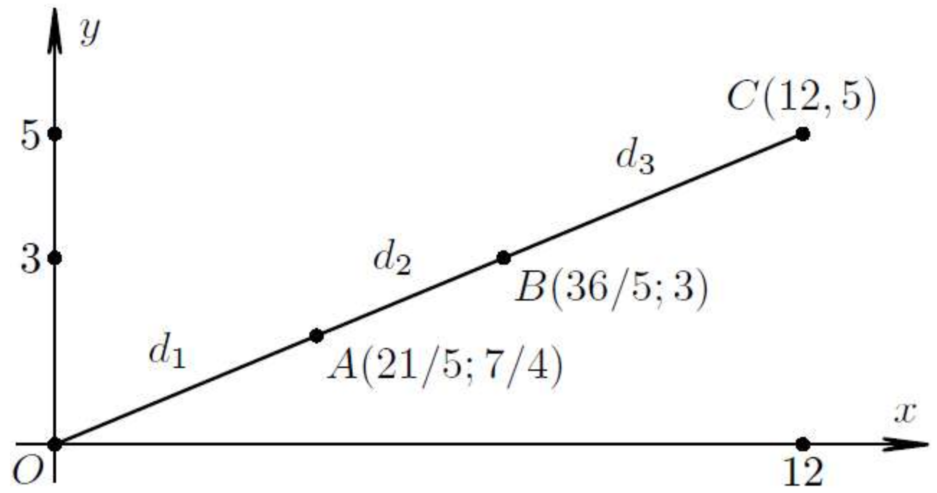


Рис.3

Нехай $d_1=\sqrt{x^2+y^2}$, $d_2=\sqrt{(x-3)^2+9}$, $d_3=\sqrt{(x-9)^2+4}$, точка О (0;0) – початок координат (рис. 2). Початковий виразом є сума відстаней між трьома точками *A(x; y), B(x+3; 3), C(12; 5)*. Дійсно:

$$|OA|=\sqrt{(X-0)^2+(Y-0)^2}=d_1;$$

$$|AB|=\sqrt{(x+3-x)^2+(3-y)^2}=d_2;$$

$$|OA|=\sqrt{(2-(x-3))^2+(5-3)^2}=d_3.$$

Отже, найменше значення суми відстаней d_1, d_2, d_3 досягатиметься, якщо точки *A* і *B* опиняться на одному відрізку, що сполучає точки *O* і *C* (рис. 3).

Перевіримо, чи таке розташування точок можливе. Рівняння прямої, що проходить через точки O і C має вигляд: $\frac{x}{12}=\frac{y}{5}$, але, оскільки дана пряма повинна проходити через точку *B (x+3; 3)*, приходимо до системи:

$$\begin{cases} \frac{x}{12}=\frac{y}{5}; \\ \frac{x+3}{12}=\frac{3}{5}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{7}{4}; \\ x=\frac{21}{5}. \end{cases}$$

Таким чином, доведено, що розташування, коли всі точки знаходяться на одній прямій, можливе. Отже, найменше значення виразу $\sqrt{12^2+5^2}=13$.

Відповідь*:* 13.

Тепер розглянемо декілька олімпіадних задач на застосування графічногоспособу розв’язання.

За дослідженнями Г.З. Генкіна , застосування графіків та діаграм до розв‘язування задач в одних випадках може майже повністю замінити обчислювальні прийоми, в інших − полегшити найкращий вибір невідомого для складання рівняння, чи підказати хід роздумів для відшукання інших прийомів розв‘язування.

Вміння застосовувати графічний метод у практиці сприяє розвитку просторової уяви та логічного мислення.

Розглянемо приклад: Задача 3. Розв’яжіть рівняння для всіх дійсних значень параметра *a* $||x-1|-4|=a$.

Розв’язання.

Розглянемо дві функції $f(x)=||x-1|-4|$ і $g(x)=a$ (рис. 4).

Пробудуємо графік функції $f(x)=||x-1|-4|$ за допомогою геометричних перетворень $x-1\to|x-1|\to|x-1|-4\to||x-1|-4|$.

Графік $g(x)=a$ - горизонтальна пряма, що рухається вгору-вниз по осі *Oy*

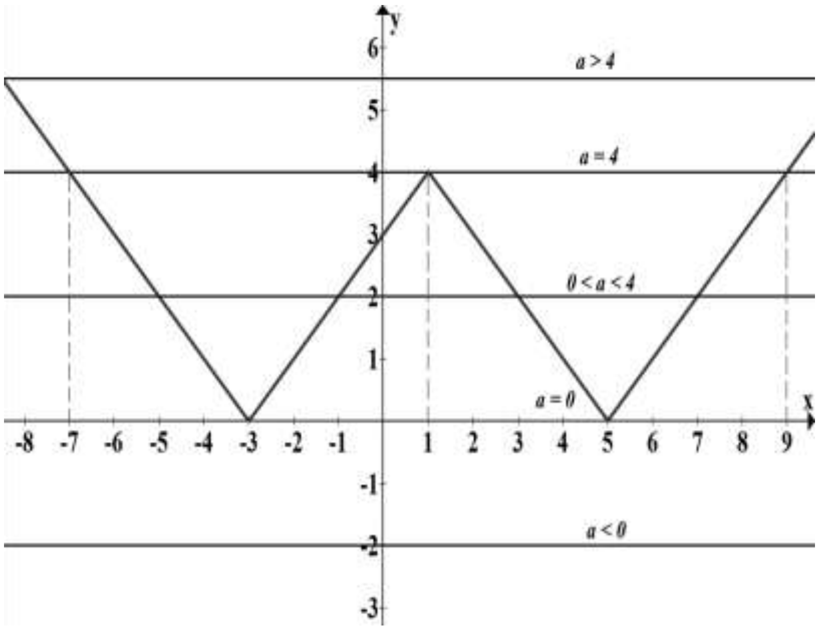


Рис.4

Відповідь:

$a<0 \Rightarrow x \in \varnothing$; $a=0 \Rightarrow x=-3, x=5$; $0<a<4 \Rightarrow x=5 \pm a; x=-3 \pm a$; $a=4 \Rightarrow x=-7; x=1; x=9$; $a>4 \Rightarrow x=5+a; x=-3-a$. [1]

Задача 4.Знайдіть всі значення параметра при якому система має безліч розв’язків $\begin{cases} |y-x|=2 \\ y=|x|+a \end{cases}$.

Розв’язання

Побудуємо графіки обох рівнянь в одній системі координат (рис.5).

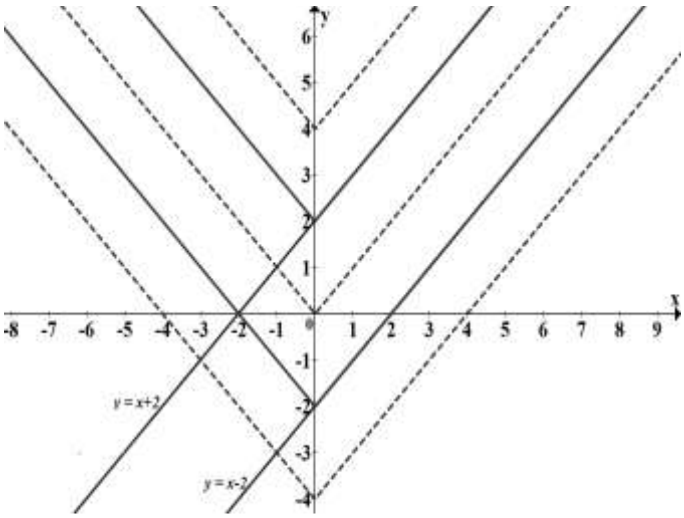


Рис.5

Графік першого рівняння – дві паралельні прямі: $y=x+2$ і $y=x-2$

Графік другого рівняння – кут, що рухається вгору-вниз по осі Оу.

Кутові коефіцієнти прямих і правої сторони кута однакові і дорівнюють одиниці.

Очевидно, що система має безліч розв’язків при $a = \pm 2$

Відповідь: -2; 2. [3]

Висновок. Отже, графічний прийом унаочнює процес розв‘язування, запобігає виникненню помилок при побудові точних розв‘язків, вказує проміжки на числовій осі, де треба шукати розв‘язки рівнянь. Метод координат – це універсальний метод. Він забезпечує тісний зв'язок між алгеброю і геометрією, які, з'єднуючись, дають «багаті плоди».

Література

1. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова. – К.: Факт, 2006.
2. Вишенський В. А., Перелестюк М. О. Конкурсні задачі з математики / В. А. Вишенський, М. О. Перелестюк. – К.: Вища шк., 2001.
3. Конет І. М. Обласні математичні олімпіади / І. М. Конет. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2000.
4. Маслай Т. С., Щоголева Л. О. Рівняння та системи рівнянь з параметрами / Т. С. Маслай, Л. О. Щоголева. – К.,2000.

Аннотація. *У даній статті розглянуто графічний спосіб розв’язання олімпіадних задач з математики, використовуючи який учні зможуть з легкістю розв’язати різні олімпіадні задачі, значно спрощуючи хід роботи.*

Ключові слова: *метод координат, графік, дослідження, параметр.*

Петрук Дар'я Олександрівна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

ТЕХНОЛОГІЯ ОЗНАЙОМЛЕННЯ УЧНІВ ІЗ ПОНЯТТЯМ «ЗОЛОТИЙ ПЕРЕРІЗ»

Вступ. Сучасне суспільство гостро потребує креативного та культурного розвитку особистості. Вважаємо, що частково розвиток креативного мислення може здійснюватися під час вивчення математики, зокрема геометрії. Але для всебічного культурного розвитку особистості одного предмету замало, тому необхідно організовувати позаурочну форму навчання так, щоб учні виходили за рамки шкільної програми, дізнавались щось нове, та формували навички розв'язування завдань більш складного рівня.

Мета даної статті: показати геометричну інтерпретацію «золотого перерізу» й принципи побудови «золотих фігур»; розглянути олімпіадні задачі, пов'язані із «золотим перерізом».

Виклад основного матеріалу. Про «золотий переріз» знали ще у Давньому Єгипті й Вавилоні, в Індії та Китаї. Великий Піфагор створив таємну школу, де вивчалася містична суть «золотого перерізу». Евклід застосував його, створюючи свою геометрію, а Фідій – свої безсмертні скульптури. Платон розповідав, що Всесвіт влаштований згідно із «золотим перерізом», а Арістотель знайшов відповідність «золотого перерізу» етичному законові.

«Геометрія володіє двома скарбами: один з них – це теорема Піфагора. А інший – поділ відрізка в середньому й крайньому співвідношенні… Перший можна порівняти з мірою; другий більше нагадує дорогоцінний камінь», стверджував Йоганн Кеплер [3].

І якщо з теоремою Піфагора ми знайомі з 8-го класу й активно використовуємо її на уроках геометрії, то про золоте співвідношення, тобто поділ відрізка на дві нерівні частини, ми довідалися вийшовши за рамки пропонованої нам шкільної програми. Отож, «золотий переріз» – це такий поділ цілого на дві нерівні частини, за якого співвідношення всього відрізка до його більшої частини дорівнює співвідношенню більшої до меншої або поділ відрізка на дві нерівні частини таким чином, щоби більша частина була середнім пропорційним між усіма відрізками його меншою частиною. (Рис.1)

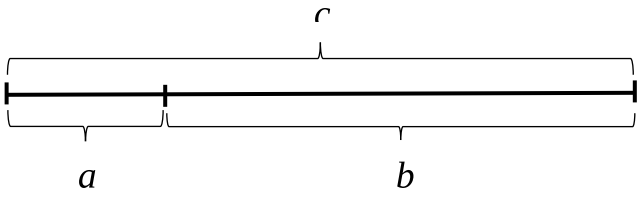


Рис.1

«Золотий переріз» – це ірраціональне число, яке є розв’язком рівняння $r^2 = 1 - r \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, і приблизно дорівнює 1,618. Можна довести таку теорему.

Теорема 1. Степенева послідовність (r^n) з коефіцієнтом золотого перерізу $r = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ є лінійною функцією відносно r з цілими коефіцієнтами.

Доведення.

За означенням $r^2 = 1 - r$.

Тому $r^3 = r \cdot r^2 = r(1-r) = r - r - r^2 = r - (1-r) = 2r - 1$ – лінійна функція.

Застосувавши метод математичної індукції матимемо: нехай $r^k = a + br$, $k \geq 3$. Тоді $r^{k+1} = r \cdot r^k = r(a+br) = ar + br^2 = ar + b(1-r) = b + (a-1)r$ – лінійна функція з цілими коефіцієнтами оскільки a, b – цілі додатні числа.

Теорема 2. Сума двох сусідніх членів степеневих прогресій з коефіцієнтом золотого перерізу r дорівнює попередньому членові.

Доведення.

Для довільних членів

$$r^{(k+1)} + r^{(k+1)} = r^2 \cdot r^{(k)} + r \cdot r^{(k)} = r^{(k)}(r^2 + r) = r^{(k)} \cdot 1 = r^{(k)}$$

На олімпіадах з математики зустрічаються задачі різного типу пов’язані із золотим перерізом, тому у позакласній роботі слід звернути увагу на такі завдання:

Задача 1. Обчислити: $(\sqrt{5}-2)^{10}$, $(\frac{7-\sqrt{5}}{2})^{12}$.

Методичні вказівки: $r^2 = 1 - r$

$r^3 + r^2 = r \Rightarrow r^3 = r - r^2 = r - (1-r) = 2r - 1;$

$r^4 + r^3 = r^2 \Rightarrow r^4 = r^2 - r^3 = 1 - r - (2r-1) = 2 - 3r;$

$r^5 + r^4 = r^3 \Rightarrow r^5 = r^3 - r^4 = 2r - 1 - (2-3r) = 2r - 1 - 2 + 3r = -3 + 5r.$

Задача 2. Розв’яжіть систему рівнянь так, щоб отримати найменшу похибку обчислень.

$$\begin{cases} (\sqrt{5}-2)x + (\sqrt{5}-1)y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ (\sqrt{5}-1)x + (7-\sqrt{5})y = 1. \end{cases}$$

Прийнято вважати, що поняття про золотий поділ ввів у науковий побут Піфагор, давньогрецький філософ і математик (VI в. до н.е.). Греки були в основному геометрами, навіть арифметики навчали своїх дітей з допомогою геометричних фігур. Квадрат Піфагора й діагональ цього квадрата були основою для побудови динамічних прямокутників. У фасаді давньогрецького храму Парфенона присутні золоті пропорції.

Лука Пачоллі був найвидатнішим математиком Італії у період між Фібоначчі й Галілеєм. Його вважають творцем нарисної геометрії. У 1509 році була видана його книга «Божественна пропорція» з ілюстраціями Леонардо да Вінчі. Книга була захопленим гімном золотій пропорції. Леонардо да Вінчі також багато уваги приділяв вивченню золотого поділу. Він робив перерізи стереометричного тіла, утвореного правильними п’ятикутниками, і щоразу одержував прямокутники з відношеннями сторін у золотому поділі. Тому він дав цьому поділу назву «золотий переріз». Так воно тримається й дотепер, як найбільш популярне.

Кеплер назвав золоту пропорцію такою, що продовжує саму себе. «Улаштована вона так, – писав Йоганн Кеплер, – що два молодші члени цієї нескінченної пропорції в сумі дають третій член, а будь-які два останні члени, якщо їх скласти, дають наступний член, причому така сама пропорція зберігається нескінченно» [3].

Знову «відкритий» золотий переріз був у середині XIX століття. У 1855 році німецький дослідник золотого перерізу професор Цейзинг абсолютизував пропорцію золотого перерізу, оголосивши її універсальною для всіх явищ природи й мистецтва.

Геометричні фігури, в основу яких покладений «золотий переріз», прийнято називати «золотими фігурами». Зрозуміло, є й золотий трикутник. Це рівнобедрений трикутник, у якого співвідношення довжини бічної сторони до довжини основи дорівнює 1,618. У зірчастому п’ятикутнику кожна з п’яти ліній, які складають цю фігуру, ділить іншу відносно золотого перерізу, а кінці зірки є золотими трикутниками. Із «золотих» трикутників складається «ореол» п’ятикінцевої зірки, яку товариство піфагорійців обрало своїм символом [2].

Уявлення про золотий переріз буде неповним, якщо не сказати про спіраль. Форма спірально завитої раковини привертає увагу Архімеда. Він вивчав її та вивів рівняння спіралі. Спіраль, накреслена за цим рівнянням, називається його ім’ям. Збільшення її кроку завжди рівномірно. На сьогодні спіраль Архімеда широко застосовується в техніці. Гете називав спіраль «кривою життя». Послідовність чисел 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55 і т.д. відома як ряд Фібоначчі. Якщо який-небудь член послідовності Фібоначчі розділити на попередній йому (наприклад, 13:8), результатом буде величина, яка коливається в межах ірраціонального значення 1,61803398875… Під час поділу будь-якого члена послідовність Фібоначчі на наступний за ним виходить просто зворотна до 1,618 величина (1:1,618=0,618).

Квітки й насіння соняшника, ромашки, лусочки в плодах ананаса, хвойних шишках «упаковані» по логарифмічних («золотих») спіралях, які завиваються назустріч одна одній, причому числа «правих» і «лівих» спіралей завжди відносяться одне до одного, як сусідні числа Фібоначчі (13:8, 21:13, 34:21, 55:34), межею послідовності яких є золота пропорція. Для багатьох квіткових рослин характерна пентагональна симетрія, яка відповідає пропорціям «золотого» перерізу. Відстані між листками на стеблі підкоряються правилу «золотого перерізу» [2].

Висновки. Одним із завдань навчання математики в школі є розвиток учнів засобами математики. Хоча навчальною програмою з математики не передбачено навіть ознайомлення учнів із золотим перерізом, на нашу думку цей матеріал заслуговує на увагу вчителів математики. По-перше, багато опублікованих матеріалів про золотий переріз дають змогу для підготовки та проведення в школі цікавого позакласного заходу. По-друге, закономірність, що характеризує золотий переріз може бути використана здібними до математики учнями у процесі розв'язування олімпіадних завдань.

Література

1. Бендукидзе А. Д. Золотое сечение / А. Д. Бендукидзе // Квант. – 1973. – № 8. – С.22-27.
2. Вірченко В. Про красу математики / В. Вірченко // Математика. – 2005. – №11. – С.1-3.
3. Волошинов А. В. Математика і мистецтво / А. В. Волошинов // Просвещение. – 1992. – 400 с.
4. Коломієць А. М. Математична гармонія природи / А. М. Коломієць // Ландо ЛТД. – 2007. – С.121-164.
5. Попова І. М. Відношення та пропорції / І. М. Попова // Математична газета. – 2006. – №4. – С.8-9.

***Анотація**. Стаття присвячена темі «Золотий переріз». У ній продемонстрований послідовний та зручний з методичної точки зору виклад, який дозволяє поглибити знання учнів з даної теми, та продемонструвати зв'язок геометрії із сферами соціокультурного життя.*

***Ключові слова*: *золотий переріз, гармонія, поділ відрізка, відношення, золоті фігури.*

Подчос Тетяна Анатоліївна
студентка 4 курсу, спеціальність «Математика»*

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА РОЗРІЗАННЯ У ПРОЦЕСІ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ В 6 КЛАСІ

Вступ. Розвивати логічне мислення учнів потрібно якомога раніше, оскільки воно сприяє їх творчому розвитку і навчає бачити красу математики, формувати до неї стійкий пізнавальній інтерес. З цією метою необхідно поглиблювати та систематизувати знання учнів з основного курсу математики, використовуючи нестандартні методи та задачі. Одним із цікавих видів математичних задач, які використовують на шкільних олімпіадах є задачі на розрізання. Такі задачі викликають в учнів інтерес, оскільки вони не потребують глибоких знань геометрії і зазвичай не мають універсального способу розв’язання, тому кожен учень може проявити своє творче мислення при їх розв’язуванні.

Задачі на розрізання виникли ще в давнину, їх розв’язанням займались давні греки та китайці. Автором першого трактату з цієї теми був Абул-Вефа, астроном X століття. Геометри розпочали вивчення задач на розрізання фігур та складання з їх частин іншої нової фігури лише на початку XX століття. Одним із основоположників цього розділу геометрії був Генрі Е. Дьюдені. Значних успіхів у вивченням задач на розрізання фігур досягнув Гаррі Ліндгрен [4]. Вивченням даного питання також займались: Єкимова М. О., Кукін Г. П., Шаригін І. Ф., Глубенюк В., Желтуха Т. В., Карайко А. В.

Мета даної статті: розглянути особливості вивчення задач на розрізання у позакласній діяльності учнів 6 класу; порівняти їх кількість у шкільних підручниках; розробити позакласний захід із використанням даного типу олімпіадних задач та визначити їх вплив на мотивацію учнів.

Виклад основного матеріалу. Навчити дітей бачити красу математики, розвивати та формувати любов до неї – одне з найважливіших завдань викладання математики, адже стійкий пізнавальний інтерес є одним з інструментів, що спонукає школярів до більш глибокого пізнання предмета, розвиває їхні здібності. Проте знання, які отримують школярі на уроках під час вивчення основного курсу математики, не завжди виявляються достатніми. Підготовка до математичних олімпіад вимагає додаткових занять. У зв'язку з цим зростає роль позакласної роботи з математики, під час якої учні поглиблюють знання з основного курсу, отримують додаткову інформацію, розвивають математичний кругозір та логічне мислення.

Задачі на розрізання допомагають якомога раніше формувати геометричну уяву на різному математичному матеріалі. Учні 6 класів можуть впоратись з ними, оскільки їх розв'язування не вимагає глибоких знань з геометрії. Разом з тим, задачі на розрізання не далекі від серйозних математичних задач. Із цих задач виникла теорема Бояї – Гервіна, а згодом і третя Проблема Гільберта [2, с. 5].

Задачі на розрізання поділяють на такі види [2, с. 5]: задачі на папері у клітинку (розрізання по сторонах клітинок); пентаміно (задачі, пов'язані з фігурами пентаміно); важкі задачі на розрізання (розрізання фігур складнішої форми); розбиття площини (задачі, в яких потрібно знаходити суцільні розбиття прямокутників на плитки, задачі про упаковування фігур у прямокутнику або квадраті); танграм (задачі, пов'язані з древньою китайською головоломкою «Танграм»); задачі на розрізання в просторі (при розв'язуванні яких учні знайомляться з розгортками куба, трикутної піраміди); задачі на розфарбовування (при розв'язуванні яких потрібно розфарбувати фігури); перетворення фігур (задачі, в яких одна фігура розрізається на частини, з яких складається інша фігура); площа фігур (задачі, в яких використовують властивості площ фігур).

Для вивчення у 6 класі рекомендуються задачі, для розв'язування яких не потрібні знання основ планіметрії, а достатньо використати кмітливість, геометричну уяву і найпростіші геометричні відомості.

Аналізуючи підручники 6 класу [1], [3], [5], [6] можна сказати, що задачі на розрізання не досить часто у них зустрічаються. Їх вивчення передбачено у програмах факультативних занять та гуртків, тому автори підручників відносять їх до особливих задач для розв'язання яких потрібно проявити кмітливість.

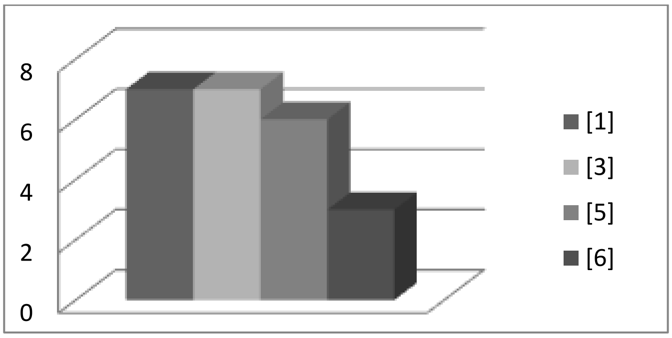


Рис. 2. Задачі на розрізання у шкільних підручниках (кількість)

Задачі на розрізання не мають чіткої схеми розв'язування, проте при їх вивченні необхідно акцентувати увагу на основних логічних моментах. Варто дати учням поради з розв'язування конкретних видів задач на розрізання. Наприклад, при розв'язуванні задач на папері у клітинку, у яких необхідно розділити задану фігуру на певну кількість рівних за розміром і формою частин, алгоритм може бути наступним: порахувати, скільки клітинок міститься у фігурі; визначити, яку кількість клітинок має містити кожна частинка, отримана при розрізанні; зобразити усі можливі комбінації із цієї кількості клітинок; відкиданням варіантів, які не підходять, знайти розв'язок.

Задачі на розрізання варто пропонувати учням на заняттях в нестандартній формі. Необхідно використовувати на уроках якомога більше наочності: різних карток, картинок, наборів фігур, схем, мультимедійних засобів навчання. Задачі на розрізання учні сприймають набагато краще, коли кожен з них має фігуру, яку за умовою задачі потрібно розрізати, можна заздалегідь запропонувати учням виготовити її вдома із картону.

Розглянемо розробку позакласного заходу – квесту з використанням задач на розрізання, який був проведений нами для 6 класу у Гайсинській середній загальноосвітній школі №4 під час проходження педагогічної практики.

Квест «Іван царевич та Сірий вовк»

Мета: вдосконалення вміння розв'язувати задачі на розрізання; розвивати логічне мислення, зосередженість, геометричну уяву; виховання згуртованості, інтересу до математики та участі у математичних олімпіадах.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ МОМЕНТ

Двом командам шестикласників видають маршрутні листи, у яких зазначені пункти розв'язування задач (шкільні кабінети) та розповідається історія за мотивами казки «Іван царевич та Сірий вовк», у якій говориться про те, що цар дав Івану завдання «знайти те, не знаю що» і пропонується учням допомогти Івану та вовку впоратись із завданнями, які трапляються їм у дорозі. Кожну команду супроводжує вчитель, який стежить за послідовністю виконання завдань згідно з маршрутом. У пунктах розв'язування задач вчителі задають запитання з певного предмету залежності від того, в якому кабінеті вони знаходяться та віддають командам листи із завданнями.

II. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Пункт «Чарівна криниця». Прийшли Іван із Сірим вовком до чарівної криниці, яка мала форму циліндра. Щоб туди спуститись, потрібно вирішити задачу: Як трьома прямими розрізами поділити циліндр на 8 частин?

Пункт «В гостях у Баби Яги». Пішли Іван з вовком до баби Яги, щоб дістати чарівний клубок, який сам показує дорогу. Та вона не хотіла віддавати таку цінну річ, тому загадала Івану важку загадку: розрізавши квадрат 6х6 на частини, складіть із них фігури, зображені на рисунках (Рис. 2) [2, с. 18].

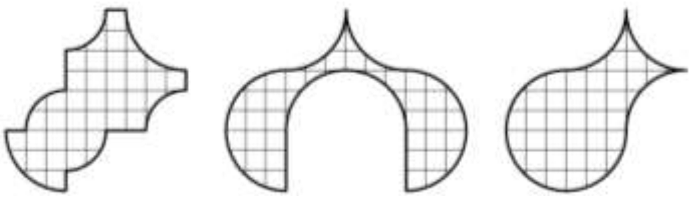


Рис. 3

Пункт «Кафетерій». Наші герої довго були дорозі, от і зголодніли, трапився їм кафетерій. Але й тут їм потрібно розв'язати задачу – кулінари спекли пироги дивної форми, і потрібно їх розрізати на 4 рівні за розміром і формою частини так, щоб лінія розрізу йшла по сторонах квадратиків (Рис. 3) [2, с. 10]. Як виконати це завдання?

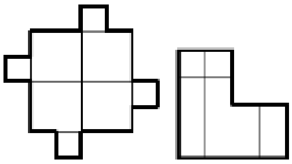


Рис. 4

Пункт «В гостях у Змія Горинича». Далі шукати «те, не знаю що» Іван Царевич і Сірий вовк вирушили до Змія Горинича. Він саме в цей час складав цікаву головоломку «Танграм». Якби Іван з вовком допомогли йому, то отримали б те, що шукали. Допоможете нашим героям? Використовуючи всі сім частин головоломки, складіть фігури, зображені на рисунку (Рис. 4) [2, с. 24 – 25].

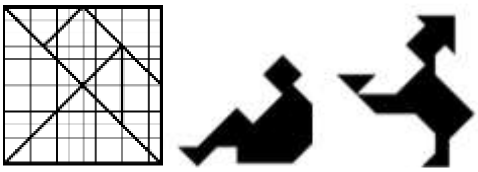


Рис. 5

Пункт «Повернення у замок». Взявши із собою те що шукали, Іван і Сірий вовк вирушили додому. Вхід у замок загороджувала величезна кам'яна стіна дивної форми. На ній був напис «Для входу в замок, поверніть один камінь так, щоб стіна стала рівною» (Рис.5) [2, с. 19]. Задумався Іван Царевич…

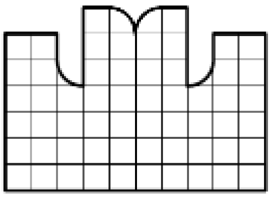


Рис. 6

III. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ

У кабінеті математики збираються учні обох команд, обраховують суму набраних балів та діляться враженнями. Відбувається визначення переможців.

Після проведення квесту інтерес учнів до математики значно підвищився. Із 29 учасників квесту, за даними опитування, 14 учнів виявили бажання відвідувати позакласні заняття з математики та взяти участь у олімпіаді.

Висновки. Таким чином, задачі на розрізання є одним з найцікавіших видів олімпіадних задач, які викликають інтерес в учнів завдяки тому, що не мають універсального методу розв'язування. Розв'язування таких задач розвиває геометричну уяву, логічне та творче мислення учнів, та формує інтерес до математики.

Література

1. Бевз Г. П. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Генеза, 2006. – 304 с.
2. Екимова М. А. Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин – М.: МЦНМО, 2002. – 120 с.
3. Істер О. С. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – К.: Генеза, 2014. – 296 с.
4. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание. Пер. с англ. Ю. Н. Сударева. Под ред. И с послесл. И. М. Яглома – М.: «Мир», 1977. – 256 с.
5. Мерзляк А. Г. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х.: Гімназія, 2014. – 400 с.
6. Тарасенкова Н. А. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. – К.: Освіта, 2014. – 304 с.

Анотація. *У статті розглянуто методику використання задач на розрізання у позакласній діяльності учнів 6 класу, подано розробку квесту із використанням різних видів задач на розрізання, а також здійснено порівняльну характеристику кількості таких задач у підручниках для 6 класу.*

Ключові слова*: задачі на розрізання, позакласна діяльність, квест. пентаміно, танграм.*

Сапсай Богдан Юрійович
студент 4 курсу, спеціальність «Математика*»

РОЗВИТОК МИСЛЕННЯ В ШКОЛЯРІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОГО ХАРАКТЕРУ

Вступ. На сьогоднішній день вивчення ймовірнісно-статистичного матеріалу є дуже важливою складовою у підготовці майбутніх фахівців різних галузей науки. Сучасній країні потрібні люди, здатні приймати нестандартні рішення, які вміють творчо мислити, добре орієнтуватися у звичайних життєвих ситуаціях і виробничої діяльності.

Необхідність формування імовірнісного мислення зумовлена й тим, що імовірнісні закономірності універсальні: сучасна фізика, хімія, біологія, демографія, соціологія, лінгвістика, весь комплекс соціально-економічних наук розвивається на базі ймовірнісно-статистичної математики. Запровадження елементів теорії ймовірностей у зміст математичної освіти є одним з найважливіших аспектів модернізації змісту освіти, тому що роль цих знань в сучасному світі підвищується, тому необхідно розвивати комбінаторні навички в учнів як можна раніше.

Мета статі. Показати добірку задач для розвитку комбінаторного складу розуму в учнів середньої школи та методи їх розв'язування.

Виклад основного матеріалу. Для початку розглянемо задачі, які можна розв'язати перебором можливих варіантів. Поступово будемо ускладнювати задачі та покажемо, що єдиного алгоритму для їх розв'язування немає. Саме цей факт і робить задачі комбінаторного характеру складними для учнів.

Задача№1

Скільки двоцифрових чисел можна скласти за допомогою цифр 3, 5, 7?

Розв'язання

В цій задачі слід звернути увагу учнів на те, що якщо безсистемно складати будь-які числа, можна щось загубити або написати якесь число двічі. Тому найкраще придумати спосіб, при якому жодне з можливих чисел не було втрачено і уникнути повторень. Один із таких способів – записувати можливі числа в порядку зростання: 33, 35, 37, 53, 55, 57, 73,75,77

Відповідь: 9 [2,с.128]

Задача №2

До завтрашнього дня потрібно виконати домашнє завдання з логіки, географії й математики у довільній послідовності. Скільки всього існує таких послідовностей?

Розв'язання.

Введемо для зручності позначення: Л – логіка, Г – географія, М – математика. Випишемо всі можливі послідовності за абеткою: ГЛМ, ГМЛ, ЛГМ, ЛМГ, МГЛ, МЛГ.

Відповідь: 6 [2, с.129]

Задача №3

Скількома способами можна розташувати 4 шашки на намальованою дошці так, щоб ніякі дві з них не перебували в одному ряду або одній колонці?

Розв'язання.

Почнемо перебирати варіанти по стовпчиках зліва направо:

1. Маємо першу шашку в першому стовпці - 2 варіанти (шашка може лежати або в верхній і нижній клітинці).

2. Маємо другу шашку в другому стовпці: $3-1=2$, (2 варіанти) де 3 - висота стовпчика, а 1 кількість вже зайнятих рядків.

3. У третьому - $4-2=2$ (аналогічно).

4. У четвертому - $5-3=2$ (аналогічно).

Разом $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$.

Відповідь: 16.[2,с.130]

Розглянувши ще декілька подібних задач, можна поступово ускладнювати завдання, які мають більшу кількість варіантів та складніший алгоритм дій. Наприклад:

Задача №4

На порожній від решти фігур шахівниці на полі $a1$ стоїть тура. Цю туру потрібно перевести на поле $h8$ за виконані один за одним три ходи. Скількома різними способами це можна зробити?

Розв’язання.

Переводимо туру з поля $a1$ на одне з 6 полів: $a2, a3, a4, a5, a6, a7$ (перший хід), з поля $a2$ $(\ldots a7)$ рухаємося на поле $h2$ $(\ldots h7)$ (другий хід), після цього рухаємо туру на поле $h8$. (6 способів)

Переводимо туру з поля $a1$ на поле $a8$ (перший хід), рухаємо туру з поля $a8$ на одне із 6 полів: $b8, c8, d8, e8, f8, g8$ (другий хід) після цього рухаємо туру на поле $h8$. (6 способів)

Діючи аналогічно і використовуючи рис 1. ми отримаємо відповідь 36

Відповідь: 36.[1,с.45]

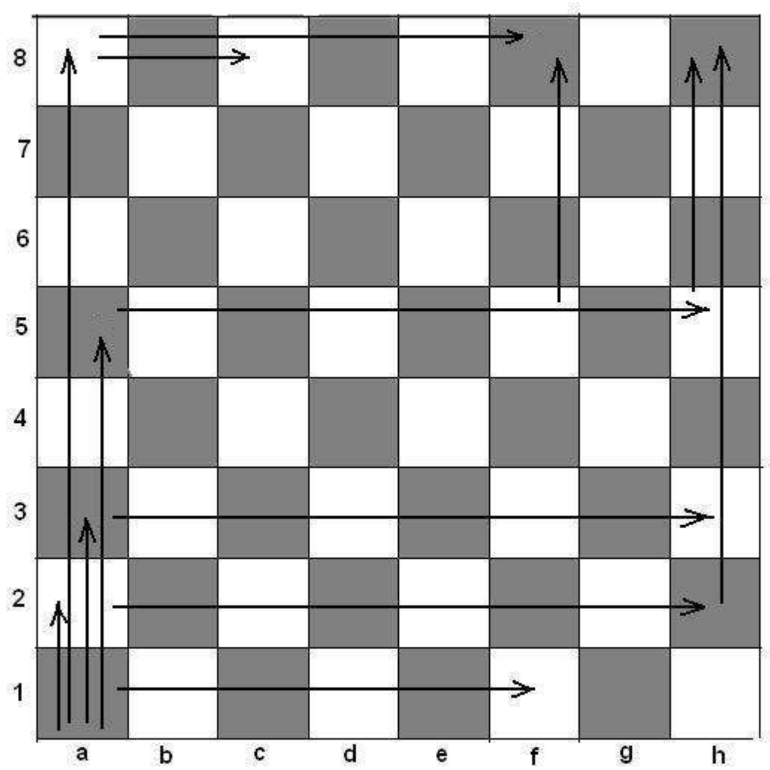


Рис.1

Виконуючи ці вправи учні повинні побачити, що для знаходження потрібної кількості варіантів слід мати певну стратегію дій. Існують випадки, коли замість перебору можна використати графічний або табличний метод. Для прикладу можна навести таку задачу:

Задача №5

Два гральні кубики червоний і білий підкидають один раз. Знайдіть кількість можливих результатів коли сума очок менша 7.

Розв'язання

Спосіб 1.

Можна обрати алгоритм дій подібний до задачі №1, тоді розв'язок буде мати вигляд(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (2;1), (2;2), (2;3), (2,4), (3;1), (3;2), (3;3),(4;1), (4;2), (5;1).

Відповідь: 15.

Спосіб 2 .

Побудуємо табличку подібно до таблички множення, у якій верхній рядок і крайній лівий стовпець це всі можливі значення двох кольорових гральних кубиків(позначимо червоний і білий кубики відповідно буквами i, j). Числа у комірках цієї таблички набувають значень $i + j$. Отримали всі можливі суми після одного підкидання двох гральних кубиків(таб.1). Можна помітити, що всі сімки розбивають таблицю на дві частини. У верхній частині всі числа менші 7 у нижній – більше 7. Отже, для розв'язання задачі залишається всього порахувати кількість клітинок у верхній частині таблиці і виключити повторення.

i/j	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Табл.1

Відповідь: 15.[4,с.6]

Слід звернути увагу учнів на те, що не завжди усі можливі події можна перебрати або зобразити, тоді треба шукати певні закономірності. Наприклад:

Задача № 6.

Сейф має секретний замок, який складається із 5 кружечків в кожний з яких встановлюється один із 36 символів. Замок відчиняється тільки при одній правильній комбінації із 5 символів. Скільки варіантів треба перебрати, щоб із впевненістю відкрити замок? Скільки часу на це піде, якщо для того, щоб скласти одну комбінацію треба 3 секунди?

Розв'язання

Розв'яжемо задачу для двох символів. Кожній із 36 літер у першому кружечку буде відповідати 36 літер у другому. Тому кількість всіх можливих комбінацій буде для двох символів 36^2. Аналогічно для трьох - 36^3. Побачили закономірність отже, кількість усіх можливих комбінацій для 5 символів - $36^5 = 6046176$. Тепер знайдемо час за який ми зможемо це зробити: $3 \cdot 6046176 = 181398528$ секунди. Це більше 50000 годин або більше ніж 5 років.

Відповідь: 6046176 варіантів, 5 років. [3,с.14]

Задача №7

Скільки існує трицифрових чисел у записі яких входить рівно одна одиниця?

Розв'язання

Для перерахунку всіх чисел, що відповідають умові задачі, розглянемо 3 випадки:

1) Число починається цифрою 1. Цифру в розряді десятків можна вибрати дев'ятьма способами, після цього цифру в розряді одиниць можна вибрати також дев'ятьма способами. Отже, у цьому випадку одержуємо $9 \cdot 9 = 81$ чисел

2) Цифра 1 - у розряді десятків. Першу цифру можна обрати вісьма способами (крім 0), другу - дев'ятьма способами. Одержуємо $9 \cdot 8 = 72$ чисел.

3) Цифра 1 - у розряді одиниць. Також 72.

Загальна кількість: 81+72+72=225

Відповідь: 225. [2,с.132]

Висновки. Як можна помітити розглянуті вище задачі не вимагають глибоких знань математики, тому що розв'язуються за допомогою логічних висновків та пильних спостережень. Такі задачі не мають єдиного алгоритму розв'язання, тому вважаються складними і нерідко виносяться на математичні олімпіади. Звідси випливає їхня значущість для сучасної освіти.

Література

1. Захарійченко Ю. О. Комбінаторне, імовірнісне мислення та математична статистика. Збірник завдань із повними розв'язками / Упоряд. Ю. О. Захарійченко, Л. І. Захарійченко, В. К. Репета, Л. А. Репета – К.: Редакції газет природничо-математичного циклу, 2014. – 128 с.
2. Геращенко В. О. Логіка. Збірник задач. 5-9 клас./ Укл. В. О. Геращенко– 2-ге видання, перероблене і доповнене – Х.:Торсінг плюс, 2012. – 384 с.
3. Перельман Я. И. Занимательная алгебра / Я. И. Перельман. – М.: «Наука», 1975. – 200 с.
4. Чорней Р. К. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики / Р. К. Чорней. - К: МАУП, 2003. – 328 с.

Анотація. *У цій статті було розглянуто декілька ключових задач із комбінаторики, розв'язані різними методами для учнів середньої школи. Розуміння цих задач дасть можливість учням підвищити свій інтелектуальний та розумовий рівень, а також підготуватись до вивчення розділу математики «Елементи теорії ймовірності і математичної статистики».*

Ключові слова*: Комбінаторика, теорія імовірності, логіка, комбінаторне мислення.*

Яшина Яна Миколаївна
студентка магістратури, спеціальність «Математика*»

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КРАЙНЬОГО ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

Вступ. Математична олімпіада – це змагання, метою якого є виявлення найбільш талановитих учнів у галузі математики, підвищення мотивації до вивчення математики та розвитку дослідницьких навичок. Для того, щоб учні навчилися розв'язувати олімпіадні задачі з математики потрібно навчити їх загальним підходам, методам, прийомам математичних міркувань. Розглянемо один із загальних підходів, який ми називатимемо правилом крайнього. Оскільки більшість цього матеріалу не входить до розділів шкільної програми з математики, цим варто займатися на заняттях математичних гуртків та факультативів. Цей метод можуть використовувати учні починаючи вже з 6-9 класу, оскільки він не є важким для розуміння.

Мета даної статті розгляд основних ідей принципу крайнього та його застосування при розв'язуванні олімпіадних задач учнями основної школи.

Виклад основного матеріалу. Правило крайнього є простою рекомендацією розглянути об'єкт, який володіє якими-небудь крайніми, або, як говорять математики, екстремальними властивостями. Якщо мова в задачі іде про множину точок на прямій, то правило «Розглянь крайнє» радить нам зосередити свою увагу на крайній точці множини (яка лежить найлівіше або найправіше). Якщо в задачі фігурує деякий набір чисел, то правило крайнього рекомендує нам розглянути найбільше та найменше із цих чисел [3].

Узагальненням принципу крайнього є принцип впорядкування, ідея якого полягає в тому, щоб розташувати числа в якому-небудь порядку, наприклад, в порядку зростання. Найчастіше принцип крайнього застосовують для скінченного числа дійсних величин, оскільки з будь-якого набору дійсних чисел можна вибрати найменше (найбільше число). Проте, зустрічаються задачі з нескінченною кількістю величин, в яких також можна застосувати принцип крайнього, оскільки в будь якій непорожній множині натуральних чисел можна вибрати найменший елемент. Строге доведення цього факту спирається на аксіоматику натуральних чисел, тому зазвичай при розв'язуванні задач це твердження дозволяється використовувати без доведення [2].

При вивченні принципу крайнього на заняттях математичного гуртка учням доцільно, на нашу думку, запропонувати наступні три задачі:

Задача 1. На нескінченному листі паперу в клітинку в кожній клітинці записано деяке натуральне число. Відомо, що число в кожній клітинці дорівнює середньому арифметичному чотирьох чисел, записаних в клітинках, суміжних з даною. Довести, що всі записані числа рівні один одному.

Задача 2. На площині взяли скінченну множину точок. Відомо, що площа довільного трикутника з вершинами в трьох з даних точок не більша одиниці. Доведіть, що всі дані точки можна накрити трикутником площею 4.

Задача 3. Семеро товаришів разом зібрали 100 грибів, до того ж кількість грибів у будь-яких двох із грибників різна. Доведіть, що знайдуться троє товаришів, які зібрали разом не менше 50 грибів.

Учням варто поставити питання: «Що спільного між цими задачами?». Для того, щоб допомогти учням дати відповідь на поставлене питання, запропонуємо їм розв'язати ці задачі.

Розв'язання задачі 1. Розглянемо клітинку в якій знаходиться найменше із усіх записаних чисел. (Якщо таких клітинок більше однієї, обираємо будь-яку із них). Нехай в цій клітинці записане число m, а в суміжних з нею – числа x, y, z і t. Тоді:

$$m \le x, m \le y, m \le z, m \le t \text{ і } m = (x + y + z + t)/4$$

Звідки одразу випливає, що $x = y = z = t$.

Таким чином в усіх клітинках суміжних з даною, також знаходиться число m. В свою чергу в клітинках суміжних з ними, також стоїть m і т. д. Таким чином ми довели, що всі записані числа рівні один одному.

Розв'язання задачі 2. Знайдемо для кожної з трьох даних точок площу трикутника, ними утвореного, і оберемо ту трійку, для якої ця площа максимальна (якщо таких трійок кілька, обираємо будь-яку з них). Нехай це – точки A, B, і C (див. рис. 1).

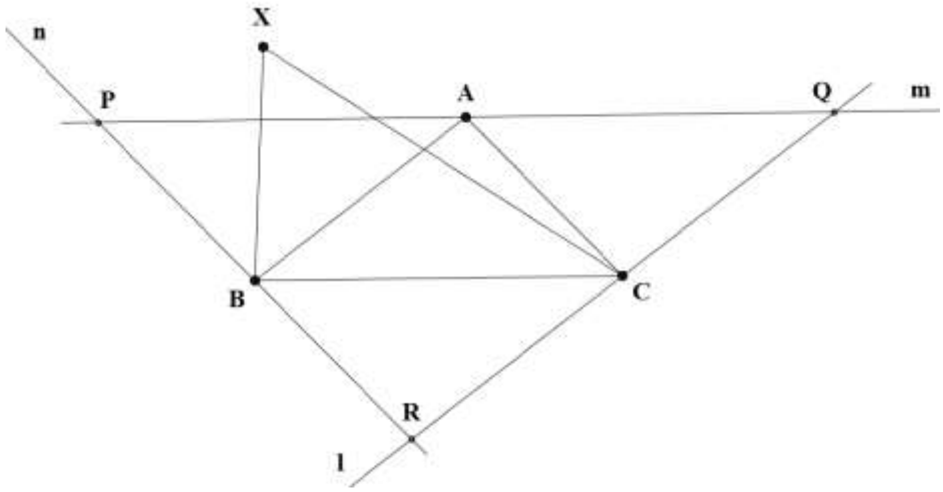


Рис. 1

Проведемо через точку A пряму m, паралельну прямій BC. Тоді всі дані точки повинні лежати з того самого боку від прямої m, що і точки A і B (дійсно, якщо X - одна з даних точок (див. рис. 1), то $S_{BCX} > S_{BCA}$). Провівши аналогічно прямі n і l через точки B і C, отримаємо, що всі дані точки лежать всередині трикутника PQR. Але, очевидно, $S_{PQR} = 4S_{ABC} \leq 4$.

Розв'язання задачі 3. Розглянемо трьох товаришів, які посіли перші три місця у змаганні по збиранню грибів. Нехай вони назбирали відповідно x, y, і z грибів, причому $x > y > z$. Тоді, якщо $z \leq 15$, то інші четверо товаришів назбирали разом не більше, ніж $14+13+12+11=50$, а три перших набрали не менше 50 грибів. Якщо ж $z \geq 16$, то $x+y+...+z \geq 16+17+18=51$.

Після цього можна спробувати дати відповідь на поставлене вище питання – «що ж спільного між цими трьома задачами?».

У всіх трьох задачах мова йшла про деякі однорідні предмети і одразу не було ясно, за який із цих предметів можна «зачепитись», щоб можна було розпочати певні міркування. Пригадаємо, як нам вдалося вибрати цей «початковий» предмет. В задачі 1 – це була клітинка з найменшим числом, в задачі 2 – трикутник з найбільшою площею, нарешті, в задачі 3 – найгірший із трьох найкращих грибників. Такий вибір зовсім не випадковий, тому що ми скористалися наступною корисною порадою, правилом крайнього: розглянути об’єкт, який володіє якими-небудь крайніми властивостями.

Якщо в задачі мова йде про які-небудь на перший погляд зовсім однорідні предмети, спробуйте їх як-небудь упорядкувати, і потім розгляньте «крайні» відносно цього порядку предмети. (Якщо крайніх виявилося більше одного, зазвичай достатньо розглянути будь-який із них).

Яким чином зазвичай обирають ці порядки? Якщо в задачі мова йде про числа, то мається на увазі природній порядок в множині всіх дійсних чисел, і є сенс спробувати розглянути найбільше і найменше із даних чисел, якщо, звісно, такі існують. Останнє зауваження має значення, тому, що нескінченна підмножина множин дійсних чисел може і не мати найбільшого або найменшого елемента. [3].

В подальшій роботі роботі математичного гуртка при вивченні принципу математичної індукції учням варто показати, що його також можна тлумачити як один із варіантів принципу крайнього.

Справді, нехай для кожного натурального n потрібно довести деяке твердження $T(\mathrm{n})$. Для доведення за індукцією вимагається:

1) Перевірити базу, тобто істинність твердження $T(1)$;

2) Для кожного натурального n довести індуктивний перехід $T(\mathrm{n}) \to T(\mathrm{n}+1)$

Тепер покажемо, як можна застосовувати принцип крайнього для доведення $T(\mathrm{n})$. Розглянемо множину M тих натуральних значень n, для яких $T(\mathrm{n})$ не виконується, і припустимо, що вона є не порожньою.

Тоді в множині M існує найменший елемент, позначимо його n_0. Якщо $n_0 = 1$, то дістанемо суперечність з пунктом 1). Якщо $n_0 > 1$, то застосуємо 2) у формі «якщо не $T(n_0)$, то не $T(n_0-1)$». Це означає, що твердження $T(n_0-1)$ не виконується, що суперечить вибору n_0.

Таким чином, множина M є порожньою.

Розглянемо задачу, яка ілюструє вище сказане.

Задача 4. Довести, що для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, ..., x_5$ виконується нерівність $(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2 > 4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)$.

Розв'язання задачі 4. Зауважимо, що ні ліва, ні права частина нерівності не зміняться, якщо виконати циклічну перестановку індексів, тобто якщо розглянути нову нумерацію чисел $x_1, x_2, ..., x_5$, яка зберігає їхній взаємний порядок розташування одне за одним (вважаємо, що число x_5 іде за числом x_1). Тому можна вважати, що число x_2 є найбільшим, тобто $x_2 \geq x_i$ $(1 \leq i \leq 5)$. Тоді,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+2(x_1x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_2x_5+x_3x_5-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_5-x_5x_1)=$$
$$=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_4-x_5)^2+2x_4(x_1+x_2-x_3)+2x_5(x_2+x_3-x_1)>0$$, бо всі числа додатні і $x_2 \geq x_3$, $x_2 \geq x_1$ [2].

Висновки. Принцип крайнього варто вивчати з учнями на заняттях математичного гуртка в основній школ, оскільки задачі на його застосування зустрічаються доволі часто. Водночас метод крайнього є доступним учням основної школи.

Література

1. Жук І. Правило крайнего / І. Жук. // Альфа. – 1999. – №4. – С. 1-2.

2. Лейфура В. М. Принцип крайнього в задачах на доведення нерівностей / В. М. Лейфура. // У світі математики. – 2004. – №1. – С. 31.

3. Розенталь А. Л. Правило крайнього / А. Л. Розенталь. // Квант. – 1988. – №9. – С. 53-57.

Анотація. *Описано правило крайнього та наведено приклади задач, які можна запропонувати учням 6-9 класів на заняттях математичного гуртка.*

Ключові слова: *правило крайнього, математичний гурток,олімпіадна задача.*

Навчально-методичне видання

Методичний пошук.
Організація позакласної роботи з підготовки учнів до математичних олімпіад

Випуск 6

Відповідальна за випуск О. І. Матяш
Оригінал-макет В. І. Магдич
Дизайн обкладинки В. В. Павлишен

Згідно до складання: дата
Підписано до друку: дата
Формат 64×90 1/16. Папір офісний.

Гарнітура: Times New Roman. Друк цифровий.
Умови. Друк. арк. 12.
Наклад 100 прим.

Віддруковано з оригіналів замовника.
ФОП Корзун Д.Ю.
21027, а/с 8825, м.Вінниця, вул. 600-річчя, 21.
Тел.:(0432)69-67-69, 603-000.
e-mail: info@tvoru.com.ua, http://www.tvoru.com.ua