Департамент освіти Вінницької міської ради
Міський методичний кабінет
Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №4 ім.Д.І.Менделєєва
Вінницької міської ради

Застосування методу координат до побудови графіків функцій та рівнянь і методика їх вивчення в школі

Наконечна Людмила Йосипівна,
кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського
Вотякова Леся Андріївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського
Білозор Віта Іванівна,
учитель математики,
спеціаліст вищої категорії,
старший вчитель загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів №4
ім.Д.І.Менделєєва
Вінницької міської ради

Вінниця 2019

Автори: **Наконечна Л. Й.,** кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Вотякова Л. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Білозор В. І., учитель математики, спеціаліст вищої категорії, старший вчитель загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів №4 ім.Д.І.Менделєєва Вінницької міської ради

Рецензенти: **Коношевський О.Л.,** доцент кафедри алгебри і методики навчання математики, кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Радер М. Л., вчитель математики комунального закладу «Загальноосвітня школа І - ІІІ ступенів № 4 імені Д. І. Менделєєва Вінницької міської ради», спеціаліст «вищої категорії», вчитель-методист

У посібнику розглянуто методичні особливості навчання учнів будувати графіки функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень. Посібник призначений для вчителів математики та студентів педагогічних університетів.

Бібліографічний опис

Наконечна Л.Й. Застосування методу координат до побудови графіків функцій та рівнянь і методика їх вивчення в школі / Навчально-методичний посібник / Наконечна Л. Й., Вотякова Л. А., Білозор В. І.. – Вінниця: ММК, 2019. – 89 с.

Рекомендовано науково-методичною радою закладу «Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №4 ім.Д.І.Менделєєва Вінницької міської ради».

Протокол № 1 від 29.08. 2019 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Державна національна програма “Освіта (Україна XXI століття)”, Національна доктрина розвитку освіти, Концепція загальної середньої освіти (12-річна школа) визначають, що розвиток сучасного суспільства, потреби України інтегруватись у спільноту найбільш розвинутих країн світу вимагають від школи виховання творчої особистості, здатної адаптуватись до динаміки змін та професійних пріоритетів. З огляду на це шкільний курс математики має спрямовуватися на розвиток компетентностей учнів.

Важлива роль у підготовці майбутніх фахівців належить розвитку умінь будувати та досліджувати різноманітні залежності, зокрема функціональні. Функції дозволяють у багатьох випадках розглядати з єдиних позицій різні теорії та факти всередині самої математики. Таким чином, вивчення функцій є центральним у курсі математики як з теоретичного, так і прикладного погляду.

Водночас практика навчання показує, що при вивченні функцій учні часто стикаються з труднощами, роблять помилки під час їх знаходження, дослідження та використання.

Як свідчать досвід викладання математики та результати зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень випускників загальноосвітніх навчальних закладів, рівень умінь учнів будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень є досить невисоким. За результатами зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень учнів з математики із завданням вказати із запропонованих п’яти рисунків рисунок, на якому зображено ескіз графіка функції $y = 3^{-x}$ справилося лише 29,84% абітурієнтів. Як бачимо для побудови графіка заданої функції потрібно було здійснити лише одне перетворення графіка функції $y = 3^{x}$ - симетричне відображення відносно осі Oy. Ще більші труднощі учні відчувають, якщо для побудови графіка функції потрібно здійснити кілька перетворень графіка.

Мета дослідження – розглянути методичні особливості формування в учнів умінь здійснювати геометричні перетворення графіків функцій і рівнянь та розв’язувати рівняння графічним способом.

Вивчення питання про геометричні перетворення графіків функцій є досить складним через певну невідповідність програм вивчення геометрії та алгебри у 9 класі. Тому формування уявлення про геометричні перетворення графіків функцій проводиться на інтуїтивному рівні, і вчитель не має змоги акцентувати увагу на строгих означеннях виділених ним видів перетворень. Основна увага приділяється встановленню і засвоєнню учнями зв'язку між рівнянням функції та певним видом перетворення графіка функції. Вивчення зв'язку між видом перетворення та рівнянням функції, проводиться через обчислення значень функції в окремих точках і спостереження за зміною значень функції в цих точках залежно від зміни виду функції.

Використання ІКТ активізує пізнавальну діяльність учнів, спрощує засвоєння учнями матеріалу.

1. ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ КООРДИНАТ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Координатний метод розв'язування задач на сьогоднішній день найбільш потужний і при правильному підході дозволяє розв'язувати фактично всі види математичних, фізичних, астрономічних і технічних задач. Проте, координатний метод в рамках шкільної програми використовується доволі обмежено і неповно.

У шкільній математичній освіті з вивченням методу координат пов’язані кілька напрямів:

- розв’язування рівнянь і нерівностей;
- розв’язування систем рівнянь і нерівностей;
- побудова графіків функцій;
- доведення геометричних теорем,
- використання методу координат під час опрацювання паралельного перенесення і векторів;
- розв’язування геометричних задач.

Метод координат має застосування в багатьох галузях сучасної людської діяльності, він лежить в основі таких наук як механіка, геодезія, астрономія. Уперше поняття координат (астрономічних та географічних, які називалися широтою і довготою) з’явилися у роботах давньогрецьких учених Ератосфена (ІІІ ст. до н.е.) і Гіппарха (ІІ ст. до н.е.). Давньогрецький астроном Клавдій Птолемей застосував географічні координати для визначення місцезнаходження мореплавця. Ідеєю координат користувалися в середині століття для визначення положення світил на небі, для визначення місця на поверхні Землі. Прямокутною сіткою користувалися художники епохи Відродження.

З часом метод географічних координат було удосконалено і трансформовано на інші системи координат точок на площині та в просторі. Зокрема Н. Орезм (1323 - 1382) покривав площину прямокутною сіткою і у такий спосіб вивчав геометричні фігури, досліджуючи співвідношення лінійних розмірів у двох взаємно перпендикулярних напрямах, що відповідають сучасним поняттям абсциси і ординати.

Основоположниками методу координат вважаються П. Ферма і Р. Декарт. Метод Ферма (опублікований у 1679) ґрунтувався на взаємно однозначній відповідності між точками площинами і парами чисел $(x;y)$. Його система координат складалась з однієї прямої (сучасна вісь абсцис) і початкової точки N (тепер початок координат). Ферма розглядав лише додатні значення x і y, а тому його система координат складалася фактично з одного першого квадранта.

У Декарта система координат також складалась з однієї фіксованої осі (абсцис), але, на відміну від Ферма, він розглядав точки з додатними і від’ємними ординатами. За допомогою методу координат Декарта подавалася геометрична інтерпретація від’ємних чисел. У такий спосіб значення від’ємних і додатних чисел зрівнювалися. Історія виникнення та розвитку методу координат є цікавою і доступною для учнів, її бажано використати для розвитку інтересу учнів до вивчення теми.

2. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Ідея перетворень є однією з провідних ідей сучасної математики. За її допомогою з успіхом доводять складні твердження з різних розділів геометрії. Перетворення допомагають художникам правильно будувати композиції картин, хімікам – досліджувати структуру кристалів. Здобутки вчених у вивченні перетворень склали математичну основу для розвитку багатьох галузей сучасної техніки.

Геометричні перетворення, зокрема рухи, розглядались в геометрії ще за часів Евкліда, хоча в різні періоди розвитку математики і шкільного курсу їм приділялись неоднакова увага.

Основна мета вивчення геометричних перетворень – ознайомити учнів з різними видами рухів (осьова і центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення) та подібністю і гомотетією, їх властивостями, ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень, ознак подібності трикутників до розв'язування задач.

Найважливішими геометричними перетвореннями є:

а) рухи (осьова і центральна симетрія, поворот, паралельне перенесення);

б) перетворення подібності (усі вони зводяться до гомотетії і руху).

Перетворення графіків функцій – це лінійні перетворення функції $y=f(x)$ або її аргументу x до виду $y=cf(kx+a)+b$, а також перетворення з використанням модуля. У цьому розділі ми розглянемо основні види геометричних перетворень таких як паралельне перенесення, стиск і розтяг, симетрія, перетворення з модулем.

Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень здійснюється на основі алгоритмічного підходу. З метою запобігання формалізму у сприйманні готового алгоритму потрібні теоретичні обґрунтування окремих перетворень.

1. **Графік функції $y=f(x)\pm b$ утворюється паралельним перенесенням графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі *Oy* на *b* одиниць угору, якщо $y=f(x)+b$, і вниз, якщо $y=f(x)-b$.**

Області визначення функцій $y=f(x)$, $y=f(x)+b$ збігаються. Нехай x_1 належить області визначення, тоді $f(x_1)$ і $f(x_1)+b$ є значеннями відповідно функцій $y=f(x)$ і $y=f(x)+b$ у цій точці. Тому точка $A_1(x_1;f(x_1))$ належить графіку функції $y=f(x)$, а точка $A_1'(x_1;f(x_1)+b)$ - графіку функції $y=f(x)+b$. Але точку $A_1'(x_1;f(x_1)+b)$ можна дістати перенесенням точки A_1 вгору на відстань *b*, якщо $b>0$, і вниз на відстань $|b|$, якщо $b<0$.

Алгоритм побудови графіка функції $y=f(x)\pm b.$

- побудувати графік функції $y=f(x)$;
- паралельно перенести побудований графік уздовж осі *Oy* на $|b|$ одиниць вгору, якщо $b>0$, і вниз, якщо $b<0$ (рис.2).

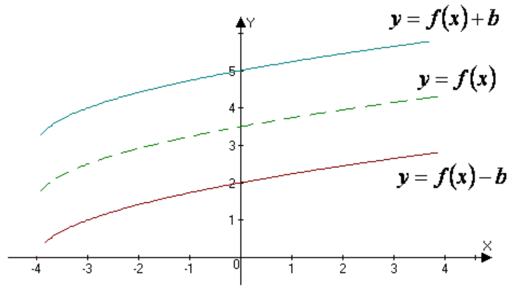


Рис.2

2. **Графік функції** $y=f(x\pm a)$ $(a>0)$ **утворюється паралельним перенесенням графіка функції** $y=f(x)$ **уздовж осі** $\boldsymbol{Ox}$ **на** $\boldsymbol{a}$ **одиниць праворуч, якщо** $y=f(x-a)$**, і ліворуч, якщо** $y=f(x+a)$**.**

Нехай x_1 належить області визначення функції $y=f(x)$. Тоді x_1-a належатиме області визначення функції $y=f(x+a)$. Отже, область визначення функції $y=f(x+a)$ відносно області визначення функції $y=f(x)$ зміщується на відстань $|a|$ праворуч, якщо $a<0$, і ліворуч, якщо $a<0$. $f(x_1)$ є значенням функції $y=f(x)$ для $x=x_1$, і тому точка $A_1(x_1;f(x_1))$ належить графіку функції $y=f(x)$. Функція $y=f(x+a)$ набуватиме такого самого значення $f(x_1)$ для $x=x_1-a$, і тому точка $A_1^{'}(x_1-a;f(x_1))$ належатиме графіку функції $y=f(x+a)$. Точки A_1 і $A_1^{'}$ мають рівні між собою ординати, але різні абсциси. Якщо $a>0$, то x_1-a лежить зліва від точки x_1 на відстані $|a|$, а якщо $a<0$, то справа на тій самій відстані.

Алгоритм побудови графіка функції $y=f(x\pm a)$

- побудувати графік функції $y=f(x)$;
- паралельно перенести побудований графік уздовж осі Ox на $|a|$ одиниць праворуч, якщо $a<0$, і ліворуч, якщо $a>0$ (рис.3).

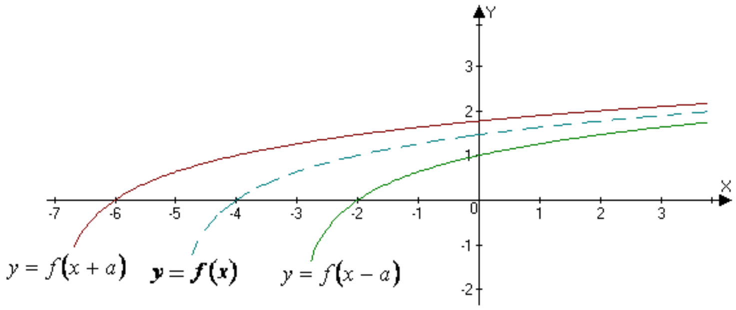


Рис.3

3. Побудова графіка функції $y=f(kx), k>0, k\neq 1.$

Теорема. **У результаті множення аргументу функції на число *k*, якщо $k>1$, графік функції $y=f(x)$ стискається в *k* разів до осі *Oy*; якщо $0<k<1$, графік функції $y=f(x)$ розтягується в $\frac{1}{k}$ разів від осі *Oy*.**

□ Нехай x_1 належить області визначення функції $y=f(x)$. Тоді, $\frac{x_1}{k}$ належить області визначення функції $y=f(kx)$. Отже, область визначення функції $y=f(kx)$ за умови, що вона задана скінченним проміжком, стискається в k раз до осі ординат для $k>1$ і розтягується в $\frac{1}{k}$ раз для $0<k<1$. $f(x_1)$ є значенням функції $y=f(x)$ у точці x_1, і точка $A_1(x_1; f(x_1))$ належить графіку цієї функції. Функція $y=f(kx)$ набуватиме такого самого значення $f(x_1)$ для $x=\frac{x_1}{k}$, і тому точка $A_1'\left(\frac{x_1}{k}; f(x_1)\right)$ належить графіку функції $y=f(kx)$. Точки A_1 і A_1' мають однакові ординати, але різні абсциси. Якщо $k>1$, то точка A_1' лежить у k разів ближче до осі ординат, ніж точка A_1, а для $0<k<1$ в $\frac{1}{k}$ разів далі. ■

Алгоритм побудови графіка функції $y=f(kx), k>0, k\neq 1.$

- побудувати графік функції $y=f(x)$;
- стиснути його до осі Oy в k разів, якщо $k>1$, або розтягнути від осі Oy в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0<k<1$. (рис.4)

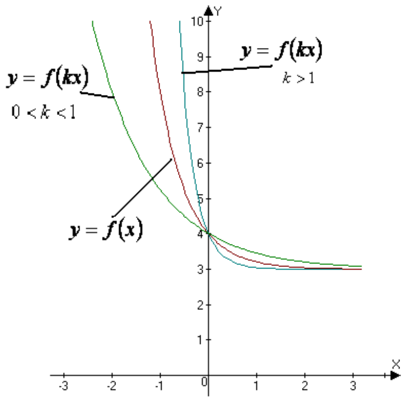


Рис.4

4. Побудова графіка функції $y = cf(x), c > 0, c \neq 1.$

Теорема. **У результаті множення функції на число *c*, якщо $c > 1$, графік функції $y = f(x)$ розтягується в *c* разів від осі *Ox*; якщо $0 < c < 1$, графік функції $y = f(x)$ стискається в $\frac{1}{c}$ разів до осі *Ox*.**

□ Якщо взяти будь-яке значення x_1 з області визначення функції $y = f(x)$ і $y = cf(x)$, то $f(x_1)$ і $cf(x_1)$ будуть відповідно значеннями цих функцій у точці x_1.

Для $c > 1$ $c|f(x_1)| \geq |f(x_1)|$, і тому точка $A_1'(x_1; cf(x_1))$ віддалена від осі абсцис у *c* разів більше, ніж точка $A_1(x_1; cf(x_1))$. При $0 < c < 1$, $c|f(x_1)| \leq |f(x_1)|$, і тому точка $A_1'(x_1; cf(x_1))$ в $\frac{1}{c}$ разів лежить ближче до осі абсцис, ніж точка A_1. ■

Алгоритм побудови графіка функції $y = cf(x), c > 0, c \neq 1.$

- побудувати графік функції $y = f(x)$;
- розтягнути його в *c* разів від осі *Ox,* якщо $c > 1$; стиснути в $\frac{1}{c}$ разів до осі *Ox*, якщо $0 < c < 1$. (рис.5)

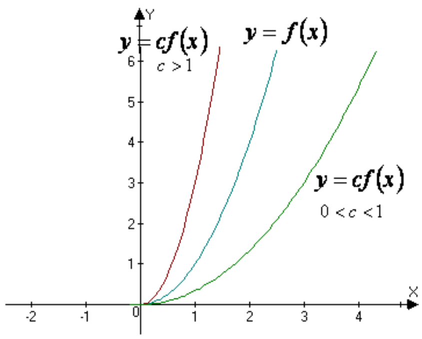


Рис.5

5. Побудова графіка функції $y = -f(x)$.

Графік функції $y = -f(x)$ **утворюється перетворенням симетрії графіка функції** $y = f(x)$ **відносно осі *Ox*.** При цьому точки перетину графіка функції з віссю *Ox* залишаються незмінними.

Нехай x_1 належить області визначення функції $y = f(x)$, тоді точка $A_1(x_1; f(x_1))$ належить графіку функції $y = f(x)$. Точки A_1 і A_1' розміщені симетрично відносно осі абсцис, і, отже, точку A_1' можна дістати за допомогою симетричного відображення точки A_1 відносно осі абсцис. Оскільки x_1 - довільне значення аргументу з області визначення, то таким самим способом можна дістати будь-яку точку графіка функції $y = -f(x)$ з графіка функції $y = f(x)$ [38].

Алгоритм побудови графіка функції $y = -f(x)$

- побудувати графік функції $y = f(x)$;
- відобразити побудований графік симетрично відносно осі *Ox*;
- графік функції $y = f(x)$ потім відкидається. (рис.6).

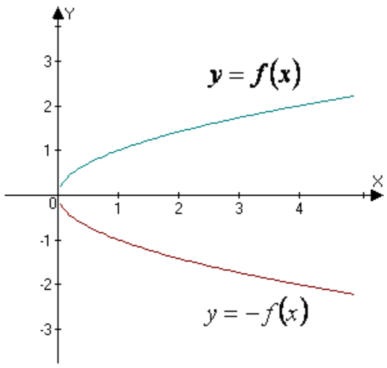


Рис.6

6. Побудова графіка функції $y = f(-x)$

Графік функції $y = f(-x)$ утворюється перетворенням симетрії графіка функції $y = f(x)$ відносно осі *Oy*. При цьому точки перетину графіка функції з віссю *Oy* залишаються незмінними.

Нехай x_1 належить області визначення функції $y = f(x)$, тоді $-x_1$ належить області визначення функції $f(-x)$, бо $f(-(-x_1)) = f(x_1)$. Точка $A_1(x_1; f(x_1))$ є точкою графіка функції $y = f(-x)$. Точки A_1 і A_1' мають рівні між собою ординати і симетричні відносно нуля абсциси, отже, ці точки розміщені симетрично відносно осі ординат. Таким чином, точку A_1' можна дістати за допомогою симетричного відображення точки A_1 відносно осі ординат. Оскільки A_1 - довільна точка графіка функції $y = f(x)$, то це означає, що кожній точці даного графіка відповідає симетрична їй відносно осі ординат точка графіка функції $y = f(-x)$, отже, графіки цих функцій симетричні відносно осі ординат.

Алгоритм побудови графіка функції $y = f(-x)$

- побудувати графік функції $y = f(x)$;
- відобразити побудований графік симетрично відносно осі *Oy*;
- графік функції $y = f(x)$ потім відкидається. (рис.7).

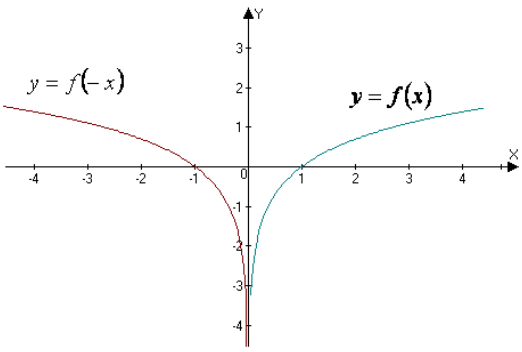


Рис.7

7. **Побудова графіка функції** $y = |f(x)|$

Область визначення функції $y = |f(x)|$ збігається з областю визначення функції $y = f(x)$. Функція $y = |f(x)|$ може набувати лише невід'ємних значень, тому в нижній півплощині графіка не буде. За означенням модуля $|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0, \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases}$

Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі абсцис.

Алгоритм побудови графіка функції $y = |f(x)|$

- побудувати графік функції $y = f(x)$;
- частину графіка, що знаходиться вище від осі абсцис, залишити без змін;
- відобразити симетрично відносно осі *Ox* частину графіка, нижчу від осі абсцис;
- ту частину графіка, що нижча від осі абсцис, потім відкидаємо. (рис.8)

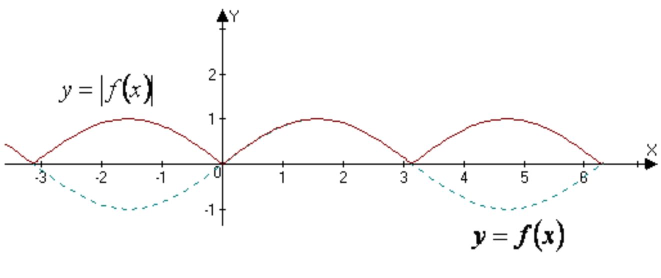


Рис.8

8. **Побудова графіка функції** $y = f(|x|)$

Згідно з означенням модуля маємо: $f(|x|)=\begin{cases} f(x), x\geq 0, \\ f(-x), x<0. \end{cases}$

Отже, щоб дістати графік функцій $y=f(|x|)$, треба побудувати графіки функцій $f(x)$ і $f(-x)$ відповідно на проміжках $[0;+\infty)$, $(-\infty;0]$. Але графік цієї функції можна дістати з графіка функції $y=f(x)$, якщо врахувати, що функція $y=f(|x|)$ - парна $(f(|-x|)=f(|x|))$. Тому досить побудувати графік функції $y=f(x)$ для $x\geq 0$, симетрично відобразити його відносно осі ординат. При $x\geq 0$ графіки функцій $y=f(x)$ і $y=f(|x|)$ збігаються.

Алгоритм побудови графіка функції $y=f(|x|)$

- побудувати графік функції $y=f(x)$;
- відкинути ту частину побудованого графіка, що при $x<0$,
- ту частину побудованого графіка, що при $x\geq 0$ залишити і відобразити симметрично відносно осі *Oy*;
- об’єднати результати побудови. (рис.9)

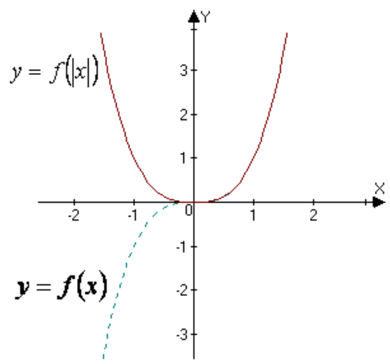


Рис.9

3. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ УЧНІВ БУДУВАТИ ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Перші уявлення про графік функції учні отримують у 7 класі, коли вивчають тему «Функція і її графік». У 9 класі під час вивчення теми «Квадратична функція» вивчають основні геометричні перетворення графіків функцій. Відповідно з державними вимогами до загальноосвітнього рівня підготовки учнів з даної теми останні мають навчитись:

- *Обчислювати* значення функції в точці.
- *Описувати:* перетворення графіків функцій: $f(x) \to f(x)+a$, $f(x) \to f(x+a)$, $f(x) \to kf(x)$, $f(x) \to f(kx)$, $f(x) \to -f(x)$; алгоритм побудови графіка квадратичної функції.
- *Характеризувати* функцію за її графіком.
- *Розв'язувати* вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції; побудову графіків функцій з використанням зазначених перетворень графіків.

При поглибленому вивченні математики учні крім того мають вміти описувати перетворення графіків функцій, вирази яких містять знак модуля: $f(x) \to |f(x)|$, $f(x) \to f(|x|)$, розв'язувати вправи, що передбачають: побудову графіків функцій з використанням зазначених вище перетворень.

У 10 класі під час повторення і розширення відомостей про функцію на початку першого семестру розглядають побудову графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій. В загальноосвітніх школах на тему виділяють одну годину, тобто для повторення вивченого з середньої школи. Для класів поглибленого вивчення математики на цю тему виділяють сім годин. Згідно програми учень має виконувати всі геометричні перетворення графіків функцій, які вивчили в середній школі, та вміти застосовувати їх до графіків тригонометричних і степеневих функцій.

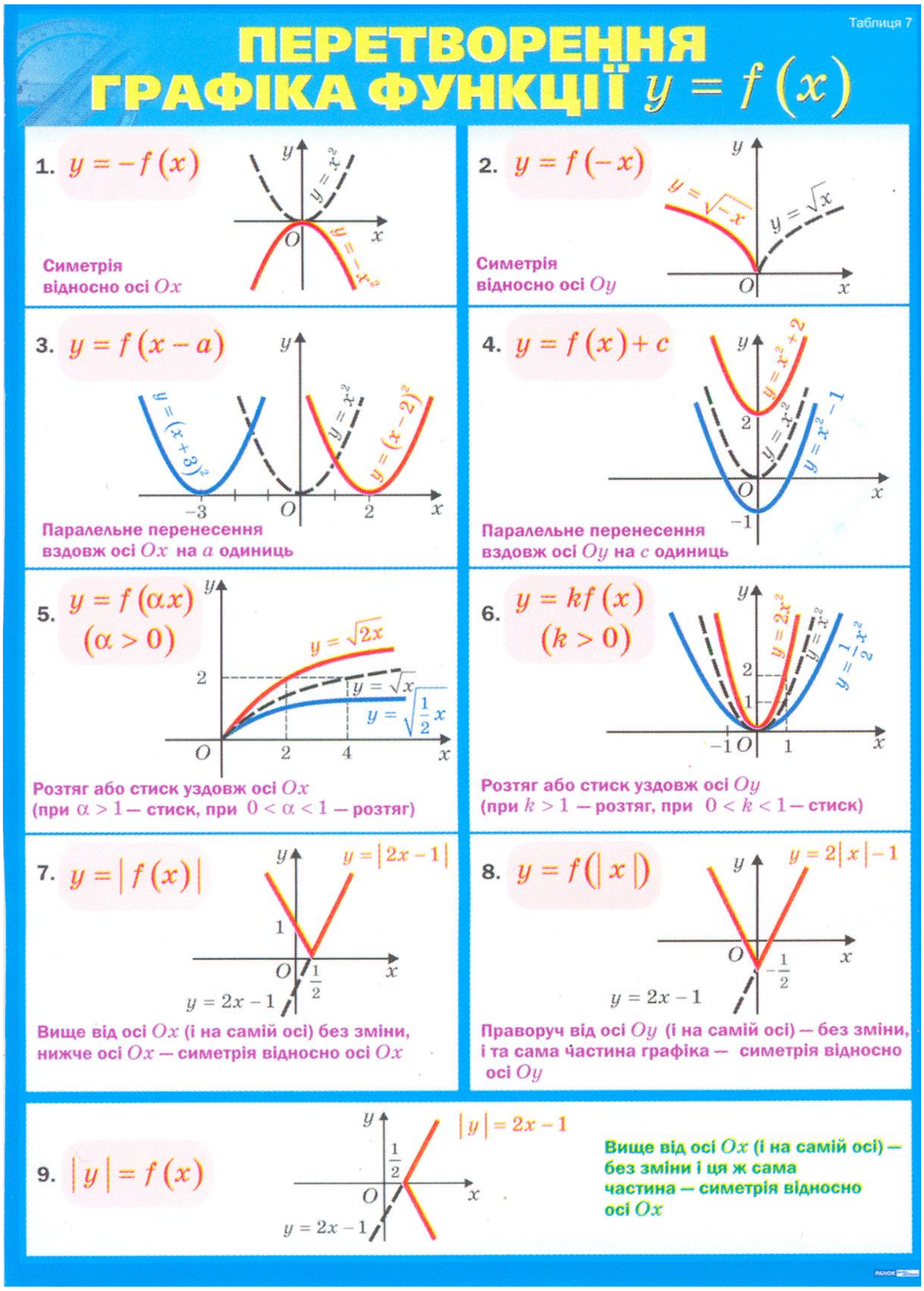
Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень здійснюється на основі алгоритмічного підходу. З метою запобігання формалізму у сприйманні готового алгоритму потрібні теоретичні обґрунтування окремих перетворень. Так, при розгляді перетворення $y = f(-x)$ доцільно провести такі обґрунтування в загальному вигляді: аргументи функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ різняться знаками. Нехай точка $M_0(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Знайдемо координати відповідної точки $M(x; y)$, яка належить графіку функції $y = f(-x)$ і в яку перейде точка $M_0(x_0; y_0)$ при шуканому перетворенні. Вводимо підстановку $x_0 = -x$. Звідси $x = -x_0$, $y = f(-x) = f(x_0) = y_0$. Отже, точка M має протилежну абсцису і ту саму ординату, тобто $M(-x_0; y_0)$. Виявилось, що вона має бути симетричною точці $M_0(x_0; y_0)$ щодо осі ординат. Це означає, що графік функції $y = f(-x)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою перетворення симетрії відносно осі ординат. Такі самі обґрунтування з використанням ідеї підстановки можна провести для перетворень $y = f(x \pm a)$ і $y = f(ax)$, де $a > 0$.

При побудові графіків функцій, у формулах яких міститься модуль, як і при розв'язуванні рівнянь і нерівностей з модулем, доцільно дати учням загальний орієнтир: треба перетворити формулу шляхом звільнення від знака модуля, спираючись на його означення. Наприклад, достатнім обґрунтуванням перетворення $y = f(|x|)$ є таке: $f(|x|) = \begin{cases} f(x), x \geq 0, \\ f(-x), x < 0. \end{cases}$

Звідси випливає, що графік функції $y = f(|x|)$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ за $x \geq 0$ і з графіком функції $y = f(-x)$ за $x < 0$. Побудову останнього графіка розглянуто в попередньому перетворенні. Аналогічно треба чинити, будуючи графік $y = |f(x)|$.

У шкільних підручниках, зокрема у підручнику авторів Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. «Алгебра 9», правила побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень обґрунтовуються не у загальному вигляді, а на конкретних прикладах квадратичної функції. Побудова графіків функцій виду $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$, віднесена до рубрики «Коли зроблено уроки». Варто відзначити гарну добірку різноманітних завдань на побудову графіків функцій з допомогою геометричних перетворень, як розв'язаних так і для самостійної роботи, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу теми учнями.

Для формування вмінь учнів будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень потрібна цілеспрямована робота. Після теоретичного обґрунтування геометричних перетворень графіка функції $y = f(x)$ для побудови графіків $y = f(x + a)$, $y = f(x) + b$, $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = f(kx)$, $y = cf(x)$ та демонстрації розглянутих перетворень на конкретних прикладах варто запропонувати учням підготувати таблицю, в якій



проілюстровано кожне перетворення.

Формуванню сталих умінь виконувати побудову графіків функцій шляхом перетворень графіків елементарних функцій має передувати робота з повторення питань про види та особливості графіків елементарних функцій яка проводиться на попередніх уроках. Формування вмінь виконувати побудову графіка функції шляхом геометричних перетворень ведеться паралельно із закріпленням знань учнів про формули, що відповідають цим перетворенням. Тому при виконанні як усних, так і письмових вправ вчителеві слід вимагати від учнів в першу чергу аналізу формули даної функції, а потім вже вибору відповідно до неї геометричного перетворення, для побудови графіка функції. Такий підхід, по-перше, сприяє швидшому засвоєнню учнями змісту навчального матеріалу уроку, а по-друге, допомагає попередити помилки, які часто виникають в учнів, особливо, коли мова йде про паралельне перенесення вздовж різних координатних осей.

Останнім часом інтерактивні технології активно входять у наше життя, допомагають кожному максимально розкрити власний творчий потенціал, досягти успіхів у навчанні та фаховій діяльності, зробити світ яскравішим. Сьогодні до традиційних «помічників» вчителя математики, таких як дошка й крейда, додаються сучасні пристрої: комп’ютер, проектор, інтерактивна дошка. Геометричні перетворення графіків функцій - одна з тем алгебри, що потребує У зв’язку з цим інтерактивна наочність, зокрема презентація, є чудовим способом для пояснення, закріплення та перевірки знань. У додатку Б представлено презентацію, яку можна використовувати на уроках узагальнення та систематизації знань та вмінь з даної теми.

Використання інтерактивної дошки на уроках математики під час вивчення теми забезпечує високий темп уроку; забезпечує більш ефективний, яскравий та динамічний процес вивчення нового матеріалу за рахунок використання презентацій; спрощує перевірку засвоєного матеріалу; сприяє професійному розвитку вчителя та пошуку ним нових шляхів і підходів у реалізації навчально-виховного процесу.

Значно активізувати пізнавальну активність учнів на уроках, унаочнити навчальний матеріал дозволяють сучасні інформаційні технології. Зокрема, у додатку А наведено конспект уроку з використанням інформаційної платформи Kahoot! Kahoot! дозволяє подавати у форматі опитувань і тестів мало не весь навчальний матеріал. Щоб налагодити зворотній зв'язок з учнями, можна обіграти нові теми у формі простих запитань і відповідей, а закріпити знання за допомогою більш докладного тестування. Kahoot! розрахований на застосування у класі - викладач показує матеріал на головному екрані, а в цей час школярі відповідають на питання і обговорюють інформацію, використовуючи смартфони. Для того щоб увійти у віртуальну класну кімнату, учні повинні ввести спеціальний код, який надішле викладач. Сервіс дозволяє дізнатися, як відповідав на запитання кожен учень, або будувати діаграми успішності всього класу. Самі ж учні можуть стежити за своїми результатами в спеціальних таблицях. Kahoot! безкоштовний і повністю доступний після реєстрації.

Зручною у використанні і з цілою низкою корисних властивостей є програма Advanced Grapher. За допомогою цієї програми можна будувати графіки функцій, обчислювати значення функцій, проводити дослідження функцій. Вдалим є те, що можна будувати графіки кількох функцій в одній системі координат, змінюючи при цьому колір лінії графіка та її товщину.

Комп'ютерна презентація удосконалює та оптимізує працю вчителя, впорядковує і зберігає наочний матеріал, необхідний для конкретного заняття. Комп'ютерна презентація не зможе цілком замінити собою роботу вчителя з класною дошкою та спілкування з учнями. У додатку Б представлено презентацію на тему «Побудова графіків функцій та рівнянь», яку можна використати для узагальнення та систематизації знань та вмінь учнів будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень.

Навчальний матеріал, що стосується побудови графіків і властивостей окремих видів квадратичної функції, дає змогу розглянути побудову графіків складніших функцій шляхом геометричних перетворень. При цьому доцільно звести в систему основні вісім перетворень, які дають змогу урізноманітнити систему вправ на побудову графіків функцій. Це підготує учнів будувати графіки складніших тригонометричних, степеневих, показникових і логарифмічних функцій в курсі алгебри і початків аналізу. Можна заздалегідь підготувати таблицю, в якій показано послідовність розгляду кожного перетворення і наведено шуканий графік, як це зроблено у підручнику «Алгебра і початки аналізу 10 клас», автором якого є Нелін Є.П.. У підручнику подається зведена таблиця з перетвореннями графіків функцій, яка містить обґрунтування та приклади відповідних перетворень. Вправи підібрані таким чином, що потрібно виконати як одне, так і декілька перетворень, щоб побудувати кінцевий графік функції.

Варто відзначити, що зазвичай учні без особливих труднощів виконують завдання, в яких потрібно здійснити або одне перетворення графіка функції, або якщо потрібно виконати два перетворення – паралельне перенесення вздовж осей x та y. В решті випадків учні часто допускають помилки. Щоб уникнути цих помилок З.І.Слєпкань запропонувала після розгляду восьми основних перетворень дати учням такі два орієнтири:

1. Для побудови графіків функцій вигляду $y = af(kx \pm b) \pm m$ можна виконувати основні перетворення в будь-якій послідовності. Однак перетворення $y = f(x \pm b)$ доцільніше виконувати останнім, оскільки інші перетворення $y = af(x)$ і $y = f(kx)$ доведеться виконувати не стосовно початку координат, а стосовно тієї точки, в яку перейде початок координат під час перетворення $y = f(x \pm b)$.

2. Перетворення $y = f(x \pm b)$ можна виконувати лише тоді, коли перед аргументом *x* є коефіцієнт 1.

Очевидно, що для побудови графіка функції $y = cf(kx + a) + b$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$, існує декілька правильних схем побудови. Авторський пропонує на окремих прикладах дві схеми алгоритму для побудови графіків функцій такого виду. У першій схемі пропонується спочатку виконувати паралельне перенесення, а потім стиск (розтяг) вздовж осі абсцис. У другій – навпаки спочатку стиск, потім паралельне перенесення, але уже не на $|a|$ одиниць, а на $\left|\frac{a}{k}\right|$ одиниць.

Вважаємо за доцільне розглянути з учнями ці схеми не лише на конкретних прикладах, а й в загальному вигляді, та рекомендувати їм під час побудови графіків функцій виду $y = cf(kx + a) + b$ чітко дотримуватися однієї із запропонованих нижче схем.

Алгоритм побудови графіка $y = cf(kx + a) + b$

Перший спосіб

1. $y_1 = f(x)$

2. $y_2 = f(kx)$ - розтяг попереднього графіка від осі *Oy* в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$; стиск до осі *Oy* в k разів, якщо $k > 1$. Якщо $k < 0$, то до того ж потрібно здійснити симетричне відображення графіка функції відносно осі *Oy*.

3. $y_3 = f(kx + a) = \boxed{f\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right)}$ - паралельне перенесення графіка y_2 вздовж осі *Ox* ліворуч на $\frac{a}{k}$ одиниць, якщо $\frac{a}{k} > 0$; праворуч на $\left|\frac{a}{k}\right|$ одиниць, якщо $\frac{a}{k} < 0$.

4. $y_4 = cf\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right)$ - розтяг графіка y_3 від осі *Ox* в c разів, якщо $c > 1$; стиск до осі *Ox* в $\frac{1}{c}$ разів, якщо $0 < c < 1$. Якщо $c < 0$, то необхідно здійснити ще симетричне відображення графіка відносно осі *Ox.*

5. $y_5 = cf\left(k\left(x + \frac{a}{k}\right)\right) + b$ - паралельне перенесення графіка вздовж осі *Oy* вгору на b одиниць якщо $b > 0$; вниз на $|b|$ одиниць, якщо $b < 0$.

Другий спосіб

1. $y_1 = f(x)$

2. $y_2 = f(x + a)$ - паралельне перенесення графіка вздовж осі *Ox* ліворуч на a одиниць, якщо $a > 0$; праворуч на $|a|$ одиниць, якщо $a < 0$.

3. $y_3 = f(kx + a)$ - розтяг графіка y_2 від осі *Oy* в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$; стиск до осі *Oy* в k разів, якщо $k > 1$. Якщо $k < 0$, то до того ж потрібно здійснити симетричне відображення графіка функції відносно осі *Oy.*

4. $y_4 = cf(kx+a)$ - розтяг попереднього графіка від осі *Ox* в *c* разів, якщо $c>1$; стиск до осі *Ox* в $\frac{1}{c}$ разів, якщо $0<c<1$. Якщо $c<0$, то необхідно здійснити ще симетричне відображення графіка відносно осі *Ox*.

5. $y_5 = cf(kx+a)+b$ - паралельне перенесення графіка вздовж осі *Oy* вгору на b одиниць, якщо $b>0$; вниз на $|b|$ одиниць, якщо $b<0$.

Як показує досвід, використання учнями другої схеми є більш прийнятним, оскільки не потрібно здійснювати перетворень самого виразу, за допомогою якого задана функція.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = 2\sqrt{6-3x}-3$.

Розв'язання. Використаємо другий спосіб побудови графіка. Алгоритм побудови при цьому матиме вигляд:

1) $y_1 = \sqrt{x}$;

2) $y_2 = \sqrt{x+6}$ - паралельне перенесення ліворуч на 6 одиниць графіка функції y_1 (рис.17);

3) $y_3 = \sqrt{-x+6}$ - симетрія відносно осі O*x* графіка функції y_2 (рис.17).

4) $y_4 = \sqrt{-3x+6}$ - стиск графіка функції y_3 до осі O*y* в 3 рази (рис.18).

5) $y_5 = 2\sqrt{-3x+6}$ - розтяг графіка функції y_4 від осі O*x* в 2 рази (рис.18).

6) $y_6 = 2\sqrt{-3x+6}-3$ - паралельне перенесення вниз на 3 одиниці графіка функції y_5 (рис.18).

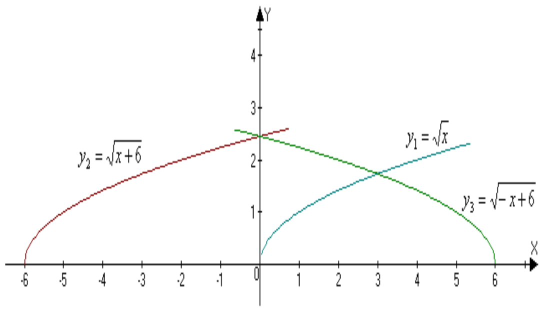


Рис.17

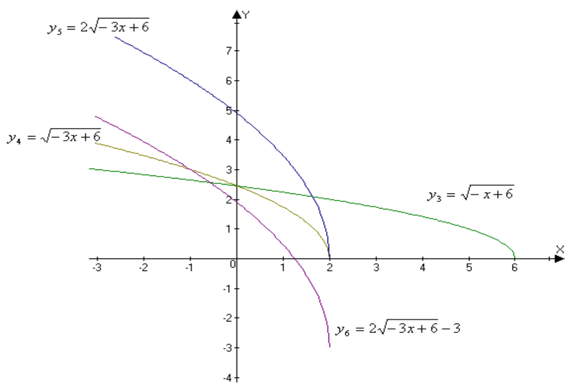


Рис.18

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 5$

Розв'язання. 1) $y_1 = \sin x$

2) $y_2 = \sin(2x)$ - стиск графіка функції y_1 в 2 рази до Oy (рис.19);

3) $y_3 = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ - паралельне перенесення графіка функції y_2 вправо на $\frac{\pi}{8}$ од. (рис.20);

4) $y_4 = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ - розтяг графіка функції y_3 від Ox в 2 рази (рис.21);

5) $y_5 = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 5$ - паралельне перенесення графіка функції y_4 вниз на 5 од.(рис.22).

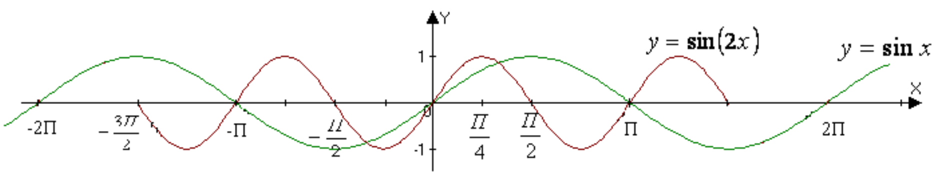


Рис.19

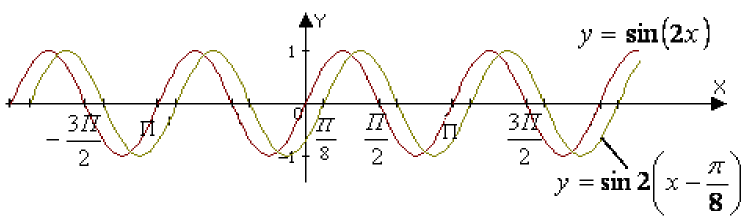


Рис.20

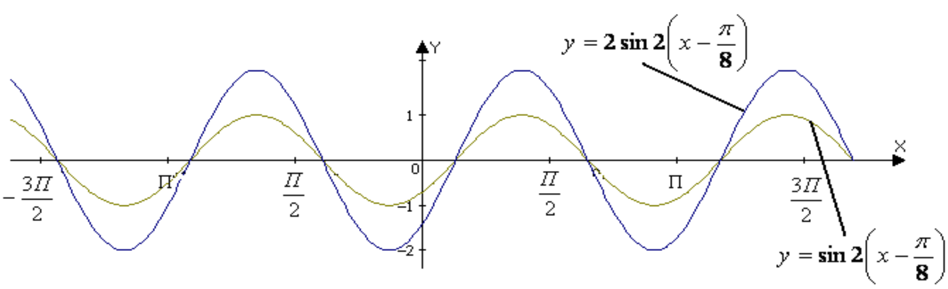


Рис.21

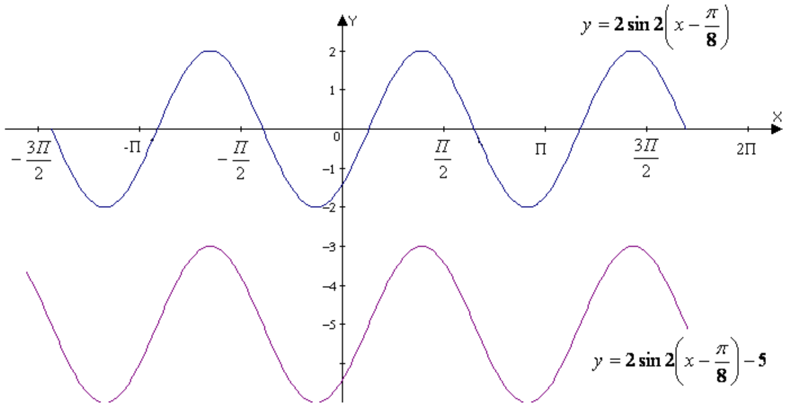


Рис.22

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = 3^{|x|-1} + 2$

Розв'язання. 1) $y_1 = 3^x$;

2) $y_2 = 3^{x-1}$ - паралельне перенесення графіка функції y_1 вправо на 1 од. (рис.23);

3) $y_3 = 3^{x-1} + 2$ - паралельне перенесення графіка функції y_2 вгору на 2 од. (рис.24);

4) $y_4 = 3^{|x|-1} + 2$ - симметрично відобразити частину графіка y_3 при $x \geq 0$ відносно осі Oy (рис.25).

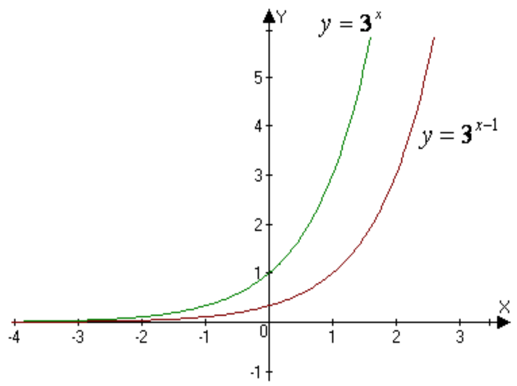


Рис.23

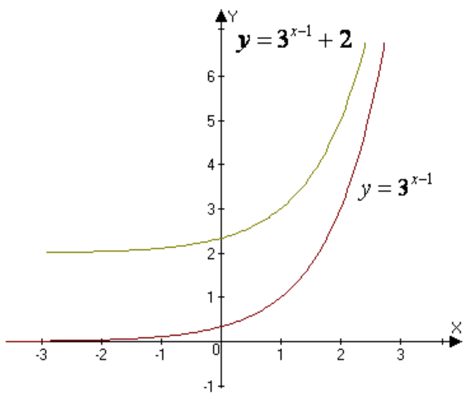


Рис.24

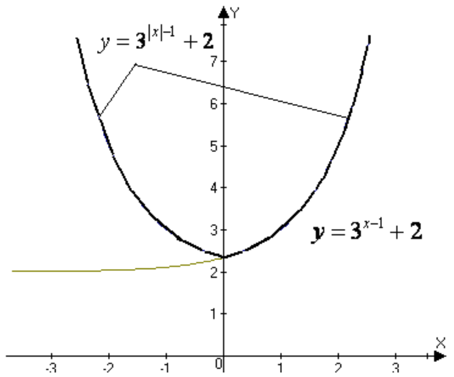


Рис.25

Приклад 4. Побудувати графік функції $y=|2\cos x-1|$

Розв'язання. 1) $y_1=\cos x$;

2) $y_2=2\cos x$- розтяг графіка функції y_1 від осі Ox в 2 рази (рис.26);

3) $y_3=2\cos x-1$ - паралельне перенесення графіка функції y_2 вниз на 1 од.;

4) $y_4=|2\cos x-1|$ - нижню частину графіка y_3 симетрично відображаємо відносно *Ox.* (рис.27).

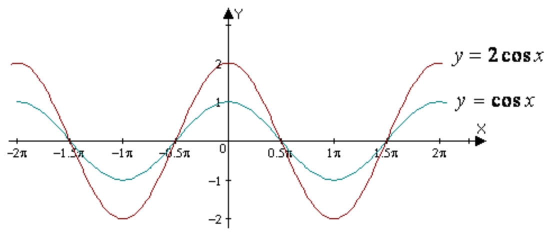


Рис.26

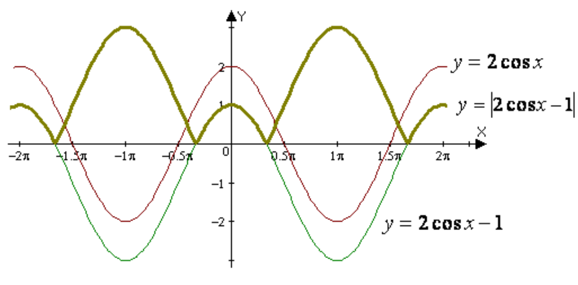


Рис.27

Будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень учням зазвичай подобається. Але для того, щоб сформувати в них міцні знання з цієї теми потрібна цілеспрямована робота з боку вчителя. Зокрема, для запобігання формалізму у сприйманні готового алгоритму потрібні теоретичні обґрунтування окремих перетворень, у випадку побудови складніших графіків необхідно переконати учнів у необхідності дотримування чіткої послідовності перетворень, узагальнення щодо побудови графіків функцій шляхом геометричних перетворень треба виконувати паралельно з розглядом побудови графіків конкретних функцій.

Стригальова Н.В. пропонує у 7 класі під час вивчення лінійної функції ознайомити дітей з поняттям *осьової симетрії* і почати вивчати побудову графіків, що містять знак модуля. Під час побудови таких графіків доцільно розглянути різні види лінійних функцій з модулем: $y = k|x| + b$, $y = |kx + b|$, $|y| = kx + b$. **[]**

Графіки функцій, що задані алгебраїчною сумою модулів лінійних виразів розв'язуються так: спочатку знаходимо область визначення функції і розкриваємо знак модуля на тих проміжках, на яких підмодульні вирази не змінюють знака. В результаті функція може бути задана на різних проміжках різними формулами.

Наприклад, будуючи графіки функцій виду

$$y = |f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \ldots \pm |f_n(x)| + \varphi(x),$$

доцільно спочатку знайти ті значення *x*, для яких принаймні одна з функцій $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, …, $y_n = f_n(x)$ перетворюється в нуль. Для цього треба розв'язати сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0. \end{array}\right.$$

Корені, які ми дістали, розіб'ють область визначення цієї функції на проміжки, на кожному з яких функцій $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, …, $y_n = f_n(x)$ зберігають постійний знак, і тому на таких проміжках можна звільнитися від знака модуля. Після цього будується графік саме на тому проміжку, на якому розкривали знак модуля.

Приклад 5. Побудувати графік функції $y=|x+3|+|2x+1|+|x-1|-2x+1$.

Розв'язання. Розв'яжемо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x+3=0, \\ 2x+1=0, \\ x-1=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-\dfrac{1}{2}, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Дістали проміжки $(-\infty;-3]$, $\left[-3;-\frac{1}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, $[1;+\infty)$на кожному з яких функції $y_1=x+3$, $y_2=2x+1$, $y_3=x-1$ не змінюють знака. Розкривши модулі на кожному з отриманих проміжків матимемо:

а) $x\in(-\infty;-3]$, $y=-x-3-2x-1-x+1-2x+1=-6x-2$;

б) $x\in\left[-3;-\frac{1}{2}\right]$, $y=x+3-2x-1-x+1-2x+1=-4x+4$;

в) $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$, $y=x+3+2x+1-x+1-2x+1=6$;

г) $x\in[1;+\infty)$, $y=x+3+2x+1+x-1-2x+1=2x+4$ (рис.28).

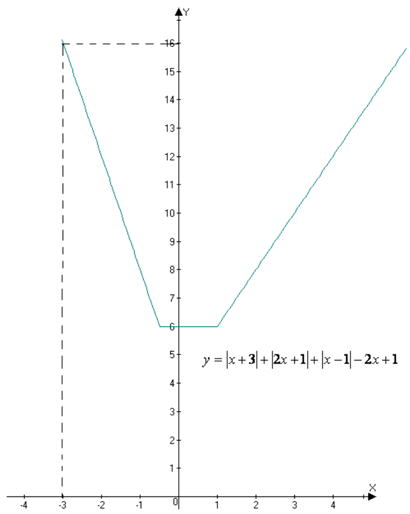


Рис.28

Наступний етап роботи – *побудова графіків функцій, що містять кілька модулів.* Добірка завдань може бути такою.

Побудувати графіки функцій:

1) $y=\big|1-|4x+8|\big|$;

3) $y = \left| -0{,}2|x| + 1 \right|$;

4) $y = \left| 4 - |x| \right|$;

5) $y = \left| |3x + 6| - 2 \right|$;

6) $y = \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right|$.

Приклад 6. Побудувати графік рівняння $y = \left| \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right|$.

Розв'язання. Графік будуємо в такій послідовності:

1) $y = |x| - 1$;

2) $y = \left| |x| - 1 \right|$ - відображаємо симетрично відносно осі *Ox* від'ємну частину графіка (рис.29);

3) $y = \left| |x| - 1 \right| - 1$ - опускаємо вниз графік на одну одиницю (рис.30);

4) $y = \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right|$ - відображаємо симетрично відносно осі *Ox* від'ємну частину графіка (рис.30);

5) $y = \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1$ - опускаємо вниз графік на одну одиницю (рис.31);

6) $y = \left| \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right|$ - відображаємо симетрично відносно осі *Ox* від'ємну частину графіка (рис.31).

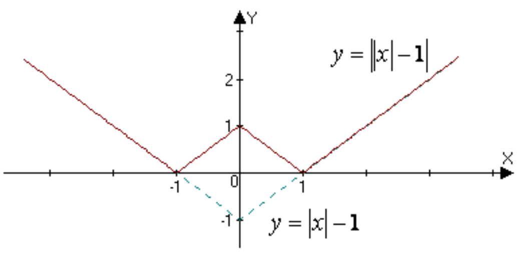


Рис.29

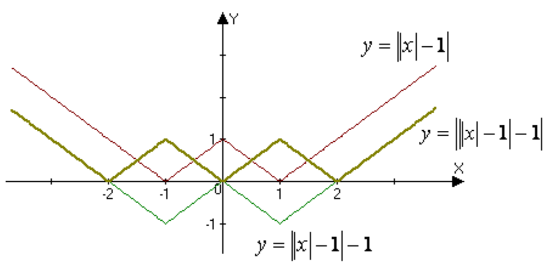


Рис.30

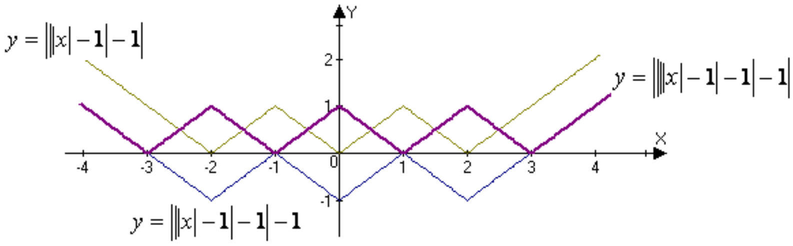


Рис.31

Після ознайомлення учнів з поняттям області визначення функції є можливість будувати графіки з так званими «виколотими» точками.

Приклад 7. Побудувати графік рівняння $y=\dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1,\\x+2>0,\end{cases}\\\begin{cases}y=-1,\\x+2<0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1,\\x>-2,\end{cases}\\\begin{cases}y=-1,\\x<-2.\end{cases}\end{array}\right.\quad\text{(Рис.32)}$$

Добірка завдань може бути такою. Побудувати графіки:

1) $y=\dfrac{|x-2|}{x-2}$;

2) $y=x|x|$;

3) $y=x+|x|$;

4) $y=-\dfrac{2x+4}{|x+2|}$;

5) $y=|x-3|+x+7$;

6) $y=|x+2|+x$.

Під час вивчення формул скороченого множення і розкладання на множники у 7-му класі можна запропонувати побудувати графіки.

Приклад 8. Побудувати графік рівняння $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$**.**

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} y = x+1, \\ x \neq -1. \end{cases}$ (рис.33)

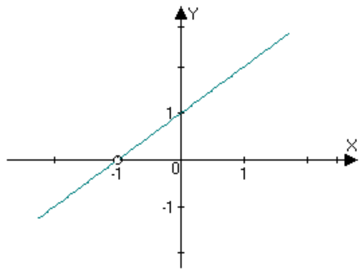


Рис.33

Приклад 9. Побудувати графік рівняння $y = \dfrac{x^2 + x - 12}{x+4}$.

Розв'язання. Чисельник цього дробу у 8-му класі розкладають на множники так: $x^2 + 4x - 3x - 12 = x(x+4) - 3(x+4) = (x+4)(x-3)$.

Тоді рівняння має вигляд $y = \dfrac{(x+4)(x-3)}{x+4}$ і рівносильне системі

$\begin{cases} y = x-3, \\ x \neq -4. \end{cases}$, яка зображена на рисунку 34.

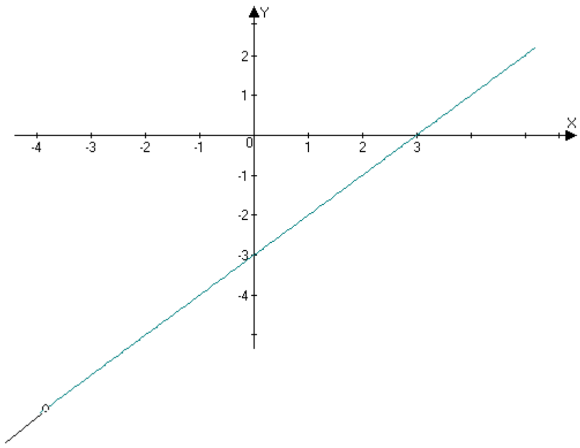


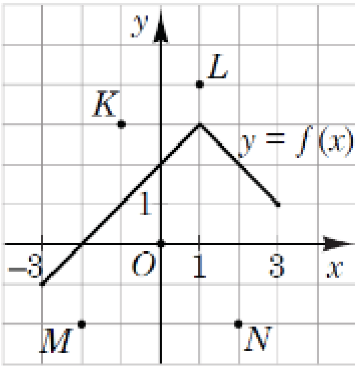
Рис.34

Завдання на побудову графіків щороку зустрічаються серед завдань ЗНО з математики. Розглянемо деякі із них.

1. Графік довільної функції $y = f(x)$ паралельно перенесли вздовж осі x на 2 одиниці праворуч. Графік якої з наведених функцій отримали. (№ 12, 2019)

А	Б	В	Г	Д
$y = f(x+2)$	$y = f(x)+2$	$y = 2f(x)$	$y = f(x)-2$	$y = f(x-2)$

2. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3;3]$. Одна з наведених точок належить графіку функції $y = -f(x)$. Укажіть цю точку. (ЗНО № 15, 2019).

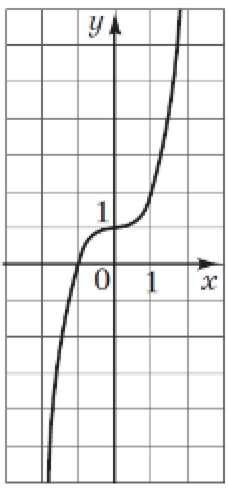
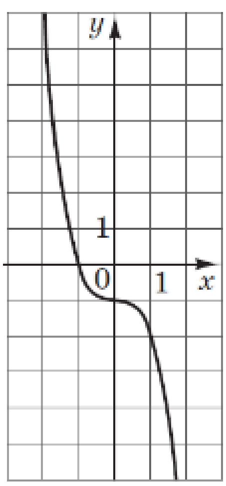
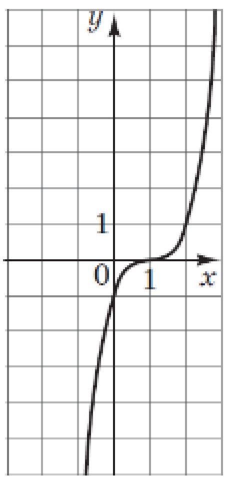
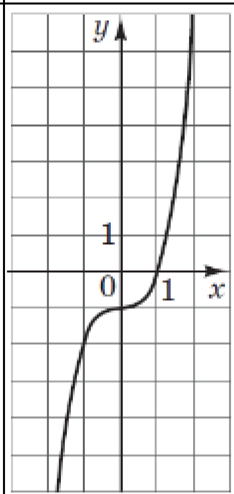
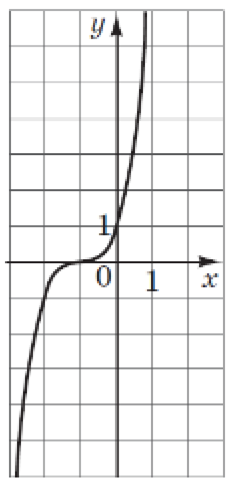


А	Б	В	Г	Д
N	M	K	L	O

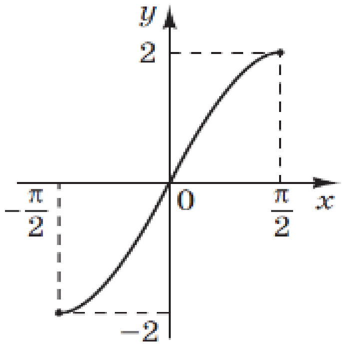
3. Укажіть функцію, графіком якої є парабола з вершиною в точці (–2; 0). (ЗНО № 14, 2016).

А	Б	В	Г	Д
$y = (x - 2)^2$	$y = (x + 2)^2$	$y = x^2$-2	$y = x^2$+2	y = -2x^2

4. Укажіть ескіз графіка функції $y = x^3 - 1$. (ЗНО № 9, 2018).

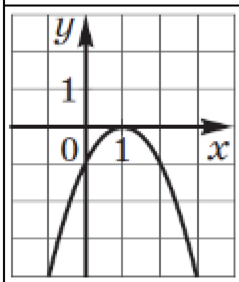
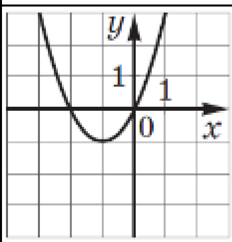
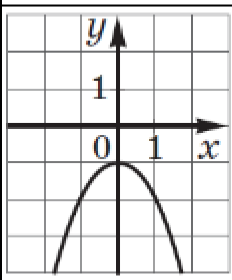
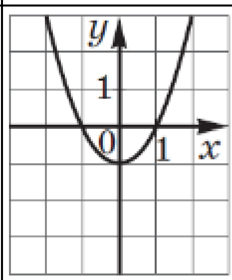
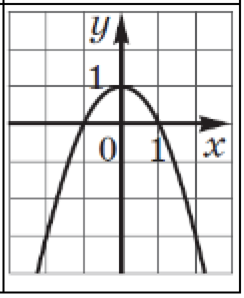
А	Б	В	Г	Д
				

5. На рисунку зображено фрагмент графіка однієї з наведених функцій на проміжку $[-\pi/2 ; \pi/2]$. Укажіть цю функцію. (ЗНО № 9, 2017).



А	Б	В	Г	Д
$y = 2sinx$	$y = \frac{1}{2}sinx$	$y = -2sinx$	$y = \frac{1}{2}cosx$	$y = 2cosx$

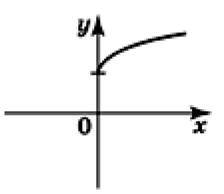
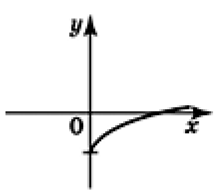
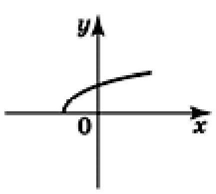
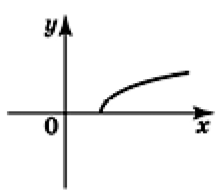
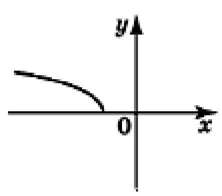
6. На одному з рисунків зображено графік функції $y = 1 - x^2$. Укажіть цей рисунок. (ЗНО № 11, 2017).

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
				

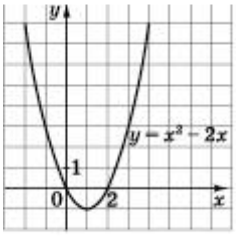
7. Графік функції $y = sinx$ можна отримати внаслідок паралельного перенесення графіка функції $y = cosx$ уздовж осі x. (ЗНО № 18, 2016).

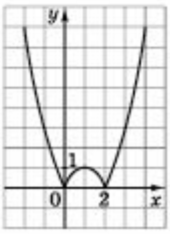
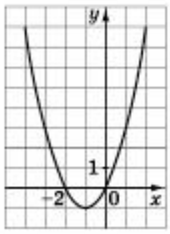
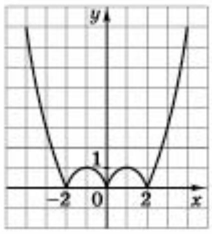
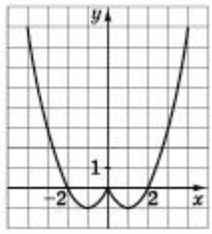
А	Б	В	Г	Д
вправо на $\pi/2$ одиниць	вправо на π одиниць	вправо на 3π /2 одиниць	вліво на π одиниць	вліво на π /2 одиниць

8. На якому рисунку зображено ескіз графіка функції $y = \sqrt{x-2}$. (ЗНО № 11, 2015)

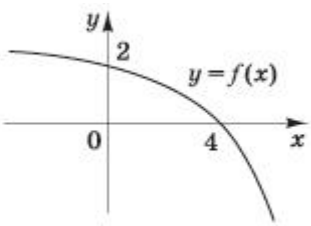
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
				

9. На рисунку зображено графік функції $y = x^2 - 2x$. Укажіть графік функції $y = |x^2 - 2x|$. (ЗНО № 10, 2013).



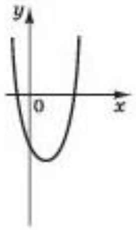
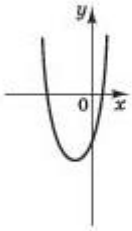
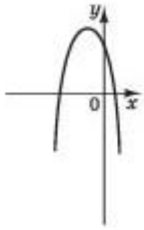
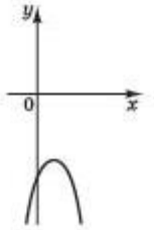
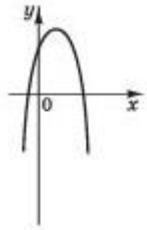
А	Б	В	Г	Д
				

10. На рисунку зображено графік функції y = f(x), спадної на проміжку (–∞; +∞). Установіть відповідність між функцією (1–4) та точкою перетину її графіка з віссю Ox (А–Д). (№ 24, ЗНО 2012)



Функція	Точка перетину
1 $y = f(x + 2)$	А (0; 0)
2 $y = f(x - 2)$	Б (2; 0)
3 $y = 2f(x)$	В (4; 0)
4 $y = f(x) - 2$	Г (6; 0)
	Д (8; 0)

11. На якому з наведених рисунків зображено ескіз графіка функції $y = 4 - (x - 1)^2$. (ЗНО № 10, 2012).

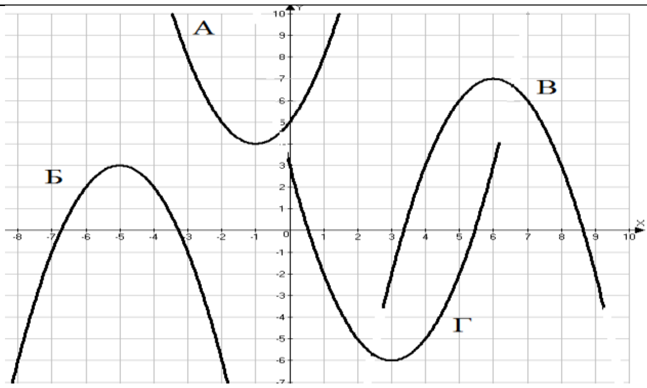
А	Б	В	Г	Д
				

Досвід свідчить, що узагальнення стосовно побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень потрібно виконувати паралельно з розглядом побудови графіків конкретних функцій. Водночас окрім традиційних завдань виду «Побудувати графік функції» варто розглянути наступні завдання:

- ✓ Встановити відповідність між аналітичним та графічним заданням функції.
- ✓ Встановити відповідність між аналітичним виразом, що задає функцію, та алгоритмом побудови графіка цієї функції.
- ✓ Записати аналітичний вираз для функції заданої графіком.
- ✓ Записати аналітичний вираз для функції, якщо відомий алгоритм побудови її графіка.
- ✓ Описати алгоритм побудови графіка функції.
- ✓ Знайти та виправити помилки в алгоритмі побудови графіка функції, в побудові графіка функції.

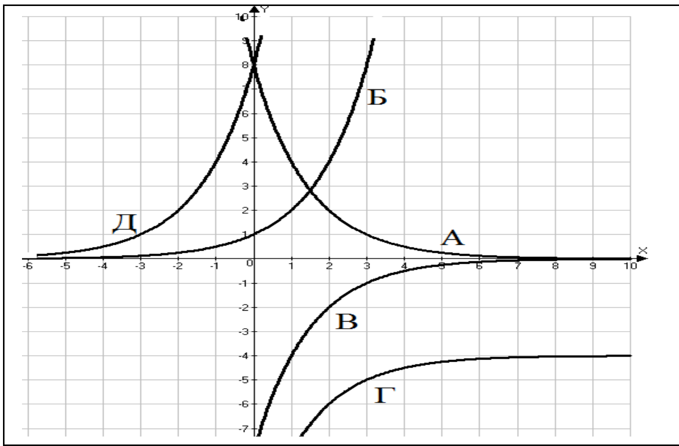
Наведемо приклади деяких завдань.

1. Записати аналітичні вирази функцій, представлених графіками А-Г:



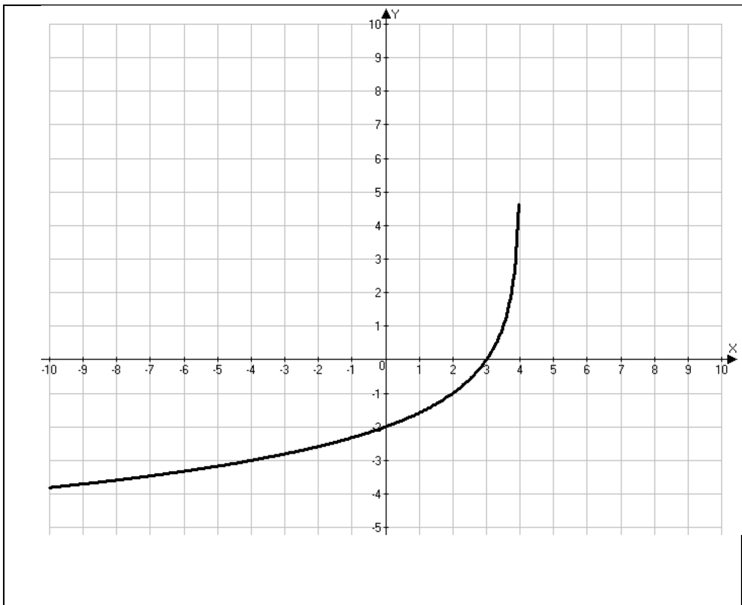
А	
Б	
В	
Г	

2. Поставити у відповідність крокам 1-5 алгоритму побудови графіка функції $y=-2^{-x+3}-4$ графіки А-Д:



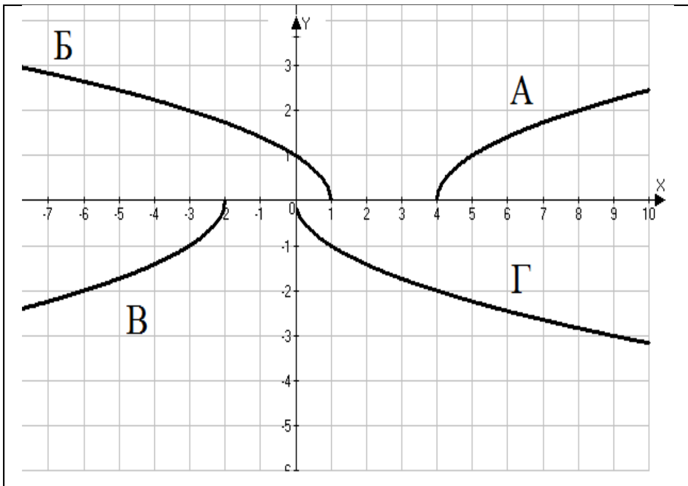
1	$y=2^{x}$
2	$y=2^{x+3}$
3	$y=2^{-x+3}$
4	$y=-2^{-x+3}$
5	$y=-2^{-x+3}-4$

3. На рисунку зображено ескіз графіка функції $y=c\log_2(kx+a)$. Виберіть правильне твердження щодо коефіцієнтів k, a, b.



А	$\begin{cases} a>0, \\ c>0, \\ k>0. \end{cases}$
Б	$\begin{cases} a>0, \\ c<0, \\ k>0. \end{cases}$
В	$\begin{cases} a<0, \\ c>0, \\ k>0. \end{cases}$
Г	$\begin{cases} a<0, \\ c<0, \\ k<0. \end{cases}$
Д	$\begin{cases} a>0, \\ c<0, \\ k<0. \end{cases}$

4.Графікам функцій А-Г вибрати із варіантів 1-7відповідні аналітичні вирази:



1	$y=\sqrt{-x}$
2	$y=-\sqrt{-x-2}$
3	$y=\sqrt{-x+1}$
4	$y=-\sqrt{x}$
5	$y=\sqrt{x-4}$
6	$y=\sqrt{x+4}$
7	$y=\sqrt{-x-1}$
8	$y=-\sqrt{-x+2}$

4. Побудова графіків рівнянь за допомогою геометричних перетворень

В 7 класі учні вивчають лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Згідно з державними вимогами учні має описувати способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. У 9 класах з поглибленим вивченням математики учні мають вміти формулювати означення графіка рівняння з двома змінними, описувати графічний метод розв'язування рівнянь з двома змінними, вміти виконувати геометричні перетворення графіків рівнянь.

- Графік рівняння $F(x+a;y)=0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x;y)=0$ вздовж осі абсцис на a одиниць уліво, якщо $a>0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a<0$ [23].

Наприклад, графік рівняння $(x+2)^2+y^2=4$ можна отримати, якщо перенести коло $x^2+y^2=4$ вздовж осі абсцис на дві одиниці вліво (рис.35).

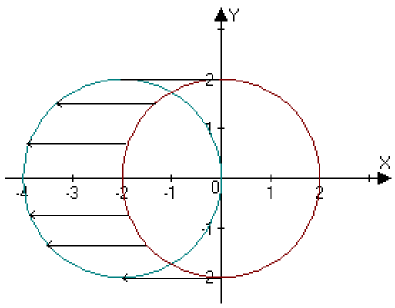


Рис.35

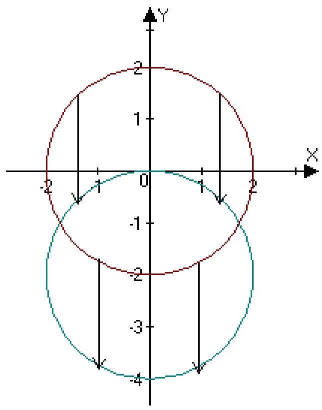


Рис.36

- Графік рівняння $F(x;y+b)=0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x;y)=0$ вздовж осі ординат на b одиниць униз, якщо $b>0$, і на $-b$ одиниць угору, якщо $b<0$.

Наприклад, графік рівняння $x^2+(y+2)^2=4$ можна отримати, якщо перенести коло $x^2+y^2=4$ вздовж осі ординат на дві одиниці вниз (рис.36).

- Графік рівняння $F(-x;y)=0$ можна отримати в результаті симетричного відображення графіка рівняння $F(x;y)=0$ відносно осі ординат.

Наприклад, графік рівняння $(-x+2)^2+y^2=4$ можна отримати, симетрично відобразивши коло $(x+2)^2+y^2=4$ відносно осі ординат (рис.37).

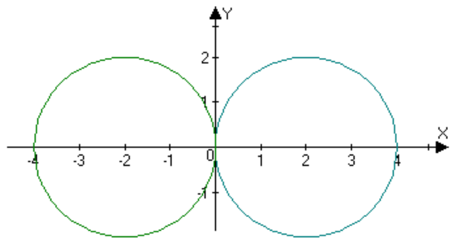


Рис.37

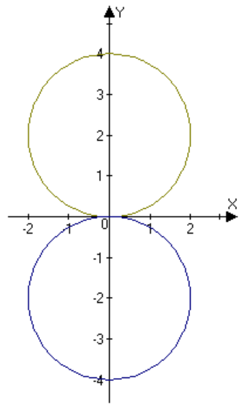


Рис.38

- Графік рівняння $F(x;-y)=0$ можна отримати в результаті симетричного відображення графіка рівняння $F(x;y)=0$ відносно осі абсцис.

Наприклад, графік рівняння $x^2+(-y+2)^2=4$ можна отримати, симетрично відобразивши коло $x^2+(y+2)^2=4$ відносно осі абсцис (рис.38).

- Графік рівняння $F(kx;y)=0$, де $k>0$, можна отримати з графіка рівняння $F(x;y)=0$ в результаті стиску в k разів до осі ординат, якщо $k>1$, або в результаті розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат, якщо $0<k<1$.

Наприклад, графік рівняння $(2x)^2+y^2=4$ можна отримати, якщо стиснути в 2 рази коло $x^2+y^2=4$ до осі ординат (рис.39). Отриману фігуру називають *еліпсом.*

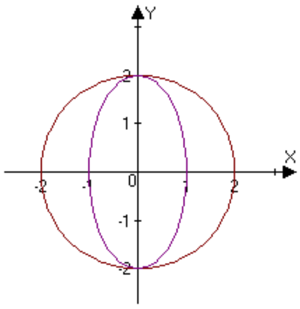


Рис.39

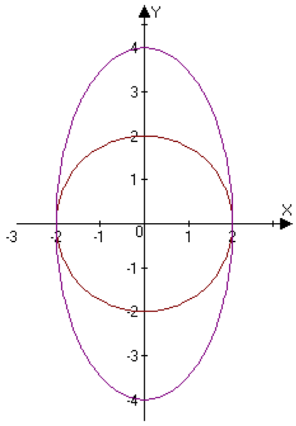


Рис.40

- Графік рівняння $F(x;ky)=0$, де $k>0$, можна отримати з графіка рівняння $F(x;y)=0$ в результаті стиску в k разів до осі абсцис, якщо $k>1$, або в результаті розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі абсцис, якщо $0<k<1$.

Наприклад, графік рівняння $x^2+\left(\frac{1}{2}y\right)^2=4$ можна отримати, якщо розтягнути в 2 рази коло $x^2+y^2=4$ від осі абсцис (рис.40). Отримана фігура також є еліпсом.

- Графік рівняння $F(|x|;y)=0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x;y)=0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x;y)=0$ при $x\geq 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі ординат. Фігура $M_1\cup M_2$ є шуканим графіком.

На рисунку 41 зображено графік рівняння $(|x|-1)^2+y^2=4$.

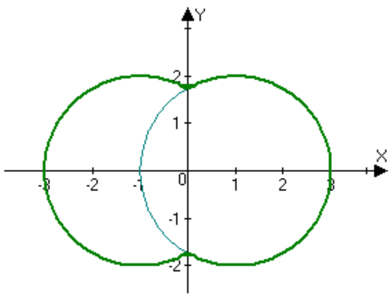


Рис.41

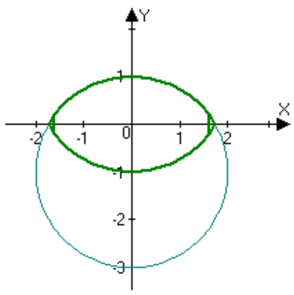


Рис.42

- Графік рівняння $F(x;|y|)=0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x;y)=0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x;y)=0$ при $y \geq 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі абсцис. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.

На рисунку 42 зображено графік рівняння $x^2 + (|y|+1)^2 = 4$.

Приклад 1. Побудувати графік рівняння $|x| + |y| = 1$.

Розв'язання. Нехай рівняння $F(x;y)=0$ позначає рівняння $x + y = 1$. Тоді шуканий графік можна побудувати за такою схемою (рис.43):

1) $F(x;y)=0$

2) $F(|x|;y)=0$

3) $F(|x|;|y|)=0$

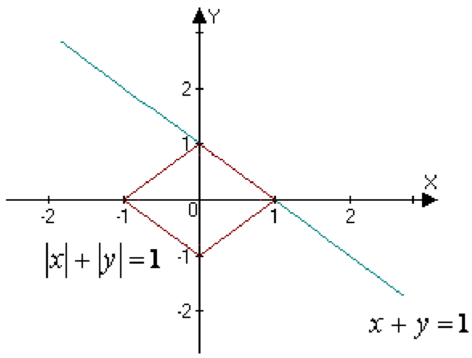


Рис.43

Приклад 2. Побудувати графік рівняння $(x+2)(y-3)=0$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x+2=0 \\ y-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ (Рис.44).

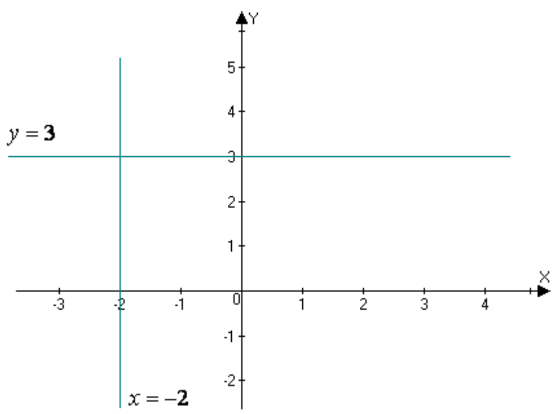


Рис.44

Приклад 3. Побудувати графік рівняння $y = \sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \ge 0 \end{cases} \text{(Рис.45)}$$

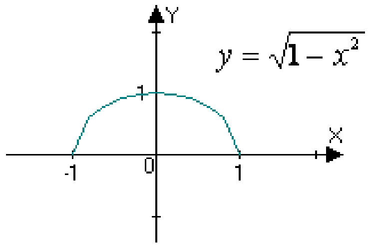


Рис.45

Приклад 4. Побудувати графік рівняння $|y-1| = x^2$.

Розв'язання. Шуканий графік можна побудувати за такою схемою.

1) $F(x^2; y) = 0$;

2) $F(x^2; |y|) = 0$;

3) $F(x^2; |y-1|) = 0$ (рис.46).

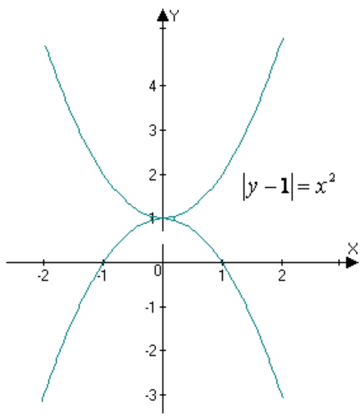


Рис.46

Приклад 5. Побудувати графік рівняння $\dfrac{y^2 - x}{x+y} = 0$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі $\begin{cases} y^2 - x = 0 \\ x + y \ne 0 \end{cases} \to \begin{cases} y^2 = x \\ x \ne -y \end{cases}$ (рис.47).

Точки $(0;0)$ і $(1;-1)$ - виколоті.

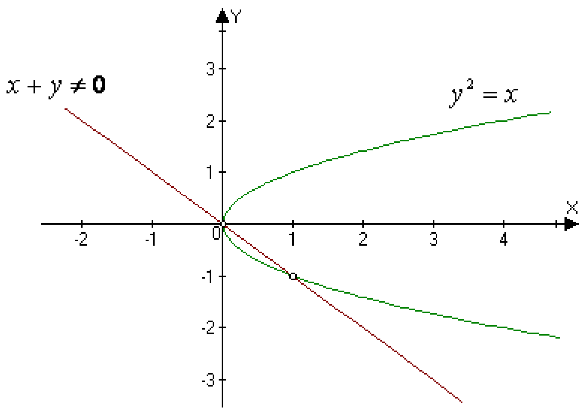


Рис.47

5. Графічний метод розв'язування рівнянь

Суть графічного методу полягає в тому, що ліву й праву частини рівняння ми розглядаємо як функції. Нас цікавлять ті значення аргументу, при яких ці функції приймають однакові значення. Цей спосіб розв'язування рівнянь не завжди дає точні значення розв'язків, адже на практиці ми маємо справу не з графіками функцій, а з їх ескізами. Однак він допомагає у пошуку розв'язків, правильність яких обґрунтовують додатковими дослідженнями.

Розглянемо рівняння f(x)=g(x).

- Побудуємо графік функції y= f(x) і графік функції y= g(x) в одній системі координат.
- Знайдемо абсциси точок перетину цих графіків – вони і є коренями рівняння.

Розглянемо рівняння, які в курсі 9-го класу успішно розв'язуються графічно. Наприклад, якщо розв'язувати рівняння $x^3 = |x-2|$ аналітично, то одержимо сукупність систем, з якою учень 9-го класу не справиться. Проте це рівняння легко розв'язується графічно. Для цього треба побудувати графіки $y = x^3$ і $y = |x-2|$ та знайти абсцису точки їх перетину (рис.48).

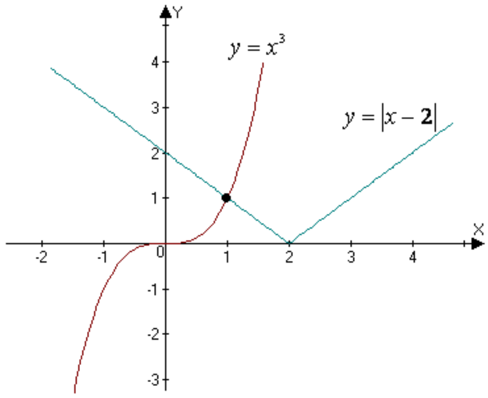


Рис.48

Відповідь. 1.

Розглянемо квадратне рівняння загального виду $ax^2+bx+c=0$. Перепишемо його таким чином: $ax^2=-bx-c$ (1)

В одній координатній площині побудуємо графіки функцій $y=ax^2$ і $y=-bx-c$. Графіки цих залежностей нам відомі: перша залежність – квадратична (її графіком є парабола); друга – лінійна (її графіком є пряма). З рівняння (1) бачимо: в тому випадку, якщо x є його розв'язком, ординати точок обох графіків рівні між собою. Отже, значенню x відповідає одна й та ж точка як на параболі, так і на прямій, тобто парабола і пряма перетинаються в точці з абсцисою x.

Звідси наступний графічний спосіб розв'язання квадратного рівняння: будуємо параболу $y=ax^2$; будуємо пряму $y=-bx-c$.

Якщо пряма і парабола перетинаються, то абсциси точок перетину є коренями квадратного рівняння. Цей спосіб зручний, якщо не вимагається великої точності.

Приклад 1. Розв'язати графічно рівняння $x^4-8x+63=0$.

Розв'язання. Розв'язування даного рівняння традиційними методами є досить непростим. Це рівняння не має раціональних коренів. Тому для його розв'язування аналітичним методом потрібно розкласти на множники ліву частину рівняння методом невизначених коефіцієнтів, або групуванням. Що є досить громіздким. У той же час графічний спосіб розв'язування цього рівняння є простішим. Розглянемо функції $f(x)=x^4$ і $g(x)=8x-63$ та побудуємо їх графіки в одній системі координат (рис.49).

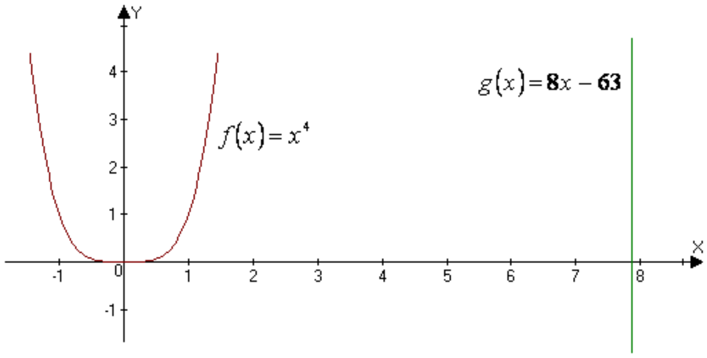


Рис.49

Парабола і пряма не перетинаються, отже рівняння розв'язків немає.

Відповідь. Ø.

Приклад 2. Розв'язати графічно рівняння $x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}$.

Розв'язання. Розвязування цього рівняння методом піднесення до степеня приводить нас до рівняння восьмого степеня. Розглянемо функції $f(x) = x^2 - x + 2$ і $g(x) = 2\sqrt[4]{2x-1}$. Побудуємо їх графіки (рис.50), вони мають одну спільну точку. Отже, рівняння має корінь: $x = 1$.

Відповідь. 1.

Приклад 3. Розв'язати графічно рівняння $\sqrt[3]{9x} = x^2 - 2x$

Розв'язання. Розв'язування даного рівняння традиційними методами приводить до рівняння шостого степеня, яке не так легко розв'язати. Розглянемо функції $f(x) = \sqrt[3]{9x}$, $g(x) = x^2 - 2x$ та побудуємо їх графіки в одній системі координат (рис.51).

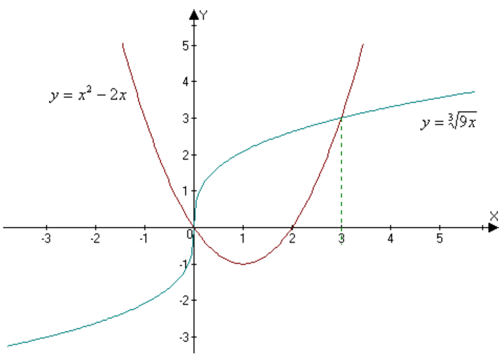


Рис.51

Як видно з рис.32, $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$ - абсциси точок перетину цих графіків. Безпосередньо підстановкою у вихідне рівняння, переконуємося, що $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$ - його корені.

Відповідь. 0; 3.

Приклад 4. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 4|x| = -3$?

Розв'язання. Побудувавши в одній координатній площині графіки функцій $y = x^2 - 4|x|$ (див. «Алгоритм побудови графіка функції $y = f(|x|)$») та $y = -3$, бачимо, що рівняння має чотири корені (рис.52).

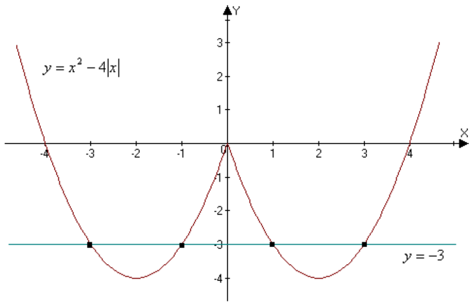


Рис.52

Приклад 5. Розв'язати графічно рівняння $2^{-x} = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Будуємо графіки функцій $y = 2^{-x}$ та $y = \sqrt{x}$ (рис.53). Графіки обох функцій перетинаються у точці $x = \frac{1}{2}$. Отже, корінь рівняння буде $x = \frac{1}{2}$.

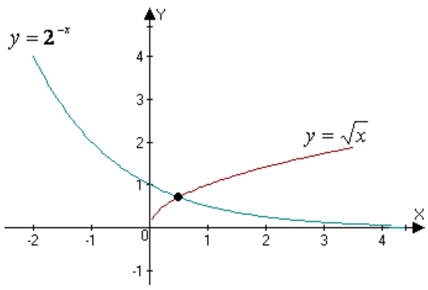


Рис.53

Тригонометричні рівняння розв'язують як аналітично, так і графічно. Розглянемо графічний спосіб розв'язування тригонометричних рівнянь на прикладах.

Приклад 6. Розв'язати графічно рівняння $\sin x + \cos x = 1$.

Розв'язання. Будуємо графіки функцій $y = \sin x$ та $y = -\cos x + 1$ (рис.54).

Бачимо, що рівняння має два корені:

$$x = 2\pi n, \text{ де } n \in Z \text{ та } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ де } k \in Z.$$

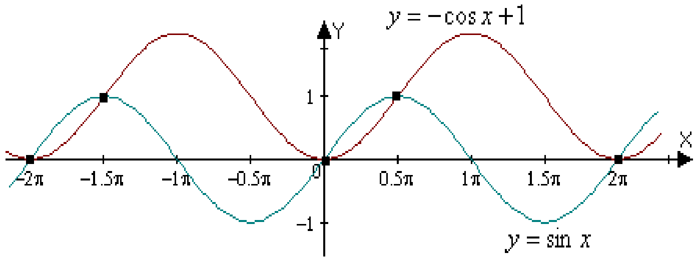


Рис.54

Відповідь. $x=2\pi n$, $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, де $n,k\in Z$.

Приклад 7. Розв'язати графічно рівняння $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$.

Розв'язання. Будуємо графіки функцій

$y=6\sin^2 x$ та $y=-2\sin^2 2x+5$ (рис.55).

Бачимо, що коренями рівняння є числа $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$.

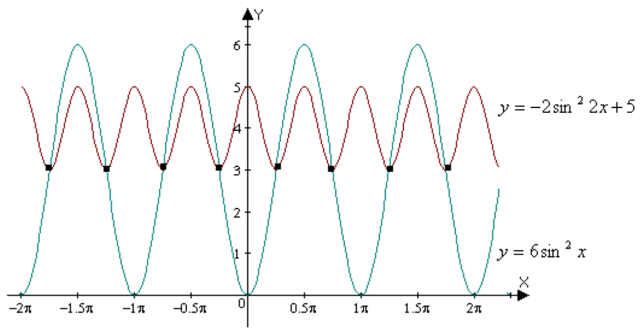


Рис.55

Відповідь. $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$.

Можна запропонувати учням розв'язати графічно такі рівняння:

1) $-x^3+3=x+3$;

2) $||x|-1|=4+x$;

3) $|x+4|=-2|x|-8$;

4) $|3-2|x||=|2-x|-3$;

5) $4|x|+2=\dfrac{4x+4}{|x+1|}$;

6) $|3-|2-|x||=\dfrac{x-5}{x-5}$;

7) $\left|3-\left|2-|x|\right|\right|=-\dfrac{|x-5|}{x-5}$;

8) $\left|x^2-4\right|=-\dfrac{2x+4}{|x-2|}$;

9) $|2x-5|=|3x-10|$;

10) $x+|x+4|=|x|+1$;

11) $\left|x^2-1\right|=\dfrac{x}{|x|}$;

12) $\left|x^2-2\right|=\dfrac{2x}{|x|}$;

13) $-x|x|=-\dfrac{4x+12}{|x+3|}$;

14) $x^2=\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$;

15) $\left|x^3\right|=\dfrac{x^2+x-12}{x+4}$;

16) $\dfrac{x^3-x^2}{|x-1|}=|x-2|$.

На ЗНО зустрічаються завдання розв'язати рівняння з параметрами. Розглянемо як їх розв'язують методом координат. Рівняння виду $f(x,a)=g(x,a)$, де x – невідоме, a – параметр (довільне стале число), називається рівнянням із параметром. Розв'язати рівняння з параметром означає для кожного значення параметра a з'ясувати, чи має рівняння корені; якщо має, то знайти їх. Очевидно, ці корені залежать від параметра значень a.

Якщо рівняння з параметром можна звести до виду $f(x)=a$, його доцільно розв'язувати графічним методом. Для цього знаходимо область допустимих значень невідомого параметра, вводимо дві функції $y=f(x)$ і $y=a$ та будуємо їх графіки в одній координатній площині. Рівняння $f(x)=a$ має стільки коренів, скільки разів горизонтальна пряма $y=a$ перетинає графік функції

$y = f(x)$, при цьому пряма постійно зміщується вздовж осі *Oy* паралельно до осі *Ox*:

- Якщо пряма і графік функції не перетинаються, то при цьому значенні параметра рівняння коренів не має;
- Пряма і графік функції перетинаються, тоді знаходимо абсциси точок перетину візуально (якщо це можливо) або розв'язавши рівняння $a = f(x)$ відносно *x*.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} = -a$.

Розв'язання. Область визначення рівняння: $x \geq 0$.

Для більшої зручності перепишемо рівняння у вигляді $-\sqrt{x} = a$ та розв'яжемо його аналогічно до попереднього. А саме: вводимо функції $y = -\sqrt{x}$ і $y = a$ та будуємо їх графіки (рис.56)

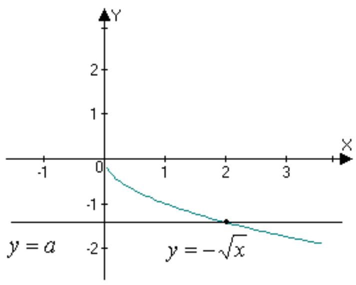


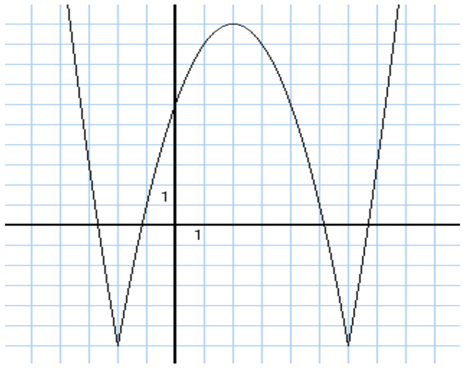
Рис.56

Отже, якщо $a > 0$, рівняння коренів не має; якщо $a \leq 0$, рівняння має один корінь $x = a^2$.

Відповідь. Коренів немає, якщо $a > 0$; $x = a^2$, якщо $a \leq 0$.

Приклад 9. Скільки коренів має рівняння $|x^2 - 4x - 12| - 6 = 0$?

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = |x^2 - 4x - 12| - 6$ та знайдемо кількість точок його перетину з віссю Ох.



Відповідь: 4.

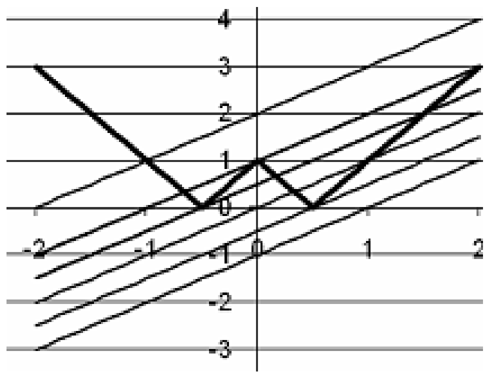
Приклад 10. Скільки коренів в залежності від параметра а має рівняння $\left|x^2-4x-12\right|-a=0$?

Розв'язання.

Побудуємо графіки функції $y=\left|x^2-4x-12\right|$ та $y=a$ в одній системі координат та знайдемо кількість точок його перетину з віссю Ох.

Приклад 11. При яких значеннях параметра a рівняння $\left|\left|2x\right|-1\right|=x-a$ має рівно три розв'язки?

Побудуємо графіки функцій $y=\left|\left|2x\right|-1\right|$ та $y=x-a$. Перший графік не залежить від параметра, а другий в залежності від значень, яких набуває a рухається вздовж осі ординат. Рівно три точки перетину отримаємо у двох випадках: коли обидва графіки проходять через точку $(-0,5;\,0)$ або через точку $(0;1)$.



Якщо точка $(-0,5;\,0)$ належить $y=x-a$, то можна знайти значення параметра: $0=-0,5-a \;\Leftrightarrow\; a=-0,5$. Аналогічно з другого випадку знаходимо, що $a=-1$.

Відповідь: $-0,5;\ -1$.

ВИСНОВКИ

Метод координат є необхідною складовою розв'язування задач різного рівня. Використання даного методу дозволяє значно спростити і скоротити процес розв'язування завдань, що допомагає при подальшому вивченні, як шкільного курсу математики, так і при вивченні математики у вищих навчальних закладах.

Важливою темою шкільного курсу математики є «Геометричні перетворення», які служать сполучною ланкою між основними поняттями алгебри і геометрії. При цьому даний матеріал широко використовується при вивченні функцій і графіків, а саме: побудова графіків функцій здійснюється за допомогою наступних геометричних перетворень:

1) осьової симетрії відносно координатних осей,

2) паралельного перенесення (зсуву) уздовж координатних осей,

3) розтягу (або стиску) по напрямку координатних осей.

В роботі розглянута методика навчання учнів побудови графіків функцій та рівнянь за допомогою геометричних перетворень.

Вивчення поведінки функцій і властивостей, побудова їх графіків є важливим розділом математики. Вільне володіння технікою побудови графіків, знання властивостей функцій часто допомагає вирішити багато завдань і часом є єдиним засобом їх вирішення. Крім того, вміння будувати графіки функцій представляє великий самостійний інтерес.

Будувати графіки функцій за допомогою геометричних перетворень учням зазвичай подобається. Але для того, щоб сформувати в них міцні знання з цієї теми потрібна цілеспрямована робота з боку вчителя. Зокрема, для запобігання формалізму у сприйманні готового алгоритму побудови графіків функцій потрібні теоретичні обґрунтування окремих перетворень. У випадку побудови складніших графіків необхідно переконати учнів у необхідності дотримування чіткої послідовності перетворень. Узагальнення щодо побудови графіків функцій шляхом геометричних перетворень треба виконувати паралельно з розглядом побудови графіків конкретних функцій.

При вивченні геометричних перетворень графіків функцій доцільно використовувати різні інформаційно-комунікаційні технології як з навчальними, так і контролюючими цілями. Їх використання дозволяє яскраво і динамічно продемонструвати побудову різних графіків функцій, скоротити час на освоєння матеріалу, підвищити мотивацію, сприяє формуванню і вдосконаленню знань і умінь учнів.

Розглянутий матеріал може стати у пригоді вчителю математики як методична література, майбутнім учителям математики, учням.

ДОДАТОК А

Конспект уроку математики

9 клас

Предмет: алгебра

Тема: «Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень»

Мета: удосконалювати вміння і навички учнів виконувати найпростіші перетворення графіків функцій; закріпити уміння і навички побудови графіків при розв'язанні рівнянь графічно; розвивати логічне мислення, уміння аналізувати, зіставляти, порівнювати; формувати навички і вміння роботи в групах; розвивати інтерес до математики.

Ресурси: інтерактивна дошка, презентація по темі, відеоролик, комп'ютери, смартфони, тестові завдання в он-лайн конструкторі Kahoot!, інструкція по використанню.

Хід уроку:

І. Організаційний етап

Учні працюють протягом уроку в малих групах. Кожному учневі на початку уроку видається картка обліку.

Учні виставляють відповідну кількість балів за кожний вид роботи на уроці в картку.

Табл.1 - Картка обліку

Вид роботи	**Вікторина**	**Дослідницька робота**	**Перевірочний тест**
Кількість балів			
Максимальна кількість балів	12	12	12

Загальна кількість балів –

Оцінка –

Табл.2

Кількість отриманих балів	**Оцінка по 12-бальній системі оцінювання навчальних досягнень учнів**
0-3	1
4-6	2
7-9	3
10-12	4
13-15	5
16-18	6
19-21	7
22-24	8
25-27	9
28-30	10
31-33	11
34-36	12

Відповідність кількості набраній учнями балів по 12- бальній системі оцінювання навчальних досягнень наведено в табл.2.

Для оцінювання «Вікторини» і «Перевірочного тесту» учні користуються безоплатним онлайн – сервісом Kahoot! (https://kahoot.com/). Це ігрова платформа для навчання, яка використовується як навчальна технологія в закладах освіти і базується на методі drag-and-drop. Сервіс пропонує три форми гри в залежності від навчальної мети: визначення рівня ознайомленості учасників з темою чи рівня її розуміння — «Вікторина» (Quiz); улаштування дискусії щодо певного питання, презентація ідеї й отримання щодо неї «зворотного зв’язку» — «Обговорення» (Discussion); зібрання думок, поглядів учасників на ту чи ту проблему — «Опитування» (Survey) (на нашому уроці використані форми «Вікторина» та «Перевірочний тест»).

Учні відповідають на створені вчителем тести з планшетів, ноутбуків, смартфонів, тобто з будь-якого пристрою, що має доступ до Інтернету. Створені в Kahoot завдання дозволяють включити в них фотографії і навіть відеофрагменти. Темп виконання вікторин, тестів регулюється шляхом введення часової межі для кожного питання.

При бажанні вчитель може ввести бали за відповіді на поставлені питання: за правильні відповіді і за швидкість. Табло відображається на моніторі вчительського комп'ютера.

ІІ. Вікторина (актуалізація опорних знань)

Кожний учень зі свого планшета, мобільного телефона чи іншого гаджета має змогу відповісти на запитання вікторини.

1 бал нараховується тій групі, учасники якої дали більше правильних відповідей.

За кожну правильну відповідь нараховується 1 бал.

Для участі в вікторині (надалі в тесті) учні повинні відкрити сервіс і ввести PIN-код, який представляє вчитель зі свого комп'ютера або через згенерований QR-код.

Учитель не може розпочати гру, поки у віртуальній кімнаті не з'явиться хоча б один учасник (кількість присутніх і їх імена відображаються у віртуальній кімнаті на великому екрані). Як тільки всі учасники гри в зборі, учитель натискає «Start now» - і вікторина починається. На великому екрані учні бачать питання і варіанти відповідей на нього, на своїх мобільних пристроях - кольорові прямокутники з геометричними фігурами всередині, кожен з яких відповідає одній з відповідей. Необхідно вибрати один із варіантів і клікнути по ньому. На пристрої висвічується інформація про те, правильна відповідь чи ні, а також кількість балів, що присуджується учаснику за правильну відповідь. На великий екран виводиться загальний рахунок і поточний рейтинг учасників гри. В разі потреби вчитель здійснює корекційну роботу. Вікторина, створена за допомогою даного сервісу, розрахована на участь у ній до 30 осіб. За кожну правильну відповідь присуджуються бали. Вікторина передбачає вибір правильної відповіді з числа запропонованих і допомагає швидко перевірити знання учнів з будь-якої теми. Створеною вікториною можна поділитися в соціальних мережах (Twitter, Facebook, Google+) або відправити посилання на тест по електронній пошті.

Початок роботи.

Рис.1 – Початок роботи вчителя в сервісі Kahoot! Обираємо форму Вікторина

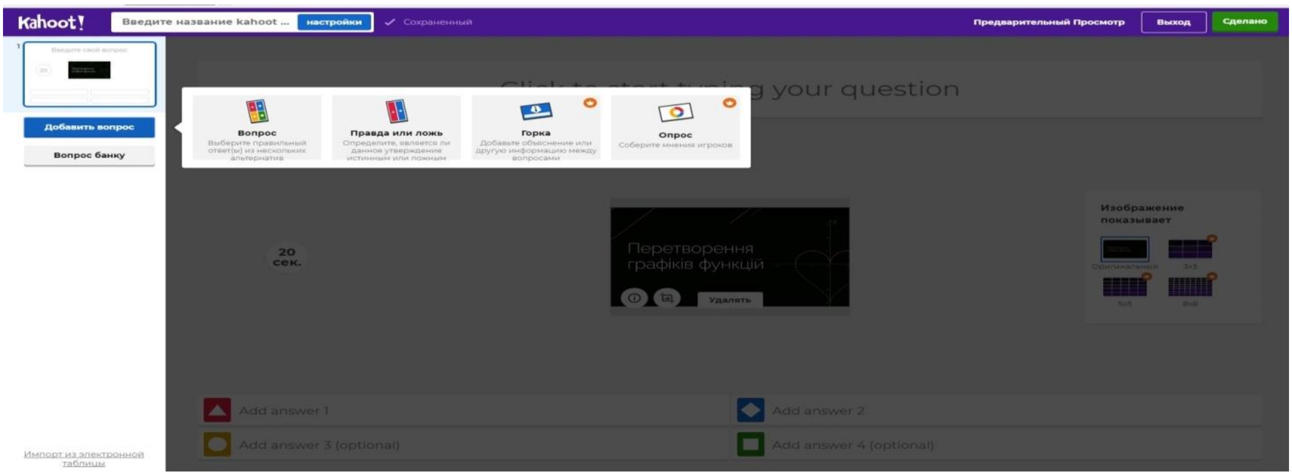


Рис.2 – Введення питань вікторини

1. Визначте який вигляд має функція, графік якої утворюється з графіка функції $y=x^2$ шляхом виконання паралельного перенесення графіка функції $y=x^2$ на три одиниці вниз (1 бал):

А	Б	В	Г
$y=x^2+3$	$y=(x-3)^2$	$y=x^2-3$	$y=(x+3)^2$

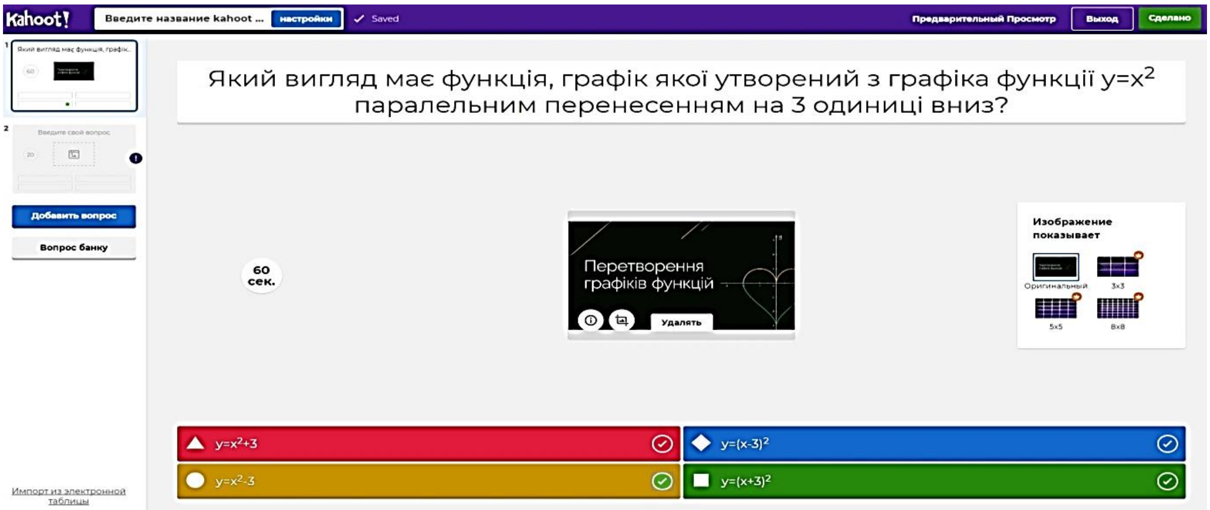


Рис.3 – Введення питання №1 вікторини, позначення правильної відповіді

2. У результаті якого перетворення із графіка функції y=f(x) можна отримати графік функції y=f(3x) (1 бал):

А	Б	В	Г
Розтягом від осі абсцис у 3 рази	Стиском до осі ординат у 3 рази	Стиском до осі абсцис у 3 рази	Розтягом від осі ординат у 3 рази

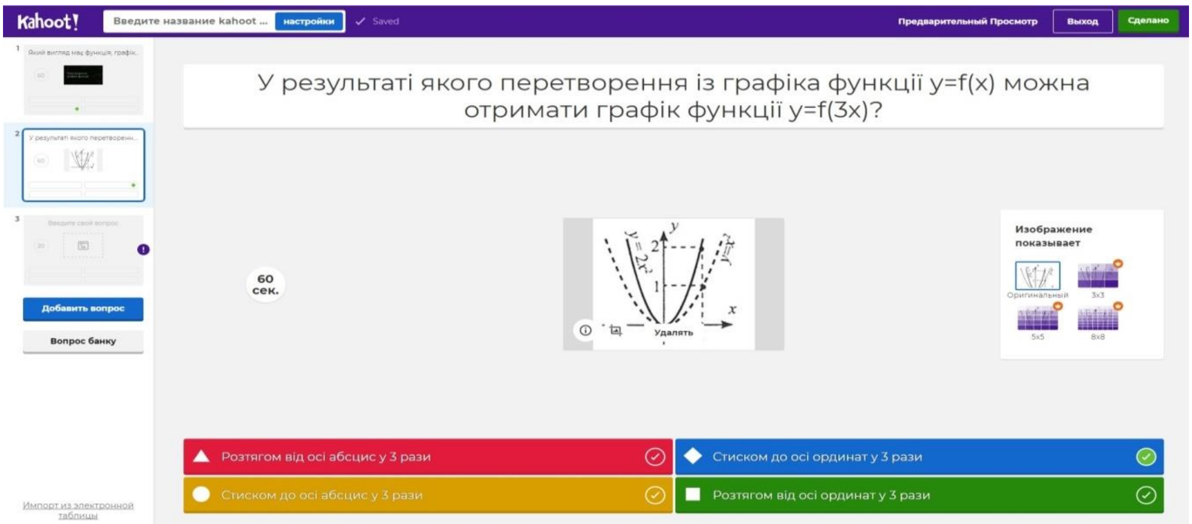


Рис.4 – Введення питання №2 вікторини, позначення правильної відповіді

3. Визначте, який вигляд має функція, графік якої утворюється з графіка функції y=f(x) шляхом виконання паралельного перенесення на 5 одиниць вправо (1 бал):

А	Б	В	Г

y=f(x+5)	y=f(x) -5	y=f(x-5)	y=5f(x)

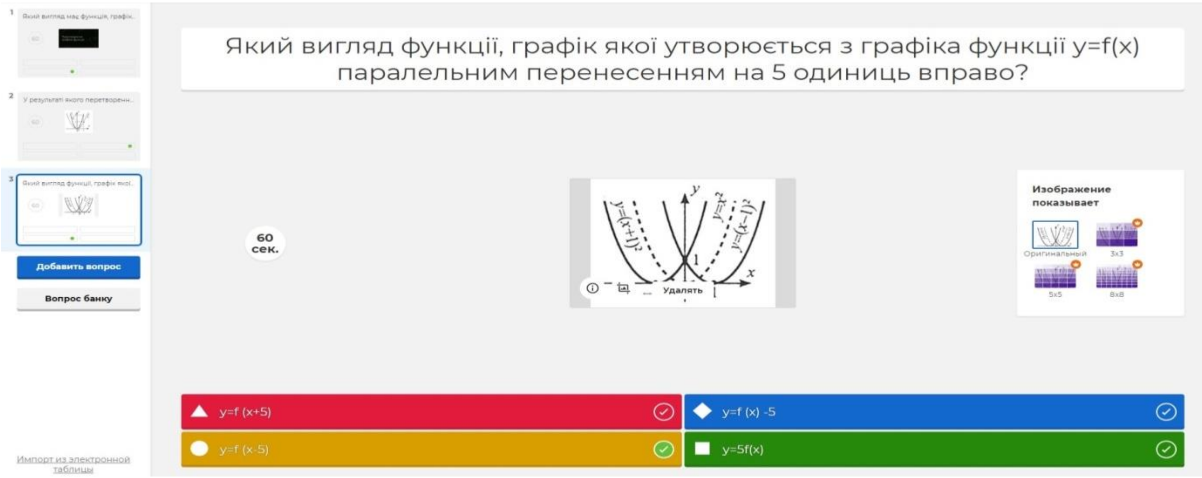


Рис.5 – Введення питання №3 вікторини, позначення правильної відповіді

4. У результаті якого перетворення графіка функції $y=x^2$ можна отримати графік функції $y=\frac{1}{5}x^2+6$ (2 бали):

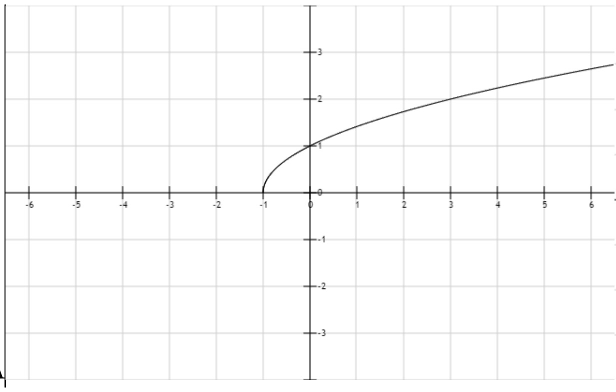
А	Б	В	Г
Розтягом від осі абсцис у 5 разів і паралельним перенесенням вниз на 6 одиниць	Стиском до осі абсцис у $\frac{1}{5}$ разів і паралельним перенесенням вгору на 6 одиниць	Стиском до осі абсцис у 5 разів і паралельним перенесенням вгору на 6 одиниць	Розтягом від осі абсцис у 5 разів і паралельним перенесенням вгору на 6 одиниць

Аналогічно вводять в середовищі Kahoot! всі наступні питання.

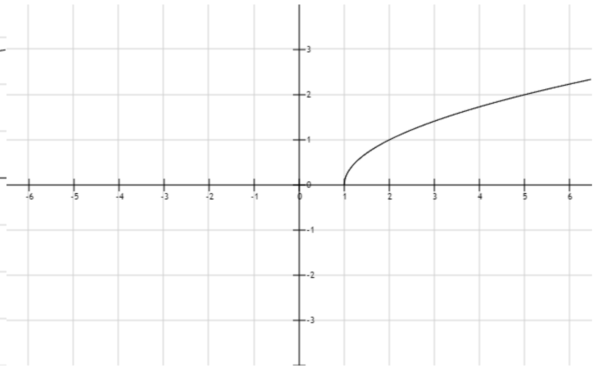
5. Графік функції $y=\frac{1}{x}$ зсунули ліворуч на 4 одиниці і відобразили симетрично відносно осі x. Графік якої функції отримали в результаті перетворення? (2 бали)

А	Б	В	Г
$y=\frac{4}{-x-4}$	$y=-\frac{4}{x+4}$	$y=-\frac{4}{x}-4$	$y=-\frac{4}{x-4}$

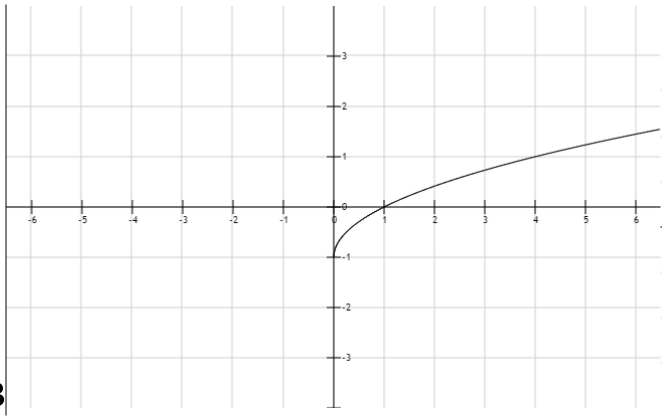
6. На якому з рисунків зображено графік функції $y = \sqrt{x+1}$ (1 бал):



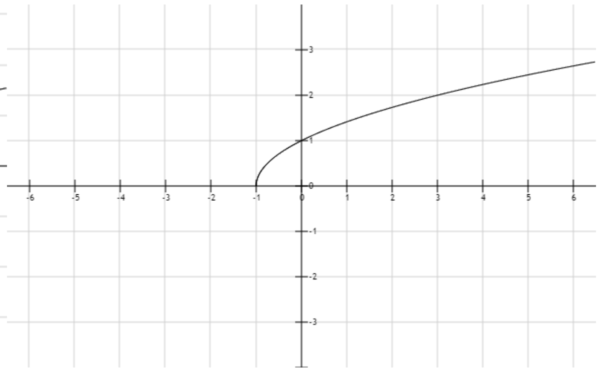
А



Б

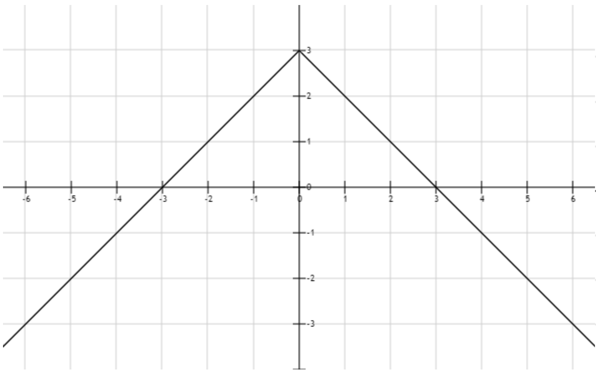


В

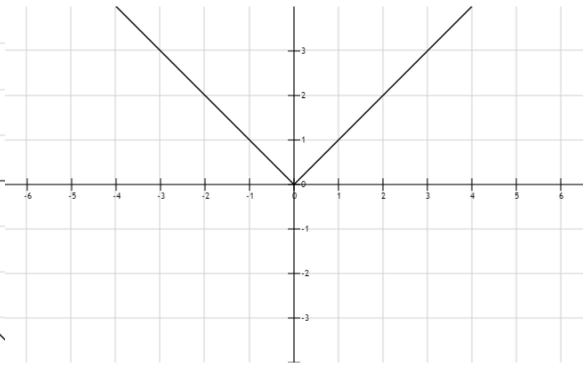


Г

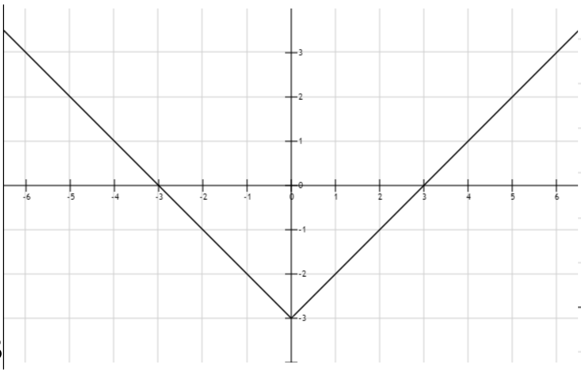
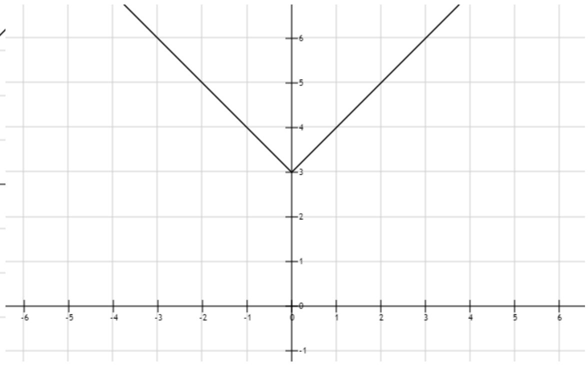
7. На якому з рисунків зображений ескіз графіка функції $y = -3 + |x|$? (2 бали)



А

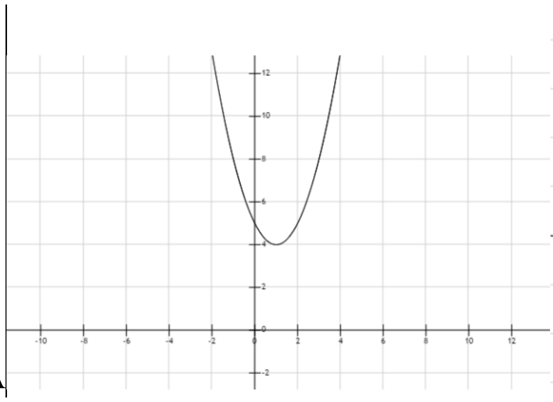
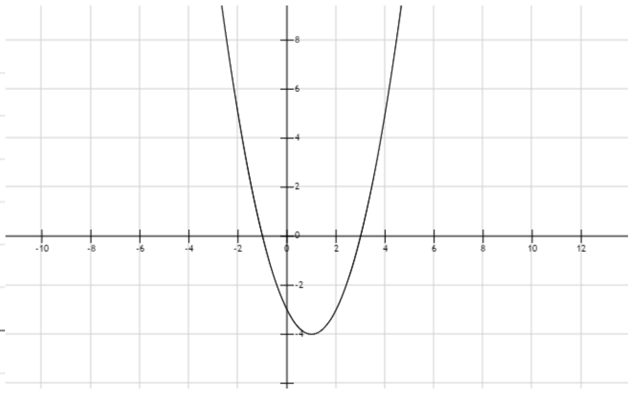


Б

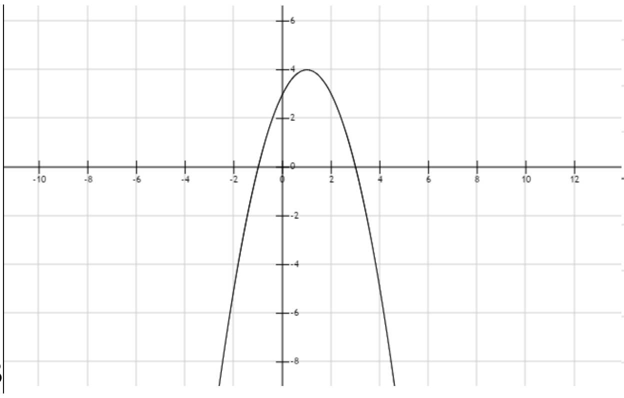
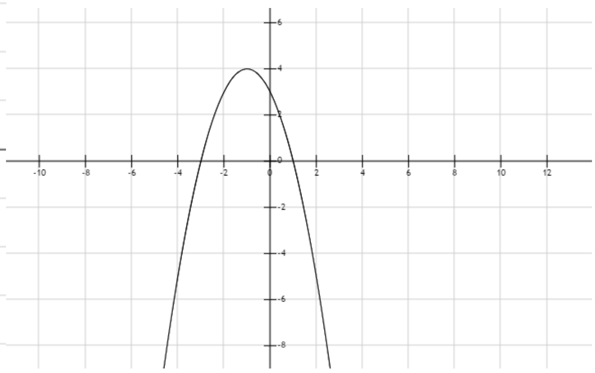
В  

Г

8. На якому з рисунків зображений ескіз графіка функції $y = 4 + (x - 1)^2$? (2 бали)

А  

Б

В  

Г

По завершенню створення вікторини ми обираємо «Командний режим» для роботи в малих групах і налаштовуємо потрібні для вчителя ігрові опції:

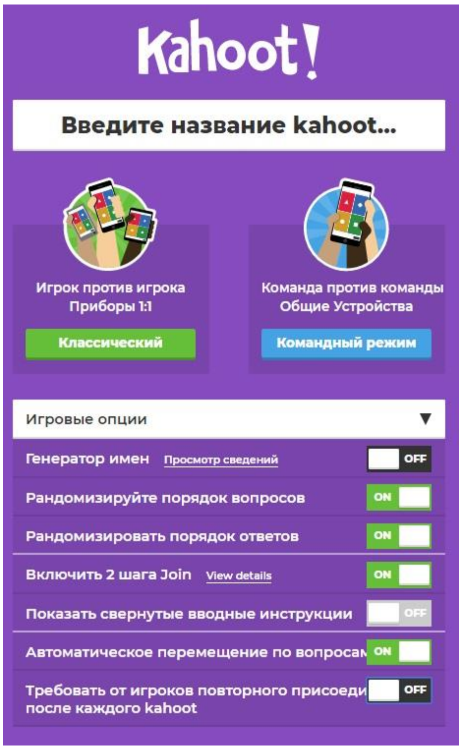


Рис.6 – Вибір класичного або командного режиму ігроків

Сформується PIN-код, за яким учні в потрібний час для вчителя на уроці розпочнуть вікторину в командній формі гри:

Рис.7 – Старт для команд

Підведення підсумків Вікторини

Кількість набраних балів за конкурс – це рівень підготовки учнів до уроку.

ІІІ. Закріплення умінь і навиків

Дослідницька робота – це робота в малих групах (удосконалення знань і вмінь). Помічник вчителя в кожній з груп оцінює роботу кожного учня і виставляє відповідну кількість балів в картку обліку.

№1

Побудуйте графік функції $y = -(\mathrm{x} + 4)^2 - 3$. (1бал) За графіком функції знайдіть:

а) область значень функції (1 бал);

б) значення х, при яких функція набуває додатних значень(1 бал).

№2

Побудуйте графік функції $y = 2\sqrt{\mathrm{x} - 3} + 4$ (1 бал).

За графіком функції знайдіть:

а) область визначення функції (1 бал);

б) значення х, при яких функція менше 6 (1 бал).

№3

Розв'яжіть графічно рівняння:

$1 + \frac{5}{\mathrm{x}} = \sqrt{\mathrm{x} - 1}$ (3 бали).

Схема оцінювання завдання №3:

1) Правильно побудовано графік функції $y = 1 + \frac{5}{\mathrm{x}}$ (1 бал).
2) Правильно побудовано графік функції $y = \sqrt{\mathrm{x} - 1}$ (1 бал).
3) Правильно знайдено абсцису точки перетину графіків функцій і записано відповідь до рівняння (1 бал).

№4

Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 9|$.

Використовуючи графік функції, знайдіть усі значення а, при яких рівняння $|x^2 - 9| =$ а має рівно три корені.

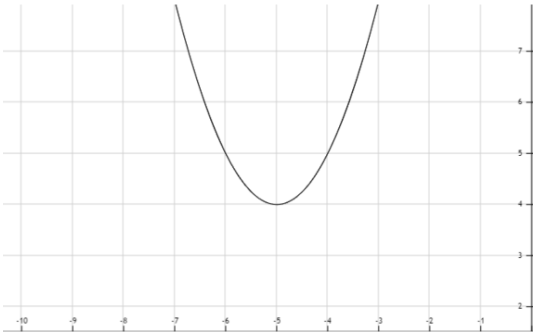
Схема оцінювання завдання №4:

1) Правильно побудовано графік функції $y = |x^2 - 9|$. (1 бал).
2) а) Правильно знайдено два значення а, при яких рівняння $y = |x^2 - 9|$ має рівно три корені (2 бали);

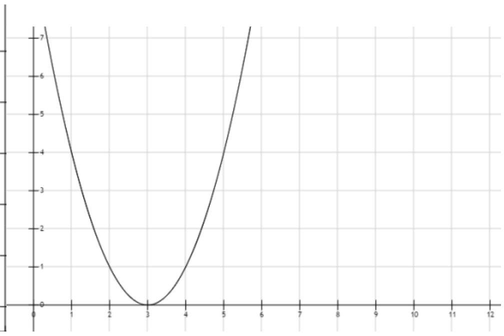
б) якщо правильно знайдено тільки одне значення, яке задовольняє умову (1 бал).

III. Перевірочний тест «Плутанина» (онлайн-сервіс Kahoot!)

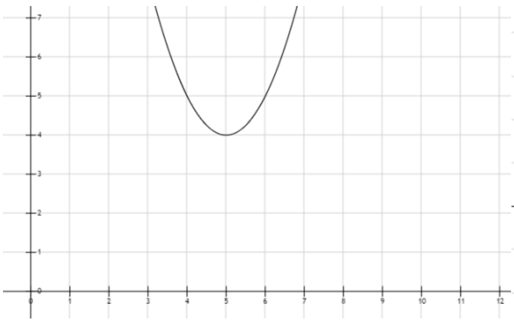
1) Установіть відповідність між функціями та їх графіками (I-VI) (4 бали):



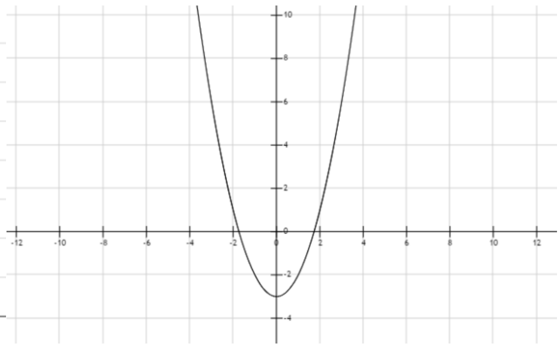
I.



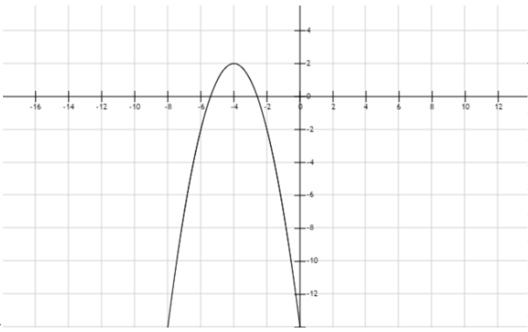
II.



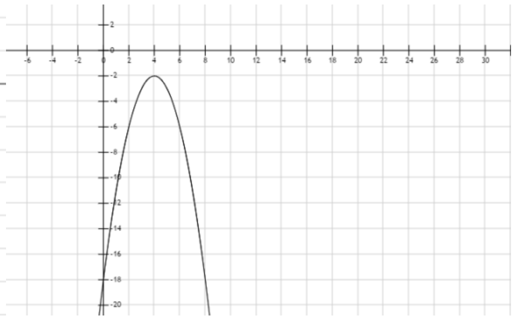
III.



IV.



V.



VI.

1. $y = -(x-4)^2 - 2$.

2. $y = (x+5)^2 + 4$.

3. $y = x^2 - 3$.

4. $y = (x-3)^2$.

5. $y = -(x+4)^2 - 2$.

6. $y = (x-5)^2 + 4$.

Створимо перевірочний тест на платформі Kahoot!:

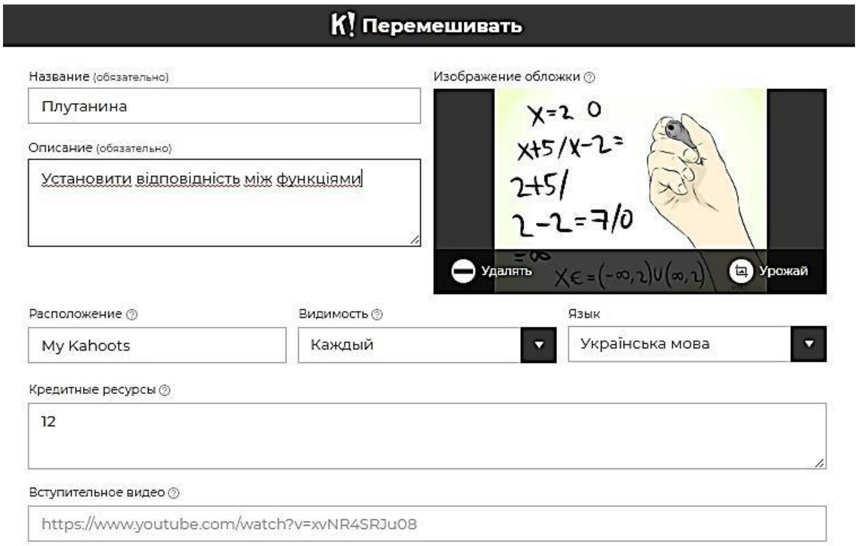


Рис. 8 – Створення тесту «Плутанина»

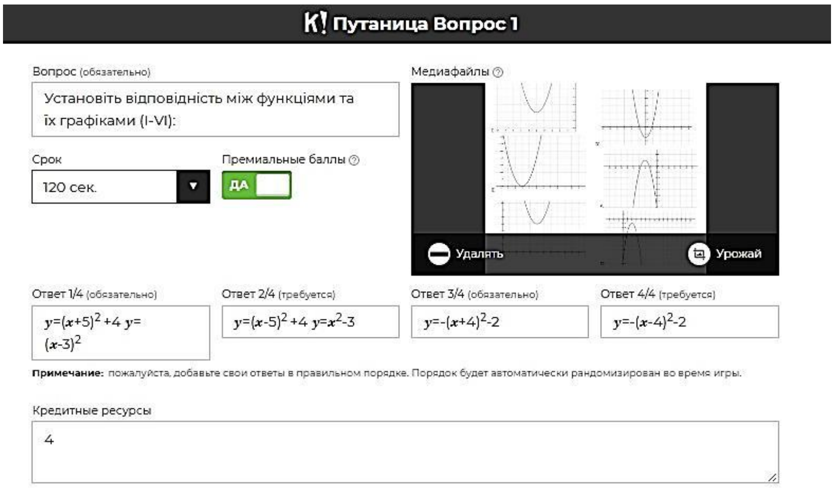


Рис. 9 – Введення задачі №1

2) Задано функцію y=f(x) з множиною значень [-3; 9]. Установити відповідність між функціями (1-4) та їхніми множинами значень (А-Д) (4 бали).

1. y=2f(x)+3	А [0; 9]
2. y=-f(x)	Б [-1; 3]
3. y=$\frac{1}{3}$f(x)	В [-9; 3]
4. y=$\lvert f(x)\rvert$	Г [-3; 21]
	Д [-3; 9]

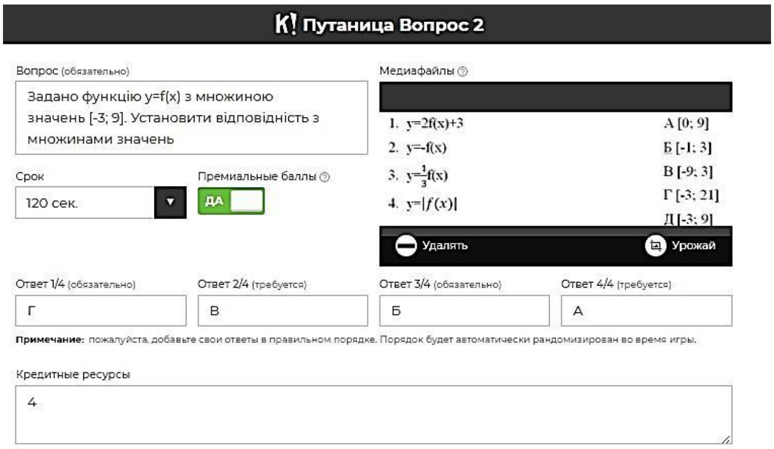


Рис. 10 – Введення задачі №2

3) Задано функцію y=f(x) з областю визначення [-4; 6]. Установити відповідність між функціями (1-4) та їх областями визначень (А-Д) (4 бали):

1) y=f(x+4)
2) y=f(2x)
3) y=f(x)+5
4) y=f(x-5)+3

А [0; 10]

Б [-4; 6]

В [1; 11]

Г [-2; 3]

Д [-8; 2]

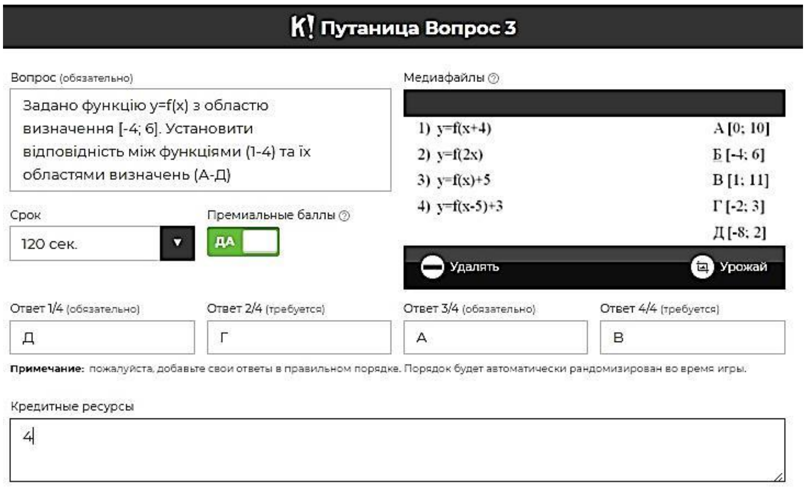


Рис. 11 – Введення задачі №3

Таким чином, перевірочний тест на відповідність «Плутанина» створено:

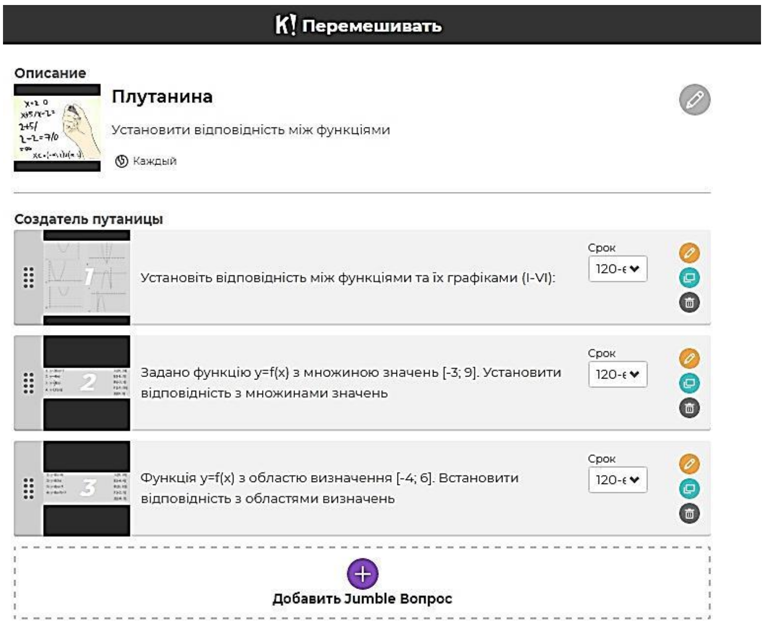


Рис. 12 – Тест «Плутанина»

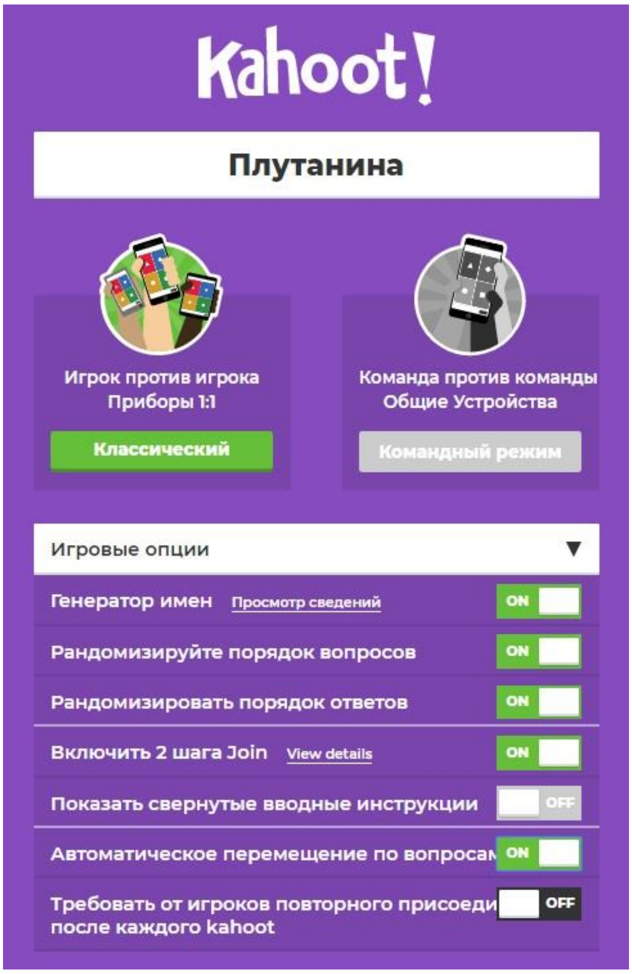


Рис. 13 – Вибір форми тестування «Командний режим» перед стартом

Сформується PIN-код, за яким учні в потрібний час для вчителя на уроці розпочнуть тестування в класичній формі гри:

Рис.14 – Старт для команд

Підведення підсумків тесту

Корекція відповідей на запитання.

IV. Підведення підсумків уроку

Учні підраховують загальну кількість балів, набрану за роботу на уроці. Старший групи виставляє оцінку за урок за шкалою оцінювання і збирає картки обліку.

Рефлексія

Учням пропонується скласти вірш без рифми (синекан) і зачитати його.

- ✓ Перший рядок – назва теми (одне слово).
- ✓ Другий рядок – опис теми в двох словах.
- ✓ Третій рядок – рядочок опису дій в рамках даної теми (три слова).
- ✓ Четвертий рядочок – фраза з чотирьох слів, яка показує відношення до даної теми.
- ✓ Останній рядочок – синонім, який показує суть теми.

Домашнє завдання

Творче завдання

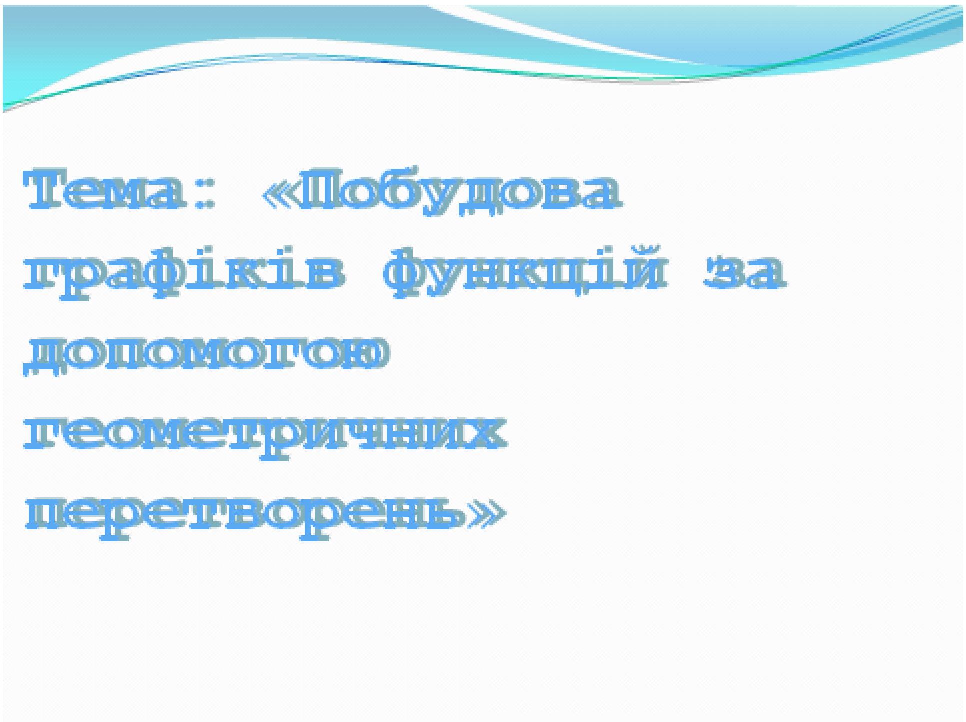
Скласти для іншої групи формули двох функцій, графіки яких потрібно побудувати.

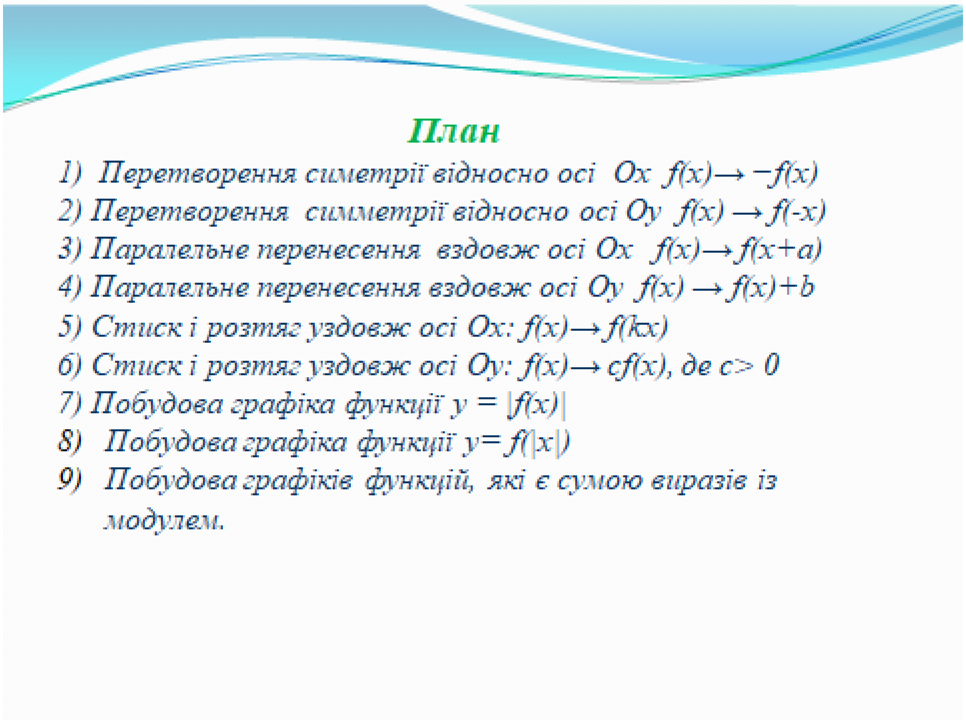
Знайти:

- ✓ область визначення цих функцій;
- ✓ область значень;
- ✓ проміжки зростання і спадання функцій.

ДОДАТОК Б

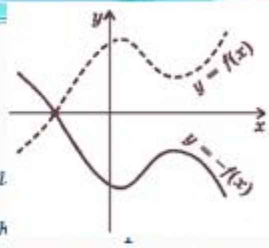
Презентація до лекції з узагальнення та систематизації знань учнів з теми: «Побудова графіків функцій за допогою геометричних перетворень»

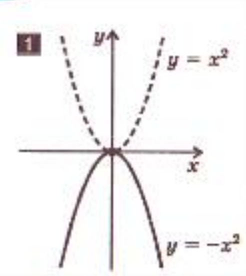




1) Перетворення симетрії відносно осі Ох

$f(x) \rightarrow -f(x)$





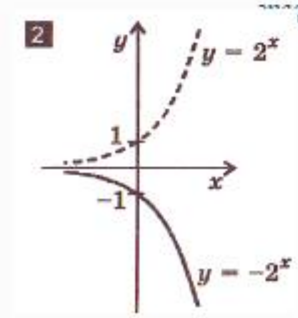
Графік функці

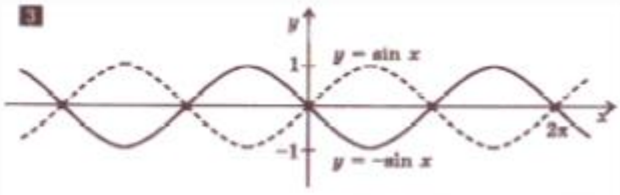
y=-f(x) отримується за допомогою

відображення графіка функції y=f(x) відносно осі Ox.

При цьому точки перетину

...фіка функції з віссю Ox залишаються незмінними.





Алгоритм побудови графіка функції $y = -f(x)$

Щоб побудувати графік функції $y = -f(x)$, потрібно:

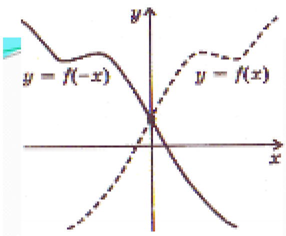
1) побудувати графік функції $y = f(x)$;

2) відобразити побудований графік симетрично відносно осі Ox.

3) графік функції $y = f(x)$ потім відкидається.

2) Перетворення симетрії відносно осі Оу

f(x)→f(-x)

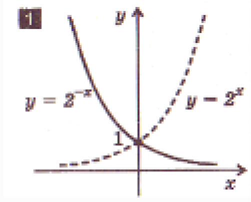


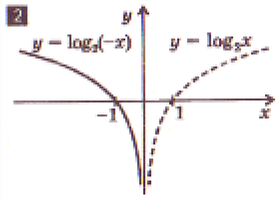
Графік функції $y = f(-x)$ утворюється перетворенням симетрії графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Oy. При цьому точки перетину графіка функції з віссю Oy залишаються незмінними.

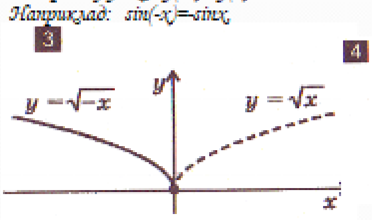
Графік парної функції не змінюється при відображенні відносно осі Оу, оскільки для парної функції $f(-x)=f(x)$. Наприклад: $(-x)^2=x^2$

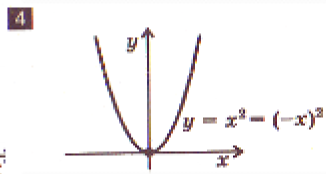
Графік непарної функції змінюється однаково як при відображенні відносно осі Ох, так і при відображенні відносно осі Оу, оскільки для непарної функції $f(-x)=-f(x)$. Наприклад: $\sin(-x)=-\sin x$.

Примеры:









Алгоритм побудови графіка функції $y = f(-x)$

Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, потрібно:

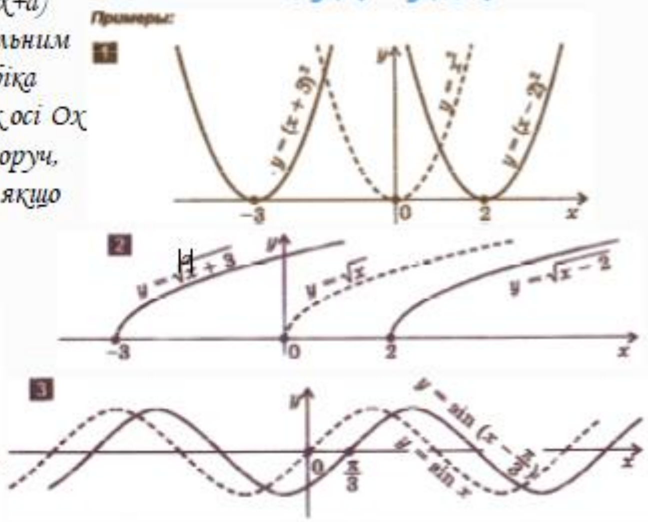
1) побудувати графік функції $y = f(x)$;

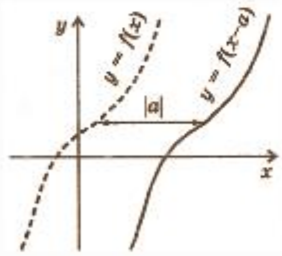
2) відобразити побудований графік симетрично відносно осі Оу;

3) графік функції $y = f(x)$ потім відкидається.

3) Паралельне перенесення вздовж осі Ox $f(x) \to f(x+a)$

Графік функції $y = f(x+a)$ утворюється паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на $|a|$ одиниць праворуч, якщо $a<0$, і ліворуч, якщо $a>0$





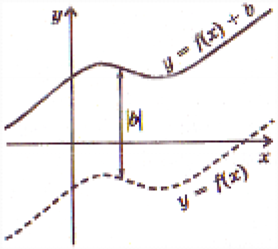
Алгоритм побудови графіка функції $y = f(x+a)$

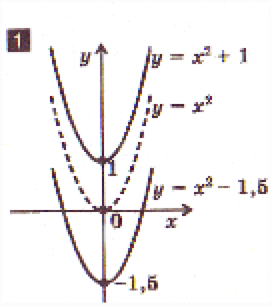
Щоб побудувати графік функції $y = f(x+a)$, *потрібно:*

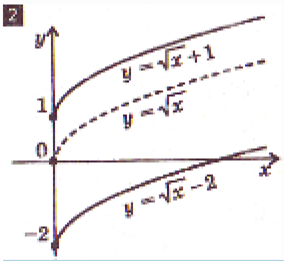
1) побудувати графік функції $y = f(x)$;
2) паралельно перенести побудований графік уздовж осі Ox праворуч на $|a|$ одиниць, якщо $a<0$, ліворуч на $|a|$ одиниць, якщо $a>0$.

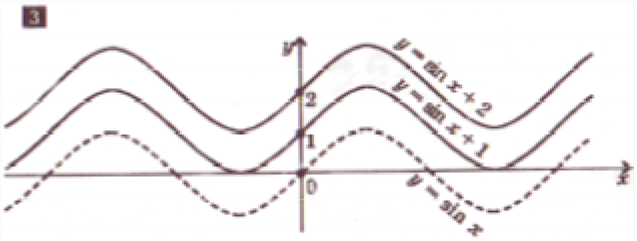
4) Паралельне перенесення вздовж осі *Oy*
$f(x) \rightarrow f(x)+b$

Графік функції $y=f(x)+b$ отримується паралельним перенесенням графіка функції $y=f(x)$ вздовж осі Oy на $|b|$ вгору при $b>0$ і вниз - при $b<0$.









Алгоритм побудови графіка функції $y = f(x)+ b$

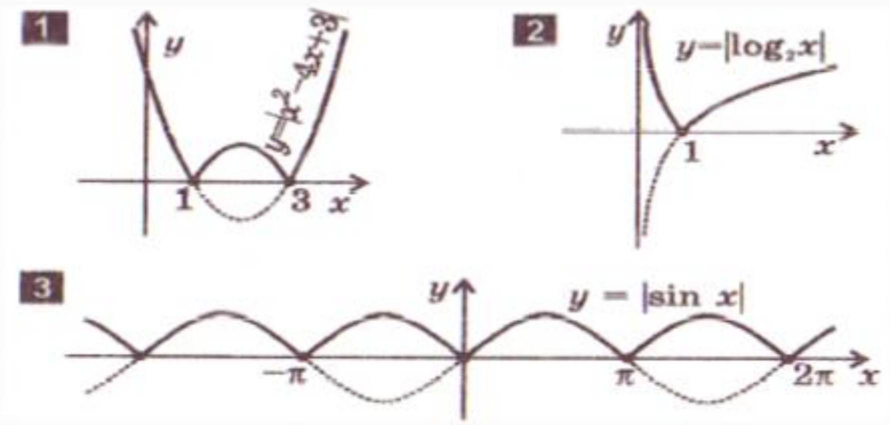
Щоб побудувати графік функції $y = f(x) +b$, *потрібно:*

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;
2) паралельно перенести побудований графік уздовж осі Oy вгору на $|b|$ одиниць вгору, якщо $b>0$ і на $|b|$ одиниць донизу, якщо $b<0$.

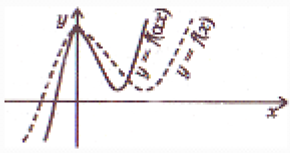
7) Побудова графіка функції $y = |f(x)|$

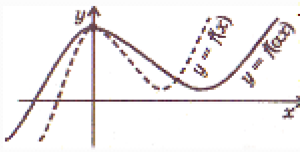
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Оскільки функція $y=|f(x)|$ невід'ємна, то її графік розташований у верхній півплощині.



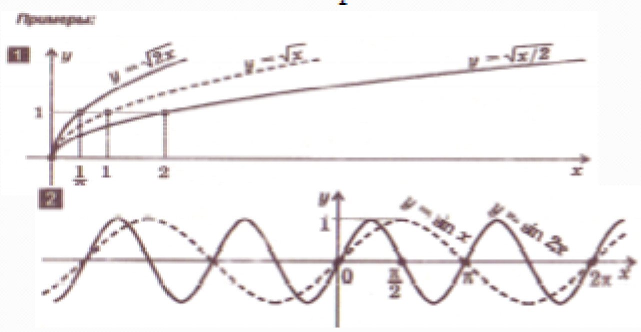
5) Стиск і розтяг уздовж осі *Ox*: *f(x)→ f(kx), де k > 0* (множення аргументу функції на число)





Якщо 0<k<1 графік функції y=f(kx) отримується розтягом графіка функції y=f(x) вздовж осі Ox в 1/k разів.

Якщо k>1, то графік функції y=f(kx) отримується стиском графіка функції y=f(x) вздовж осі Ox в k разів.



Примітка. Точки перетину графіка функції з віссю Oy залишаються незмінними.

Алгоритм побудови графіка функції $y = |f(x)|$

Щоб побудувати графік функції $y = |f(x)|$, *потрібно:*

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;

2) відобразити симетрично відносно осі Ox частину графіка, нижчу від осі абсцис;

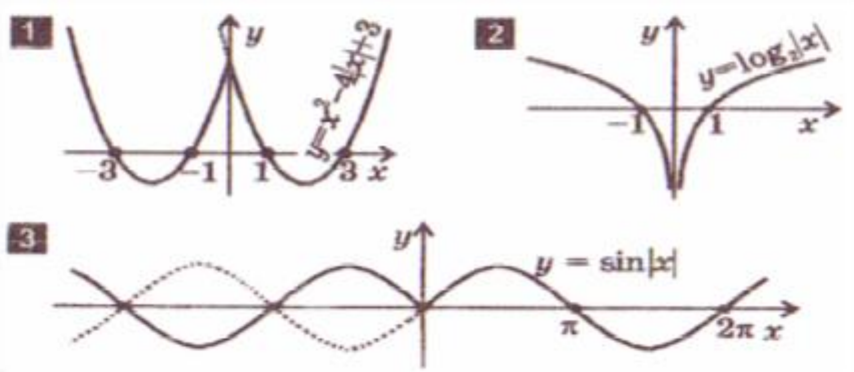
ту частину графіка, щонижча від осі абсцис, потім відкидаємо.

8) Побудова графіка функції $y = f(|x|)$

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), x \ge 0, \\ f(-x), x < 0. \end{cases}$$

Оскільки функція $y=f(|x|)$ парна,

то її графік симетричний відносно осі Oy.



Алгоритм побудови графіка функції $y = f(|x|)$

Щоб побудувати графік функції $y = f(|x|)$, *потрібно:*

1) побудувати графік функції $y = f(x)$ *для* $x \geq 0$;
2) відобразити побудований графік симетрично відносно осі *Oy;*
3) об’єднати результати побудови.

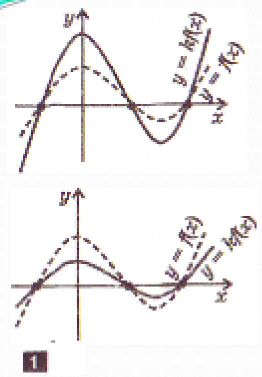
Алгоритм побудови графіка функції $y = f(kx)$

Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, *потрібно:*

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;
2) стиснути його до осі *Oy в k* разів, якщо $k>1$,
   або розтягнути від осі *Oy в* $1/k$ разів, якщо $0 < k < 1$.

б) Стиск і розтяг уздовж осі Oy: $f(x) \to cf(x)$, де $c>0$

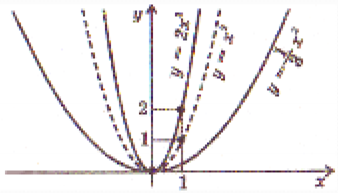
(множення функції на число)

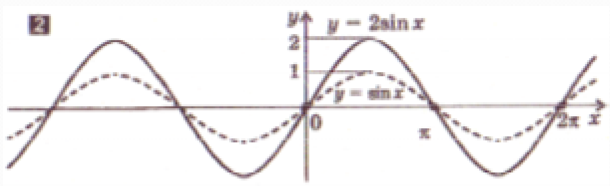


У результаті множення функції на число c,

якщо $c>1$, то графік функції $y = f(x)$ розтягується в c разів від осі Ox;

якщо $0 <c< 1$, то графік стискається в $1/c$ разів до осі Ox.





Примітка. Точки перетину графіка з віссю Ox залишаються незмінними. неизменными.

Алгоритм побудови графіка функції $y = cf(x)$

Щоб побудувати графік функції $y = cf(x)$, *потрібно:*

1) побудувати графік функції $y = f(x)$;

2) розтягнути його в c разів від осі Ox, якщо $c> 1$;

стиснути *в* $1/c$ разів до осі Ox, якщо $0<c<1$.

Графіки функцій, що задані алгебраїчною сумою модулів виразів

$$y = |f_1(x)| \pm |f_2(x)| \pm \ldots \pm |f_n(x)| + \varphi(x)$$

Спочатку знаходимо область визначення функції і розкриваємо знак модуля на тих проміжках, на яких підмодульні вирази не змінюють знака.

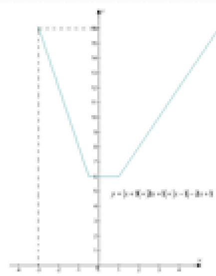
В результаті функція може бути задана на різних проміжках різними формулами.

Побудувати графік функції $y = |x+3| + |2x+1| + |x-1| - 2x + 1.$

Розв'язання. Розв'яжемо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x+3=0, \\ 2x+1=0, \\ x-1=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-\dfrac{1}{2}, \\ x=1. \end{array}\right.$$

Дістали проміжки $(-\infty;-3]$, $\left[-3;-\frac{1}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, $[1;+\infty)$ на кожному з яких функції $y_1 = x+3$, $y_2 = 2x+1$, $y_3 = x-1$ не змінюють знака.



Розкривши модулі на кожному з отриманих проміжків, матимемо:

а) $x \in (-\infty;-3]$,

$y = -x-3-2x-1-x+1-2x+1 = -6x-2$;

б) $x \in \left[-3;-\frac{1}{2}\right]$,

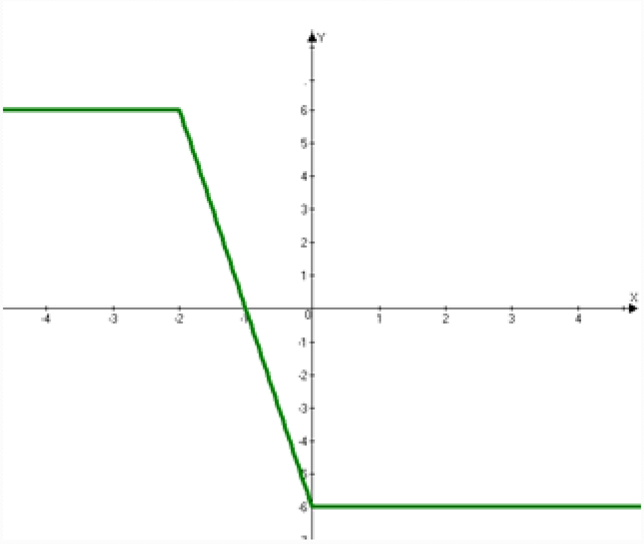
$y = x+3-2x-1-x+1-2x+1 = -4x+4$;

в) $x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$, $y = x+3+2x+1-x+1-2x+1 = 6$;

г) $x \in [1;+\infty)$,

$y = x+3+2x+1+x-1-2x+1 = 2x+4$.

$y = 3|x| - 3|x+2|$



Побудувати графік функції

$$y = \frac{|x| - 2}{|x - 2|}$$

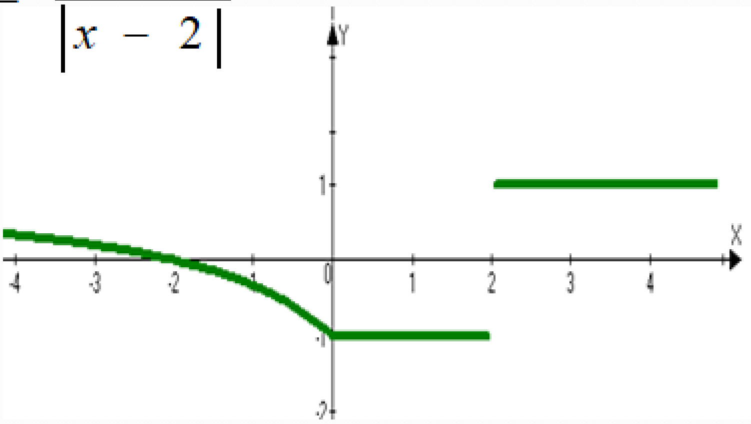
Функція визначення на всій координатній прямій, крім $x = 2$

Використовуючи означення модуля:

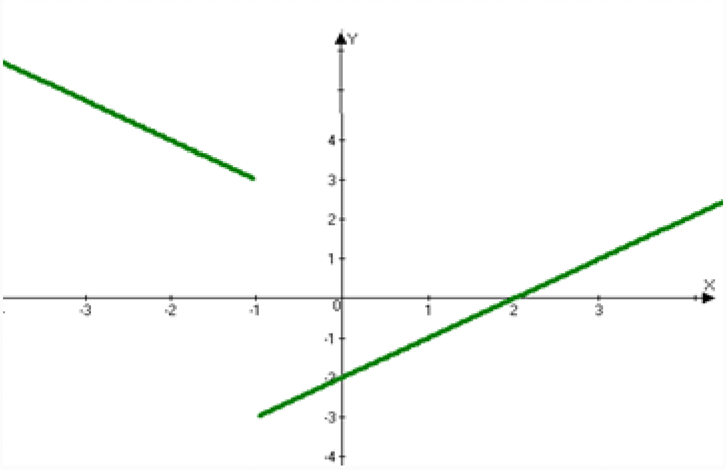
$$|x| = \begin{cases} x, & якщо \quad x \geq 0, \\ -x, & якщо \quad x < 0. \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & якщо \ x \geq 2, \\ 2-x, & якщо \ x < 2. \end{cases}$$

$$y = \frac{|x| - 2}{|x - 2|}$$

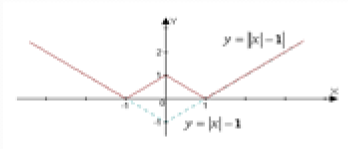


$$y = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$$



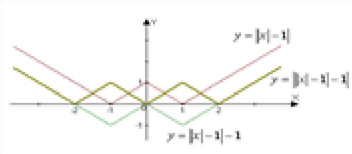
Побудувати графік функції $y = |||x| - 1| - 1| - 1|$.

Розв'язання. Графік будуємо в такій послідовності:



1) $y = |x| - 1$;

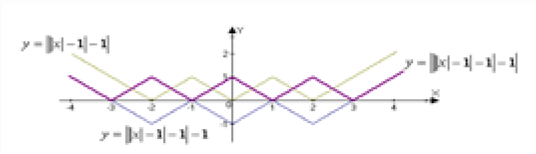
2) $y = ||x| - 1|$ - відображаємо симетрично відносно осі Ox частину графіка, яка знаходиться під віссю Ox;



3) $y = ||x| - 1| - 1$ - опускаємо вниз графік на одну одиницю;

4) $y = |||x| - 1| - 1|$ - відображаємо симетрично відносно осі Ox частину графіка, яка знаходиться під віссю Ox;

5) $y = |||x| - 1| - 1| - 1$ - опускаємо вниз графік на одну одиницю;



6) $y = ||||x| - 1| - 1| - 1|$ - відображаємо симетрично відносно осі Ox частину графіка, яка знаходиться під віссю Ox.

Побудувати графік функції

$$y = 3|\sin x| - \sin x$$

$$\sin x = 0, \text{якщо } x = \pi n, n \in Z$$

$$\sin x \geq 0, x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$$

$$\sin x < 0, x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$$

$$y = 3|\sin x| - \sin x =$$

$$= \begin{cases} 3\sin x - \sin x = 2\sin x, x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n] \\ -3\sin x - \sin x = -4\sin x, x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n] \end{cases}$$

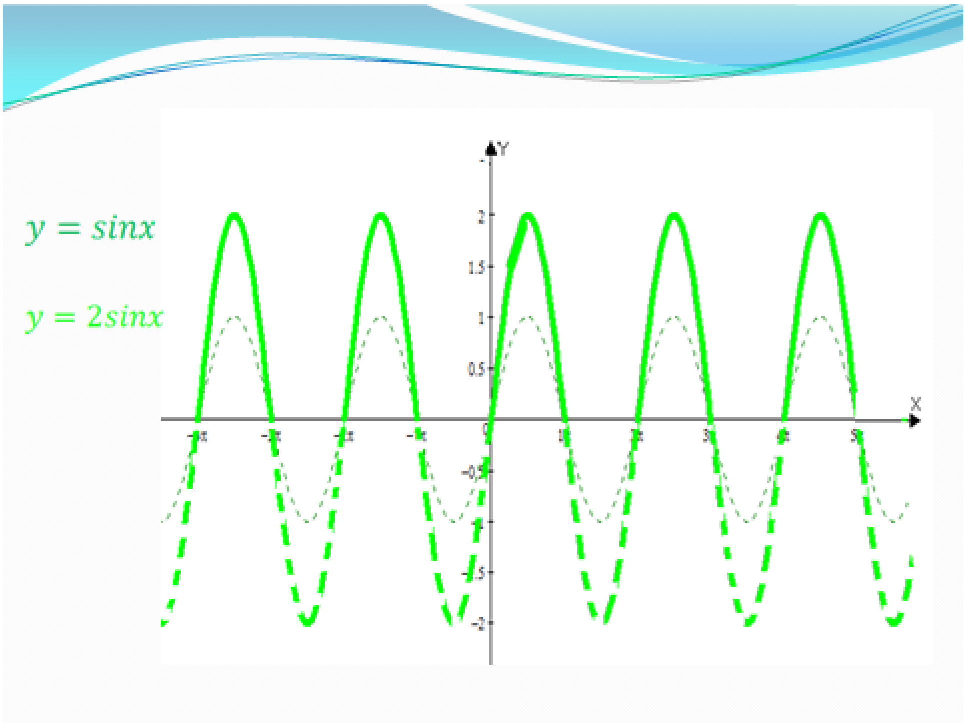
Алгоритм побудови

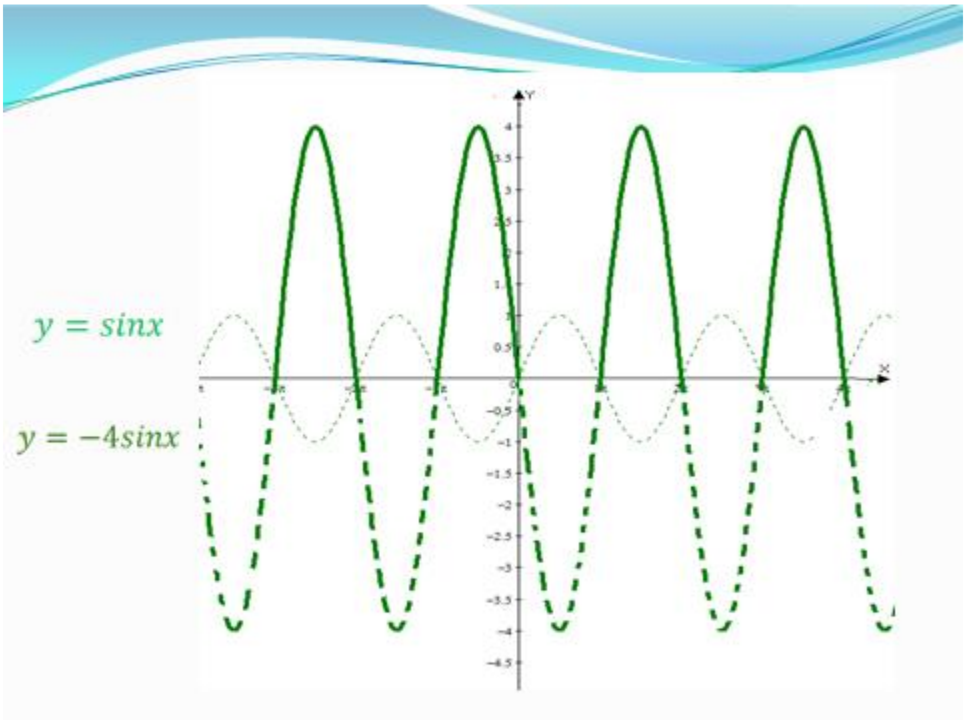
1. Будуємо графік функції $y = \sin x$
2. На проміжках виду $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$

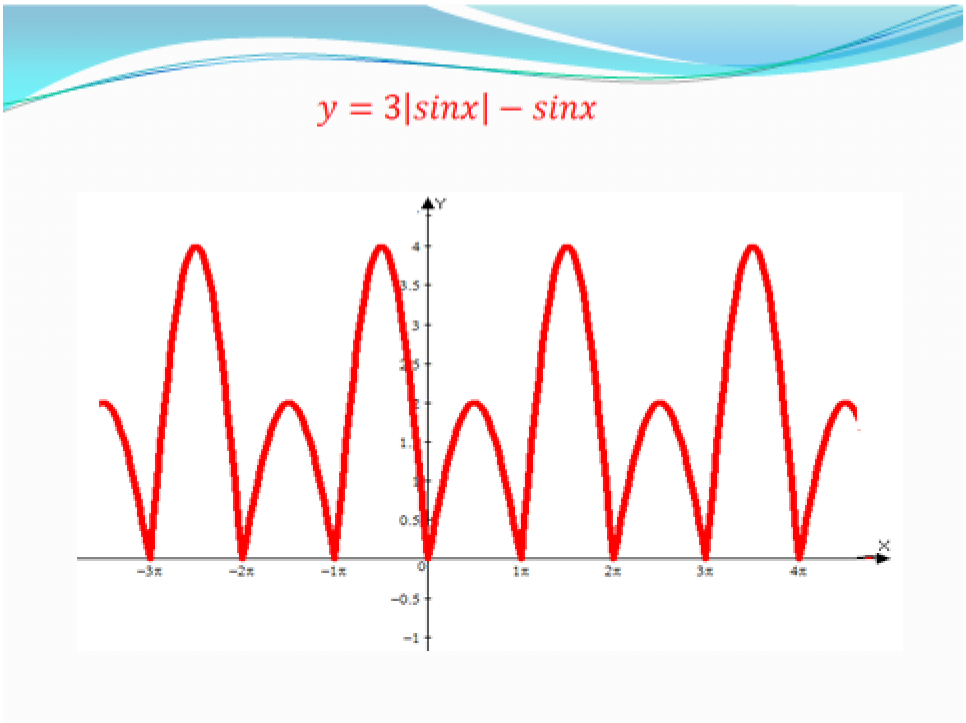
   будуємо графік функції $y = 2\sin x$
3. На проміжках виду $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$

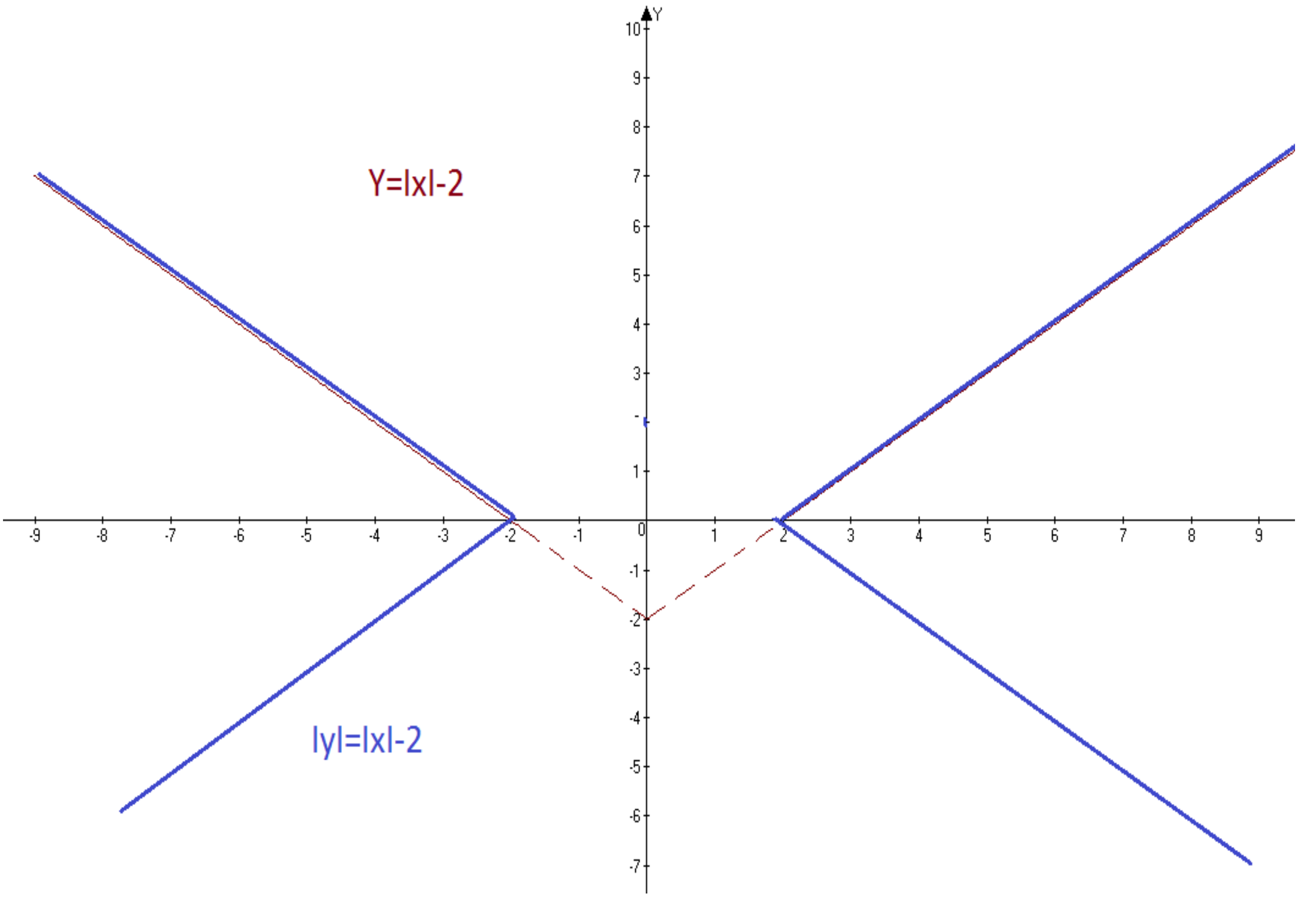
   будуємо графік функції $y = -4\sin x$

Об'єднання графіків, отриманих у пунктах 2 і 3 дає нам графік функції $y = 3|\sin x| - \sin x$


$y = sinx$
$y = 2sinx$
Y
X


$y = sinx$
$y = -4sinx$
Y
X


$y = 3|sinx| - sinx$
Y
X
4
3.5
3
0.5
0
−0.5
−1
−3π
−2π
−1π
1π
2π
3π
4π


Y
Y=IxI-2
IyI=IxI-2
10
9
8
7
6
5
4
3
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-9
-8
-6
-5
-4
-3
-2
2
3
4
5
6
7
8
9

Побудувати графік рівняння

$$|y| = 1 - \sqrt{|x|}$$

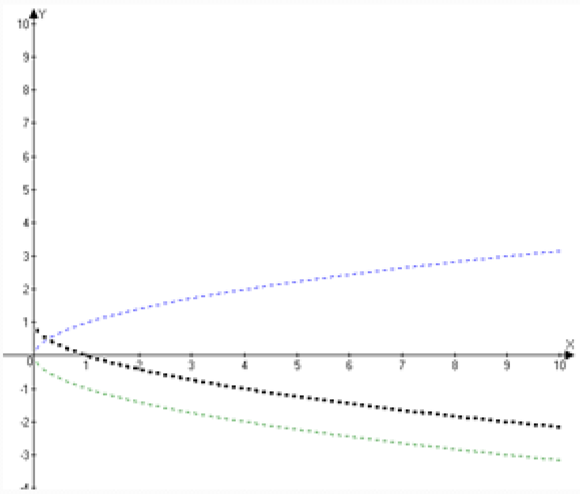
Алгоритм побудови

1. $y = \sqrt{x}$
2. $y = -\sqrt{x}$
3. $y = 1 - \sqrt{x}$
4. $|y| = 1 - \sqrt{x}$
5. $|y| = 1 - \sqrt{|x|}$

$y = \sqrt{x}$

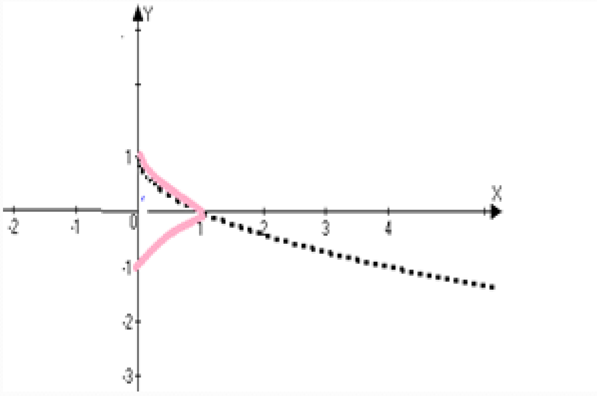
$y = -\sqrt{x}$

$y = 1 - \sqrt{x}$



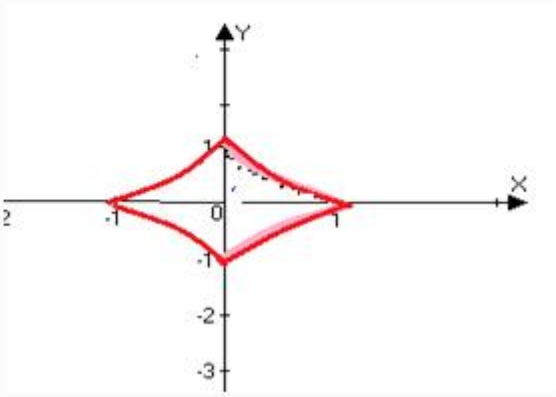
$y = 1 - \sqrt{x}$

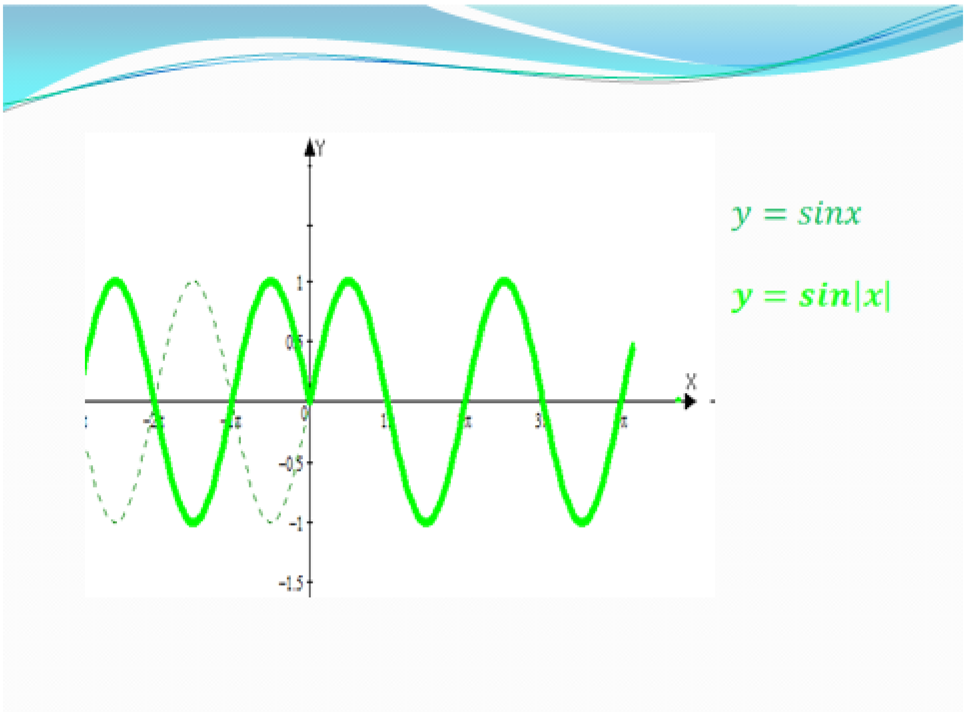
$|y| = 1 - \sqrt{x}$



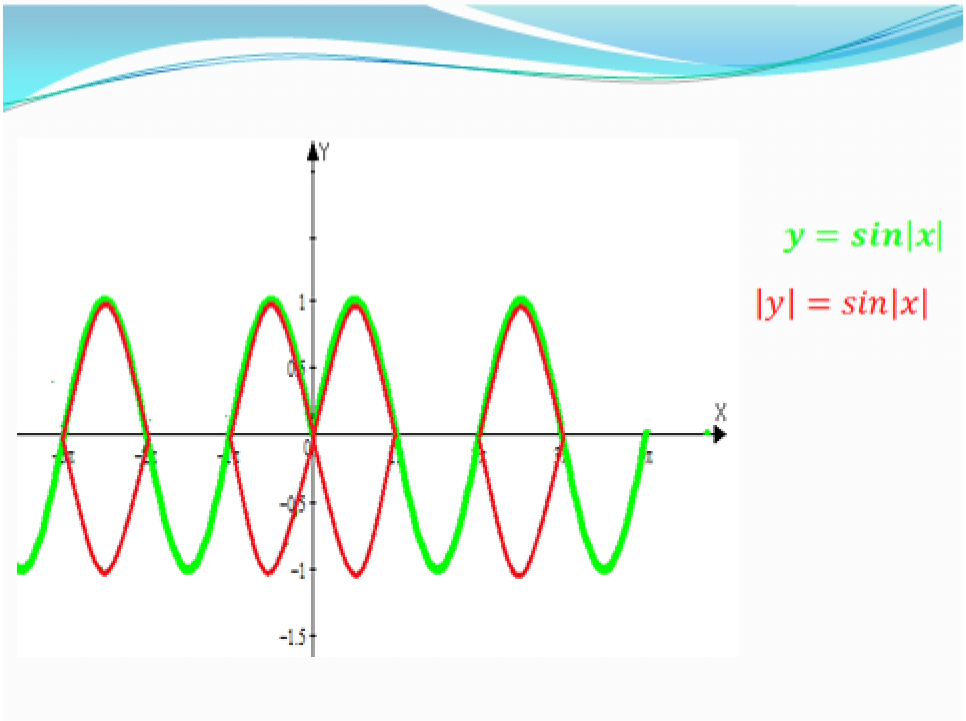
$|y| = 1 - \sqrt{x}$

$|y| = 1 - \sqrt{|x|}$





Y
X
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
$y = sinx$
$y = sin|x|$



Y
X
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
$y = sin|x|$
$|y| = sin|x|$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз В.Г. Історія математики / В.Г. Бевз – Х.: Вид.гр. «Основа», 2006. – 176с.
2. Бевз Г.П. Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Бевз Г.П., Бевз В.Г.- К.: Зодіак-ЕКО, 2007.-304 с.:іл.
3. Бевз Г.П. Математика 10 клас: підруч. для загальноосвітніх навч. закладів / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз – К.: «Генеза», 2010. – 300 с.
4. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник / Г.П. Бевз – К.: Вища школа, 1989. – 259 с.
5. Вирченко Н.А. Графики функций: Справочник/ Н.А. Вирченко, И.И. Ляшко, К.И. Швецов. – Киев: Наук. Думка, 1973. – 320с.
6. Карпінська І.Й. Функції, їх властивості та графіки/ І.Й. Карпінська.-Х.: Вид. група «Основа», 2009. – 123с.
7. Кирдей І. Геометричні перетворення графіків функцій. – [електрон. ресурс http://kirdey.com/geometrichni-peretvorennya-grafikiv-funkciy.]
8. Мерзляк А.Г. Алгебра 9: Підручник для 9-го класу з поглибленим вивченням математики / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. - Х.: Гімназія, 2016. - 382 с.
9. Мерзляк А.Г. Алгебра 9: Підручник для 9-го класу загальноосвітніх навчальних закладів / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. - Х.: Гімназія, 2015. - 318 с.
10. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. Навч. закладів: академ. рівень/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2015.- 352с. : іл.
11. Наконечна Л.Й. Групова форма роботи учнів на уроках математики як засіб диференціації навчання // Наконечна Л.Й. // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю «Сучасна профільна освіта: традиції та інновації», 29-30 листопада 2012 року,

Інститут післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області, м. Чернівці

12. Наконечна Л.Й. Методичні вказівки до організації самостійної роботи студентів з дисципліни „Елементарна математика” / Наконечна Л.Й. – Вінниця, СПД Лопушанський В.Ф. - 2013. - 59 с.
13. Наконечна Л.Й. Рівняння та нерівності: самостійно вдосконалюємо знання та вміння. Навч. посібник / Наконечна Л.Й. – Вінниця, 2010. – 142 с.
14. Наконечна Л.Й. Різні способи розв’язування рівнянь третього степеня / Наконечний Я.В., Дарченко О.В., Наконечна Л.Й. // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти : зб. наук. пр./ С.В. Подолянчук (голова) [та ін.] ; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського - Вінниця : ТОВ фірма "Планер", 2013. - Вип. 10. С. 145-149.
15. Наконечна Л.Й. Система задач як засіб розвитку пізнавальної самостійності майбутніх учителів математики / Наконечна Л.Й. // Науковий вісник Південноукраїнського державного педагогічного університету ім. К.Д. Ушинського (збірник наукових праць). – № 6-7. – Одеса, 2008. – С. 184-188.
16. Наконечная Л.И. Формирование умений строить графики функций методом геометрических преобразований // Наконечная Л. // Материалы Международной научной конференции «Маттех 2012», 22 – 24 ноября 2012 г., Шуменский университет “Епископ Константин Преславски” Шумен, Болгария
17. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів./ Є.П. Нелін. - 2-ге вид., виправ. і доп– Х.: Світ дитинства, 2015. – 448с.
18. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-9 класи // Математика в школі. - 2017.
19. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів./З.І.Слєпкань.- К.: Зодіак-ЕКО, 2000.- 512с.

20. Стригальова Н.В. Побудова графіків функцій і рівнянь // Математика, 2001 – лютий (№5) с. 13-14.
21. Танатар И.Я. Геометрические преобразования графиков функций: пособие для учителей и школьников / И.Я. Танатар. – М.: МЦНМО, 2012. – 152 с.
22. Шунда Н.Н. Функции и их графики: Пособие для учителей./ Н.Н. Шунда/ – 2-е изд., доп. – К.: Рад. школа, 1983. – 190 с.