Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

Гарвацький В.С., Калашніков І.В., Кулик В.Т.

ОСНОВИ АЛГЕБРИ

Частина 2

Вінниця 2012

УДК 512.5(075.8)
ББК 22.144я73
Г20

Рецензенти:
зав. каф. вищої математики Вінницького національного технічного університету, доктор педагогічних наук, професор Клочко В.І.;
кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри математики Вінницького державного педагогічного університету Трохименко В.С.

Гарвацький В.С., Калашніков І.В., Кулик В.Т. Основи алгебри. Частина 2. — Вінниця: ТОВ фірма „Планер“, 2012. — 248 с.

ISBN 978-966-2337-09-9

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, присвячений розкриттю суті основних алгебраїчних, математичних понять та фактів, що зустрічаються як в шкільній, так і вузівській математиці.

Виклад матеріалу супроводжується ілюстрацією прикладів з їх детальним розв'язанням. Кожна із тем розділу містить значну кількість завдань для їх розв'язання як на практичних заняттях, так і для самостійної та індивідуальної роботи.

Рекомендовано до друку Вченою радою інституту математики, фізики і технологічної освіти — протокол № 7 від 13 січня 2012 р.

Автори:
Гарвацький Володимир Сергійович,
Калашніков Ігор В'ячеславович,
Кулик Володимир Тихонович

ISBN 978-966-2337-09-9

Зміст

Передмова

Навчальний посібник, в основному, призначений для студентів першого курсу математичних спеціальностей педагогічних університетів та інститутів як стаціонарної, так і заочної форм навчання. Разом із тим він може бути корисний вчителям математики і учням, які цікавляться математикою.

Головною метою авторів посібника є теоретичне обґрунтування основних математичних понять та фактів, що зустрічаються як у шкільній математиці, так і в основних вузівських математичних курсах.

До кожної з тем посібника подається детальний виклад теоретичного матеріалу, який супроводжується прикладами та ілюстраціями.

Для кращого сприйняття матеріалу його поділено на смислові блоки (пункти), які нумеруються цифрами, та між якими пропускається рядок. Фрагменти тексту, на які автори хочуть зробити особливий наголос, виділено **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено основні означення, теореми, властивості тих чи інших об'єктів.

Абзац виділяє логічно завершену частину певного матеріалу в смисловому блоці.

Наприкінці кожної теми подаються запитання та вправи різної складності, простіші з них доцільно використовувати як завдання для самостійних робіт. До кожного з простих запитань можна знайти відповідь у теоретичний частині відповідної теми. На нашу думку, опанування матеріалом даного посібника дасть можливість студентам свідомо засвоїти відповідний теоретичний матеріал та застосувати його практично.

Посібник у деякій мірі сприятиме впровадженню кредитно-модульної системи навчання. На вивчення матеріалу відводиться 4 кредити по 36 годин, тобто 144 години, половина з яких відводиться на самостійну роботу студента. Весь навчальний матеріал розбито на 2 змістових модулі, які водночас і є модулями контролю. Варіант розбиття одного з модулів подано в таблиці нижче.

Види діяльності (контролю)		Бали, які можна набрати за кожний із видів діяльності
1	Готовність до лекційних занять	9
2	Робота біля дошки на практичних заняттях	9
3	Виконання домашніх завдань	9
4	Самостійна та індивідуальна роботи	23
5	Колоквіум	25
6	Контрольна робота	25
Разом		100

Перший модуль «Елементи математичної логіки і теорії бінарних відношень» включає: алгебру висловлень та її застосування, алгебру множин, логіку предикатів, відомості про бінарні відношення. Другий модуль «Основні алгебри та числові системи» включає: поняття алгебраїчних структур: півгрупи, квазігрупи, групи, кільця, поля; також розглядаються числові системи: натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел; розглянуто найпростіші поняття про бульові алгебри.

Автори щиро вдячні рецензентам за ряд цінних зауважень щодо змісту посібника, врахування яких поліпшило його структуру.

Список умовних позначень

$\vdots$ — відношення подільності націло;
(a, b) — НСД чисел a і b;
$[a, b]$ — НСК чисел a і b;
$\wedge$ — конюнкція, логічне „і“;
$\vee$ — диз'юнкція, логічне „або“;
$\sqcup$ — роздільна диз'юнкція;
T — істинне висловлення, істина;
F — хибне висловлення, хиба;
$\rightarrow$ — імплікація, логічне „якщо, то“;
$\Rightarrow$ — логічне слідування, логічне „якщо, то“;
$\equiv$ — рівносильність;
$\leftrightarrow$ — еквіваленція;
$\Leftrightarrow$ — логічна еквівалентність, логічне „тоді і тільки тоді“;
$\forall$ — квантор загальності;
$\exists$ — квантор існування;
$\cap$ — перетин множин;
$\cup$ — об'єднання множин;
$\setminus$ — множинний мінус;
$-$ — знак симетричної різниці множин;
$\subset$ — відношення нестрогого включення;
$\varnothing$ — порожня множина;
U — універсальна множина;
$\overline{A}$ — доповнення множини A до певної універсальної множини;
$\in$ — відношення належності;

$\notin$ — відношення заперечення належності;

M_n — множина всіх чисел натурального ряду до елемента n включно;

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

N_0 — множина натуральних чисел з нулем;

M_n — множина чисел натурального ряду до елемента n включно;

N^n — множина впорядкованих n-ок натуральних чисел (N^2 — множина впорядкованих пар натуральних чисел);

$\mathcal{N}$ — алгебра, елементами якої є натуральні числа;

$*, \star, \circ$ — значки для позначення бінарних операцій;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

Z_- — множина від'ємних цілих чисел;

$\mathcal{Z}$ — алгебра, елементами якої є цілі числа;

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;

Q_+ — множина додатних раціональних чисел;

Q_- — множина від'ємних раціональних чисел;

$\mathcal{Q}$ — алгебра, елементами якої є раціональні числа;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

R_+ — множина додатних дійсних чисел;

R_- — множина від'ємних дійсних чисел;

$\mathcal{R}$ — алгебра, елементами якої є дійсні числа;

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел;

$\mathcal{C}$ — алгебра, елементами якої є комплексні числа;

$f : A \xrightarrow{\text{в(на)}} B$ — відображення f множини A в(на) множину B;

$\varphi(a)$ — образ елемента a при відображенні $\varphi : A \longrightarrow B$;

$A \times B$ — декартів добуток;

ρ — бінарне відношення;

$pr_1\rho$ — проекція бінарного відношення $\rho \subset A \times B$ на першу множину A декартового добутку;

$\rho\langle a\rangle$ — зріз бінарного відношення по елементу a;

$Re(z)$ — дійсна частина комплексного числа;

$Im(z)$ — коефіцієнт уявної частини комплексного числа.

Розділ 1

Основні алгебри та числові системи

1 Найпростіші поняття про алгебраїчні операції та їх властивості

1. Вступ; поняття алгебраїчної операції; мультиплікативна та адитивна форма запису бінарної операції; таблиця Келі.

2. Деякі особливі елементи відносно бінарних операцій.

3. Деякі властивості бінарних операцій.

4. Стабільність, ідеальність підмножини відносно бінарної операції.

5. Конґруенція відносно бінарної операції; поняття про фактор-операцію та бінарний фактор-оператив; глобальний оператив.

6. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.

7. Відповіді та вказівки до розв’язання деяких вправ.

1.1 Вступ; поняття алгебраїчної операції; мультиплікативна та адитивна форма запису бінарної операції; таблиця Келі

1. Сучасна алгебра по суті розпочала свій бурхливий розвиток у 20-му столітті. Її характерною особливістю є те, що відбувся перехід до розгляду **абстрактних множин**, між елементами яких вводяться різноманітні операції, відношення та досліджуються їх властивості. При цьому часто природа походження елементів множини для алгебри несуттєва. Важливо лише те, що між елементами множини визначені певні операції, відношення та вказуються або досліджуються ті чи інші властивості цих операцій та відношень. Тому часто сучасну алгебру ще називають **абстрактною алгеброю**, оскільки вона вивчає властивості операцій та відношень між елементами множини довільної природи (іноді говорять — довільного походження).

2. Поняття **алгебраїчної операції** є центральним у сучасній алгебрі. Введемо це поняття за допомогою поняття функції, відображення, які є одними із основних в усій математиці.

Нехай $G \neq \varnothing$ — довільна непорожня множина, а $G^n \overset{df}{=} \underbrace{G \times G \times ... \times G}_{n} \overset{df}{=} \{(g_1, g_2, ..., g_n) | g_1, g_2, ..., g_n \in G\}$ — декартовий n-ний степінь множини G, тобто G^n — це множина всіх впорядкованих n-ок $(g_1, g_2, ..., g_n)$ елементів із множини G, де $n \in \mathbb{N}$ — натуральне число.

Означення 1.1.1. *Відображення $f_n : G^n \longrightarrow G$ множини G^n у множину G називається n-арною алгебраїчною операцією на множині G, а число n називається рангом цієї операції.*

Іншими словами, n**-арна алгебраїчна операція** f_n **— це функція**, яка кожній впорядкованій n-ці $(g_1, g_2, ..., g_n)$ елементів із множини G ставить у відповідність єдиний елемент $g \in G$ такий, що $g \overset{df}{=} f_n((g_1, g_2, ..., g_n))$.

Відмітимо, що n-арну операцію на множині G іноді розглядають і як скрізь визначену на множині G функцію n змінних із значеннями із множини G.

3. На практиці найчастіше зустрічаються **бінарні операції** ($n = 2$), **унарні операції** ($n = 1$) (від латинських слів **binarius** — подвійний, **unus** — один). Для бінарної операції вживаються різноманітні інфіксні позначення та відповідні їм назви. Якщо $c = f_2((a,b))$, то, як правило, таку рівність подають у вигляді $c = af_2b$, тобто c — це результат при виконанні бінарної операції f_2 над елементами a та b. При цьому для бінарної операції часто вживають так звані **мультиплікативну** або **адитивну** форми запису, а саме:

- $a \cdot b = c$ — **мультиплікативна**[1] форма запису, де елементи a та b називаються **множниками,** результат операції c — **добутком цих множників,** а символ операції — це точка, кружечок або зірочка, які іноді опускаються;

- $a + b = c$ — **адитивна**[2] форма запису, де елементи a та b називаються **доданками**, результат операції c — **сумою цих доданків**, а символ операції — це знак плюс.

Унарна операція іноді називається **оператором** і теж на практиці має різноманітні позначення та відповідні їм назви, з якими познайомимся пізніше.

Іноді вводиться поняття **нуль-арної операції** на множині, розуміючи під цим виділення (фіксацію) якогось певного елемента цієї множини.

Крім введеного вище означення алгебраїчної операції вводиться також і поняття **часткової** (не скрізь визначеної) **алгебраїчної операції на множині** G, коли розглядається часткове відображення степеня G^n множини G в множину G. Як правило, на практиці розглядатимемо звичайні скрізь визначені алгебраїчні операції. А якщо зустрінеться часткова операція, то обов'язково зробимо про це відповідне зауваження.

4. Приклади операцій.

1. На множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел:

   а) додавання „+“, множення „·“ — бінарні операції;

[1] Від латинського multiplicatio — множення.
[2] Від латинського additio-додавання.

б) віднімання „$-$“, ділення „$:$“ — часткові бінарні операції;

в) НСД (a, b), НСК (a, b) — найбільший спільний дільник, найменше спільне кратне двох чисел a та b — бінарні операції;

г) 1 — нуль-арна операція — виділили елемент $1 \in \mathbb{N}$.

2. На множині $\mathbb{Z}$ — цілих чисел, $\mathbb{Q}$ — раціональних чисел, $\mathbb{R}$ — дійсних чисел:

   а) додавання, віднімання, множення — бінарні операції;

   б) ділення — часткова бінарна операція;

   в) утворення протилежного числа $-a$ до заданого числа a — унарна операція;

   г) 0, 1 — нуль-арні операції — виділення чисел 0, 1 серед усіх чисел.

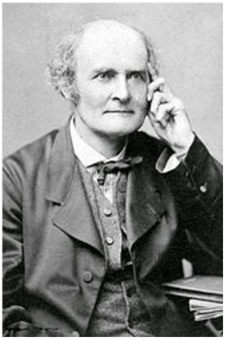
3. На множині $\mathfrak{P}(A) \stackrel{df}{=} \{C | C \subset A\}$ всіх підмножин множини A:

   а) перетин „$\cap$“, об'єднання „$\cup$“, віднімання „$\backslash$“ підмножин множини A — бінарні операції;

   б) утворення доповнення $A \backslash C$ до підмножини $C \subset A$ — унарна операція (іноді позначають $\overline{C}$, тобто $\overline{C} \stackrel{df}{=} A \setminus C$);

   в) $\varnothing$, A — нуль-арні операції — виділення підмножин: $\varnothing$ — порожньої множини і A — самої множини A.

5. У випадку скінченної множини бінарну операцію можна задати за допомогою так званої **таблиці Келі,** яка по своїй структурі нагадує таблицю множення чисел. Для її побудови виписують у рядок і у стовпець всі елементи даної множини, дотримуючись одного і того же порядку їх розташування. Заповнення клітинок таблиці здійснюється таким чином, що на перетині рядка, що відповідає елементу a, і стовпця, що відповідає елементу b, записується результат $a \cdot b$. При цьому для часткової бінарної операції не всі клітинки таблиці будуть заповнені, а лише ті, для відповідних елементів яких операція визначена.



Мал. 1.1. Артур Келі (1821 — 1895 роки)

Приклад. Скласти таблиці Келі для бінарних операцій НСД(a, b), НСК(a, b) на множині M_6 натуральних чисел[3], яка має вигляд $M_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Розв'язання. На заданій множині M_6 операція НСД скрізь визначена, і тому всі клітинки відповідної таблиці Келі будуть заповнені,

НСД	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1
6	1	2	3	2	1	6

а операція НСК часткова, і тому не всі клітинки відповідної таблиці будуть заповненими, а лише ті, для яких НСК$(a, b) \leqslant 6$.

[3]Множина M_n — множина перших n чисел натурального ряду.

НСК	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	6	4		6
3	3	6	3			6
4	4	4		4		
5	5				5	
6	6	6	6			6

1.2 Деякі особливі елементи відносно бінарних операцій

1. Нехай $*$ — позначення бінарної операції на множині G.

Означення 1.2.1. *Елемент $g \in G$ називається ідемпотентом (або, говорять, ідемпотентним) відносно операції $*$, якщо $g*g = g$ (від латинського idempotenti — однаково степенний).*

Означення 1.2.2. *Елемент g_0 називається поглинаючим елементом відносно операції $*$, якщо виконуються рівності $g * g_0 = g_0 * g = g_0$ для довільного елемента $g \in G$, тобто*

$$(\forall g \in G)(g * g_0 = g_0 * g = g_0).$$

Означення 1.2.3. *Елемент g_0 називається нейтральним елементом відносно операції $*$, якщо виконуються рівності $g * g_0 = g_0 * g = g$ для довільного елемента $g \in G$, тобто*

$$(\forall g \in G)(g * g_0 = g_0 * g = g).$$

2. Очевидно, що як поглинаючий елемент, так і нейтральний елемент є ідемпотентами. **Виникають такі запитання** (на які дайте відповіді самостійно):

а) скільки може бути різних поглинаючих та нейтральних елементів відносно заданої операції?

б) чи може поглинаючий елемент бути одночасно нейтральним елементом або, що те ж саме, нейтральний елемент бути одночасно поглинаючим елементом?

3. Відмітимо, що при адитивній формі запису бінарної операції нейтральний елемент часто називають **нульовим** (коротко — **нулем**) і позначають символом 0.

Отже, 0 — нульовий елемент відносно бінарної операції „+“, якщо

$$(\forall g \in G)(0 + g = g + 0 = g).$$

При мультиплікативній формі запису бінарної операції (яка, до речі, вживається частіше всього) нейтральний елемент називають **одиничним** (коротко — **одиницею**) і часто позначають символом „e“, а поглинаючий елемент — нульовим (коротко — нулем) і позначають символом 0. Отже,

e — одиничний елемент відносно бінарної операції „$\cdot$“, якщо

$$(\forall g \in G)(e \cdot g = g \cdot e = g),$$

0 — нульовий елемент відносно бінарної операції „$\cdot$“, якщо

$$(\forall g \in G)(0 \cdot g = g \cdot 0 = 0).$$

Зауважимо, що одиницю часто позначають (а особливо для звичайних числових операцій) звичайною одиницею 1.

4. Приклади.

1. На множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел відносно операції множення 1 — одиничний елемент, а нульового елемента немає.

2. На множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел відносно операції додавання 0 є нейтральним елементом, а відносно операції множення 0 є поглинаючим елементом, а 1 — нейтральним елементом.

3. На множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин множини A порожня множина $\varnothing$ є нейтральним елементом відносно операції $\cup$ об'єднання множин і поглинаючим елементом відносно операції $\cap$ перетину множин, а сама множина A — нейтральний елемент відносно перетину і поглинаючий — відносно об'єднання множин.

1.3 Деякі властивості бінарних операцій

1. Як було відмічено вище, сучасна алгебра вивчає властивості алгебраїчних операцій. Відмітимо деякі із властивостей бінарних операцій, які найчастіше розглядаються на практиці.

Нехай $*$, $\circ$ — бінарні операції на множині G.

Означення 1.3.1. *Операція $*$ називається комутативною (від латинського слова commutare — переміщувати), якщо виконується рівність $x*y = y*x$ для довільних елементів $x, y \in G$ тобто*

$$(\forall x, y \in G)(x * y = y * x).$$

Означення 1.3.2. *Операція $*$ називається асоціативною (від латинського слова associatio — з'єднання, сполучення), якщо виконується рівність $(x * y) * z = x * (y * z)$ для довільних елементів $x, y, z \in G$, тобто*

$$(\forall x, y, z \in G)((x * y) * z = x * (y * z)).$$

Означення 1.3.3. *Операція $*$ називається скоротною зліва, відповідно — справа, якщо справедливі співвідношення*

$(\forall g, g_1, g_2)(g * g_1 = g * g_2 \to g_1 = g_2)$ *— ліва скоротність;*

$(\forall g, g_1, g_2)(g_1 * g = g_2 * g \to g_1 = g_2)$ *— права скоротність, називається скоротною (або, говорять, двостороннє скоротною), якщо ця операція скоротна і зліва, і справа одночасно.*

Означення 1.3.4. *Операція $*$ називається ідемпотентною, якщо виконується рівність $g * g = g$ для довільних елементів $g \in G$, тобто*

$$(\forall g \in G)(g * g = g).$$

Означення 1.3.5. *Операція $\circ$ називається дистрибутивною зліва, відповідно — справа відносно операції $*$, якщо мають місце такі співвідношення:*

$(\forall g, g_1, g_2)(g \circ (g_1 * g_2) = (g \circ g_1) * (g \circ g_2))$ *— ліва дистрибутивність;*

$(\forall g, g_1, g_2)((g_1 * g_2) \circ g = (g_1 \circ g) * (g_2 \circ g))$ *— права дистрибутивність, і називається дистрибутивною (або, говорять, двостороннє дистрибутивною), якщо ця операція $\circ$ дистрибутивна і зліва, і справа відносно операції $*$ (від латинського слова distribution — розподілення).*

2. Нехай $i \in G$ — нейтральний елемент відносно операції $*$, тобто $i * g = g * i = g$ для довільного $g \in G$.

Означення 1.3.6. *Елемент $h \in G$ називається симетричним до елемента $g \in G$ відносно операції $*$, якщо виконуються рівності $h * g = g * h = i$; тоді сам елемент g називається симетризованим відносно операції $*$.*

Очевидно, що коли h — симетричний елемент до елемента g відносно операції $*$, то і елемент g є симетричним до елемента h, а h тоді є симетризованим відносно даної операції $*$.

Цікаво з'ясувати, а скільки може бути симетричних елементів до даного елемента відносно однієї і тієї ж операції (самостійно дайте відповідь на це запитання).

Відмітимо, що при адитивній формі запису операції симетричний елемент часто називають **протилежним до даного елемента** g і позначають його у вигляді $-g$; отже, маємо $(-g) + g = g + (-g) = 0$, де 0 — нейтральний елемент відносно операції $+$. Аналогічно при мультиплікативній формі запису операції симетричний елемент часто називають **оберненим до даного елемента** і позначають його у вигляді g^{-1}, а даний елемент g тоді називають **оборотним;** отже, маємо $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e$, де e – нейтральний елемент відносно операції $\cdot$. Зауважимо, що у зв'язку з такими позначеннями матимуть місце рівності $-(-g) = g$ і $(g^{-1})^{-1} = g$ **(поміркуйте над цими рівностями!)**.

Означення 1.3.7. *Операція $*$ називається симетризованою, якщо всі елементи множини симетризовані відносно цієї операції.*

3. Приклади.

1. На множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел:

   а) операція $+$ додавання комутативна, асоціативна, скорочувана, симетризована, неідемпотентна;

   б) операція $\cdot$ множення комутативна, асоціативна, скорочувана на ненульові числа, не симетризована, неідемпотентна, дистрибутивна відносно операції $+$ додавання;

   в) операція віднімання не комутативна, не асоціативна, не ідемпотентна, не симетризована, скорочувана.

2. На множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин множини A обидві операції — перетину $\cap$ і об'єднання $\cup$ підмножин множини A — комутативні, ідемпотентні, асоціативні, взаємно дистрибутивні, не скорочувані, не симетризовані.

1.4 Стабільність, ідеальність підмножини відносно бінарної операції

1. Нехай $*$ — бінарна операція на множині G, а $H \subset G$ — довільна її підмножина.

Означення 1.4.1. *Підмножина $H \subset G$ називається стабільною або, говорять, замкнутою, стійкою відносно операції $*$, якщо виконується співвідношення*

$$(\forall h_1, h_2)(h_1, h_2 \in H \to h_1 * h_2 \in H),$$

тобто елемент $h = h_1 * h_2$, який є результатом виконання операції над довільними елементами h_1, h_2 з множини H теж належить цій множині (від латинського stabilis — стійкий).

Те, що підмножина $H \subset G$ стійка відносно операції $*$, будемо іноді символічно позначати співвідношенням $H * H \subset H$ (яке, що пізніше розглянемо детальніше, пов'язане з **поширенням операції** $*$, заданої на елементах множини G, **на підмножини цієї множини**).

Означення 1.4.2. *Непорожня підмножина $I \subset G$ називається* ***лівим,*** *відповідно* ***правим ідеалом відносно операції*** $*$, *якщо виконується співвідношення*

$(\forall g, h \in G)(h \in I \to g * h \in I)$ *— лівий ідеал I,*

відповідно

$(\forall g, h \in G)(h \in I \to h * g \in I)$ *— правий ідеал I.*

Іноді говорять, що I — **односторонній ідеал**, якщо I — лівий ідеал або правий ідеал. Те, що I — лівий ідеал, можна символічно виразити співвідношенням $G * I \subset I$, а те, що I — правий ідеал, виразиться співвідношенням $I * G \subset I$.

Означення 1.4.3. *Підмножина називається* ***ідеалом*** *(або, говорять,* ***двостороннім ідеалом****) відносно операції $*$, якщо I — і лівий, і правий ідеал відносно цієї операції.*

З наведених означень 1.4.2, 1.4.3 очевидно, що непорожня підмножина $I \subset G$ — ідеал, якщо виконується співвідношення

$$(\forall g, h \in G)(h \in I \to g * h, h * g \in I),$$

яке рівносильне включенню

$$G * I \cup I * G \subset H.$$

2. Очевидна така теорема, яка зв'язує поняття ідеальності підмножини з її стабільністю:

Теорема 1.4.1. *Якщо $I \subset G$ — ідеал (не обов'язково двосторонній), то I — стабільна підмножина відносно заданої операції на множині G.*

Доведення проведіть самостійно.

Легко бачити, що порожня множина $\varnothing$ і сама множина G, на якій задана операція, є стабільними відносно цієї операції. Про ці множини говорять, що вони є **тривіальними стабільними підмножинами даної множини** G, (від латинського trivialis — дуже простий, позбавлений оригінальності, буденний). Очевидно також, що сама множина G є ідеалом, який теж називають **тривіальним ідеалом**, який, очевидно, містить будь-який ідеал відносно довільної операції.

3. Приклад. На множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел підмножина:

1. $2N = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ — множина всіх парних натуральних чисел — стабільна відносно операції додавання, але вона не є ідеалом — ні лівим, ні правим.

2. $2N$ є ідеалом відносно операції множення.

3. $2N - 1 = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$ — це множина всіх непарних натуральних чисел — стабільна відносно операції множення, але не є ні лівим, ні правим ідеалом відносно цієї операції; а відносно операції додавання ця множина не є стабільною.

1.5 Конґруенція відносно бінарної операції; поняття про фактор-операцію та бінарний фактор-оператив; глобальний оператив

1. Нехай $*$ — бінарна операція на множині G. Тоді пару $(G;*)$ часто називають **бінарним оперативом** який коротко позначимо $\mathcal{G}$. Отже, $\mathcal{G} \stackrel{df}{=} (G;*)$.

Розглянемо на цьому оперативі $\mathcal{G}$ бінарне відношення еквівалентності $\varepsilon \subset G \times G$. Пригадаємо, що еквівалентність ε — рефлексивне, симетричне і транзитивне бінарне відношення між елементами множини G, тобто:

$(\forall g \in G)(g \equiv g(\varepsilon))$ — рефлективність ε;

$(\forall g, h \in G)(g \equiv h(\varepsilon) \to h \equiv g(\varepsilon))$ — симетричність ε;

$(\forall g, h, t \in G)(g \equiv h(\varepsilon), h \equiv t(\varepsilon) \to g \equiv t(\varepsilon))$ — транзитивність ε, де $x \equiv y(\varepsilon)$ означає $(x;y) \in \varepsilon$.

Означення 1.5.1. *Еквівалентність $\varepsilon \subset G \times G$ називається* ***конгруенцією бінарного оператива*** *$\mathcal{G}$, якщо виконується співвідношення*

$$(\forall x, y, s, t \in G)(x \equiv y(\varepsilon), s \equiv t(\varepsilon) \to x * s \equiv y * t(\varepsilon)), \qquad (1.5.1)$$

тобто, говорять, еквівалентність ε „узгоджується“ з операцією $*$ (від латинського congruentia — узгодженість, відповідність).

2. Відомо, що еквівалентність ε на множині G даного бінарного оператива $\mathcal{G} = (G;*)$ утворює **розбиття** цієї множини на **класи еквівалентності**, які позначатимемо у вигляді $[g]_\varepsilon$, де $g \in G$ — довільний представник цього класу $[g]_\varepsilon$, тобто $h \in [g]_\varepsilon \Leftrightarrow g \equiv \equiv h(\varepsilon) \Leftrightarrow [g]_\varepsilon = [h]_\varepsilon$ (згадайте доведення цих рівносильностей або проведіть їх самостійно). Це розбиття називається **фактор-множиною множини G по еквівалентності** ε і позначається G/ε. Отже, $G/\varepsilon \stackrel{df}{=} \{[g]_\varepsilon | g \in G\}$.

Виявляється, що на фактор-множині G/ε можна задати бінарну операцію, яку позначимо $*_\varepsilon$, якщо еквівалентність ε є конґруенцією бінарного оператива, а саме:

$$[g] *_\varepsilon [h]_\varepsilon \stackrel{df}{=} [g * h]_\varepsilon, \qquad (1.5.2)$$

де g, h — довільні елементи оператива $\mathcal{G}$. Покажемо, що $*_\varepsilon$ справді є операцією, тобто результат $[g * h]_\varepsilon$ цієї операції $*_\varepsilon$ над класами еквівалентності $[g]_\varepsilon$, $[h]_\varepsilon$ не залежить від довільних представників $g_1 \in [g]_\varepsilon$, $h_1 \in [h]_\varepsilon$ цих класів, і тому виконуватимуться рівності $[g_1]_\varepsilon *_\varepsilon [h_1]_\varepsilon = [g_1 * h_1]_\varepsilon = [g * h]_\varepsilon$, що рівносильно співвідношенню $g_1 * h_1 \equiv g * h(\varepsilon)$. Дійсно, якщо $g_1 \in [g]_\varepsilon$, $h_1 \in [h]_\varepsilon$ тобто $g \equiv \equiv g_1(\varepsilon)$, $h \equiv h_1(\varepsilon)$ то, оскільки ε узгоджується з бінарною операцією $*$, матимемо $g * h \equiv g_1 * h_1(\varepsilon)$, що і приводить до рівності $[g * h]_\varepsilon = = [g_1 * h_1]_\varepsilon$, яку потрібно було довести. Отже, нами доведена така теорема:

Теорема 1.5.1. *Якщо ε — конгруенція бінарного оператива $\mathcal{G} = (G; *)$, то на фактор-множині G/ε цього оператива рівність (1.5.2) задає бінарну операцію $*_\varepsilon$, яка* ***називається фактор-операцією по конгруенції*** *ε, відповідною бінарній операції $*$ даного оператива $\mathcal{G}$.*

Означення 1.5.2. *Бінарний оператив $\mathcal{G}/\varepsilon \overset{df}{=} (G/\varepsilon; *_\varepsilon)$, який утворений на фактор-множині G/ε за допомогою фактор-операції $*_\varepsilon$ по конгруенції ε бінарного оператива $\mathcal{G} = (G; *)$, називається* ***бінарним фактор-оперативом*** *по конгруенції ε, асоційованим з даним бінарним оперативом $\mathcal{G}$.*

3. Приклад. Нехай $(N_0; +)$ — бінарний оператив, на базовій множині $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ всіх невід'ємних цілих чисел якого задана звичайна операція додавання чисел. Розглянемо відношення $\varepsilon_3 \subset \subset N_0 \times N_0$ між числами цієї множини, яке задане співвідношенням $m \equiv n(\varepsilon_3)$, якщо m і n при діленні на 3 мають рівні остачі.

Очевидно, що це відношення ε_3 є конгруенцією оператива $(N_0; +)$. В результаті отримуємо фактор-множину $N_0/\varepsilon_3 = = \{[0]_{\varepsilon_3}, [1]_{\varepsilon_3}, [2]_{\varepsilon_3}\}$, яка складається з трьох класів:

$[0]_{\varepsilon_3}$ — всі числа з N_0, які при діленні на 3 дають остачу 0;

$[1]_{\varepsilon_3}$ — всі числа з N_0, які при діленні на 3 дають остачу 1;

$[2]_{\varepsilon_3}$ — всі числа з N_0, які при діленні на 3 дають остачу 2.

На цій фактор-множині N_0/ε_3 утворюється фактор-операція $+_{\varepsilon_3}$ додавання класів еквівалентності по ε_3, яку задамо нижче таблицею Келі

$+_{\varepsilon_3}$	$[0]_{\varepsilon_3}$	$[1]_{\varepsilon_3}$	$[2]_{\varepsilon_3}$
$[0]_{\varepsilon_3}$	$[0]_{\varepsilon_3}$	$[1]_{\varepsilon_3}$	$[2]_{\varepsilon_3}$
$[1]_{\varepsilon_3}$	$[1]_{\varepsilon_3}$	$[2]_{\varepsilon_3}$	$[0]_{\varepsilon_3}$
$[2]_{\varepsilon_3}$	$[2]_{\varepsilon_3}$	$[0]_{\varepsilon_3}$	$[1]_{\varepsilon_3}$

У результаті отримали асоційований з даним бінарним оперативом $(N_0;+)$ фактор-оператив $(N_0/\varepsilon_3;+_{\varepsilon_3})$, який має більш „компактніший“ вигляд в порівнянні з даним оперативом $(N_0;+)$, оскільки містить лише три елементи, представниками яких є остачі від ділення чисел на три, з якими легше працювати, ніж з усіма числами, яких нескінченна кількість.

4. У результаті можливості введення конґруенцій та відповідних фактор-оперативів можна зробити такий висновок: **введення конґруенцій на оперативі та утворення асоційованих фактор-оперативів полегшує можливість досліджувати дані оперативи за допомогою цих асоційованих фактор-оперативів, які, як правило, мають простішу, компактнішу будову у порівнянні із заданими оперативами**.

5. Іноді зручно розглядати поряд із заданим бінарним оперативом $\mathcal{G}=(G;*)$ асоційований з ним так званий глобальний бінарний оператив. Для цього на множині $\mathfrak{P}(G)=\{H|H\subset G\}$ всіх підмножин базової множини G даного оператива введемо операцію $\star$, асоційовану з операцією $*$:

$$H_1\star H_2\stackrel{df}{=}\{h_1*h_2|h_1\in H_1,h_2\in H_2\},$$

де $H_1,H_2\subset G$ — довільні підмножини множини G. Цю операцію $\star$ назвемо **глобальною операцією, асоційованою з операцією** $*$. У результаті отримаємо новий бінарний оператив $\mathfrak{P}(\mathcal{G})\stackrel{df}{=}(\mathfrak{P}(G);\star)$, який назвемо **глобальним оперативом, асоційованим з даним оперативом** $\mathcal{G}=(G;*)$.

Безперечно, що деякі із властивостей операцій оператива і відповідного йому глобального оператива зберігаються, тобто залишаються тими ж самими, а деякі із відповідних властивостей відмінні одна від одної. **Самостійно прослідкуйте** за відповідними властивостями (наприклад, комутативність операції зберігається при переході від однієї з цих операцій до іншої з них).

1.6 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Чому сучасну алгебру називають абстрактною?

2. Що таке алгебраїчна операція?

3. Яка операція називається бінарною?

4. Що таке унарна операція?

5. Яку операцію називають нуль-арною?

6. Наведіть приклади:

   а) бінарних операцій;

   б) унарних операцій;

   в) нуль-арних операцій.

7. Що таке часткова алгебраїчна операція?

8. Наведіть приклади часткових алгебраїчних операцій.

9. Що таке таблиця Келі? Наведіть приклади такої таблиці.

10. Який вигляд матиме таблиця Келі для часткової бінарної операції? Проілюструйте на прикладі.

11. Який елемент називається ідемпотентним?

12. Що таке поглинаючий елемент відносно заданої операції?

13. Що таке нейтральний елемент відносно заданої операції?

14. Дослідіть, скільки може бути відносно заданої операції:

    а) поглинаючих елементів;

    б) нейтральних елементів.

15. У яких випадках один і той же елемент є і поглинаючим, і нейтральним?

16. Що таке:

    а) адитивна форма запису бінарної операції;

    б) мультиплікативна форма запису бінарної операції
    та, які назви і позначення при цьому вживаються? Наведіть ілюструючі приклади.

17. Яка бінарна операція називається:

    а) комутативною;

    б) асоціативною;

    в) скоротною зліва, справа, двостороннє скоротною;

    г) ідемпотентною;

    д) дистрибутивною зліва, справа, двостороннє дистрибутивною?

18. Наведіть приклади комутативних операцій, асоціативних операцій, скоротних зліва, справа, двостороннє скоротних операцій, ідемпотентних операцій, дистрибутивних зліва, справа, двостороннє дистрибутивних операцій.

19. Наведіть приклад взаємно дистрибутивних операцій.

20. Що таке симетричний елемент, симетризований елемент відносно заданої бінарної операцій?

21. Скільки може бути симетричних елементів до заданого елемента відносно однієї і тієї ж операції?

22. Що можна сказати про симетричний елемент до симетричного елемента?

23. Які назви вживаються для симетричного, симетризованого елементів у випадку

    а) адитивної форми запису;

    б) мультиплікативної форми запису

    бінарної операції?

24. Яка операція називається симетризованою?

25. Наведіть приклади симетризованих, несиметризованих бінарних операцій.

26. Яка підмножина називається стабільною відносно бінарної операції, заданої на множині?

27. Що таке лівий ідеал, правий ідеал, двосторонній ідеал відносно заданої бінарної операцій?

28. Наведіть приклади стабільних підмножин, односторонніх ідеалів, двосторонніх ідеалів відносно заданої бінарної операції.

29. Які тривіальні стабільні підмножини, тривіальні ідеали Ви знаєте?

30. Чи будь-який односторонній, двосторонній ідеал є стабільною підмножиною відносно заданої бінарної операції? Поясніть свою відповідь. Чи правильним є обернене твердження? Обґрунтуйте свою відповідь.

31. Що таке бінарний оператив? Наведіть приклади.

32. Яке відношення на множині називається еквівалентністю?

33. Що таке фактор-множина даної множини по заданій га ній еквівалентності?

34. Що таке розбиття множини?

35. Що таке клас еквівалентності на множині та як він позначається?

36. Який Ви знаєте зв'язок між розбиттям множини та фактор-множиною?

37. Наведіть приклади множини та фактор-множини і вкажіть між ними взаємозв'язки?

38. Яка еквівалентність на множині бінарного оператива називається конґруенцією?

39. Що таке фактор-операція, яка відповідна заданій бінарній операції, по вказаній конгруенції?

40. Наведіть приклади конгруенції бінарного оператива та відповідної їй фактор-операції.

41. Що таке фактор-оператив по конгруенції, який асоційований з даним бінарним оперативом, та як він утворюється?

42. Яка перевага при дослідженні фактор-оперативів у порівнянні із дослідженням самого оператива?

43. Що таке глобальна операція, асоційована з даною бінарною операцією? Поясніть на конкретному прикладі.

44. Що таке глобальний оператив, асоційований із даним оперативом?

45. Чи завжди фактор-операція є частинним випадком глобальної операції для довільного бінарного оператива?

46. З'ясувати, які із вказаних відношень $\circ$ задають на множині A операції, та вказати їх арність, якщо:

    а) $A = \mathbb{R}; \circ = \{(a; b; c) | c = ab \wedge a, b, c \in A\}$;

    б) $A = \mathbb{R}; \circ = \{(a; b) | a^3 = b \wedge a, b \in A\}$;

    в) $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}; \circ = \{(a; b) | b = \sqrt{a} \wedge a, b \in A\}$;

    г) $A = \mathbb{Z}; \circ = \{(m; n; k) |\ |k| = |m + n| \wedge m, n, k \in A\}$;

    д) $A = \mathbb{N}; \circ = \{(n; 1) | \circ (n) = 1 \wedge A \in A\}$;

    е) $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \circ = \{(a; b) | ab = 1 \wedge a, b \in A\}$.

47. На множині $A = \{0, 1, 2, -1, -2\}$ розглядаються дії додавання, віднімання, множення. Пояснити, чому ці операції не є скрізь визначеними. Скласти до кожної з цих операцій таблицю Келі та вказати області визначення цих операцій.

48. У скінченній множині за допомогою таблиці Келі задана бінарна операція. Як перевірити, чи вона:

    а) комутативна;

    б) асоціативна;

    в) скорочувана зліва, справа;

г) має нейтральний елемент;

д) має поглинаючий елемент;

е) ідемпотентна;

є) оборотна?

49. З'ясувати, якими властивостями володіє бінарна операція $\circ$, яка задана таблицею Келі нижче.

$\circ$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

50. Дослідити, якими властивостями володіють операції кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації у множині всіх висловлень. Відносно яких операцій в цій множині є нейтральний та поглинаючий елементи?

51. Які властивості мають операції перетину, об'єднання та віднімання в множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин множини A? Відносно яких із вказаних операцій в цій множині є нейтральний та поглинаючий елементи?

52. Скласти таблицю Келі для операцій:

а) знаходження НСД на множині $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;

б) знаходження НСК на множині $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;

в) композиції самосуміщень ромба, прямокутника, квадрата. Якими властивостями володіють ці операції?

53. Дослідити властивості бінарної операції симетричного віднімання між підмножинами множини A, яка вводиться за допомогою рівності $X - Y \overset{df}{=} (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, де $X, Y \subset A$ — довільні підмножини множини A.

54. Дослідити властивості наступних двох операцій на множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин множини A:

$$X \circ Y \overset{df}{=} \{a \in A | a \in X \Leftrightarrow a \in Y\};$$

$$X + Y \stackrel{df}{=} A \setminus (X \circ Y),$$

де $X, Y \subset A$ — довільні підмножини множини A. Які особливі елементи є відносно цих операцій?

55. * Побудувати таблицю Келі для композиції самосуміщень правильного n-кутника та дослідити закономірності в побудові таблиці в залежності від n, де $n \geqslant 3$.

56. Встановити кількість всіх k-арних операцій, які можна задати на множині з n елементів, де $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

57. Аналогічна задача до задачі 56 — для часткових k-арних операцій на множині з n елементів.

58. * З'ясувати, які із властивостей бінарної операції переносяться на асоційовану із нею глобальну операцію і навпаки.

1.7 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

46.

а) бінарна операція множення дійсних чисел;

б) унарна операція піднесення дійсних чисел до кубу;

в) унарна операція добування квадратного кореня невід'ємних дійсних чисел;

г) не є операцією;

д) нуль-арна операція виділення одиниці на множині натуральних чисел;

е) унарна операція взяття оберненого числа на множині ненульових раціональних чисел.

47. Таблиця Келі для множення матиме такий вигляд

$\cdot$	0	1	2	-1	-2
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	-1	-2
2	0	2		-2	
-1	0	-1	-2	1	2
-2	0	-2		2	

Область визначення δ буде такою: $\delta = A \times A \setminus \{(2;2),(2;-2),(-2;2),(-2;-2)\}$. Аналогічним чином дається відповідь і для додавання та віднімання на множині A.

48.

а) таблиця повинна бути симетричною відносно діагоналі;

в) кожен рядок, стовпець містять різні елементи;

г) рядок і стовпець нейтрального елемента співпадають відповідно із початковими рядком і стовпцем таблиці;

д) рядок і стовпець містять лише поглинаючий елемент;

е) діагональні елементи співпадають із відповідними елементами рядка і стовпця таблиці;

є) нейтральні елементи повинні знаходитися на перетині стовпця і рядка для відповідних оборотного і оберненого до нього елементів, причому симетрично розташовані до діагоналі і по одному в кожному рядку і в кожному стовпці.

49. Дана операція ідемпотентна, не комутативна, асоціативна, необоротна, скоротна справа; всі елементи є поглинаючими зліва і нейтральними справа.

50. **Вказівка**. Відповідь аналогічна до відповіді вправи 51.

51. Перетин множин — ідемпотентна, комутативна, асоціативна операція, відносно якої A — нейтральний елемент, а $\varnothing$ — поглинаючий елемент; об'єднання має аналогічні властивості, але відносно об'єднання $\varnothing$ — нейтральний елемент, а A — поглинаючий елемент; обидві ці операції взаємно дистрибутивні між собою; віднімання ні жодного із перелічених властивостей не володіє, причому порожня множина відносно віднімання є поглинаючою зліва і нейтральною справа, тобто $\mathfrak{G} \setminus \varnothing = \mathfrak{G}$ і $\varnothing \setminus \mathfrak{G} = \varnothing$ для довільної підмножини $\mathfrak{G} \subset A$ множини A.

52.

а) таблиця Келі для операції знаходження НСД на множині $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ має вигляд:

НСД	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

б) таблиця Келі для операції знаходження НСК на множині $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ має вигляд:

НСК	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	1	12	12	12	12	12

обидві операції, асоціативні, комутативні, ідемпотентні, нескоротні, необоротні; для НСД поглинаючим елементом є 1, а для НСК 12; нейтральним елементом для НСД є 12, а для НСК — 1.

в) для ромба самосуміщеннями є тотожне перетворення, тобто поворот на $0°$, та поворот на $180°$ (з центром у точці перетину діагоналей) і осьові симетрії s_a, s_b (на яких розташовані ці діагоналі ромба); відповідна таблиця Келі для композиції самосуміщень прийме такий вигляд:

$\circ$	0_{0°	0_{180°	s_a	s_b
0_{0°	0_{0°	0_{180°	s_a	s_b
0_{180°	0_{180°	0_{0°	s_b	s_a
s_a	s_a	s_b	0_{0°	0_{180°
s_b	s_b	s_a	0_{180°	0_{0°

поворот 0_{0° є нейтральним елементом відносно цієї композиції, яка є асоціативною, комутативною, неідемпотентною, скоротною, оборотною операцією.

Аналогічні властивості мають місце і для композиції самосуміщень прямокутника та квадрата. Зауважимо, що для квадрата є 8 різних самосуміщень — чотири повороти та чотири осьові симетрії.

53. Операція симетричного віднімання підмножин комутативна, асоціативна, неідемпотентна, нескоротна, необоротна, відносно якої порожня множина є нейтральним елементом.

55. **Вказівка.** Спочатку виконати вправу для випадків $n = 3, 4, 5, 6$ і розглянути певні закономірності, що виникають при побудові цих таблиць. На основі цього дослідити закономірності для загального випадку, коли розглядається довільний правильний n - кутник. Зрозуміло, що для правильного n-кутника матимемо $2n$ різних самосуміщень — n поворотів та n осьових семетрій.

56. n^{n^k}.

57. $(n+1)^{n^k}$. Врахувати для вправи 56 і даної вправи те, що операція є відображенням, а часткова операція — частковим відображенням.

2 Найпростіші поняття про півгрупи, квазігрупи та групи

1. Поняття алгебри, підалгебри та алгебраїчної системи, підсистеми; приклади.

2. Поняття півгрупи, форми її запису; підпівгрупа, ідеал; приклади.

3. Поняття квазігрупи, лупи; латинські квадрати.

4. Поняття групи, підгрупи; форми запису; приклади.

5. Найпростіші властивості групи; інші означення групи.

6. Поняття гомоморфізму, ізоморфізму півгруп, квазігруп, груп; приклади.

7. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.

8. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

2.1 Поняття алгебри, підалгебри та алгебраїчної системи, підсистеми; приклади

1. Поняття алгебри, алгебраїчної системи є одними із основних об'єктів дослідження в сучасній алгебрі.

Означення 2.1.1. ***Алгеброю*** *називається непорожня множина, на якій задана деяка сукупність алгебраїчних операцій; при цьому сама множина називається* ***базовою множиною алгебри****.*

Узагальненням алгебри є поняття алгебраїчної системи.

Означення 2.1.2. ***Алгебраїчною системою*** *називається непорожня множина, на якій, крім алгебраїчних операцій (які можуть бути і відсутні), задана певна сукупність відношень між елементами цієї множини, яка називається* ***базовою множиною алгебраїчної системи****.*

Означення 2.1.3. ***Типом алгебри, алгебраїчної системи*** *називається послідовність арностей всіх алгебраїчних операцій, відношень, що задані у цій алгебрі, в алгебраїчній системі.*

Означення 2.1.4. *Алгебри, алгебраїчні системи називаються* ***однотипними****, якщо їх типи співпадають.*

2. Приклади.

1. Алгебри $(\mathbb{N}; +, \cdot)$, $(\mathbb{R}; +, -)$, $(\mathfrak{P}(A); \cap, \cup)$ однотипні, оскільки у них один і той же тип $T = (2, 2)$, який вказує на те, що ці алгебри мають дві бінарні операції.

2. Алгебра $(\mathfrak{P}(A); \cap, \cup, {}', \varnothing, A)$ має тип $T = (2, 2, 1, 0, 0)$, який відповідає тому, що на множині $\mathfrak{P}(A)$ задані дві бінарні операції перетину і об'єднання підмножин множини A, одна унарна операція — доповнення до множини і дві нуль-арні операції — виділення порожньої множини $\varnothing$ і множини A.

3. Алгебраїчна система $(\mathbb{Z}; +, -, \cdot; \leqslant, \vdots)$ має тип $T = (2, 2, 2; 2, 2)$, що відповідає тому, що дана система має три бінарні операції і два бінарних відношення — $\leqslant$ і подільність $\vdots$ цілих чисел.

3. Нехай $H \subset G$ — довільна непорожня підмножина алгебри (алгебраїчної системи) $\mathcal{G}$ з базовою множиною G.

Означення 2.1.5. *Непорожня підмножина $H \subset G$ називається **підалгеброю** (підсистемою) даної алгебри (алгебраїчної системи) $\mathcal{G}$, якщо відносно всіх операцій (операцій та відношень) алгебри (системи) $\mathcal{G}$ ця підмножина H є однотипною алгеброю (системою) з даною алгеброю (системою) $\mathcal{G}$.*

Іншими словами, підалгебра (підсистема) даної алгебри (алгебраїчної системи) $\mathcal{G}$ є замкнутою, стійкою або, що те ж саме, стабільною відносно всіх операцій алгебри (системи) $\mathcal{G}$.

Відмітимо, що іноді саму алгебру (алгебраїчну систему) називають **розширенням своєї підалгебри (підсистеми)**.

Зауважимо, що поняття підалгебри (підсистеми) можна було б дати по-іншому — з використанням поняття ізоморфізму алгебр (алгебраїчних систем), а саме:

Означення 2.1.6. *Якщо $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ — однотипні алгебри (алгебраїчні системи) з відповідними базовими множинами H, G, то $\mathcal{H}$ називається підалгеброю (підсистемою) $\mathcal{G}$, якщо $H \subset G$, а тотожне відображення $e_H : H \longrightarrow G$ є ізоморфізмом $\mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$, де $e_H(h) \overset{df}{=} h$ для всіх $h \in H$.*

Відмітимо, що алгебру одного з найпростіших типів — типу $T = (2)$, тобто алгебру з однією бінарною оперецією, ми назвали в попередньому параграфі **бінарним оперативом**. Тоді підалгебру такого бінарного оперетива природно назвати його **підоперативом**.

Можна показати, що справедлива така теорема:

Теорема 2.1.1. *Непорожній перетин довільної сімї підалгебр (підсистем) є підалгеброю (підсистемою) даної алгебри (алгебраїчної системи).*

4. Приклади підалгебр (підсистем).

1. Алгебра $(2N;+,\cdot)$ є підалгеброю алгебри $(\mathbb{N};+,\cdot)$, яка в свою чергу є підалгеброю алгебри $(\mathbb{Z};+,\cdot)$, де, нагадаємо, $2N=\{2n|n\in$ $\in\mathbb{N}\}$ — множина всіх парних натуральних чисел.

2. Алгебраїчна система $(\mathbb{N};+,\cdot;\leqslant,\vdots)$ є підсистемою алгебраїчної системи $(\mathbb{Z};+,\cdot;\leqslant,\vdots)$.

2.2 Поняття півгрупи, форми її запису; підпівгрупа, ідеал; приклади

1. Півгрупи є частинним випадком алгебр типу $T=(2)$, тобто бінарних оперативів. Вони відіграють надзвичайно важливу роль як в самій математиці, так і в її застосуваннях.

Означення 2.2.1. *Алгебра $\mathcal{G}\overset{df}{=}(G;*)$ з однією бінарною операцією (тобто $\mathcal{G}$ — це бінарний оператив) називається* ***півгрупою****, якщо бінарна операція $*$ асоціативна, тобто задовольняє умові*

$$(\forall x,y,z\in G)((x*y)*z=x*(y*z)).$$

Таким чином, результат виконання операції $*$ над довільним числом елементів $g_1,g_2,...,g_k$ не залежить від порядку розстановки дужок: $((...(g_1*g_2)*g_3)...)*g_k=(g_1*...*g_l)*(g_{l+1}*...*g_k)$.

Означення 2.2.2. ***Півгрупа $\mathcal{G}$ називається комутативною*** *або* ***абелевою****, якщо операція, що задана на ній, комутативна, тобто*

$$(\forall g,h\in G)(g*h=h*g).$$

Означення 2.2.3. *Півгрупа називається* ***ідемпотентною****, якщо всі її елементи є* ***ідемпотентами****, тобто є справедливим співвідношення*

$$(\forall g \in G)(g * g = g).$$

3. Серед ідемпотентів півгрупи важливу роль грають поглинаючий і нейтральний елементи.

Означення 2.2.4. *Ідемпотентний елемент* $0 \in G$ *півгрупи* $\mathcal{G}$ *називається* ***поглинаючим****, якщо для довільних елементів* $g \in G$ *півгрупи* $\mathcal{G}$ *виконуються рівності* $0 * g = g * 0 = 0$.

Означення 2.2.5. *Ідемпотентний елемент* $e \in G$ *півгрупи* $\mathcal{G}$ *називається* ***нейтральним****, якщо для довільних елементів* $g \in G$ *півгрупи* $\mathcal{G}$ *виконуються рівності* $e * g = g * e = g$.

4. На практиці найчастіше вживають мультиплікативну та адитивну форми запису операцій в півгрупі. У випадку мультиплікативної форми запису операція називається **множенням** і позначається точкою (яку іноді навіть опускають), а компоненти і результат операції називаються **множниками** і **добутком**: $a \cdot b = c$ — c є добутком множників a, b; нейтральний елемент називається **одиницею**, а поглинаючий елемент **нулем**. Для аддитивної форми запису операція називається **додаванням** і вживається символ $+$ для її позначення, а компоненти і результат операції називаються **доданками** і **сумою**: $a + b = c$ — c є сума доданків a і b; нейтральний елемент називається **нулем**.

5. Зауважимо, що в алгебраїчній літературі півгрупу із нейтральним елементом часто називають **моноїдом**. Тоді моноїд можна визначити як алгебру $\mathcal{G} = (G; *, e)$ типу $T = (2, 0)$ таку, що $(G; *)$ — півгрупа, а бінарна операція $*$ зв'язана з нуль-арною операцією, яка означає виділення елемента $e \in G$, співвідношенням $(\forall g \in G)(e * g = g * e = g)$, що рівносильно тому, що півгрупа $(G; *)$ має нейтральний елемент e.

6. Самостійно доведіть, що півгрупа не може мати більше, ніж одного поглинаючого елемента, одного нейтрального елемента, і що це різні елементи, якщо півгрупа містить більше одного елемента.

7. Введемо поняття підпівгрупи та ідеала півгрупи.

Означення 2.2.6. *Підмножина $H \subset G$ півгрупи $\mathcal{G} = (G;*)$ називається* ***підпівгрупою****, якщо алгебра $(H;*)$ теж є півгрупою.*

Легко довести наступні твердження про підпівгрупи.

Теорема 2.2.1. *Якщо $H \subset G$ — непорожня підмножина півгрупи $\mathcal{G} = (G;*)$, то $\mathcal{H}$ є її підпівгрупою тоді і тільки тоді, коли H — стабільна підмножина відносно операції $*$, тобто*

$$H * H \subset H,$$

що на елементарному рівні рівносильно співвідношенню

$$(\forall g, h \in G)(g, h \in H \to g * h \in H),$$

тобто разом з довільними своїми елементами $g, h \in H$ ця підмножина містить результат $g * h$ виконання операції $*$ над елементами g, h.

Теорема 2.2.2. *Якщо $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ — сім'я підпівгруп півгрупи $\mathcal{G} = (G;\cdot)$, то і їх перетин $\mathcal{H} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{H}_i$ є підпівгрупою півгрупи $\mathcal{G}$, якщо $H \subset G$ — непорожня підмножина $\mathcal{G}$.*

Очевидно, що $\mathcal{G}$ — це тривіальна „найбільша“ підпівгрупа даної півгрупи $\mathcal{G} = (G;\cdot)$.

Означення 2.2.7. *Непорожня підмножина $I \subset G$ півгрупи $\mathcal{G} = (G;*)$ називається* ***лівим (правим) ідеалом цієї півгрупи****, якщо ця підмножина I задовольняє співвідношення*

$$i \in I \Rightarrow g * i \in I (i \in I \to i * g \in I),$$

і називається ***ідеалом*** *або, говорять,* ***двостороннім ідеалом****, якщо ця підмножина є одночасно і лівим, і правим ідеалом, де $i, g \in G$ — довільні елементи півгрупи $\mathcal{G}$.*

Введене вище співвідношення, що визначає на елементарному рівні лівий (правий) ідеал півгрупи, легко бачити, рівносильне співвідношенню

$$GI \subset I \ (IG \subset I),$$

звідки, легко бачити, співвідношення

$$GI \cup IG \subset I$$

буде визначати двосторонній ідеал непорожньої підмножини $I \subset G$ півгрупи $\mathcal{G}$.

Очевидно, що ідеал — як лівий, так і правий, і двосторонній — є підпівгрупою півгрупи.

Про лівий (правий) ідеал можна було би говорити і як про ліву (праву) **„поглинаючу“ підмножину півгрупи**.

Легко довести і теорему, аналогічну теоремі 2.2.2, — а саме справедлива наступна теорема.

Теорема 2.2.3. *Якщо $(I_k)_{k\in K}$ — сім'я лівих (правих, двосторонніх) ідеалів півгрупи $\mathcal{G} = (G;*)$, то і їх непорожній перетин $I = \bigcap\limits_{k\in K} I_k$ є лівим (правим, двостороннім) ідеалом цієї півгрупи $\mathcal{G}$.*

Очевидно, що G — це тривіальний „найбільший“ і лівий, і правий, і двосторонній ідеал півгрупи $\mathcal{G} = (G;*)$.

Зауважимо, що для комутативної півгрупи поняття лівого, правого, двостороннього ідеалів співпадають.

8. Введемо поняття **підпівгрупи, породженої підмножиною**.

Означення 2.2.8. *Якщо $H \subset G$ — непорожня підмножина півгрупи $\mathcal{G} = (G;*)$, то найменша підпівгрупа, що містить цю підмножину H, називається **підпівгрупою, породженою цією підмножиною** H, і позначається часто у вигляді $[H]$, а сама підмножина H називається **системою твірних** для $[H]$.*

Легко бачити, що підпівгрупа $[H]$ — це перетин всіх підпівгруп, які містять підмножину H.

Означення 2.2.9. *Підпівгрупа* $[g] \overset{df}{=} [\{g\}]$*, породжена одним елементом* $g \in G$ *півгрупи* $\mathcal{G}$*, називається* ***моногенною*** *або* ***циклічною****; при цьому якщо вона скінченна, то її порядок називається* ***порядком твірного елемента*** g*; а якщо* $[g]$ *нескінченна, то цей елемент називають* ***твірним елементом нескінченного порядку****.*

Означення 2.2.10. *Півгрупа називається* ***моногенною****, якщо вона співпадає з однією із своїх моногенних підпівгруп.*

Можна показати, що існують моногенні півгрупи будь-якого порядку.

9. Приклади півгруп, моноїдів, підпівгруп, ідеалів.

1. $(\mathbb{N}; +)$ — адитивна півгрупа натуральних чисел, яка є підпівгрупою адитивної півгрупи $(\mathbb{Z}; +)$ цілих чисел і одночасно є моногенною півгрупою нескінченного порядку з твірним елементом одиниця;

2. $(\mathbb{Z}; +)$ — абелевий моноїд, в якому в ролі нейтрального елемента є звичайний нуль 0;

3. $(\mathbb{N}; \cdot)$ — абелева мультиплікативна півгрупа натуральних чисел, яку можна вважати і моноїдом з одиницею 1;

4. $2N \subset \mathbb{N}$ — підпівгрупа адитивної півгрупи $(\mathbb{N}; +)$ натуральних чисел, але не є її ідеалом; вона є моногенною підпівгрупою нескінченного порядку з твірним елементом 2.

5. $2N$ — ідеал абелевої мультиплікативної півгрупи $(\mathbb{N}; \cdot)$ натуральних чисел, але не є ідеалом (а лише підпівгрупою) мультиплікативної півгрупи $(\mathbb{Z}; \cdot)$ цілих чисел.

6. $(\mathfrak{P}(A); \cap)$ — адитивна ідемпотентна півгрупа всіх підмножин множини A, яка містить у ролі нуля порожню множину $\varnothing$, а в ролі одиниці — множину A.

7. $(\mathfrak{P}(A); \cup)$ — адитивна ідемпотентна півгрупа всіх підмножин множини A, яка містить у ролі нуля множину A, а в ролі одиниці — порожню підмножину $\varnothing$.

8. $(\mathfrak{P}(A \times A); \circ)$ — півгрупа всіх бінарних однорідних відношень на множині A (говорять ще — многозначних перетворень у множині A) з нейтральним елементом Δ_A відносно композиції цих відношень.

2.3 Поняття квазігрупи, лупи; латинські квадрати

1. Частинним випадком бінарних оперативів є квазігрупи, які теж посіли важливе місце в сучасній алгебрі.

Означення 2.3.1. *Бінарний опеатив $\mathcal{G} = (G;*)$ називається* ***квазігрупою****, якщо для довільних елементів $a, b \in G$ рівняння виду $x * a = b$, $a * y = b$ мають єдині розв'язки відносно невідомих x, y.*

Означення 2.3.2. ***Лупою*** *називається квазігрупа з нейтральним елементом відносно заданої на ній бінарної операції.*

2. Приклади.

1. Бінарний оператив $(\mathbb{Z};*)$, де $a * b \stackrel{df}{=} a - b + 1$ для довільних $a, b \in \mathbb{Z}$, легко перевірити, є квазігрупою, але не є лупою.

2. Бінарний оператив, заданий нижче таблицею Келі, легко бачити, є комутативною лупою, у якій в ролі нейтрального елемента виступає одиниця 1.

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

3. Латинським квадратом називається числова (або буквена) таблиця розміром $n \times n$, в якій кожен рядок і кожен стовпець містить n різних символів, заданих у цій таблиці. Якраз саме дослідження латинських квадратів і привело до поняття квазігрупи. Заданий вище у вигляді таблиці Келі бінарний оператив є прикладом латинського квадрата, в якому кожен рядок і стовпець містить чотири різні задані числа.

Відмітимо, що серед таких латинських квадратів є так звані **магічні квадрати**, у яких суми чисел кожного рядка, стовпця і обох діагоналей рівні між собою, і ці квадрати є таблицями Келі для квазігрупи. Наприклад, такою таблицею для $n = 4$ елементів з множини M_4 є наступна:

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	1	2
3	4	3	2	1
4	2	1	4	3

Виникає питання, а чи можна побудувати аналогічну таблицю для лупи. **Подумайте самостійно** і проаналізуйте, чи для довільного натурального числа елементів це можливо, та, якщо це можливо для деяких n, з'ясуйте, скількома способами це можна зробити.

4. Виділимо у квазігрупі такі підмножини, які називаються її **лівим, середнім, правим ядром**.

Означення 2.3.3. *Підмножини $H_l, H_m, H_r \subset G$ квазігрупи $\mathcal{G} = (G; *)$ називаються відповідно* ***лівим, середнім, правим її ядрами****, якщо вони задаються відповідно такими рівностями:*

$$H_l \stackrel{df}{=} \{h | (\forall g_1, g_2 \in G)(h * g_1) * g_2 = h * (g_1 * g_2)\};$$

$$H_m \stackrel{df}{=} \{h | (\forall g_1, g_2 \in G)(g_1 * h) * g_2 = g_1 * (h * g_2)\};$$

$$H_r \stackrel{df}{=} \{h | (\forall g_1, g_2 \in G)(g_1 * g_2) * h = g_1 * (g_2 * h)\}.$$

Очевидно, що такі ядра утворюють підпівгрупи квазігрупи, тобто ці ядра є півгрупами відносно квазігрупової операції.

2.4 Поняття групи, підгрупи; форми запису; приклади

1. Серед бінарних оперативів одним із найважливіших та широко використовуваним є **група**, що знайшла різноманітні застосування як в науці, так і в практиці.

Означення 2.4.1. *Бінарний оператив $\mathcal{G} = (G; *)$ називається* ***групою****, якщо бінарна операція $*$ асоціативна, існує нейтральний елемент, і до кожного елемента існує симетричний елемент, тобто мають місце, говорять, такі аксіоми:*

$$(\forall x, y, z \in G)((x * y) * z = x * (y * z));$$

$$(\exists e \in G)(\forall g \in G)(e * g = g * e = g);$$
$$(\forall g \in G)(\exists \overline{g} \in G)(\overline{g} * g = g * \overline{g} = e).$$

Означення 2.4.2. *Група $\mathcal{G}$ називається* ***комутативною або абелевою****, якщо її операція комутативна, тобто має місце співвідношення*

$$(\forall x, y \in G)(x * y = y * x).$$

Серед груп виділяють скінченні та нескінченні групи.

Означення 2.4.3. *Група називається* ***скінченною (нескінченною)****, якщо множина її елементів скінченна (нескінченна); для скінченної групи кількість її елементів називають* ***порядком групи****.*

2. Як і для півгруп, для груп на практиці вживають мультиплікативну та адитивну форму запису. При цьому використовують аналогічні назви та позначення. Крім того, при мультиплікативній формі запису симетричний елемент називають **оберненим** і позначають g^{-1}, а при адитивній формі запису — **протилежним** і позначають $-g$ для елемента g, який при мультиплікативній формі запису в такому випадку називають **оборотним елементом**.

3. Введемо поняття підгрупи даної групи та розглянемо необхідні і достатні умови того, щоб підмножина групи була її підгрупою.

Означення 2.4.4. *Підмножина $H \subset G$ групи $\mathcal{G} = (G; *)$ називається* ***підгрупою цієї групи*** *$\mathcal{G}$, якщо відносно групової операції $*$ в $\mathcal{G}$ підмножина H теж є групою.*

Можна довести наступні теореми про підгрупи даної групи.

Теорема 2.4.1. *Для того щоб підмножина $H \subset G$ групи $\mathcal{G} = (G; *)$ була її підгрупою, необхідно і достатньо, щоб H була такою непорожньою підмножиною, яка задовольняла би наступним співвідношенням:*

$$(\forall x, y \in G)(x, y \in H \Rightarrow x * y \in H); \tag{2.4.1}$$
$$(\forall x \in G)(x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H), \tag{2.4.2}$$

які відповідно означають, що ця непорожня підмножина замкнена відносно операції $*$ і оберненості елементів.

На мові підмножини і глобальної операції співвідношення (2.4.1), (2.4.2) можна подати відповідно у вигляді:

$$H * H \subset H;$$

$$H^{-1} \subset H,$$

де $h^{-1} \in H^{-1} \overset{df}{\Leftrightarrow} h \in H$.

Теорема 2.4.2. *Перетин довільної сімї підгруп групи є її підгрупою, тобто якщо $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ — сімейство підгруп групи $\mathcal{G} = (G; *)$, то $\mathcal{H} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{H}_i$ — підгрупа групи $\mathcal{G}$.*

Очевидно, що довільна група $\mathcal{G} = (G; *)$ має такі тривіальні підгрупи: це так звана **одинична підгрупа** $\{e\}$, яка містить єдиний її елемент — нейтральний елемент $e \in G$ даної групи $\mathcal{G}$, і , отже, є „найменшою“ підгрупою, і підгрупа $\mathcal{G}$ — це сама група, яка, зрозуміло, є „найбільшою“ підгрупою для групи $\mathcal{G}$.

4. Введемо поняття **породженої підгрупи**.

Означення 2.4.5. *Якщо $H \subset G$ — довільна непорожня підмножина групи $\mathcal{G} = (G; *)$, то найменша підгрупа, що містить цю підмножину H, **називається підгрупою**, породженою цією **підмножиною** H, і позначається часто у вигляді $[H]$, а сама підмножина H називається **системою твірних** для $[H]$.*

Очевидно, що підгрупа $[H]$ є перетином всіх підгруп, які містять підмножину H.

Означення 2.4.6. *Підгрупа $[g] \overset{df}{=} [\{g\}]$, що породжена одним елементом $g \in G$ групи $\mathcal{G} = (G; *)$, називається **циклічною**; при цьому якщо вона скінченна, то її порядок називається **порядком твірного елемента** g; а якщо $[g]$ нескінченна, то елемент g називається **твірним елементом нескінченного порядку**.*

Означення 2.4.7. *Група називається **циклічною**, якщо вона співпадає з однією із своїх циклічних підгруп.*

Можна показати, що існують циклічні групи довільного порядку (подумайте над цим самостійно).

5. Приклади груп, підгруп.

1. $(\mathbb{Z};+)$ — адитивна група цілих чисел, яка, до речі, є нескінченною циклічною групою, твірним елементом якої є одиниця.

2. $kZ = \{kz | k \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$ — підгрупа групи $(\mathbb{Z};+)$ цілих чисел.

3. $(R^+;\cdot)$ — мультиплікативна група всіх додатних дійсних чисел з операцією множення чисел.

4. $(B(A);\circ)$ — симетрична група всіх підстановок множини з операцією композиції підстановок, де $B(A)$ — множина всіх підстановок множини A.

5. $(N_5;\cdot)$ — мультиплікативна група ненульових остач при діленні натуральних чисел на 5, де $N_5 = \{\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ — множина всіх ненульових остач, для яких операція множення задається таблицею Келі

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

у якій добутком двох остач є остача отриманого результату як звичайного добутку від ділення його на 5 (наприклад, $\overline{3}\cdot\overline{4}=\overline{2}$).

2.5 Найпростіші властивості групи; інші означення групи

1. Як було відмічено вище, оскільки групи знайшли широкі різноманітні застосування як в наукових, так і в практичних дослідженнях, в результаті свого бурхливого розвитку виникла могутня теорія груп як один із важливих розділів сучасної алгебри.

Нижче нами будуть розглянуті лише кілька найпростіших властивостей групи, які безпосередньо випливають з самого означення групи. При цьому надалі для простоти запису вживатимемо мультиплікативну форму запису, часто пропускаючи навіть символ операції множення, та відповідні назви, що супроводжують цю мультиплікативну форму запису.

2. Нехай $\mathcal{G} = (G; \cdot)$ — група. З означення групи, даного вище на сторінці 42, а іноді говорять — з аксіом групи, випливають безпосередньо найпростіші властивості, які можна сформулювати у вигляді наступних теорем.

Теорема 2.5.1. *Одиничний елемент в групі єдиний.*

Доведення. Нехай e_1, e_2 — її одиничні елементи. Тоді маємо:

$$e_1e_2 = e_2, \text{ бо } e_1 - \text{одиничний елемент;}$$
$$e_1e_2 = e_1, \text{ бо } e_2 - \text{одиничний елемент.}$$

З отриманих рівностей випливає рівність $e_1 = e_2$, що вказує на те, що різних одиничних елементів в групі нема ■

Теорема 2.5.2. *Операція множення в групі скоротна, тобто*

$$(\forall a, y, x \in G)(ax = ay \to x = y) - \textit{ліва скоротність};$$
$$(\forall a, y, x \in G)(xa = ya \to x = y) - \textit{права скоротність}.$$

Доведення. Нехай $ax = ay$ і $\overline{a}$ — обернений елемент до a. Тоді $\overline{a}(ax) = \overline{a}(ay)$, звідки в силу асоціативності множення маємо $(\overline{a}a)x = (\overline{a}a)y$. А оскільки $\overline{a}a = e$ — одиничний елемент, то $ex = ey$, що і дає потрібну рівність $x = y$. Отже, виконується ліва скоротність операції множення. Аналогічно доводиться і права скоротність множення ■

Теорема 2.5.3. *Для кожного елемента групи існує єдиний обернений до нього елемент.*

Доведення. Нехай для довільного елемента $g \in G$ оберненими є елементи $t, s \in G$. Тоді $gt = gs = e$, звідки, в силу лівої скоротності операції множення, отримаємо $t = s$, що вказує на те, що оборотний елемент для $g \in G$ єдиний ■

Зауважимо, що при мультиплікативній формі запису операції в групі $\mathcal{G}$ обернений елемент до елемента $g \in G$ позначають у вигляді g^{-1}, а при адитивній формі запису позначають $-g$ і називають **протилежним до елемента** $g \in G$.

Теорема 2.5.4. *Рівняння виду $ax = b$, $ya = b$, де x, y — невідомі, а $a, b \in G$ — довільні задані елементи групи $\mathcal{G}$, мають єдині розв'язки.*

Доведення. Розглянемо, наприклад, рівняння $ax = b$. Виконавши над ним рівносильні перетворення, отримаємо:

$$\begin{gathered} a^{-1}(ax) = a^{-1}b; \\ (a^{-1}a)x = a^{-1}b; \\ ex = a^{-1}b; \\ x = a^{-1}b, \end{gathered}$$

що вказує на те, що отримане значення $x = a^{-1}b$ є єдиним розв'язком рівняння $ax = b$. Аналогічно показуємо, що рівняння $ya = b$ теж має єдиний розв'язок $y = ba^{-1}$ (самостійно доведіть це) ■

Відмітимо, що для абелевої групи вводиться додаткова дія, обернена до множення — **дія ділення**, а саме: $\frac{g}{h} \overset{df}{=} gh^{-1}$, де g — **ділене**, h — **дільник**, а gh^{-1} — **частка**. У випадку адитивної форми запису обернена дія до дії додавання називається **відніманням** і вводиться так: $g - h \overset{df}{=} g + (-h)$, де g — **зменшуване**, h — **від'ємник**, $g + (-h)$ — **різниця**.

Теорема 2.5.5. $(g^{-1})^{-1} = g$, *тобто обернений елемент до оберненого є цей початковий елемент.*

Доведення. Дійсно, в силу попередньої властивості рівняння $g^{-1}x = e$ має єдиний розв'язок $x = (g^{-1})^{-1}e = (g^{-1})^{-1}$. Разом з тим в силу означення групи має місце рівність $g^{-1}g = e$. Тому робимо висновок про те, що справді $g = (g^{-1})^{-1}$, що і треба було показати ■

Теорема 2.5.6. $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$, *тобто елемент, обернений до добутку елементів, рівний добутку обернених до елементів, взятих у зворотному порядку.*

Доведення випливає з теореми 2.5.4 про єдиність розв'язку рівняння $(gh)x = e$. Дійсно, з однієї сторони $x = (gh)^{-1}e = (gh)^{-1}$, а з другої сторони маємо $(gh)(h^{-1}g^{-1}) = g(hh^{-1})g^{-1} = geg^{-1} = gg^{-1} = e$, що вказує на те, що і $h^{-1}g^{-1}$ теж є розв'язком рівняння

$(gh)x = e$. Тому, в силу єдиності розв'язку, маємо $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$
■

Зауважимо, що аналогічними чином доводиться, що остання властивість має місце для довільного числа елементів групи, тобто $(g_1 g_2 ... g_k)^{-1} = g_k^{-1} ... g_2^{-1} g_1^{-1}$.

3. На основі відмічених вище властивостей та означень півгрупи, моноїда, квазігупи, лупи можна дати інші рівносильні означення групи. Наведемо деякі з них.

Означення 2.5.1. *Групою називається моноїд, всі елементи якого оборотні.*

Означення 2.5.2. *Групою називається асоціативна лупа.*

Означення 2.5.3. *Групою називається півгрупа, в якій рівняння $ax = b$, $ya = b$ мають єдині розв'язки.*

Означення 2.5.4. *Групою називається асоціативна квазігрупа.*

Означення 2.5.5. *Групою називається алгебра $\mathcal{G} = (G; \cdot, ^{-1}, e)$ типу $(2, 1, 0)$, в якій бінарна операція асоціативна і виконуються рівності:*

$$ge = eg = g;$$
$$g^{-1}g = gg^{-1} = e,$$

для будь-якого елемента $g \in G$.

Можна показати, що наведені вище означення рівносильні між собою. Проведіть **самостійні дослідження** і переконайтеся в їх рівносильності.

2.6 Поняття гомоморфізму, ізоморфізму півгрупи, квазігрупи, групи; приклади

1. Поняття гомоморфізму, ізоморфізму алгебр, алгебраїчних систем є одним із основних і надзвичайно плідних у сучасній алгебрі. Вони дають можливість вивчати одночасно цілі класи однотипних алгебр, алгебраїчних систем. Крім того, часто дослідження їх можна звести до дослідження однотипних їм таких алгебр, алгебраїчних систем, які мають „менший об'єм", „меншу кількість елементів", що значно полегшує такі дослідження. А вивчивши об'єкти меншого об'єму можна досліджувати подібні об'єкти „більшого об'єму".

2. Нехай $\mathcal{G}_1 = (G_1; *_1)$, $\mathcal{G}_2 = (G_2; *_2)$ — півгрупи (квазігрупи, групи).

Означення 2.6.1. *Відображення $f : G_1 \longrightarrow G_2$ називається* ***гомоморфізмом півгрупи (квазігрупи, групи)*** $\mathcal{G}_1$ ***в півгрупу (квазігрупу, групу)*** $\mathcal{G}_2$, *якщо f здійснює „узгодження" між відповідними операціями в $\mathcal{G}_1$ і в $\mathcal{G}_2$, тобто для довільних елементів $g, h \in G_1$ виконується рівність*

$$f(g *_1 h) = f(g) *_2 f(h)$$

(іноді говорять: образ $f(g *_1 h)$ від результату $g *_1 h$ над елементами $g, h \in G_1$ дорівнює результату $f(g) *_2 f(h)$ образів $f(g)$, $f(h) \in G_2$ цих елементів $g, h \in G_1$).

Означення 2.6.2. *Гомоморфізм f півгрупи (групи) $\mathcal{G}_1$ в півгрупу (квазігрупу, групу) $\mathcal{G}_2$ називається* ***ізоморфізмом***, *якщо відображення $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ін'єктивне (тобто взаємно однозначне).*

Якщо відображення $f : G_1 \longrightarrow G_2$ є с'юрєктивним, тобто відображенням множини G_1 на множину G_2, то говорять про **гомоморфізм півгрупи (квазігрупи, групи) $\mathcal{G}_1$ на півгрупу (квазігрупу, групу) $\mathcal{G}_2$ або коротко — епіморфізм**. Аналогічно, якщо $f : G_1 \longrightarrow G_2$ є бієкцією між множинами G_1 і G_2, тобто ін'єктивною с'юрєкцією, то говорять про **ізоморфізм півгрупи (квазігрупи, групи) $\mathcal{G}_1$ на півгрупу (квазігрупу, групу) $\mathcal{G}_2$** або коротко, **ізоморфізм між ними**.

Відмітимо, що слова „гомоморфізм", „епіморфізм", „ізоморфізм" — це слова грецького походження: $o\mu o\xi$, $\varepsilon\pi\iota$, $\iota\zeta o\xi$, $\mu o\rho\varphi\eta$ відповідно означають схожий, на, однаковий, форма.

Якщо розглядається відображення $f : G_1 \longrightarrow G_1$, то відповідний гомоморфізм чи ізоморфізм f іноді називають **ендоморфізмом** чи відповідно **автоморфізмом** (від грецьких слів $\varepsilon\nu\delta o\nu$, $\alpha\nu\tau o\xi$, що означають — всередину, сам) алгебри $\mathcal{G}_1$.

Зауважимо, що ізоморфні між собою алгебри $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ іноді позначають символом $\cong$, тобто $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$ означає, що алгебри $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ ізоморфні між собою.

2. Відмітимо ряд очевидних властивостей, пов'язаних з гомоморфізмами, ізоморфізмами алгебр, де під алгебрами будемо розуміти півгрупи, квазігрупи, групи.

1. *Відношення гомоморфізму між алгебрами є відношенням квазіпорядку, тобто це відношення рефлексивне і транзитивне.*

2. *Відношення ізоморфізму між алгебрами є відношенням еквівалентності, тобто це відношення рефлексивне, транзитивне і симетричне.*

3. *Відношення ізоморфізму між алгебрами є частинним випадком гомоморфізму, тобто якщо між алгебрами встановлено ізоморфізм, то цей ізоморфізм є одночасно і гомоморфізмом.*

4. *Ендоморізм, епіморфізм є частинними випадками гомоморфізму алгебр, а автоморфізм — частинним випадком ізоморфізму.*

5. *Якщо f — гомоморфізм півгрупи (квазігрупи, групи) $\mathcal{G}_1 = (G_1; *_1)$ в півгрупу (квазігрупу, групу) $\mathcal{G}_2 = (G_2; *_2)$, а підмножина $f(G_1) \overset{df}{=} \{f(g) | g \in G_1\} \subset G_2$ півгрупи (квазігрупи, групи) $\mathcal{G}_2$ є образом відносно цього гомоморфізму f, то цей образ $f(G_1)$ є підпівгрупою (підквазігрупою, підгрупою) в $\mathcal{G}_2$ такою, що образ нейтрального елемента $e_1 \in G_1$ з $\mathcal{G}_1$ є нейтральним елементом в $f(G_1)$, а образ $f(\overline{g})$ симетричного елемента $\overline{g} \in G_1$ до елемента $g \in G_1$ є симетричним елементом до образа $f(g) \in f(G_1)$ елемента $g \in G_1$, тобто якщо $\overline{g} *_1 g = g *_1 \overline{g} = e_1$, то $f(\overline{g}) *_2 f(g) = f(g) *_2 f(\overline{g}) = f(e_1)$ і $f(h) *_2 f(e_1) = f(e_1) *_2 f(h) = f(h)$ для довільних елементів $h \in G_1$.*

Переконайтеся в справедливості відмічених властивостей **самостійно**.

3. Приклади.

1. Тотожне відображення e, яке задане рівністю $e(g) \overset{df}{=} g$ для довільного елемента $g \in G$ алгебри $\mathcal{G} = (G; *)$, є її автоморфізмом.

2. Відображення $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2N$ множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел в множину $2N$ парних натуральних чисел, яке задане рівністю $f(n) = 2n$, де $n \in \mathbb{N}$, є:

а) ізоморфізмом адитивної півгрупи $(\mathbb{N}; +)$ натуральних чисел на адитивну півгрупу $(2N; +)$ парних натуральних чисел;

б) автоморфізмом адитивної півгрупи $(\mathbb{N}; +)$ самої в себе;

в) не є гомоморфізмом мультиплікативної півгрупи $(\mathbb{N}; \cdot)$ натуральних чисел самої в себе, оскільки не виконується рівність $f(kl) = f(k) \cdot f(l)$, тобто $2(kl) \neq 2k \cdot 2l$, де $k, l \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа.

3. Відображення $f_6 : \mathbb{Z} \longrightarrow Z_6$, де $Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ — множина всіх остач при діленні цілих чисел на 6, задана рівністю $f_6(k) = \overline{k}$, де $\overline{k}$ — остача при діленні цілого числа $k \in \mathbb{Z}$ на 6, є епіморфізмом адитивної групи $(\mathbb{Z}; +)$ цілих чисел на аддитивну групу $(Z_6; +_6)$ остач.

4. Відображення $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow R^+$, задане рівністю $f(x) = |x|$ для довільного дійсного ненульового числа x, де $R^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, є епіморфізмом мультиплікативної абелевої групи $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ ненульових дійсних чисел на мультиплікативну групу $(R^+; \cdot)$ додатних дійсних чисел, оскільки виконується рівність $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ для довільних $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Відображення $f : \mathbb{R} \longrightarrow R^+$, задане рівністю $f(x) = 2^x$, є ізоморфізмом адитивної групи $(\mathbb{R}; +)$ дійсних чисел на мультиплікативну абелеву групу $(R^+; \cdot)$ додатних дійсних чисел, оскільки це відображення є бієкцією між множинами $\mathbb{R}$ та R^+, і виконується рівність $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, тобто $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$ для будь-яких чисел $x, y \in \mathbb{R}$.

2.7 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Що таке алгебра? Навести приклади алгебр.

2. Що таке алгебраїчна система? Навести приклади алгебраїчних систем.

3. Що таке тип алгебри, тип алгебраїчної системи?

4. Які алгебри, алгебраїчні системи називаються однотипними?

5. Наведіть приклади однотипних алгебр, алгебраїчних систем.
6. Що таке підалгебра даної алгебри?
7. Що таке підсистема даної алгебраїчної системи?
8. Наведіть приклади підалгебр, підсистем?
9. Коли саму алгебру (алгебраїчну систему) називають розширенням деякої алгебри (алгебраїчної системи).
10. Що таке півгрупа? Наведіть приклади півгруп.
11. Що таке комутативна півгрупа, ідемпотента півгрупа?
12. Наведіть приклади півгруп, які є одночасно комутативними та ідемпотентними.
13. Що таке підпівгрупа? Наведіть приклади підпівгруп.
14. Сформулюйте критерій того, щоб підмножина півгрупи була її підпівгрупою.
15. Чи буде перетин підпівгруп підпівгрупою даної півгрупи? Проілюструйте на прикладі.
16. Яка підмножина півгрупи називається
    а) лівим ідеалом;
    б) правим ідеалом;
    в) двостороннім ідеалом?
17. Наведіть приклади ідеалів півгрупи.
18. Чи буде перетин ідеалів певного типу ідеалом того ж самого типу?
19. Який зв'язок між ідеалами та підпівгрупами даної півгрупи?
20. Чи буде об'єднання
    а) підпівгруп підпівгрупою;
    б) ідеалів певного виду ідеалом того ж самого виду ?

21. Що таке моногенна підпівгрупа? Наведіть приклади.
22. Яка півгрупа називається моногенною?
23. Що таке моноїд?
24. Скільки нейтральних елементів може мати півгрупа?
25. Чи завжди нейтральний елемент підпівгрупи є нейтральним елементом всієї півгрупи?
26. Чи завжди нейтральний елемент півгрупи є нейтральним елементом її підпівгрупи?
27. Що таке квазігрупа? Наведіть приклади.
28. Що таке лупа? Наведіть приклади.
29. Яку особливість має таблиця Келі, яка задає
    а) квазігрупу;
    б) лупу;
    в) комутативну квазігрупу?
30. Що таке латинський квадрат?
31. Що таке магічний квадрат?
32. Що таке ліве, праве, середнє ядро квазігрупи та яка роль цих ядер?
33. Що таке група? Якийзв'язок її з півгрупою?
34. Яка група називається абелевою?
35. Наведіть приклади абелевої групи.
36. Яка група називається скінченною? Наведіть приклади скінченної групи.
37. Що таке підгрупа даної групи?
38. Сформулюйте критерій того, щоб підмножина групи була її підгрупою?

39. Які тривіальні підгрупи групи Ви знаєте?
40. Чи завжди перетин довільного сімейства
    а) підпівгруп є підпівгрупою даної півгрупи;
    б) підгруп є підгрупою даної групи?
41. Що таке підгрупа, породжена підмножиною групи?
42. Яка підгрупа називається циклічною в групі ?
43. Що таке циклічна група? Наведіть приклади циклічної групи.
44. Які Ви знаєте властивості групи?
45. Поясніть, чому операція в групі скоротна?
46. Доведіть, що кожен елемент групи володіє єдиним симетричним елементом.
47. Що таке адитивна форма запису операції в групі?
48. Що таке мультиплікативна форма запису операції в групі? Які при цьому вживаються назви та позначення?
49. Як можна ввести дію, обернену чи, говорять, протилежну до заданої групової операції? Як вона називається при адитивній та при мультиплікативній формі запису?
50. Дайте означення групи за допомогою поняття
    а) моноїда;
    б) квазігрупи;
    в) лупи;
    г) півгрупи та розв'язків рівнянь виду $ax = b$, $ya = b$;
    д) алгебри типу (2, 1, 0).
51. Які півгрупи (квазігрупи, групи) називається ізоморфними?
52. Що таке гомоморфізм півгруп (квазігруп, груп)?
53. Що таке епіморфізм півгруп (квазігруп, груп)?

54. Що таке ендоморфізм півгрупи (квазігрупи, групи)?

55. Що таке автоморфізм півгрупи (квазігрупи, групи)?

56. Вкажіть різницю між гомоморфізмом та ізоморфізмом півгруп (квазігруп, груп).

57. Що є спільного та відмінного для гомоморфізму, епіморфізму та ендоморфізму півгруп (квазігруп, груп)?

58. Яка різниця між ендоморфізмом та автоморфізмом півгрупи (квазігрупи, групи)?

59. Яка різниця між ізоморфізмом та автоморфізмом півгруп (квазігруп, груп)?

60. Поясніть, чому відношення гомоморфізму півгруп (квазігруп, груп) є відношенням квазіпорядку. А чи будуть відношеннями квазіпорядку відношення епіморфізму, ендоморфізму півгруп (квазігруп, груп)?

61. Поясніть, чому відношення ізоморфізму між півгрупами (квазігрупи, групами) є відношенням еквівалентності. Вкажіть, що собою представляє при цьому фактор-множина всіх півгруп (квазігруп, груп).

62. Поясніть, чому образ півгрупи (квазігрупи, групи) $\mathcal{G}_1$ відносно гомоморфізму її в деяку півгрупу (квазігрупу, групу) $\mathcal{G}_2$ є підпівгрупою (квазігрупою, підгрупою) півгрупи (квазігрупи, групи) $\mathcal{G}_2$. Коли цей образ співпадає з $\mathcal{G}_2$?

63. Наведіть приклади гомоморфних півгруп (квазігруп, груп).

64. Наведіть приклади ізоморфних півгруп (квазігруп, груп).

65. Наведіть приклади епіморфізму півгруп (квазігруп, груп).

66. Наведіть приклади ендоморфізму півгрупи (квазігрупи, групи).

67. Наведіть приклади автоморфізмому півгрупи (квазігрупи, групи).

68. Відомо, що півгрупа є моноїдом. Чи довільна її підпівгрупа є моноїдом?

69. Нехай моноїд визначений як алгебра типу (2,0). Чи довільна його підалгебра є моноїдом?

70. Відомо, що перетин підгруп є обов'язково підгрупа заданої групи. Поясніть цей факт. А чи справедливе подібне твердження для перетину підпівгруп півгрупи, тобто чи завжди перетин підпівгруп є підпівгрупа даної півгрупи? Дати аналогічну відповідь для півгрупи, яка є моноїдом, і для моноїда як алгебри типу (2,0).

71. Чи є півгрупами такі алгебри: а) $(\mathbb{Z};+)$; б) $(\mathbb{Z};\cdot)$; в) $(\mathbb{Z};-)$; г) $(\mathbb{N};\cdot)$; д) $(\mathbb{N};+)$; е) $(\mathbb{N};-)$; є) $(Q^+;\cdot)$; ж) $(N_0;+)$; з) $(Q^+;+)$; и) $(\{3^n|n\in\mathbb{N}\};\cdot)$; і) $(\{3^n|n\in\mathbb{Z}\};\cdot)$; ї) $(\mathfrak{P}(A);\cap)$; й) $(\mathfrak{P}(A);\cup)$; к) $(nZ;+)$; л) $(nZ;\cdot)$?

72. З'ясувати, якими властивостями володіють вказані вище алгебри. Встановити, чи є серед них групи?

73. З'ясувати, які з наведених вище у вправі 71 півгруп (груп) є підпівгрупами (підгрупами) з вказаного списку.

74. Встановити, чи існує між деякими з перелічених вище півгруп (груп) циклічні. Якщо так, то вказати їх твірні елементи.

75. З'ясувати, чи існує між деякими з перелічених вище півгруп (груп) гомоморфізм або ізоморфізм. Якщо так, то як можна його подати у аналітичній формі?

76. * З'ясувати, якими можуть бути підпівгрупи та ідеали в таких півгрупах: а) $(\mathbb{N};+)$; б) $(\mathbb{N};\cdot)$; в) $(\mathbb{Z};+)$; г) $(\mathbb{Z};\cdot)$.

77. * Вказати мінімальну множину твірних для кожної з вказаних півгруп вправи 76.

78. Півгрупа $(\mathbb{Z};+)$, як відомо, є абелевою групою. Вказати всі її підгрупи та ідеали.

79. Нехай в алгебрі $(G;*)$ бінарна операція задана рівністю $g*h = h$. З'ясувати, чи ця алгебра є півгрупою. Дослідити властивості цієї алгебри. Встановити її підалгебри, ідеали.

80. Довести, що перетин, об'єднання, добуток ідеалів півгрупи є ідеалом, якщо добутком ідеалів I_1, I_2 є множина виду $I_1 I_2 \stackrel{df}{=} \{i_1 * i_2 | i_1 \in I_1 \wedge i_2 \in I_2\}$, а $*$ — півгрупова операція.

81. Дослідити всі ідеали групи.

82. На множині $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ задана операція

    а) $(a, b) \stackrel{df}{=} \text{НСД}(a, b)$;

    б) $[a, b] \stackrel{df}{=} \text{НСК}(a, b)$.

    Скласти таблицю Келі. Довести, що утвориться півгрупа в кожному з цих випадків. Вказати її властивості.

83. Використовуючи поняття замкнутості алгебраїчної операції знайти функцію $f(x)$ таку, що $\left(\forall x \in \mathbb{R} \middle| f(x) + 2f(-x) = x + 1\right)$.

84. Використовуючи поняття півгрупи знайти функцію $f(x)$ таку, що $\left(\forall x \in \mathbb{R} \middle| 2f(x) + f(1 - x) = 3 - xf(1)\right)$.

85. Використовуючи поняття групи знайти функцію $f(x)$ таку, що $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\} \middle| xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1\right)$.

86. Використовуючи поняття групи знайти функцію $f(x)$ таку, що $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, a\} \middle| f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$.

87. Довести, що скінченна півгрупа має ідемпотенти.

88. Задати гомоморфізм півгрупи $(\mathbb{N}; \cdot)$ на алгебру $(\{0, 1\}; \cdot)$ та перевірити правильність його задання.

89. Задати гомоморфізм групи $(\mathbb{Z}; +)$ на алгебру $(\{-1, 1\}; \cdot)$ та перевірити правильність його задання.

90. Нехай $g \in G$ — фіксований елемент групи $\mathcal{G} = (G; \cdot)$. Дослідити, чи будуть ендоморфізмами або автоморфізмами цієї групи відображення, задані такими рівностями: а) $l_g(x) = gx$; б) $r_g(x) = xg$; в) $m_g(x) = gxg^{-1}$.

91. Дослідити, чи можна комутативну ідемпотентну півгрупу ізоморфно відобразити в півгрупу підмножин деякої множини відносно операції перетину (об'єднання) підмножин.

92. * Дослідити будову моногенної півгрупи. Скільки вона має ідемпотентів, підпівгруп, ідеалів, підгруп?

93. Показати, що алгебра $(\mathbb{Z}; \circ_k)$ є квазігрупою, якщо операція $\circ_k$ задана рівністю $a \circ_k b \overset{df}{=} a + b + k$, де $k \in \mathbb{Z}$ — фіксоване ціле число. Дослідити, при якому $k \in \mathbb{Z}$ вона є лупою.

94. Дослідити, чи алгебра $(Q; \circ)$ є квазігрупою, якщо операція $\circ$ задана рівністю $a \circ b = \alpha a + \beta b + \gamma$, де $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ — фіксовані раціональні числа. Коли така алгебра буде

    а) комутативною квазігрупою;

    б) лупою?

95. * Дано n натуральних чисел. Скільки з них можна утворити:

    а) латинських квадратів;

    б) магічних квадратів;

    в) симетричних відносно діагоналі латинських квадратів?

2.8 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

68. Ні.

69. Так.

70. Для півгруп — ні; для моноїдів як алгебр типу (2, 0) — так.

71. Так, крім випадків в), е).

72. Всі півгрупи абелеві, а у випадках ї), й) ще є ідемпотентними; всі півгрупи мають нейтральні елементи, крім випадків д), и), з), л), а у випадках б) ї), й), к) мають також поглинаючі елементи; у випадках а), є), і), к) — групи.

73. Відносно дії додавання підпівгрупи відмітимо відповідно включеннями: $\mathbb{N} \subset N_0 \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \subset Q^+$; $nZ \subset \mathbb{Z}$; аналогічно відносно множення: $\{3^n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $N \subset Q^+$; $\{3^n | n \in \mathbb{Z}\} \subset Q^+$.

74. Циклічна півгрупа відносно додавання $(\mathbb{N}; +)$ з твірним елементом 1; циклічна півгрупа відносно множення $(\{3^n | n \in \mathbb{N}\}; \cdot)$ з твірним елементом 3; циклічні групи $(\mathbb{Z}; +)$, $(nZ; +)$, $(\{3^n | n \in \mathbb{Z}\}; \cdot)$ з відповідно твірними елементами 1, n, 3.

75. Тотожний ізоморфізм $f(x) = x$ для таких пар алгебр.

$(\mathbb{N}; \cdot) \overset{\text{в}}{\cong} (\mathbb{Z}; \cdot)$; $(\mathbb{N}; +) \overset{\text{в}}{\cong} (\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{N}; \cdot) \overset{\text{в}}{\cong} (Q^+; \cdot)$; $(\mathbb{N}; +) \overset{\text{в}}{\cong} (N_0; +)$; $(N_0; +) \overset{\text{в}}{\cong} (\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{N}; +) \overset{\text{в}}{\cong} (Q^+; +)$; $(\{3^n | n \in \mathbb{N}\}; \cdot) \overset{\text{в}}{\cong} \{3^n | n \in \mathbb{Z}\}; \cdot)$; $(\{3^n | n \in \mathbb{N}\}; \cdot) \overset{\text{в}}{\cong} (Q^+; \cdot)$; $(\{3^n | n \in \mathbb{Z}\}; \cdot) \overset{\text{в}}{\cong} (Q^+; \cdot)$; ізоморфізм $f(3^n) = n$ для таких пар алгебр:

$(\{3^n | n \in \mathbb{N}\}; \cdot) \overset{\text{на}}{\cong} (\mathbb{N}; +)$; $(\{3^n | n \in \mathbb{Z}\}; \cdot) \overset{\text{на}}{\cong} (\mathbb{Z}; +)$; $(\{3^n | n \in \in \mathbb{N}\}; \cdot) \overset{\text{в}}{\cong} (N_0; +)$; $f(x) = \overline{X} = A \setminus X$ — ізоморфізм алгебр: $(\mathfrak{P}(A); \bigcap) \overset{\text{на}}{\cong} (\mathfrak{P}(A); \bigcup)$; $f(x) = |z|$ — гомоморфізм алгебр: $(\mathbb{Z}; \cdot) \overset{\text{в}}{\sim} (Q^+; \cdot)$.

76.

а) півгрупи: $A_n = \{k \in \mathbb{N} | n \leqslant k \wedge n \in \mathbb{N}\}$, циклічні півгрупи nN, де $n \in \mathbb{N}$; ідеали: A_n, де $n \in \mathbb{N}$;

б) півгрупи: $B_m = \{m^n | n, m \in \mathbb{N}\}$; циклічні півгрупи nN, де $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{k \in \mathbb{N} | k \geqslant n\}$, де $n \in \mathbb{N}$; ідеали nN, A_n, де $n \in \mathbb{N}$;

в) циклічні підпівгрупи nZ, півгрупи $A_n = \{k \in \mathbb{N} | k \geqslant n\}$, де $n \in \mathbb{N}$, $A_{-n} = \{k \in \mathbb{Z} | k \leqslant -n \wedge n \in \mathbb{N}\}$; єдинний ідеал — Z;

г) nZ, nN, де $n \in \mathbb{Z}$ — циклічні підпівгрупи; підпівгрупи $A_n = = \{k \in \mathbb{N} | k \geqslant n \wedge n \in N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $A_n = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant n, -n_{-n} \in N_0\}$;

ідеали nZ.

77. а) $\{1\}$; б) $P \cup \{1\}$; в) $\{1; -1\}$; г) $\{1; -1\} \cup P$, де P — множина всіх простих чисел.

78. Всі підгрупи мають вигляд kZ, де $k \in \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}$ — єдиний ідеал.

79. Вказана алгебра є півгрупою, всі елементи якої є поглинаючими зліва; тому вона ідемпотентна. Довільна непорожня підмножина є підмножиною і лівим ідеалом; єдинний правий ідеал — це вся алгебра.

80. **Вказівка**. Для доведення слід використати відповідні означення.

81. Група має єдиний ідеал — це невласний ідеал, що співпадає з усією групою.

82.

(a,b)	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

Це комутативна ідемпотентна півгрупа з поглинаючим елементом 1 і нейтральним елементом 12.

$[a,b]$	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

Це комутативна ідемпотентна півгрупа з нейтральним елементом 1 і поглинаючим елементом 12.

84. $f(x) = \frac{6-3x}{5}$.

85. $f(x) = \frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}$, $x \neq -1$.

87. **Вказівка**. Використати розв'язання вправи 92.

88. **Вказівка**. Гомоморфізм f можна задати співвідношенням

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ – парне число;} \\ 1, & \text{якщо } n \text{ – непарне число.} \end{cases}$$

89. **Вказівка**. Гомоморфізм f можна задати співвідношенням

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \text{ – парне число;} \\ -1, & \text{якщо } n \text{ – непарне число.} \end{cases}$$

90. а), б): f_g, r_g не є ендоморфізмом, якщо g не є одиницею групи, і є автоморфізмом, якщо g — одиниця групи; в) m_g — автоморфізм групи.

91. **Вказівка**. У випадку перетину множин ізоморфізм f можна задати рівністю $f(g) \overset{df}{=} \{x|xg = x \wedge x \in G\} = H_g$, де $g \in G$ — довільний елемент комутативної ідемпотентної півгрупи $\mathcal{G} = (G; \cdot)$, $H_g \subset G$ — відповідна підмножина цієї півгрупи. Тоді можна показати, що $f(g_1 g_2) = H_{g_1} \cap H_{g_2}$ і $f : G \to \{H_g | g \subset G\}$ — взаємно однозначна відповідність. Аналогічним чином можна задати ізоморфізм і у випадку об'єднання множин.

92. **Вказівка**. Спочатку розглянути нескінченну моногенну півгрупу $\mathcal{G} = (G; \cdot)$, де $G = \{g^n | n \in \mathbb{N}\}$, g — її породжуючий елемент, і показати, що вона ізоморфна адитивній півгрупі $(\mathbb{N}; +)$ натуральних чисел. Тоді дослідження будови півгрупи $\mathcal{G}$ можна звести до дослідження будови півгрупи $(\mathbb{N}; +)$, виясняючи в ній ідемпотенти, підпівгрупи, ідеали, півгрупи. Якщо ж моногенна півгрупа $\mathcal{G}$ скінченна і має n елементів, де $n \in \mathbb{N}$, то у ній обов'язково знайдуться елементи g^k, g^{k+l}, де $k, l \in \mathbb{N}$ — найменші натуральні числа такі, що $g^k = g^{k+l}$. Встановивши взаємозв'язок між числами k, l, n, можна далі досліджувати і будову цієї скінченної моногенної півгрупи $\mathcal{G}$, виясняючи в ній ідемпотенти, підпівгрупи, ідеали, півгрупи.

93. Дана алгебра є групою для довільного цілого числа $k \in \mathbb{Z}$.

94. а) $\alpha = \beta$; б) $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$.

3 Найпростіші поняття про кільця

1. Означення кільця, підкільця, ідеала; приклади.
2. Найпростіші властивості кілець.
3. Гомоморфізм, ізоморфізм кілець.
4. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.
5. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

3.1 Означення кільця, підкільця, ідеала; приклади

1. Поряд із введеними раніше такими конкретними алгебрами, як підгрупа, квазігрупа, група, не менш важливою конкретною алгеброю є кільце.

Означення 3.1.1. *Алгебра $\mathcal{K} = (K; +, \cdot)$ типу $(2, 2)$ називається **кільцем**, якщо виконуються такі умови:*

а) алгебра $(K; +)$ є абелевою групою;

б) алгебра $(K; \cdot)$ є півгрупою;

в) операція $\cdot$ множення дистрибутивна відносно операції $+$ додавання, тобто виконуються співвідношення

$$(\forall a, b, c \in K)(a(b + c) = ab + ac) - \textit{ліва дистрибутивність};$$
$$(\forall a, b, c \in K)((b + c)a = ba + ca) - \textit{права дистрибутивність}.$$

Наведені умови а) — в) також називають **аксіомами кільця**.

Означення 3.1.2. *Абелева група $(K; +)$ кільця $\mathcal{K}$ називається **адитивною групою цього кільця**, нейтральний елемент $0 \in K$ якої називають **нулем кільця**, а півгрупа $(K; \cdot)$ називається **мультиплікативною півгрупою** цього кільця $\mathcal{K}$; якщо ця півгрупа містить нейтральний елемент $e \in K$, то його називають **одиницею кільця** $\mathcal{K}$.*

Означення 3.1.3. *Кільце називається **нульовим**, якщо воно містить лише один елемент.*

Відмітимо, що кільце завжди володіє нулем, а одиницю кільце не обов'язково містить, тобто є як кільця з одиницею, так і без одиниці (приклади кілець наведені нижче).

Означення 3.1.4. *Кільце називається комутативним, якщо операція множення в цьому кільці комутативна, тобто* $(\forall a, b \in \in K)(ab = ba)$.

Означення 3.1.5. *Елементи кільця називаються* ***дільниками нуля****, якщо вони не рівні нулю кільця, а їх добуток рівний цьому нулю.*

Означення 3.1.6. *Кільце* $\mathcal{K}$ *називається* ***областю цілісності****, якщо воно комутативне, містить не менше двох елементів і не має дільників нуля, тобто*

$$(\forall a, b \in K)(a, b \neq 0 \to ab \neq 0).$$

2. Введемо поняття підкільця та ідеала кільця.

Означення 3.1.7. *Підмножина* $H \subset K$ *кільця* $\mathcal{K} = (K; +, \cdot)$ *називається* ***підкільцем цього кільця*** $\mathcal{K}$*, якщо алгебра* $(H; +, \cdot)$ *теж є кільцем відносно операцій кільця.*

Можна довести такий критерій того, щоб непорожня підмножина $H \subset K$ кільця $\mathcal{K}$ була його підкільцем.

Теорема 3.1.1. *Якщо* $H \subset K$ *— непорожня підмножина кільця* $\mathcal{K} = (K; +, \cdot)$*, то* H *є його підкільцем тоді і тільки тоді, коли ця підмножина замкнута відносно додавання і множення цього кільця, і з кожним елементом* $h \in H$ *ця підмножина* H *містить протилежний йому елемент* $-h$*, тобто виконується співвідношення*

$$(\forall g, h \in G)(g, h \in H \to g + h, gh, -g \in H). \qquad (3.1.1)$$

На мові підмножини і глобальних операцій це співвідношення можна подати у вигляді включень

$$H + H \subset H;$$
$$H \cdot H \subset H;$$
$$-H \subset H,$$

де $H + H \overset{df}{=} \{g + h | g, h \in H\}$, $-H \overset{df}{=} \{-h | h \in H\}$, $H \cdot H \overset{df}{=} \{gh | g, h \in H\}$.

Очевидно, що довільне кільце $\mathcal{K} = (K; +, \cdot)$ містить такі **тривіальні підкільця**, як:

- **нульове підкільце** $\{0\}$, яке містить лише нуль 0 кільця $\mathcal{K}$, — це „найменше“ підкільце, оскільки міститься у будь-якому підкільці;

- підкільце $\mathcal{K}$ — це все кільце $\mathcal{K}$, яке, зрозуміло, є „найбільшим“ підкільцем, оскільки містить будь-яке підкільце кільця $\mathcal{K}$.

Нетривіальні підкільця кільця іноді називають **власними підкільцями**.

Справедлива наступна теорема:

Теорема 3.1.2. *Перетин довільні сімї підкілець кільця є його підкільце, тобто якщо $(\mathcal{H}_i)_{i\in I}$ — сім'я підкілець кільця $\mathcal{K} = (K;+,\cdot)$, то $\mathcal{H} = \bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{H}_i$ — підкільце кільця $\mathcal{K}$.*

Означення 3.1.8. *Підмножина $I \subset K$ кільця $\mathcal{K} = (K;+,\cdot)$ називається **лівим (правим) ідеалом цього кільця**, якщо ця підмножина $I \subset K$ є підгрупою адитивної групи $(K;+)$ і лівим (правим) ідеалом мультиплікативної півгрупи $(K;\cdot)$ цього кільця $\mathcal{K}$, і називається **ідеалом або, говорять, двостороннім ідеалом**, якщо ця підмножина $I \subset K$ є одночасно і лівим, і правим ідеалом цього кільця $\mathcal{K}$.*

Очевидно, що довільне кільце $\mathcal{K} = (K;+,\cdot)$ містить такі **тривіальні ідеали**, як:

- **нульовий ідеал** $\{0\}$, який містить лише нуль $0 \in K$ кільця $\mathcal{K}$ — це „найменший“ ідеал;

- ідеал K — це все кільце $\mathcal{K}$, яке є, зрозуміло, „найбільшим“ ідеалом.

Інші ідеали, які відмінні від тривіальних ідеалів, називають **власними ідеалами кільця**. Легко бачити, що довільний ідеал (як односторонній, тобто лівий або правий, так і двосторонній) є підкільцем кільця. Має місце також наступна теорема про перетин ідеалів, аналогічна теоремі 3.1.2.

Теорема 3.1.3. *Перетин довільної сім'ї ідеалів того чи іншого типу кільця є його ідеалом того ж самого типу, тобто, якщо*

$(I_j)_{j\in J}$ — сім'я лівих (правих, двосторонніх) ідеалів кільця $\mathcal{K} = (K;+,\cdot)$, то і їх перетин $I = \bigcap\limits_{j\in J} I_j$ є лівим (правим, двостороннім) ідеалом цього кільця $\mathcal{K}$.

Відмітимо, що для комутативного кільця поняття лівого, правого, двостороннього ідеалів співпадають. На мові глобальних операцій кільця і підмножин те, що непорожня підмножина $I \subset K$ кільця $\mathcal{K} = (K;+,\cdot)$ є його двостороннім ідеалом, можна подати у вигляді таких включень:

$$I + I \subset I;$$
$$-I \subset I;$$
$$KI \cup IK \subset I.$$

На елементарному рівні, тобто на мові елементів, ці включення можна подати у вигляді такого співвідношення:

$$(\forall g, i_1, i_2 \in K)(i_1, i_2 \in I \to i_1 + i_2,\ -i_1,\ gi_1, i_1 g \in I). \quad (3.1.2)$$

Самостійно доведіть рівносильність вказаних включень із цим співвідношенням.

3. Наведемо приклади конкретних кілець, підкілець та ідеалів по аналогії з тим, як це було зроблено у випадку півгруп, квазігруп, груп, не вдаючись в детальні дослідження.

1. $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z};+,\cdot)$ — комутативне кільце цілих чисел з одиницею 1, яке очевидно є областю цілісності.

2. $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q};+,\cdot)$ — комутативне кільце раціональних чисел з одиницею 1, яке теж є областю цілісності.

3. $\mathcal{Q}[\sqrt{2}] = (Q[\sqrt{2}];+,\cdot)$ — комутативне кільце дійсних чисел виду $a + b\sqrt{2}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$, з одиницею 1, яке теж є областю цілісності.

4. $\mathcal{R} = (\mathbb{R};+,\cdot)$ — комутативне кільце всіх дійсних чисел з одиницею 1, яке теж є областю цілісності.

5. Очевидно, що:

   $\mathcal{Z}$ — підкільце кільця $\mathcal{Q}$;

   $\mathcal{Q}$ — підкільце кільця $\mathcal{Q}[\sqrt{2}]$;

   $\mathcal{Q}[\sqrt{2}]$ — підкільце кільця $\mathcal{R}$.

6. Множина $2Z = \{2z | z \in \mathbb{Z}\}$ всіх парних цілих чисел є очевидно ідеалом без одиниці комутативного кільця $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ цілих чисел.

7. $\mathcal{F}^R = (F^R; +, \cdot)$ — комутативне кільце всіх дійсних функцій, заданих на множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел, з одиницею, для яких операції додавання та множення задані такими рівностями:

$$(\forall x \in \mathbb{R})((f+g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) + g(x));$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})((f \cdot g)(x) \stackrel{df}{=} f(x) \cdot g(x)).$$

   Легко бачити, що нулем цього кільця є функція $0(x)$, яка визначається співвідношенням $(\forall x \in \mathbb{R})(0(x) \stackrel{df}{=} 0)$, а одиницею кільця є функція $e(x)$, яка задана співвідношенням $(\forall x \in \in \mathbb{R})(e(x) \stackrel{df}{=} 1)$. Неважко помітити, що це кільце має дільники нуля і тому не є областю цілісності (**самостійно дослідіть це**).

8. $\mathcal{P}(A) = (P(A \times A); \cup, \circ)$ — некомутативне кільце всіх однорідних бінарних відношень між елементами множини A, де $P(A \times A) \stackrel{df}{=} \{f | f \subset A \times A\}$, з одиницею, для яких операцією додавання є об'єднання бінарних відношень, а операцією множення є композиція бінарних відношень; роль одиниці грає тотожне відношення Δ_A, яке визначається рівністю $(\forall a \in \in A)(\Delta_A(a) \stackrel{df}{=} a)$, а роль нуля — порожнє бінарне відношення $\varnothing$. Легко бачити, що це кільце має дільники нуля і, отже, не є областю цілісності.

9. $\mathcal{Z}_4 = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus, \odot)$ — комутативне кільце остач цілих чисел при діленні на 4, де дії додавання $\oplus$ і множення $\odot$ можна задати таблицями Келі:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

У цьому кільці нулем є 0, одиницею — 1, протилежними елементами до 0, 1, 2, 3 є відповідно 0, 3, 2, 1. Це кільце не є областю цілісності, оскільки, що видно з другої таблиці Келі, $2 \odot 2 = 0$ і $2 \neq 0$, тобто 2 є дільником нуля 0.

3.2 Найпростіші властивості кілець

1. Як і для випадку груп, відмітимо лише ті найпростіші властивості, що безпосередньо випливають з самого означення кільця.

Нехай $\mathcal{K} = (K; +, \cdot)$ — кільце. Оскільки відповідна йому алгебра $(K; +)$ з операцією додавання $+$ є абелевою адитивною групою цього кільця, то всі найпростіші властивості абелевої групи мають місце і для даного кільця. Тому справедлива наступна теорема.

Теорема 3.2.1. *Якщо алгебра $\mathcal{K} = (K; +, \cdot)$ — кільце, то*

1. Нульовий елемент цього кільця єдиний.

2. Операція додавання скоротна:

$$(\forall x, a, b \in K)(x + a = x + b \to a = b) \text{ — ліва скоротність;}$$
$$(\forall x, a, b \in K)(a + x = b + x \to a = b) \text{ — права скоротність.}$$

3. Для кожного елемента кільця $a \in K$ існує єдиний протилежний елемент $-a \in K$ такий, що $-a + a = a + (-a) = 0$.

4. Для довільних елементів $a, b \in K$ кільця $\mathcal{K}$ рівняння $a+x = b$, $y + a = b$ мають єдиний розв'язок відносно невідомих x, y такий, що

$$x = y = b + (-a) = (-a) + b.$$

5. Для довільного елемента $a \in \mathcal{K}$ кільця $\mathcal{K}$ має місце рівність $-(-a) = a$.

6. Для довільних елементів $a, b \in K$ кільця $\mathcal{K}$ протилежним елементом $-(a+b)$ до їх суми $(a+b)$ є сума $(-a)+(-b)$ відповідних їм протилежних елементів, тобто $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Доведення перелічених властивостей 1 — 6 в теоремі випливає з відповідного доведення аналогічних властивостей групи, відмічених в пункті 2.5.

На основі теореми 3.2.1 можна в кільці $\mathcal{K}$ ввести нову допоміжну дію — **дію віднімання** $-$, а саме:

Означення 3.2.1. *Різницею $b-a$ двох довільних елементів $b, a \in K$ називається сума $b+(-a)$ елемента b і протилежного елемента $-a$ до елемента a, тобто щоб від елемента b відняти елемент a, треба до цього елемента b додати протилежний елемент $(-a)$:*

$$b-a \stackrel{df}{=} b+(-a).$$

2. Оскільки кільце має і ряд нових аксіом в порівнянні з аксіомами групи (дивись означення кільця, сторінка 62), то для кільця мають місце ряд нових властивостей в порівнянні з властивостями групи. Деякі з найпростіших нових властивостей відмітимо в наступній теоремі.

Теорема 3.2.2. *В кільці $\mathcal{K}=(K;+,\cdot)$ мають місце такі нові властивості:*

1. В кільці $\mathcal{K}$ не може бути більше однієї одиниці.

2. Нуль 0 кільця $\mathcal{K}$ є поглинаючим елементом відносно операції множення, тобто для довільного елемента $a \in \mathcal{K}$ справедливі рівності $0a = a0 = 0$.

3. Для довільних елементів $a, b \in K$ виконуються наступні рівності, пов'язані з протилежними до цих елементів елементами:

$$(-a)b = a(-b) = -(ab);$$
$$(-a)(-b) = ab.$$

4. Операція множення дистрибутивна відносно віднімання:

$$(a-b)c = ac - bc;$$
$$c(a-b) = ca - cb,$$

де $a, b, c \in K$ — довільні елементи кільця $\mathcal{K}$.

5. Якщо $\mathcal{K}$ — область цілісності, то дія множення скоротна на ненульові елементи, тобто виконуються співвідношення:

$$(\forall a, b, c \in K)(a \neq 0 \wedge ab = ac \rightarrow b = c) \text{ — ліва скоротність;}$$
$$(\forall a, b, c \in K)(a \neq 0 \wedge ba = ca \rightarrow b = c) \text{ — права скоротність.}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{K} = (K; +, \cdot)$ — кільце.

1. Те, що одиничних елементів в кільці не може бути більше одного, доводиться аналогічно тому, як це було доведено на сторінці 46 для групи.

2. Нехай $a \in K$ — довільний елемент кільця $\mathcal{K}$. З теореми 3.2.1 (сторінка 67) відомо, що рівняння виду $x + b = b$, де $b \in K$ — довільний елемент кільця $\mathcal{K}$, має єдиний розв'язок — нуль 0 цього кільця. Тому і рівняння $x + 0a = 0a$ теж має єдиний розв'язок — $x = 0$ — нуль цього кільця. Але очевидно, що в ролі x можна взяти і $0a$, бо виконуються такі рівності: $0a + 0a = (0+0)a = 0a$, звідки, в силу єдиності розв'язку рівняння $x+0a = 0a$, отримаємо $x = 0 = 0a$, тобто виконується рівність $0a = 0$. Аналогічно доводиться рівність $a0 = 0$.

3. Очевидно, що $ab+(-a)b = (a+(-a))b = 0b = 0$ і $ab+(-(ab)) = 0$, звідки, в силу єдиності розв'язку рівняння $ab+t = 0$, отримаємо $(-a)b = -(ab)$. Аналогічно доводиться і рівність $x(-y) = -(xy)$. Тоді рівність $(-a)(-b) = ab$ отримаємо як наслідок з рівностей $(-a)b = a(-b) = -(ab)$. Дійсно, $(-a)(-b) = a(-(-b)) = ab$, де використано рівність $-(-b) = b$ з теореми 3.2.1.

4. $(a - b)c = (a + (-b))c = ac + (-b)c = ac + (-(bc)) = ac - bc$; аналогічно доводиться і ліва дистрибутивність: $c(a - b) = ca - cb$.

5. Нехай $\mathcal{K}$ — область цілісності і $a \neq 0$, $ab = ac$. Тоді маємо $ab - ac = a(b - c) = 0$, що дає $b - c = 0$, тобто $b = c$. Аналогічно з рівності $ba = ca$, де $a \neq 0$, отримаємо $b = c$ ■

3.3 Гомоморфізм, ізоморфізм кілець

1. Гомоморфізм, ізоморфізм кілець вводяться аналогічно тому, як вони вводилися для півгруп, груп, квазігруп.

Нехай $\mathcal{K}_1 = (K_1; +_1, \cdot_1)$, $\mathcal{K}_2 = (K_2; +_2, \cdot_2)$ — кільця.

Означення 3.3.1. *Відображення $f : K_1 \overset{в(на)}{\longrightarrow} K_2$ називається* ***гомоморфізмом кільця*** $\mathcal{K}_1$ ***в (на) кільце*** $\mathcal{K}_2$*, якщо це відображення f „узгоджується“ з відповідними операціями $+_1, \cdot_1$ в $\mathcal{K}_1$ і*

$+_2, \cdot_2$ в $\mathcal{K}_2$, тобто для будь-яких елементів $g, h \in K_1$ виконуються рівності

$$f(g +_1 h) = f(g) +_2 f(h);$$
$$f(g \cdot_1 h) = f(g) \cdot_2 f(h),$$

про які іноді говорять так: образи $f(g +_1 h)$, $f(g \cdot_1 h)$ від суми $g +_1 h$ і добутку $g \cdot_1 h$ над елементами $g, h \in K_1$ відповідно рівні сумі $f(g) +_2 f(h)$ і добутку $f(g) \cdot_2 f(h)$ образів $f(g), f(h) \in K_2$ цих елементів $g, h \in K_1$.

Зауважимо, що гомоморфізм кільця $\mathcal{K}_1$ на кільце $\mathcal{K}_2$ іноді називають **епіморфізмом $\mathcal{K}_1$ на $\mathcal{K}_2$**.

Означення 3.3.2. *Гомоморфізм f кільця $\mathcal{K}_1$ в (на) кільце $\mathcal{K}_2$ називається* ***ізоморфізмом*** *$\mathcal{K}_1$ в (на) $\mathcal{K}_2$, якщо f є взаємно однозначним відображенням множини K_1 в (на) множину K_2.*

Зауважимо, що гомоморфізм кільця в себе іноді називають **ендоморфізмом кільця**, а ізоморфізм кільця на себе називають **автоморфізмом кільця**.

Позначення $\mathcal{K}_1 \cong \mathcal{K}_2$ для кілець $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ означає, що ці кільця ізоморфні між собою.

2. Відмітимо, що відношення гомоморфізму, ізоморфізму між кільцями мають властивості, аналогічні тим, які мають місце для півгруп, груп (див. пункт 2.6), а саме:

1. Відношення гомоморфізму між кільцями є відношенням квазіпорядку.

2. Відношення ізоморфізму між кільцями є відношенням еквівалентності.

3. Відношення ізоморфізму між кільцями є частинним випадком відношення гомоморфізму між ними, тобто якщо між кільцями встановлено ізоморфізм, то цей ізоморфізм є одночасно і гомоморфізмом.

4. Ендоморфізм, епіморфізм кілець є частинними випадками гомоморфізму кілець, а автоморфізм — частинним випадком ізоморфізму кілець.

5. Якщо f — гомоморфізм кільця $\mathcal{K}_1 = (K_1; +_1, \cdot_1)$ в кільце $\mathcal{K}_2 = (K_2; +_2, \cdot_2)$, то образ $f(K_1) \overset{df}{=} \{f(a) | a \in K_1\} \subset K_2$ кільця

$\mathcal{K}_1$ цього гомоморфізму є така підмножина кільця $\mathcal{K}_2$, що $f(K_1)$ є підкільцем кільця $\mathcal{K}_2$, в якому образ $f(0_1)$ нуля 0_1 кільця $\mathcal{K}_1$ є нулем в $f(K_1)$, образ $f(e_1)$ одиниці e_1 кільця $\mathcal{K}_1$ є одиницею в $f(K_2)$, а образ $f(-_1a)$ протилежного елемента $-_1a \in K_1$ до елемента $a \in K_1$ є протилежним елементом до образа $f(a)$ елемента $a \in K_1$, тобто $f(-_1a) = -_2f(a)$ так, що коли $a +_1 (-_1a) = (-_1a) +_1 a = 0_1$, то $f(-_1a) +_2 f(a) = f(a) +_2 f(-_1a) = f(0_1)$ і $f(a) +_2 f(0_1) = f(0_1) +_2 f(a) = f(a)$ для будь-якого елемента $a \in K_1$.

3. Розглянемо деякі приклади гомоморфізму, ізоморфізму кілець.

1. Нульове відображення $0 : K_1 \longrightarrow K_2$, задане рівністю $0(a) \overset{df}{=} 0_2$ для довільного елемента $a \in K_1$, є гомоморфізм кільця $\mathcal{K}_1 = (K_1; +_1, \cdot_1)$ в кільце $\mathcal{K}_2 = (K_2; +_2, \cdot_2)$ з нулем 0_2, який називається **нульовим гомоморфізмом**; очевидно, що образ $0(K_1) = \{0_2\}$ — це нульове підкільце кільця $\mathcal{K}_2$.

2. Тотожне відображення $\Delta_K : K \longrightarrow K$ кільця $\mathcal{K} = (K; +, \cdot)$ на себе, задане рівністю $\Delta_K(a) \overset{df}{=} a$ для довільного елемента $a \in K$, є автоморфізмом цього кільця $\mathcal{K}$, який називається **тотожним** або **одиничним** автоморфізмом цього кільця.

3. Відображення $h : \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{на}} \{0, 1, 2, 3\}$, задане рівністю $h(z) \overset{df}{=} r_4$ — це остача від ділення цілого числа z на 4, легко бачити, є епіморфізмом комутативного кільця $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ цілих чисел на комутативне кільце $\mathcal{Z}_4 = (\{0, 1, 2, 3\}; \oplus, \odot)$ остач цілих чисел при діленні на 4.

3.4 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Яка алгебра називається кільцем?

2. Який тип має кільце?

3. Що таке адитивна група кільця?

4. Що таке мультиплікативна півгрупа кільця?

5. Яке кільце називають нульовим?

6. Що таке нуль кільця?

7. Що таке одиниця кільця?
8. Чи всяке кільце має одиницю?
9. Яке кільце називається комутативним?
10. Що таке дільники нуля в кільці?
11. Яке кільце називається областю цілісності?
12. Наведіть приклади кільця.
13. Наведіть приклади комутативних, некомутативних кілець.
14. Наведіть приклади області цілісності.
15. Наведіть приклади кілець з одиницею, без одиниці.
16. Скільки нулів може мати кільце? Поясніть це.
17. Скільки одиниць може мати кільце? Поясніть це.
18. Що таке підкільце кільця?
19. Які підкільця кільця називаються тривіальними?
20. Чи може кільце мати єдине тривіальне кільце?
21. Наведіть приклади нетривіальних, тобто власних підкілець кільця.
22. Сформулюйте критерій того, що підмножина кільця є його підкільцем.
23. Коли кільце матиме власні підкільця? Поясніть свою відповідь.
24. Чи завжди перетин сім'ї підкілець кільця є його підкільцем? Обґрунтуйте відповідь.
25. Що собою представляє найбільше підкільце, яке міститься в усіх підкільцях даної сім'ї підкілець?
26. Чи може бути перетин усіх підкілець даного кільця порожнім? Обґрунтуйте відповідь і вкажіть цей перетин.

27. Яка підмножина кільця називається лівим, правим, одностороннім ідеалом?

28. В яких випадках всі ліві та праві ідеали кільця співпадають?

29. Яка підмножина кільця називається двостороннім ідеалом цього кільця?

30. Які Ви знаєте тривіальні ідеали кільця?

31. Які ідеали кільця називаються власними ідеалами?

32. Чи завжди перетин сім'ї односторонніх чи двосторонніх ідеалів є відповідно одностороннім чи двостороннім ідеалом?

33. Поясніть, чому ідеал того чи іншого виду обов'язково є підкільцем кільця?

34. При яких умовах кільце містить лише тривіальні ідеали?

35. Коли кільце матиме власні ідеали того чи іншого виду? Обґрунтуйте відповідь.

36. Запишіть на елементарному рівні співвідношення, які вказують на те, що дана підмножина кільця є його підкільцем.

37. Запишіть на глобальному рівні співвідношення, які вказують на те, що дана підмножина кільця є його підкільцем.

38. Запишіть елементарні співвідношення, які вказують на те, що дана підмножина є

    а) лівим ідеалом;

    б) правим ідеалом;

    в) двостороннім ідеалом кільця.

39. Запишіть на глобальному рівні співвідношення, які вказують на те, що дана підмножина є

    а) лівим ідеалом;

    б) правим ідеалом;

    в) двостороннім ідеалом кільця.

40. Сформулюйте критерій того, що підмножина кільця є його

    а) лівим ідеалом;

    б) правим ідеалом;

    в) двостороннім ідеалом.

41. Наведіть приклади власних лівих ідеалів, правих ідеалів, двосторонніх ідеалів кільця.

42. Що таке нульове підкільце, нульовий ідеал кільця?

43. Скільки нулів може мати кільце? Поясніть свою відповідь.

44. Скільки одиниць може мати кільце? Обґрунтуйте відповідь.

45. Чи кожен елемент кільця має протилежний елемент? Обґрунтуйте відповідь.

46. Як знайти розв'язки рівняння виду $a + x = b$, $y + a = b$, де a, b — довільні задані елементи кільця? Скільки таких розв'язків мають ці рівняння? Вкажіть їх вигляд.

47. Як вводиться операція віднімання в кільці?

48. Обґрунтуйте рівності $-(-a) = a$, $-(a + b) = (-a) + (-b)$, де a, b — довільні елементи кільця.

49. Доведіть рівності $0a = a0 = 0$, де a — довільний елемент кільця, а 0 — його нуль.

50. Доведіть, що операція множення в кільці дистрибутивна відносно віднімання.

51. Поясніть, чому операція множення скоротна як зліва, так і справа на ненульові елементи області цілісності.

52. Яке відображення називається гомоморфізмом одного кільця в інше кільце?

53. Що таке епіморфізм кілець?

54. Яке відображення називається ізоморфізмом одного кільця в інше кільце?

55. Коли говорять, що кільця між собою ізоморфні, та як позначають ізоморфні між собою кільця?

56. Що таке ендоморфізм кільця?

57. Що таке автоморфізм кільця?

58. Чи можна вважати, що ізоморфізм кілець є частинним випадком гомоморфізму, епіморфізму кілець? Обґрунтуйте свою відповідь.

59. Поясніть, чому відношення гомоморфізму, епіморфізму кілець є відношенням квазіпорядку.

60. Поясніть, чому відношення ізоморфізму між кільцями є відношенням еквівалентності.

61. Який гомоморфізм кілець називають нульовим?

62. Що таке тотожний, одиничний автоморфізм кільця?

63. Наведіть приклади гомоморфізму, епіморфізму кілець.

64. Наведіть приклади ізоморфізму, автоморфізму кілець.

65. Поясніть, чому образ $f(K_1)$ кільця $\mathcal{K}_1 = (K_1; +_1, \cdot_1)$ є підкільцем кільця $\mathcal{K}_2 = (K_2; +_2, \cdot_2)$, якщо f — гомоморфізм кільця $\mathcal{K}_1$ в кільце $\mathcal{K}_2$. Дослідіть при цьому, чи нуль цього підкільця співпадає з нулем кільця $\mathcal{K}_2$.

66. Аналогічне питання до попереднього з тією лише різницею, що f — ізоморфізм кільця $\mathcal{K}_1$ в кільце $\mathcal{K}_2$.

67. З'ясувати, які з заданих числових множин утворюють кільця відносно операцій додавання та множення чисел:

    а) $6Z = \{6z \mid z \in \mathbb{Z}\}$;

    б) $Z[\sqrt{5}] = \{k + l\sqrt{5} \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$;

    в) $\left\{ \frac{k}{3^l} \middle| k \in \mathbb{Z} \wedge l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$;

    г) $\{4^k | k \in \mathbb{Z}\}$;

д) $Q[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

е) $Z[\sqrt[3]{2}] = \{m + n\sqrt[3]{2} | m, n \in \mathbb{Z}\}$;

є) $3Z = \{3z | z \in \mathbb{Z}\}$;

ж) $\left\{ \dfrac{k}{2l-1} \middle| k \in \mathbb{Z} \wedge l \in \mathbb{N} \right\}$;

з) $\left\{ \dfrac{k}{2l} \middle| k \in \mathbb{Z} \wedge l \in \mathbb{N} \cup \left\{ \dfrac{1}{2} \right\} \right\}$;

и) $\left\{ \dfrac{k}{p^l} \middle| k \in \mathbb{Z} \wedge l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge p - \text{фіксоване просте число} \right\}$.

З'ясувати, чи є серед них кільця з одиницею. Вказати такі пари кілець, у яких одне з них є власним підкільцем другого з них. Які з них є областями цілісності?

68. В адитивній групі $(\mathbb{R}; +)$ задана така операція множення $*$: $a * b \overset{df}{=} a$. Дослідити, чи алгебра $(\mathbb{R}; +, *)$ є кільцем. Які вона має особливості?

69. Вияснити, чи множини $Z[x], R[x]$ всіх многочленів з цілими коефіцієнтами і відповідно дійсними коефіцієнтами відносно операцій додавання і множення многочленів є кільцями. Які особливості мають вони?

70. * Який вигляд мають підкільця та ідеали в кільцях: а) $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$; б) $(Z[x]; +, \cdot)$; в) $(R[x]; +, \cdot)$?

71. На множині $Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ всіх остач від ділення цілих чисел на 6 задані операції: $\oplus$ — додавання і $\odot$ — множення, де $a \oplus b$ — це остача від ділення $a + b$ на 6, а $a \odot b$ — це остача від ділення ab на 6. Складіть таблиці Келі для цих операцій та покажіть, що в результаті алгебра $(Z_6; \oplus, \odot)$ є комутативним кільцем з одиницею. З'ясуйте, чи є воно областю цілісності. Знайдіть всі його підкільця та ідеали.

72. З'ясувати, чи задають ізоморфізм відповідних числових кілець такі відображення:

а) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow Z[\sqrt{3}]$, де $f(k) \overset{df}{=} -k$;

б) $f : Z[\sqrt{2}] \longrightarrow Z[\sqrt{3}]$, де $f(k + l\sqrt{2}) \overset{df}{=} k + l\sqrt{3}$;

в) $f : 4Z \longrightarrow 8Z$, де $f(4k) \stackrel{df}{=} 8k,\ k \in Z$;

г) $f : 6Z \longrightarrow 3Z$, де $f(6k) \stackrel{df}{=} 3k,\ k \in Z$.

73. Задати гомоморфізм кільця цілих чисел на кільце:

    а) $(Z_5; \oplus; \odot)$ остач від ділення цілих чисел на 5;

    б) $(Z_6; \oplus; \odot)$ остач від ділення цілих чисел на 6.

74. Задати гомоморфізм кільця $(Z[x]; +, \cdot)$ многочленів з цілими коефіцієнтами на кільце $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ цілих чисел.

75. Довести, що в кільці з n елементів виконується рівність $\underbrace{a + a + ... + a}_{n} = 0$, де a — довільний елемент кільця.

76. Нехай для довільного елемента a кільця виконується рівність $a^2 = a$. Довести, що це кільце антикомутативне.

77. Довести, що в комутативному кільці виконуються рівності: $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, де $m, n \in \mathbb{N}$; a, b — довільні елементи кільця.

78. Довести, що в комутативному кільці виконується формула бінома Ньютона: $(a + b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, де $C_n^k \stackrel{df}{=} \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$; a, b — довільні елементи кільця.

79. Довести, що алгебра $(\mathbb{Z}; \oplus, *)$ з бінарними операціями $a \oplus b \stackrel{df}{=} a + b + 1$, $\quad a * b \stackrel{df}{=} a + b + ab$ є комутативним кільцем з одиницею.

3.5 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

67. а), б), в), д), є), ж), з), и) — кільця; серед них б), в), д), ж), з), и) — кільця з одиницею 1; всі наведені приклади кілець є областями цілісності, підкільця: $6Z \subset$ $\subset 3Z \subset \left\{ \dfrac{k}{pl} \middle| k \in \mathbb{Z} \wedge l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge p \text{ — фіксоване просте число} \right\} \subset$ $\subset \left\{ \dfrac{k}{2l-1} \middle| k \in \mathbb{Z} \wedge l \in \mathbb{N} \right\} \subset Q[\sqrt{5}]$;

$3Z \subset \left\{ \dfrac{k}{2l} \middle| k \in \mathbb{Z} \wedge l \in \mathbb{N} \cup \left\{ \dfrac{1}{2} \right\} \right\}$; $\quad 3Z \subset Z[\sqrt{5}] \subset Q[\sqrt{5}]$.

68. Алгебра $(\mathbb{R}; +, *)$ володіє всіма властивостями кільця за виключень лівої дистрибутивності множення $*$ відносно додавання $+$.

69. Обидві множини $Z[x]$, $R[x]$ відносно вказаних операцій є кільцями, причому областями цілісності; $Z[x] \subset R[x]$.

70. а) в кільці $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ всі підкільця та ідеали мають вигляд підмножини виду kZ, де $k \in \mathbb{Z}$.

71.

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\odot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

З таблиць бачимо, що алгебра $(Z_6; \oplus, \odot)$ є комутативним кільцем з одиницею 1, яке не є областю цілісності, оскільки містить дільники нуля 0: 2 і 3, 3 і 4;
підкільце: $\{0\}; Z_6; \{0,\ 3\};\ \{0,\ 2,\ 4\}$;
ідеали: $\{0\}; Z_6; \{0,\ 3\};\ \{0,\ 2,\ 4\}$.

72. Ні.

73.

а) $f(5k+r) = r$, де $k \in \mathbb{Z}$; $r = 0, 1, 2, 3, 4$;

б) $f(6k+r) = r$, де $k \in \mathbb{Z}; r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

74. $f(p(x)) = p(0)$, де $f : Z[x] \xrightarrow{df} Z$ — відображення $Z[x]$ на Z , $p(x) \in Z[x]$ — многочлен з цілими коефіцієнтами.

75. **Вказівка**. Використати будову скінченної циклічної групи.

76. **Вказівка**. Використати рівність $(a + b)^2 = a + b$, де a, b — довільні елементи ідемпотентного кільця.

77. **Вказівка**. Використати асоціативність та комутативність операції комутативного кільця.

78. **Вказівка**. Формула бінома Ньютона для елементів кільця доводиться аналогічно тому, як вона доводиться для чисел в шкільній алгебрі.

79. **Вказівка**. Для доведення слід використати відповідні аксіоми комутативного кільця з одиницею та властивості додавання та множення цілих чисел.

4 Найпростіші поняття про поля

1. Означення поля, підполя; приклади.
2. Найпростіші властивості полів.
3. Поняття гомоморфізму, ізоморфізму полів.
4. Поняття для самоперевірки засвоєння знань та вправи.
5. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

4.1 Означення поля, підполя; приклади

1. Як було відмічено в попередньому параграфі, кільця володіють двома основними операціями — додаванням і множенням, причому множення дистрибутивне відносно додавання. А оскільки відносно додавання кільце є адитивною групою, то до дії додавання вводиться, говорять, обернена дія — віднімання, яка виражається через додавання. Тому виникає питання про введення та дослідження кілець, у яких можна було би ввести дію, обернену до дії множення — говорять, — дію ділення, яка очевидно не для всякого кільця має місце (розгляньте хоча би, наприклад, кільце цілих чисел, в якому не для всяких цілих чисел виконується ділення). В результаті ми приходимо до поняття поля, яке відіграє надзвичайно важливу роль як в самій математиці, так і в її застосуваннях.

Означення 4.1.1. *Алгебра $\mathcal{P} = (P; +, \cdot)$ типу $(2, 2)$ називається* ***полем****, якщо її операції мають такі властивості (говорять, аксіоми):*

1. Алгебра $(P; +)$ є адитивною абелевою групою з нейтральним елементом – нулем $0 \in P$.

2. Алгебра $(P \setminus \{0\}; \cdot)$ є мультиплікативною абелевою групою з нейтральним елементом — одиницею $e \in P \setminus \{0\}$.

3. Операція множення $\cdot$ дистрибутивна відносно операції додавання $+$.

Безперечно, що поле є частинним випадком кільця. Тому, опираючись на означення кільця, дамо таке рівносильне означення поля.

Означення 4.1.2. *Полем називається таке комутативне кільце $\mathcal{P} = (P; +; \cdot)$ з одиницею $e \in P$, відмінною від нуля $0 \in P$*

цього кільця, що кожен його ненульовий елемент $p \in P$ оборотний відносно множення, тобто задовольняє співвідношення

$$(\forall p \in P \setminus \{0\})(\exists p^* \in P)(pp^* = p^*p = e), \qquad (4.1.1)$$

де елемент p^* називається оберненим до елемента p і позначають p^{-1}, тобто $p^{-1} \overset{df}{=} p^*$.

Відмітимо, що нуль $0 \in P$ та одиницю $e \in P$ такого комутативного кільця $\mathcal{P}$ називають відповідно **нулем** і **одиницею** поля $\mathcal{P}$, причому обов'язково $0 \neq 1$. Зауважимо також, що в силу введених означень нуль $0 \in P$ — це єдиний необоротний елемент поля $\mathcal{P}$.

2. Введемо поняття підполя поля.

Означення 4.1.3. *Підмножина $H \subset P$ поля $\mathcal{P} = (P; +, \cdot)$ називається **підполем цього поля** $\mathcal{P}$, якщо алгебра $(H; +, \cdot)$ відносно цих самих операцій $+$, $\cdot$ є теж полем.*

Зауважимо, що іноді саме **поле** $mathcalP$ **називається розширенням свого підполя**.

Відмітимо, що як і у випадку підкільця має місце наступний критерій того, щоб підмножина поля була його підполем.

Теорема 4.1.1. *Якщо $H \subset P$ — непорожня підмножина поля $\mathcal{P} = (P; +; \cdot)$, яка містить хоча би два елементи, то H є підполем цього поля $\mathcal{P}$ тоді і тільки тоді, коли H замкнута відносно додавання і множення поля, з кожним елементом $h \in H$ містить протилежний елемент $-h$, а з кожним ненульовим елементом $g \in H$ містить обернений елемент g^{-1}, тобто виконується співвідношення*

$$\begin{aligned}(\forall g, h, q \in P)(g, h, q \in H \wedge q \neq 0 \to \\ \to g + h, gh, -h, q^{-1} \in H).\end{aligned} \qquad (4.1.2)$$

На мові підмножин і глобальних операцій це співвідношення (4.1.2) можна зобразити у вигляді включень:

$$\begin{gathered} H + H \subset H; \\ HH \subset H; \\ -H \subset H; \\ H^{-1} \subset H, \end{gathered}$$

де $-H \stackrel{df}{=} \{-h \mid h \in H\}$; $H^{-1} \stackrel{df}{=} \{h^{-1} | h \in H \setminus \{0\}\}$.

Очевидно, що довільне поле $\mathcal{P} = (P; +, \cdot)$ містить такі **тривіальні підполя**, як:

- одиничне підполе $\{0, e\}$, яке містить лише нуль 0 і одиницю e поля $\mathcal{P}$ — це „найменше“ підполе, оскільки воно міститься в будь-якому підполі даного поля $\mathcal{P}$;
- підполе $\mathcal{P}$ — це все поле $\mathcal{P}$, яке, зрозуміло, є „найбільшим“ підполем, оскільки містить будь-яке підполе поля $\mathcal{P}$.

Всі інші підполя, які не є тривіальними підполями даного поля, іноді називають **власними підполями поля**.

Легко бачити, що має місце теорема про перетин підполів даного поля, аналогічна теоремі про перетин підкілець кільця, а саме:

Теорема 4.1.2. *Якщо* $(\mathcal{H}_i)_{i \in I}$ *— сім'я підполів поля* $\mathcal{P} = (P; +, \cdot)$, *то перетин* $\mathcal{H} = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{H}_i$ *всіх підполів з цієї сім'ї теж є підполем поля* $\mathcal{P}$.

3. Розглянемо приклади конкретних полів та деяких їх власних підполів, не вдаючись в детальне їх дослідження.

1. $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}; +, \cdot)$ — поле раціональних чисел.
2. $\mathcal{Q}[\sqrt{3}] = (Q[\sqrt{3}]; +, \cdot)$ — поле дійсних чисел виду $a + b\sqrt{3}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$.
3. $\mathcal{R} = (\mathbb{R}; +, \cdot)$ — поле дійсних чисел.
4. Очевидно, що $\mathcal{Q}$ — підполе поля $\mathcal{Q}[\sqrt{3}]$, а $\mathcal{Q}[\sqrt{3}]$ — підполе поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел. Відмітимо, що всі три поля $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathcal{R}$ є прикладами так званих **числових полів**, чітке означення яких буде дано пізніше.
5. $\mathcal{Z}_5 = (\{0, 1, 2, 3, 4\}; \oplus, \odot)$ — поле остач цілих чисел при діленні на 5, де дії додавання $\oplus$ та множення $\odot$ цих остач задані такими двома таблицями Келі:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

У цьому полі нулем є 0, одиницею — 1, протилежними елементами до 0, 1, 2, 3, 4 є відповідно 0, 4, 3, 2, 1, а оберненими елементами до 1, 2, 3, 4 є відповідно 1, 3, 2, 4.

4.2 Найпростіші властивості полів

1. Оскільки будь-яке поле є комутативним кільцем з одиницею, то всі властивості комутативного кільця з одиницею мають місце і для поля. А саме — справедлива така теорема:

Теорема 4.2.1. *Якщо алгебра $\mathcal{P} = (P; +, \cdot)$ — поле, то*

1. *Нуль $0 \in P$ поля $\mathcal{P}$ єдиний.*

2. *Операція додавання $+$ скоротна:*

   $(\forall a, b, x \in P)(x + a = x + b \to a = b)$ *— ліва скоротність;*

   $(\forall a, b, x \in P)(a + x = b + x \to a = b)$ *— права скоротність.*

3. *Для кожного елемента $a \in P$ поля $\mathcal{P}$ існує єдиний протилежний елемент $-a \in P$ такий, що $(-a) + a = a + (-a) = 0$.*

4. *Для будь-яких елементів $a, b \in P$ поля $\mathcal{P}$ рівняння $a + x = b$, $y + a = b$ мають єдиний розв'язок відносно невідомих x, y такий, що*

$$x = y = b + (-a) = (-a) + b.$$

5. *Для довільного елемента $a \in P$ поля $\mathcal{P}$ має місце рівність $-(-a) = a$.*

6. *Для будь-яких елементів,* $a, b \in P$ *поля* $\mathcal{P}$ *протилежним елементом* $-(a + b)$ *до їх суми* $(a + b)$ *є сума* $(-a) + (-b)$ *відповідних їм протилежних елементів, тобто* $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

7. *Одиниця* $e \in P$ *поля* $\mathcal{P}$ *єдина.*

8. *Нуль* $0 \in P$ *поля* $\mathcal{P}$ *є єдиним поглинаючим елементом відносно операції множення, тобто виконується співвідношення*

$$(\forall a \in P)(0 \cdot a = a \cdot 0 = 0).$$

9. *У полі* $\mathcal{P}$ *виконуються наступні рівності, пов'язані з протилежними елементами:*

$$(\forall a, b \in P)((-a)b = a(-b) = -(ab) \wedge (-a)(-b) = ab).$$

10. *У полі* $\mathcal{P}$ *можна ввести операцію віднімання* $-$:

$$(\forall a, b \in P)(a - b \stackrel{df}{=} a + (-b)),$$

тобто, щоб від елемента $a \in P$ *відняти елемент* $b \in P$, *потрібно до цього елемента* a *додати протилежний до* b *елемент* $-b$.

11. *Операція множення дистрибутивна відносно операції віднімання:*

$(\forall a, b, c \in P)((a - b)c = ac - bc)$ — *права дистрибутивність;*

$(\forall a, b, c \in P)(c(a - b) = ca - cb)$ — *ліва дистрибутивність.*

12. *Операція множення в полі* $\mathcal{P}$ *скоротна на ненульові елементи, тобто*

$(\forall a, b, x)(x \neq 0 \wedge xa = xb \to a = b)$ — *ліва скоротність;*

$(\forall a, b, x)(x \neq 0 \wedge ax = bx \to a = b)$ — *права скоротність.*

13. *Для кожного ненульового елемента* $a \in P$ *поля* $\mathcal{P}$ *існує єдиний обернений елемент* $a^{-1} \in P$ *такий, що* $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

14. *Для довільних елементів* $a, b \in P$ *поля* $\mathcal{P}$ *рівняння* $ax = b$, $ya = b$, *де* $a \neq 0$, *мають єдиний розв'язок відносно невідомих* x, y *такий, що*
$$x = y = ba^{-1} = a^{-1}b.$$

15. *Для будь-якого ненульового елемента* $a \in P$ *поля* $\mathcal{P}$ *має місце рівність* $(a^{-1})^{-1} = a$.

16. *Для довільних ненульових елементів* $a, b \in P$ *поля* $\mathcal{P}$ *оберненим елементом* $(ab)^{-1}$ *до їх добутку* ab *є добуток* $a^{-1}b^{-1}$ *відповідних їм обернених елементів, тобто* $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

17. *У полі* $\mathcal{P}$ *можна ввести операцію ділення* : *на ненульові елементи:*
$$(\forall a, b \in P)(a \neq 0 \to b : a \overset{df}{=} \frac{b}{a} = ba^{-1} = a^{-1}b).$$

Доведення перелічених властивостей 1 — 17 в теоремі випливає з відповідного доведення аналогічних властивостей для групи і комутативних кілець з одиницею, відмічених раніше.

2. Оскільки поле має ряд нових аксіом у порівнянні з аксіомами кільця (див. означення поля, сторінка 80), то для поля мають місце ряд нових властивостей у порівнянні з властивостями кільця. Деякі з найпростіших нових властивостей відмітимо в наступній теоремі.

Теорема 4.2.2. *Якщо* $\mathcal{P} = (P; +, \cdot)$ — *поле, то воно не має дільників нуля і для будь-яких його елементів виконуються рівності*

1. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;
2. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$;
3. $(-b)^{-1} = -(b^{-1})$;
4. $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$;
5. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$;
6. $\left(\dfrac{b}{d}\right)^{-1} = \dfrac{d}{b}$;
7. $\dfrac{ad}{bd} = \dfrac{a}{b}$;
8. $ab = e \Rightarrow (a \neq 0 \wedge b = a^{-1})$,

де $a, b, c, d \in P$ — довільні елементи поля $\mathcal{P}$, причому $b, d \neq 0$.

Доведення. Нехай $\mathcal{P} = (P; +, \cdot)$ — поле. Покажемо, що воно не має дільників нуля, тобто для довільних його елементів $a, b \in P$ виконується співвідношення

$$a, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0. \tag{4.2.1}$$

Нехай $a, b \neq 0$, і припустимо супротивне тому, що $ab \neq 0$, тобто $ab = 0$. Оскільки $a \neq 0$, то існує обернений елемент $a^{-1} \in P$ до елемента $a \in P$. Помножимо обидві частини рівності $ab = 0$ зліва на a^{-1}, в результаті чого матимемо:

$$\begin{gathered} a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0; \\ (a^{-1}a)b = 0; \\ eb = 0; \\ b = 0. \end{gathered}$$

Остання рівність $b = 0$ протирічить тому, що $b \in P$ — ненульовий елемент поля $\mathcal{P}$. Тому припущення $ab = 0$ невірне, і, отже, має місце нерівність $ab \neq 0$. Таким чином, співвідношення (4.2.1) виконується. Доведемо тепер рівності 1 — 4. Використавши властивості, відмічені в попередній теоремі 4.2.1, і аксіоми поля, матимемо:

1. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = (ab^{-1}) \cdot (cd^{-1}) = (ac)(b^{-1}d^{-1}) = (ac)(bd)^{-1} = \dfrac{ac}{bd}$.

2. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = (ab^{-1}) \pm (cd^{-1}) = a(dd^{-1})b^{-1} \pm (bb^{-1})(cd^{-1}) = (ad)(b^{-1}d^{-1}) \pm (bc)(b^{-1}d^{-1}) = (ad \pm bc)(b^{-1}d^{-1}) = (ad \pm bc)(bd)^{-1} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$.

3. $b^{-1} + (-b)^{-1} = e(b^{-1}) + e(-b^{-1}) = (eb^{-1}) + (-(eb^{-1})) = 0$, що вказує на те, що елемент $(-b)^{-1}$ є протилежним до елемента (b^{-1}), тобто $(-b)^{-1} = -(b^{-1})$, що і треба було показати.

4. $\dfrac{-a}{b} = (-a)b^{-1} = -(ab^{-1}) = -\dfrac{a}{b}$; аналогічно $\dfrac{a}{-b} = a(-b)^{-1} = a(-(b^{-1})) = -(ab^{-1}) = -\dfrac{a}{b}$, що і треба було довести.

Аналогічно доводяться співвідношення 5 — 8 (доведення проведіть самостійно) ■

4.3 Поняття гомоморфізму, ізоморфізму полів

1. Означення гомоморфізму, ізоморфізму полів повністю аналогічне відповідним означенням, що були введені для кілець.

Нехай $\mathcal{P}_1 = (P_1; +_1, \cdot_1)$, $\mathcal{P}_2 = (P_2; +_2, \cdot_2)$ — поля.

Означення 4.3.1. *Відображення* $f : P_1 \stackrel{в\ (на)}{\longrightarrow} P_2$ *називається* ***гомоморфізмом*** *поля* $\mathcal{P}_1$ *в (на) поле* $\mathcal{P}_2$, *якщо це відображення* f *„узгоджується“ з відповідними операціями* $+_1$, $\cdot_1$ *в* $\mathcal{P}_1$ *і* $+_2$, $\cdot_2$ *в* $\mathcal{P}_2$, *тобто для довільних елементів* $g, h \in P_1$ *виконуються рівності*

$$f(g +_1 h) = f(g) +_2 f(h);$$
$$f(g \cdot_1 h) = f(g) \cdot_2 f(h),$$

або мовою образів елементів — образ $f(g +_1 h)$ *суми* $g +_1 h$ *елементів* $g, h \in P_1$ *поля* $\mathcal{P}_1$ *дорівнює сумі* $f(g) +_2 f(h)$ *образів* $f(g), f(h) \in P_2$ *з поля* $\mathcal{P}_2$ *цих елементів* $g, h \in P_1$, *а образ* $f(g \cdot_1 h)$ *їх добутку* $g \cdot_1 h$ *рівний добутку* $f(g) \cdot_2 f(h)$ *їх образів* $f(g), f(h)$ *з поля* $\mathcal{P}_2$.

Іноді гомоморфізм поля $\mathcal{P}_1$ на поле $\mathcal{P}_2$ називають **епіморфізмом $\mathcal{P}_1$ на $\mathcal{P}_2$**.

Означення 4.3.2. *Гомоморфізм* f *поля* $\mathcal{P}_1$ *в (на) поле* $\mathcal{P}_2$ *називається* ***ізоморфізмом*** $\mathcal{P}_1$ *в(на)* $\mathcal{P}_2$, *якщо* f *є взаємно однозначним відображенням множини* P_1 *в (на) множину* P_2; *у тому випадку, коли* f *— бієкція між* P_1 *і* P_2, *поля* $\mathcal{P}_1$ *і* $\mathcal{P}_2$ *називаються ізоморфними між собою, а їх ізоморфізм позначається символом* $\cong$, *тобто* $\mathcal{P}_1 \cong \mathcal{P}_2$.

Відмітимо, що гомоморфізм поля в себе іноді називають **ендоморфізмом поля**, а ізоморфізм поля на себе називають **автоморфізмом поля**.

2. Як і у випадку півгруп, груп, кілець, для полів відношення гомоморфізму, ізоморфізму мають аналогічні властивості, а саме:

1. *Відношення гомоморфізму між полями є відношенням квазіпорядку.*

2. Відношення ізоморфізму між полями є відношенням еквівалентності.

3. Відношення ізоморфізму між полями є частинним випадком відношення гомоморфізму між ними.

4. Ендоморфізм, епіморфізм полів є частинними випадками гомоморфізму полів, а автоморфізм поля — частинним випадком ізоморфізму полів.

5. Якщо f — гомоморфізм поля $\mathcal{P}_1 = (P_1; +_1, \cdot_1)$ в поле $\mathcal{P}_2 = (P_2; +_2, \cdot_2)$, то образ $f(P_1) \stackrel{df}{=} \{f(a)|a \in P_1\} \subset P_2$ поля $\mathcal{P}_1$ відносно цього гомоморфізму f є підполем поля $\mathcal{P}_2$ таким, що образ $f(0_1)$ нуля 0_1 поля $\mathcal{P}_1$ є нулем в $f(P_1)$, образ $f(e_1)$ одиниці e_1 поля $\mathcal{P}_1$ є одиницею в $f(P_1)$, образ $f(-a)$ протилежного елемента $-a \in P_1$ до елемента $a \in P_1$ є протилежним елементом до образа $f(a)$ елемента $a \in P_1$, і образ $f(a^{-1})$ оберненого елемента $a^{-1} \in P_1$ до елемента $a \in P_1$ є оберненим елементом до образа $f(a)$ елемента $a \in P_1$, тобто для рівностей $a +_1 (-a) = (-_1 a) +_1 a = 0_1$, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot_1 a = e_1$ матимуть місце відповідні рівності $f(a) +_2 f(-a) = f(-a) +_2 f(a) = f(0_1)$, $f(a) \cdot_2 f(a^{-1}) = f(a^{-1}) \cdot_2 f(a) = f(e_1)$, причому $f(0_1) +_2 f(a) = f(a) +_2 f(0_1) = f(a)$, $f(e_1) \cdot_2 f(a) = f(a) \cdot_2 f(e_1) = f(a)$.

3. Розглянемо деякі приклади гомоморфізму, ізоморфізму полів.

1. Відображення f, задане рівністю $f(a) = -a$, є очевидно автоморфізмом довільного поля.

2. Відображення f, задане рівностями $f(0) = 0$, $f(a) = e$, якщо $a \neq 0$, де 0, e є відповідно нулем та одиницею довільного поля $\mathcal{P}$, a — ненульовий елемент поля $\mathcal{P}$, легко бачити, є ендоморфізмом цього поля $\mathcal{P}$, або ж є гомоморфізмом цього поля $\mathcal{P}$ в довільне поле $\mathcal{P}_1$, якщо $f(0) = 0_1$, $f(a) = e_1$, де 0_1, e_1 є відповідно нулем та одиницею поля $\mathcal{P}_1$, a — ненульовий елемент поля $\mathcal{P}$.

Відмітимо, що з іншими прикладами гомоморфізму, ізоморфізму полів познайомимося пізніше, по мірі розширення алгебраїчного кругозору та накопичення необхідних теоретичних та практичних алгебраїчних фактів.

4.4 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Яка алгебра називається полем?
2. Який тип має поле?
3. Чому поле є частинним випадком кільця?
4. Що таке нуль поля?
5. Що таке одиниця поля?
6. Пояснити, яку найменшу кількість елементів може мати поле.
7. Скільки одиниць має поле? Поясніть свою відповідь.
8. Скільки нулів має поле? Поясніть свою відповідь.
9. Що таке підполе поля?
10. Які тривіальні підполя поля Ви знаєте?
11. Наведіть приклади полів.
12. Наведіть приклади полів, які містять лише тривіальні поля.
13. Що таке власне підполе поля?
14. Наведіть приклади полів, які мають власні підполя.
15. Сформулюйте критерій того, що підмножина поля є його підполем.
16. Чи завжди перетин сім'ї підполів поля є його підполем? Обґрунтуйте свою відповідь.
17. Що собою представляє найбільше підполе, яке міститься в усіх підполях даної сім'ї підполів поля?
18. Чи може перетин всіх підполів даного поля бути порожнім? Обґрунтуйте свою відповідь і вкажіть цей перетин.
19. Запишіть на елементарному рівні співвідношення того, що дана підмножина поля є його підполем.

20. Запишіть на глобальному рівні співвідношення того, що дана підмножина поля є його підполем.

21. Нехай поле розглядається як частинний випадок кільця. Який вигляд матимуть в такому кільці односторонні ідеали, двосторонні ідеали?

22. Яке підполе поля називається одиничним? Коли воно співпадає з самим полем?

23. Що таке протилежний елемент до даного елемента поля?

24. Чи кожен елемент поля має протилежний елемент?

25. Як знайти розв'язки рівнянь виду $x+a=b$, $a+y=b$, де a,b — довільні елементи поля? Вкажіть їх вигляд. Чи співпадають вони для обох цих рівнянь?

26. Скільки протилежних елементів має будь-який елемент поля?

27. Як вводиться операція віднімання в полі?

28. Обґрунтуйте рівності $-(a+b)=(-a)+(-b)$, $-(-a)=a$, де a,b — довільні елементи поля.

29. Доведіть, що операція додавання в полі скоротна.

30. Доведіть, що операція множення в полі дистрибутивна відносно віднімання.

31. Доведіть, що нуль 0 поля є поглинаючим елементом відносно множення, тобто $0a=a0=0$ для всякого елемента a поля.

32. Доведіть, що операція множення в полі скоротна на ненульові елементи. Чому не можна скорочувати на нуль при множенні?

33. Довести, що в полі виконуються такі рівності, пов'язані з протилежними елементами:

$$(-a)b=a(-b)=-(ab);\ (-a)(-b)=ab,$$

де a,b — довільні елементи поля.

34. Що таке оборотний елемент, обернений елемент поля?

35. Довести, що для кожного ненульового елемента поля існує єдиний обернений елемент?

36. Пояснити, чому для нуля поля не існує оберненого елемента.

37. Довести, що для довільного ненульового елемента $a \in P$ поля $\mathcal{P}$ виконується рівність $(a^{-1})^{-1} = a$.

38. Скільки розв'язків і який їх вигляд мають рівняння $ax = b$, $ya = b$, де a — ненульовий, b — довільний фіксовані елементи поля?

39. Яким є обернений елемент до добутку ab елементів a, b поля?

40. Як вводиться операція ділення в полі? Чи для будь-яких елементів вона визначена?

41. Поясніть, чому поле не має дільників нуля.

42. Обчисліть добуток $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, де a, b, c, d — елементи поля. Чи будь-якими тут можуть бути ці елементи?

43. Доведіть рівність $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ де a, b, c, d — елементи поля, причому b, d — ненульові елементи.

44. Доведіть рівність $(-b)^{-1} = -(b^{-1})$, де b — довільний ненульовий елемент поля.

45. Доведіть рівності $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ для довільних елементів a, b поля, де b — ненульовий елемент поля.

46. Що таке гомоморфізм одного поля в (на) інше поле?

47. Який гомоморфізм називається епіморфізмом?

48. Що таке ендоморфізм поля?

49. Що таке ізоморфізм одного поля в (на) інше поле?

50. Що таке автоморфізм поля?

51. Коли говорять, що поля між собою ізоморфні, та як позначається ізоморфізм між ними?

52. Чим можна вважати, що ізоморфізм полів є частинним випадком їх гомоморфізму, епіморфізму? Обґрунтуйте свою відповідь.

53. Чи можна вважати, що автоморфізм поля є частинним випадком його ендоморфізму? Обґрунтуйте свою відповідь.

54. Поясніть, чому відношення гомоморфізму полів, епіморфізму полів є відношеннями квазіпорядку.

55. Поясніть, чому відношення ізоморфізму між полями є відношенням еквівалентності.

56. Що таке тотожний, одиничний автоморфізм поля?

57. Наведіть приклади гомоморфізму, ізоморфізму полів.

58. Поясніть, чому образ $f(P_1)$ поля $\mathcal{P}_1 = (P_1; +_1, \cdot_1)$ є підполем поля $\mathcal{P}_2 = (P_2; +_2, \cdot_2)$, де f — гомоморфізм поля $\mathcal{P}_1$ в поле $\mathcal{P}_2$. Виясніть, в що перетворюється нуль 0_1 і одиниця e_1 поля $\mathcal{P}_1$; чи завжди вони співпадають з нулем 0_2 і одиницею e_2 поля $\mathcal{P}_2$.

59. Аналогічна вправа до попередньої з тією лише різницею, що f — ізоморфізм поля $\mathcal{P}_1$ в поле $\mathcal{P}_2$.

60. Доведіть співвідношення $\left(\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc\right)$ де a, b, c, d — довільні елементи поля, причому b, d — ненульові елементи.

61. Доведіть рівність $\dfrac{ad}{bd} = \dfrac{a}{b}$, де a, b, d — будь-які елементи поля, причому b, d — ненульові елементи.

62. Покажіть, що має місце співвідношення $(ab = e \Rightarrow a \neq 0 \wedge \wedge\, b = a^{-1})$ для довільних елементів a, b поля, в якому 0 — нуль, а e — одиниця цього поля.

63. Для яких елементів поля виконується рівність $\left(\dfrac{b}{d}\right)^{-1} = \dfrac{d}{b}$? Доведіть її.

64. З'ясувати, які з наступних числових множин утворюють поле відносно звичайних операцій додавання та множення:

    а) $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел;

    б) $Q[\sqrt{5}] \stackrel{df}{=} \{a + b\sqrt{5} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ — множина всіх дійсних чисел виду $a + b\sqrt{5}$, де a, b — раціональні числа;

    в) $Q[3] \stackrel{df}{=} \{a+3b | a, b \in \mathbb{Q}\}$ — множина всіх раціональних чисел виду $a + 3b$, де a, b — раціональні числа;

    г) $Q^* = \left\{ \frac{m}{2n+1} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ — множина всіх раціональних дробів виду $\frac{m}{2n+1}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, з непарними знаменниками;

    д) $Q[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}] \stackrel{df}{=} \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ — множина всіх раціональних чисел виду $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, де a, b — раціональні числа;

    е) $\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних чисел.

65. Дослідити, які з полів вправи 64 є власними підполями інших з цих полів.

66. Знайдіть всі підполя поля $(Q[\sqrt{2}]; +, \cdot)$.

67. Дослідити, при яких натуральних n кільце $\mathcal{Z}_n$ є полем, де $\mathcal{Z}_n$ — кільце всіх остач цілих чисел при їх діленні на n відносно дій додавання та множення цих остач.

68. З'ясувати, чи для всякого натурального n множина $Q[\sqrt{n}]$ відносно дій додавання та множення є полем.

69. Знайти всі підполя поля $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ всіх раціональних чисел.

70. В множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ всіх пар дійсних чисел задані операції:

$$(a; b) \oplus (c; d) \stackrel{df}{=} (a + c; b + d);$$
$$(a; b) \odot (c; d) \stackrel{df}{=} (ac; ad + bc);$$
$$(a; b) \circ (c; d) \stackrel{df}{=} (ac + bd; ad + bc).$$

Алгебра $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus, \odot)$ називається **алгеброю дуальних чисел**, а алгебра $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus, \circ)$ — **алгеброю подвійних чисел**. Дослідити, чи ці алгебри є полями.

71. Довести, що відображення f поля $(Q[\sqrt{n}]; +, \cdot)$ в себе, задане рівністю $f(a + b\sqrt{n}) \overset{df}{=} a - b\sqrt{n}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$, є автоморфізмом цього поля.

72. Довести, що алгебра $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}; +, \cdot)$, на якій задано операції додавання $+$ і множення $\cdot$ рівностями

$$(a; b) + (c; d) \overset{df}{=} (a + c; b + d);$$
$$(a; b) \cdot (c; d) \overset{df}{=} (ac + 2bd; ad + bc),$$

є полем.

73. Дослідити, чи біекція f між множинами $Q[\sqrt{2}]$ і $Q[\sqrt{3}]$, задана рівністю $f(a+b\sqrt{2}) \overset{df}{=} a+b\sqrt{3}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$, є ізоморфізмом між полями $(Q[\sqrt{2}]; +, \cdot)$ і $(Q[\sqrt{3}]; +, \cdot)$.

74. Дослідити, чи бієкція f між множинами $Q[k]$ і $Q[l]$, задана рівністю $f(a+bk) \overset{df}{=} a+bl$, де $a, b \in \mathbb{Q}$; $k, l \in \mathbb{N}$, є ізоморфізмом між полями $(Q[k]; +, \cdot)$ і $(Q[l]; +, \cdot)$.

75. Задати ізоморфізм f поля $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ дійсних чисел в алгебру

а) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus, \odot)$ дуальних чисел;

б) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus, \circ)$ подвійних чисел.

Вкажіть відповідні образи цього поля $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ відносно знайденого ізоморфізму f у вказану алгебру.

76. Нехай в алгебрі $\mathcal{Q}_k = (\mathbb{Q}; +, *)$ операція $+$ — це звичайне додавання раціональних чисел, а операція $*$ задана рівністю $a * b \overset{df}{=} kab$, де $k \in \mathbb{N}$ — фіксоване натуральне число, $a, b \in \mathbb{Q}$. Дослідити, при яких k ця алгебра є полем, та з'ясувати, чи ізоморфна вона при таких k полю $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ раціональних чисел.

4.5 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

64. б), в), д), е).

65. $Q[3] = Q \subset Q[\sqrt{5}]; \quad Q \subset Q[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}]$.

66. $\{0, 1\} \subset Q \subset Q[\sqrt{2}]$.

67. $n \in \mathbb{N}$ — просте число.

68. Так.

69. Q.

70. **Вказівка**. Введені алгебри є полями; для перевірки слід переконатися у виконанні для них аксіом поля.

71. **Вказівка**. Для доведення використати означення автоморфізму поля.

72. **Вказівка**. Для доведення необхідно перевірити виконання аксіом поля.

73. Ні, вказана бієкція не є ізоморфізмом, оскільки не виконується рівність $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, де $x, y \in Q[\sqrt{2}]$, а $f(x), f(y) \in Q[\sqrt{3}]$.

74. Вказана бієкція f є ізоморфізмом, якщо $k = l$, де $k, l \in \mathbb{N}$, тобто якщо f є тотожній автоморфізм.

75.

а) $f(x) = (x, 0); f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times 0$;

б) $f(x) = (0, x); f(\mathbb{R}) = 0 \times \mathbb{R}$, де $x \in \mathbb{R}$ — довільне дійсне число.

76. Алгебра $\mathcal{Q}_k$ є полем для довільного натурального $k \in \mathbb{N}$, ізоморфним полю $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$ раціональних чисел; ізоморфізм f_k можна задати рівністю $f_k(a) = ka$ де $a \in \mathbb{Q}$ — довільне раціональне число, а $k \in \mathbb{N}$ — фіксоване натуральне число.

5 Найпростіші поняття про бульові алгебри

1. Означення бульової алгебри; регулярні та нерегулярні бульові алгебри.

2. Приклади бульових алгебр.

3. Принцип двоїстості для бульових алгебр та його роль.

4. Деякі технічні застосування бульової алгебри.

5. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.

6. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

5.1 Означення бульової алгебри; регулярні та нерегулярні бульові алгебри

1. Одним із важливих прикладів конкретних алгебр є так звані **бульові алгебри**, які мають широкі різноманітні застосування як в самій математиці, так і в прикладних науках (наприклад, в теорії релейно-контактних схем).

Означення 5.1.1. *Алгебра* $\mathcal{B} = (B; \oplus, \odot, {}', 0, 1)$ *типу* $(2, 2, 1, 0, 0)$ *називається* ***бульовою****, якщо відмічені в ній операції задовольняють таким властивостям (аксіомам):*

$$(\forall a \in B)(a \oplus a = a)$$

$$\text{— ідемпотентність операції } \oplus; \tag{5.1.1}$$

$$(\forall a \in B)(a \odot a = a)$$

$$\text{— ідемпотентність операції } \odot; \tag{5.1.2}$$

$$(\forall a, b \in B)(a \oplus b = b \oplus a)$$

$$\text{— комутативність операції } \oplus; \tag{5.1.3}$$

$$(\forall a, b \in B)(a \odot b = b \odot a)$$

$$\text{— комутативність операції } \odot; \tag{5.1.4}$$

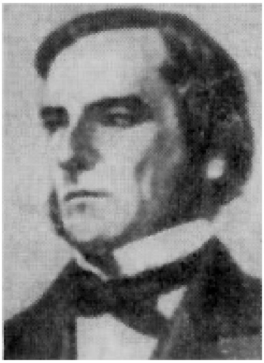
$$(\forall a, b, c \in B)((a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c))$$

$$\text{— асоціативність операції } \oplus; \tag{5.1.5}$$

$$(\forall a,b,c \in B)((a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c))$$
$$\text{— \textit{асоціативність операції} } \odot; \tag{5.1.6}$$
$$(\forall a,b,c \in B)((a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c))$$
$$\text{— \textit{дистрибутивність операції} } \odot \text{ \textit{відносно операції} } \oplus; \tag{5.1.7}$$
$$(\forall a,b,c \in B)((a \odot b) \oplus c = (a \oplus c) \odot (b \oplus c))$$
$$\text{— \textit{дистрибутивність операції} } \oplus \text{ \textit{відносно операції} } \odot; \tag{5.1.8}$$
$$(\forall a \in B)(a \oplus 0 = a),$$
$$\text{\textit{0 — нейтральний елемент відносно операції} } \oplus; \tag{5.1.9}$$
$$(\forall a \in B)(a \odot 1 = a),$$
$$\text{\textit{1 — нейтральний елемент відносно операції} } \odot; \tag{5.1.10}$$
$$(\forall a \in B)(a \oplus 1 = 1),$$
$$\text{\textit{1 — поглинаючий елемент відносно операції} } \oplus; \tag{5.1.11}$$
$$(\forall a \in B)(a \odot 0 = 0),$$
$$\text{\textit{0 — поглинаючий елемент відносно операції} } \odot; \tag{5.1.12}$$
$$(\forall a \in B)((a')') = a; \tag{5.1.13}$$
$$0' = 1; \tag{5.1.14}$$
$$1' = 0; \tag{5.1.15}$$
$$(\forall a,b \in B)((a \oplus b)' = a' \odot b') \text{ — \textit{закон де Моргана};} \tag{5.1.16}$$
$$(\forall a,b \in B)((a \odot b)' = a' \oplus b') \text{ — \textit{закон де Моргана}.} \tag{5.1.17}$$

2. Назва даної алгебри пов'язана з прізвищем англійського математика Джорджа Буля (1815 — 1864 р.р.) — основоположника математичної логіки, який вперше зробив спробу побудувати математичну логіку у вигляді певної алгебри.

В наведеному означенні бульової алгебри бінарні операції $\oplus, \odot$ часто називають **бульовим додаванням** і відповідно **бульовим множенням**, а унарну операцію $'$ — **бульовим доповненням**. Крім того, в цій бульовій алгебрі $\mathcal{B}$ введено дві нуль-арні операції — виділено елементи 0 і 1, які називають **бульовим нулем** і



Мал. 1.2. Джордж Буль (1815 — 1864 роки)

відповідно **бульовою одиницею** бульової алгебри $\mathcal{B}$.

3. Всі бульові алгебри діляться на два класи — **регулярні бульові алгебри** і **нерегулярні бульові алгебри**. Введемо їх означення.

Означення 5.1.2. *Бульова алгебра $\mathcal{B}$, що наведена в означенні 5.1.1, називається* ***регулярною****, якщо її операції задовольняють, крім вказаних аксіом 5.1.1 — 5.1.17, додатково аксіомам*

$$(\forall a \in B)(a \oplus a' = 1); \tag{5.1.18}$$

$$(\forall a \in B)(a \odot a' = 0); \tag{5.1.19}$$

і називається ***нерегулярною****, якщо її операції задовольняють аксіомам 5.1.1 — 5.1.17, але не задовольняють аксіомам 5.1.18, 5.1.19.*

Наведені нижче приклади ілюструють існування конкретних як регулярних бульових алгебр, так і нерегулярних бульових алгебр.

5.2 Приклади бульових алгебр

1. Розглянута раніше алгебра висловлень $\mathcal{A} = (A; \vee, \wedge, \rceil, F, T)$, в якій базова множина A — це множина всіх висловлень, на якій задані бінарні операції диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція $\wedge$, унарна операція заперечення $\rceil$ висловлень та дві нуль-арні операції — виділення хибного висловлення F (F — перша буква слова false — хиба) і виділення істинного висловлення T (T — перша буква слова true — істина), яким відповідають вказані в означенні 5.1.1 операції $\oplus, \odot, {}', 0, 1$. При цьому під рівністю висловлень розуміються їх рівносильність. Перелічені та доведені раніше властивості операцій алгебри висловлень показують, що ця алгебра висловлень є прикладом регулярної бульової алгебри. **Самостійно випишіть** перелічені властивості в такому порядку, щоб вони повністю відповідали властивостям 5.1.1 — 5.1.19 регулярної бульової алгебри.

2. Раніше нами розглядалася алгебра множин $\mathcal{P}(A) = (P(A); \cup, \cap, {}', \varnothing, A)$, в якій на базовій множині $P(A) \stackrel{df}{=} \{A_1 | A_1 \subset \subset A\}$ всіх підмножин заданої множини A були введені бінарні операції об'єднання $\cup$, перетину $\cap$, унарна операція доповнення до заданої множини A та дві нуль-арні операції — виділення порожньої множини $\varnothing$ і виділення заданої множини A, яким відповідають вказані в означенні 5.1.1 операції $\oplus$, $\odot$, $'$, 0, 1. Розглянуті при цьому властивості операцій алгебри множин показують, що вона є теж прикладом регулярної бульової алгебри. **Самостійно випишіть** перелічені властивості в такому порядку, щоб вони повністю відповідали властивостям 5.1.1 — 5.1.19 регулярної бульової алгебри.

3. Цікавим прикладом регулярної бульової алгебри є так звана **алгебра подій**, яка є основою дослідження в теорії ймовірностей, що вивчається на третьому курсі. Бажаючі можуть самостійно з нею познайомитися, проглянувши перші параграфи посібників з теорії ймовірностей [5], [8], [27].

4. Розглянемо простенький приклад нерегулярної бульової алгебри — так звану **алгебру екстремумів** $\mathcal{E}_n = (M_n; max, min, \hat{}\,, 1, n)$, в якій на базовій множині $M_n = \{1, 2, ..., n\}$ перших n натуральних чисел, де $n > 2$, вводяться такі операції:

$max(a, b) \stackrel{df}{=} max(\{a, b\})$ — не менше з чисел a, b — аналог операції $\oplus$;

$min(a, b) \stackrel{df}{=} min(\{a, b\})$ — не більше з чисел a, b — аналог операції $\odot$;

$\hat{a} \overset{df}{=} n - a + 1$ — аналог унарної операції $'$;

1 — аналог нуль-арної операції виділення нуля 0 бульової алгебри;

n — аналог нуль-арної операції виділення одиниці 1 бульової алгебри;

Самостійно випишіть властивості 5.1.1 — 5.1.19 алгебри екстремумів та переконайтеся в тому що вони виконуються.

Наприклад, властивості

1. $(\forall k \in M_n)(max(k, k) = k)$;

2. $(\forall k \in M_n)(min(k, k) = k)$,

які вказують на ідемпотентність операцій max, min, очевидним чином виконуються.

Переконаємося в тому, що аксіоми 5.1.18, 5.1.19 для алгебри екстремумів $\mathcal{E}_n$ не виконуються. Дійсно, нехай $1 < k < n$. Тоді маємо: $max(k, \hat{k}) = max(\{k, n - k + 1\}) \neq n$; $min(k, \hat{k}) = min(\{k, n - - k + 1\}) \neq 1$.

Отримані нерівності вказують на те, що аксіоми 5.1.18, 5.1.19 дійсно не виконуються. А тому алгебра екстремумів $\mathcal{E}_n$ є нерегулярною бульовою алгеброю.

5.3 Принцип двоїстості для бульових алгебр та його роль

1. Ввівши аксіоматичне означення бульової алгебри та розглянувши відповідні йому приклади конкретних бульових алгебр, бачимо плодотворність аксіоматичного підходу до доведення відповідних алгебр. Адже по суті властивості, досліджені в одній з таких алгебр, легко переносяться на відповідні властивості іншої з них, а переконуватися в їх істинності уже не має потреби.

Більш детальніше дослідження бульових алгебр нами в цьому параграфі проводитися не буде. Таке дослідження, як правило, здійснюється на алгебраїчних спецкурсах, тематика яких може бути безпосередньо пов'язана з вивченням бульових алгебр та їх застосуваннями.

2. При розгляді введених означень бульових алгебр неважко помітити, що задані в них операції володіють властивостями симетричності при одночасній заміні операцій $\oplus, \odot, 0, 1$ відповідно на операції $\odot, \oplus, 1, 0$. Звідси можна зробити висновок, що справедлива така теорема, яка називається **принципом двоїстості**:

Теорема 5.3.1 (Принцип двоїстості)**.** *Якщо в рівності двох формул бульової алгебри операції* $\oplus, \odot, 0, 1$ *замінити відповідно на операції* $\odot, \oplus, 1, 0$ *то ця рівність не порушиться, тобто її істинність збережеться.*

Під **формулами бульової алгебри** розуміють довільні вирази, які побудовані за допомогою її елементів та скінченного числа введених операцій над ними.

Доведення даної теореми безпосередньо випливає з того, що вона має місце для всіх аксіом бульової алгебри — кожна аксіома перетворюється в двоїсту до неї. А тому вона має місце і для довільної рівності між формулами, отриманої з цих аксіом.

3. З даної теореми робимо такі практичні висновки:

1. Якщо якась рівність між формулами бульової алгебри доведена, то двоїсту їй нову рівність, отриману в результаті відповідної заміни операцій $\oplus, \odot, 0, 1$ на операції $\odot, \oplus, 1, 0$, доводити не потрібно — вона теж вважається доведеною.

2. Якщо в бульовій алгебрі має місце (тобто істинна) рівність $\Phi = 1$ то автоматично матиме місце рівність $\Phi^* = 0$, де Φ^* — формула двоїста до формули Φ, тобто Φ^* отримана з Φ в результаті вказаної вище заміни операцій, і навпаки.

3. Для будь-якої конкретної бульової алгебри має місце принцип двоїстості; а тому доводити його в цьому конкретному випадку уже не потрібно — чи це є алгебра висловлень, чи це є алгебра множин, чи будь-яка інша конкретна бульова алгебра.

4. Розглянемо конкретні приклади використання принципу двоїстості для формул.

1. В алгебрі висловлень легко показати, що формула $\Phi(p, q) = (p \wedge q) \vee (\rceil p \wedge q) \vee (p \wedge \rceil q) \vee (\rceil p \wedge \rceil q)$ є істинною, тобто $\Phi(p, q) \equiv T$.

Дійсно, використавши відповідні аксіоми, матимемо: $\Phi = pq \vee (\rceil p)q \vee \vee\, p(\rceil q) \vee (\rceil p)(\rceil q) \equiv (p \vee \rceil p)q \vee (p \vee \rceil p)(\rceil q) \equiv (p \vee \rceil p)(q \vee \rceil q) \equiv T \cdot T \equiv T$, де знак кон'юнкції (логічного множення) $\wedge$ для зручності опущено. Тоді в силу принципа двоїстості робимо висновок про те, що двоїста до формули $\Phi(p, q)$ формула $d\Phi(p, q) \equiv (p \vee q) \wedge (\rceil p \vee q) \wedge (p \vee \rceil q) \wedge \wedge\, (\rceil p \vee \rceil q)$ є хибною, тобто $d\Phi(p, q) \equiv F$.

2. Для алгебри множин справедлива рівність $X \cup (X' \cap Y) = X \cup \cup Y$ (переконайтеся самостійно). Тому на основі принципа двоїстості випливає справедливість рівності $X \cap (X' \cup Y) = X \cap Y$.

Зауваження. На основі принципа двоїстості маємо ще один **практичний висновок**: якщо в силу деяких обставин досліджувати певну формулу чи твердження незручно, то замість них будують двоїсті до них, які можуть виявитися більш зручними для дослідження, після чого можна зробити відповідний висновок і про початкові формулу чи твердження.

5.4 Деякі технічні застосування бульової алгебри

1. Як було відмічено вище, бульова алгебра має широкі застосування не лише в самій математиці. Вона має і різноманітні технічні застосування. Одним із таких застосувань є її використання в теорії релейно-контактних схем. Вперше можливість технічних застосувань бульової алгебри була показана ще у 1910 р. російським фізиком П. Еренфестом в телефонії, а у 1923 році радянський вчений М. Герсеванов використав бульову алгебру для розрахунку гідротехнічних споруд. У 1938 р. були опубліковані праці радянського математика В. Шестакова та американського інженера К. Шеннона, в яких систематично були розглянуті задачі аналізу та синтезу релейно-контактних схем, які пізніше були узагальнені на довільні дискретні автоматичні пристрої.

2. Під контактною схемою розуміють довільну множину електричних проводів та контактів, які сполучають полюси джерела струму. **Електричний контакт** — це пристрій для з'єднання або роз'єднання двох провідників електричного струму. Фізична будова контакту для подальшого розгляду істотного значення не має. Важливий лише принцип його дії, який полягає в наступному: якщо

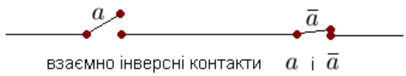
Мал. 1.3. Микола Герсеванов (1879 — 1950 роки)

контакт замкнутий, то він пропускає струм, а якщо він розімкнутий, то не пропускає струм по електричному колу. Тому для простоти будемо вважати, що контакт — це звичайний перемикач, який може знаходитися в одному із двох можливих станів — розімкнутий контакт або замкнутий (див. відповідний нижче малюнок 1.4).

Мал. 1.4.

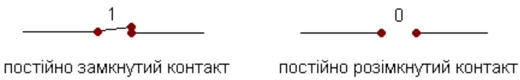
Контакти будемо позначати малими латинськими буквами з індексами, якщо потрібно: $a, b, c, ..., a_1, b_1, c_1, ...$ Ті з контактів, що працюють синхронно, тобто одночасно замикаються або розмикаються, позначатимемо однією і тією ж буквою (пристроєм, що одночасно розмикає або замикає контакти, є, наприклад, звичайний рубильник).

Серед контактів можуть зустрічатися **інверсні між собою контакти**, які зв'язані між собою протилежною дією: якщо один з них замкнений, то другий розімкнений, і навпаки. Якщо один із інверсних контактів позначимо буквою, наприклад, a, то інверсний з ним — буквою $\overline{a}$ (див. нижче відповідний малюнок 1.5). Оскільки інверсність контактів взаємна, то це позначатимемо рівністю $\overline{\overline{a}} = a$.



Мал. 1.5.

Зауважимо, що серед контактів можуть існувати **постійно замкнутий контакт** і **постійно розімкнутий контакт**, які позначатимемо 1 та відповідно 0 (див. нижче відповідні малюнки 1.6).



Мал. 1.6.

Домовимося позначати **стан**, у якому може перебувати контакт a, через 1, якщо він замкнутий (струм через нього проходить), і через 0, якщо він розімкнутий (струм через нього не проходить). Вказані стани контакту відповідають якраз висловленням: „контакт замкнутий (струм через нього проходить)“ — істинне висловлення і „контакт розімкнутий (струм через нього не проходить)“ — хибне висловлення.

3. Контактна схема, складаючись з певної сукупності електричних проводів та контактів, що з'єднують полюси джерела струму, теж може перебувати в одному з двох станів — **замкнена** (пропускає струм від одного з полюсів джерела струму до іншого) або ж **розімкнена** (не пропускає струму), які теж позначатимемо через 1 і відповідно 0. Зрозуміло, що цей стан контактної схеми залежить від стану її контактів. Таким чином, звідси робимо наступний висновок: **стан контактної схеми є бульовою функцією станів її контактів; а тому схема замкнена (пропускає струм), якщо бульова функція приймає значення 1, і ро-**

зімкнена (не пропускає струм), якщо ця бульова функція приймає значення 0.

Таким чином, дослідження стану контактної схеми можна звести до дослідження відповідної їй бульової функції. А оскільки бульову функцію завжди можна задати аналітично — деякою логічною формулою, то дослідження чисто технічної проблеми про вивчення стану контактної схеми можна звести до аналітичної проблеми з алгебри висловлень — дослідження логічної формули, яка представляє логічну функцію, що реалізується заданою контактною схемою. Таку формулу часто називають **структурною формулою контактної схеми**.

Відмітимо, що серед різноманітних контактних схем виділяють **еквівалентні між собою схеми** — це такі схеми, які при будь-яких станах контактів, з яких ці схеми складаються, діють однаково, тобто вони одночасно замкнені, або ж розімкнені.

4. Серед задач, пов'язаних із дослідженням роботи контактних схем, виділяють наступні **дві основні задачі**:

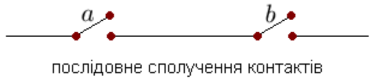
- **Аналіз роботи контактної схеми** — полягає в складанні відповідної структурної формули, за допомогою якої визначаються умови роботи схеми.

- **Синтез контактної схеми** — за наперед заданими умовами її роботи полягає в складанні відповідної їй структурної формули та побудові за цією формулою самої схеми.

Зауважимо, що однією з важливих задач при цьому є **задача побудови найпростішої контактної схеми**, з мінімальною кількістю контактів та мінімальною простотою роботи потрібної, за вказаними умовами, схеми. Така задача розв'язується шляхом попереднього максимального спрощення складеної структурної формули, що відповідає потрібній контактній схемі.

5. Розглянемо найпростіші контактні схеми та проаналізуємо умови їх роботи.

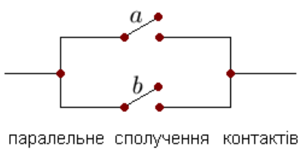
Першою найпростішою контактною схемою є послідовне сполучення двох контактів a і b (див. нижче відповідний малюнок 1.7).



Мал. 1.7.

Очевидно, що ця схема пропускає струм тоді і тільки тоді, коли обидва контакти a і b замкнені. Тому зрозуміло, що цій схемі відповідає структурна логічна формула $\Phi(a, b) = a \wedge b$, яка є кон'юнкцією двох висловлень, які позначені тими самими буквами, якими позначені відповідні контакти схеми.

Другою найпростішою контактною схемою є паралельне сполучення двох контактів a і b (див. нижче відповідний малюнок 1.8).



Мал. 1.8.

Очевидно, що ця схема пропускає струм тоді і тільки тоді, коли хоча б один з контактів a або b замкнений. Легко бачити, що цій схемі відповідатиме структурна логічна формула $\Phi(a, b) = a \vee b$, яка є диз'юнкцією двох висловлень, які позначені тими ж самими буквами, що і відповідні контакти схеми.

6. З розглянутих двох найпростіших контактних схем робимо такий висновок: **послідовне та паралельне з'єднання контактів реалізує операції кон'юнкцію та відповідно диз'юнкцію бульових змінних, кожна з яких (цих змінних) описує стан відповідного контакту; інверсний контакт, розглянутий раніше, реалізує операцію заперечення бульової змінної**.

Таким чином, реалізувавши вказаними найпростішими контактними схемами та інверсним контактом основні операції двійкової бульової алгебри, можна, виявляється, завжди побудувати таку схему, яка реалізує довільну задану бульову функцію, що описуватиме стан цієї схеми.

Зауважимо, що контактну схему довільної складності завжди можна подавати у вигляді окремих груп сполучень контактів, у кожній з яких розглядатиметься лише послідовне або паралельне сполучення відповідних контактів. Завдяки цьому тоді легше складати відповідні їм структурні формули і відповідну структурну формулу всієї контактної схеми. А знаючи структурну формулу, можна зайнятися її спрощенням, у результаті чого можна реалізувати і задачу побудови відповідної простішої контактної схеми. Безперечно, що можна вибрати різні критерії простоти контактної схеми. Найчастіше на практиці одним з найпростіших критеріїв простоти контактної схеми вважається такий: **серед всіх еквівалентних між собою контактних схем найпростішою вважається та, якій відповідає структурна формула з найменшою кількістю входжень бульових змінних; такий критерій дає економію у кількості контактів у схемі, що приводить і до простоти конструкції відповідної контактної схеми, і її здешевлення, і надійності в експлуатації тощо**.

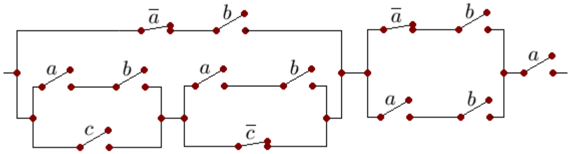
7. Розглянемо приклади розв'язування задач на аналіз роботи контактної схеми, синтез схеми та її спрощення.

Задача 5.4.1. *Проаналізувати роботу контактної схеми, вказаної на малюнку 1.9 нижче, склавши відповідну їй структурну формулу та спростивши її, та намалювати еквівалентну їй спрощену схему.*

Розв'язання. Складаємо відповідну цій схемі структурну формулу і спростимо її.

У результаті отримаємо: $\Phi(a,b,c) \equiv (\overline{a}b \vee (ab \vee c)(ab \vee \overline{c}))(\overline{a}b \vee \vee ab)a \equiv (\overline{a}b \vee (ab \vee c\overline{c}))((\overline{a} \vee a)b)a \equiv (\overline{a}b \vee (ab \vee 0))(1b)a \equiv (\overline{a}b \vee ab)ba \equiv \equiv ((\overline{a} \vee a)b)ba \equiv (1b)ba \equiv bba \equiv ab.$

Оскільки структурна формула значно спростилася, то і відповідна контактна схема теж прийме більш простіший, але еквівалентний, вигляд (див. відповідний малюнок 1.10):



Мал. 1.9.

Мал. 1.10.

Схема, як бачимо, значно спростилася, містить всього два контакти. Аналіз цієї схеми зводиться до наступного: схема пропускатиме струм тоді і тільки тоді, коли контакти a і b одночасно замкнуті.

Задача 5.4.2. *Скласти контактну схему такого автомата, який давав би чашку кави ціною 1 гривня, якщо розраховуватися у касі автомата можна монетами вартістю 10 коп., 25 коп., 50 коп., 1 грн.*

Розв'язання. Згідно умови задачі чашка кави коштує 1 гривня, тобто 100 коп. Заплатити (без здачі) за каву можна такими способами, опустивши відповідну кількість монет у касу:

а) 10 коп. $\cdot$ 10;
б) 25 коп. $\cdot$ 4;
в) 50 коп. $\cdot$ 2;
г) 1 гр. $\cdot$ 1;
д) 10 коп. $\cdot$ 5 і 25 коп. $\cdot$ 2;
е) 10 коп. $\cdot$ 5 і 50 коп. $\cdot$ 1;
є) 25 коп. $\cdot$ 2 і 50 коп. $\cdot$ 1.

Після опускання необхідної кількості монет у відповідні щілини автомата він замкнеться, в результаті чого чашка наповниться порцією кави. Зрозуміло, що порядок опускання монет не впливатиме на остаточний результат видачі порції кави. Для складання структурної формули, яка відповідатиме контактній схемі роботи автомата, введемо такі позначення бульових змінних, відповідних контактам, замикання яких здійснюється опусканням в щілину автомата потрібної кількості монет певної вартості:

а) для монет вартості 10 коп. — $a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}$;

б) для монет вартості 25 коп. — b_1, b_2, b_3, b_4;

в) для монет вартості 50 коп. — c_1, c_2;

г) для монети вартістю 1 гр. — d_1.

Як було відмічено вище, автомат замкнеться (в результаті чого видасть порцію кави) тоді і тільки тоді, коли виконається один із семи варіантів кон'юнкції значень бульових змінних:

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} \equiv 1$;

$b_1b_2b_3b_4 \equiv 1$;

$c_1c_2 \equiv 1$;

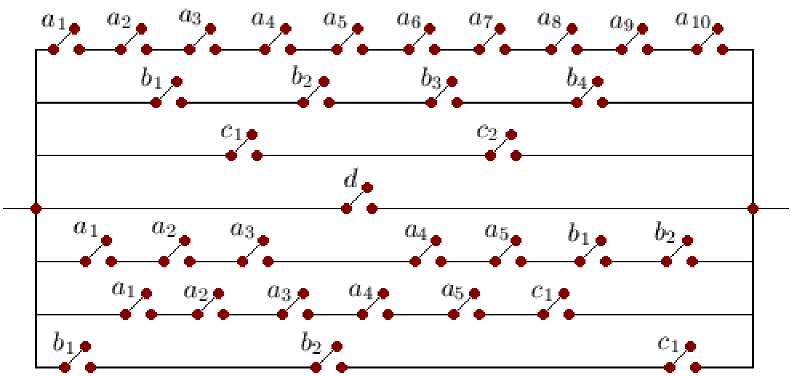
$d \equiv 1$;

$a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2 \equiv 1$;

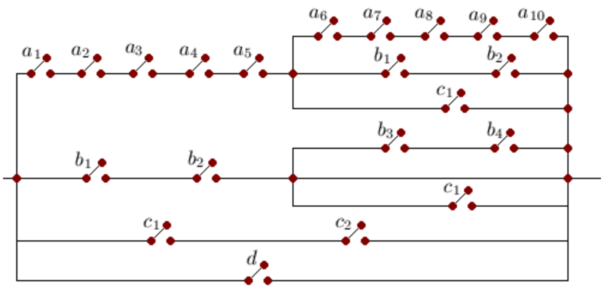
$a_1a_2a_3a_4a_5c_1 \equiv 1$;

$b_1b_2c_1 \equiv 1$.

Тому структурна формула, що відповідає контактній схемі роботи автомата, матиме такий вигляд: $\Phi(a_1, a_2, ..., a_{10}, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, d) \equiv a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10} \vee$ $\vee\, b_1b_2b_3b_4 \vee c_1c_2 \vee d \vee a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2 \vee a_1a_2a_3a_4a_5c_1 \vee b_1b_2c_1$.
Використавши цю структурну формулу, очевидним чином отримаємо таку відповідну їй контакту схему роботи автомата:



В результаті замикання такої контактної схеми автомат щоразу видаватиме порцію кави в підставлену чашку. В наведеній контактній схемі 33 контакти. Займемося спрощенням цієї схеми. Для цього постараємося рівносильними перетвореннями спростити відповідну структурну формулу схеми. Дійсно, застосувавши деякі властивості операцій кон'юнкції, диз'юнкції булькової алгебри, отримаємо: $\Phi(a_1, a_2, ..., a_{10}, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, d) \equiv (a_1 a_2 ... a_{10} \vee a_1 a_2 ... a_5 b_1 b_2 \vee \vee a_1 a_2 ... a_5 c_1) \vee (b_1 b_2 b_3 b_4 \vee b_1 b_2 c_1) \vee c_1 c_2 \vee d \equiv a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 (a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} \vee \vee b_1 b_2 \vee c_1) \vee b_1 b_2 (b_3 b_4 \vee c_1) \vee c_1 c_2 \vee d$. Отже, отримаємо такий спрощений вигляд структурної формули контактної схеми роботи автомата: $\Phi(a_1, a_2, ..., a_{10}, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, d) \equiv a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 (a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} \vee \vee b_1 b_2 \vee c_1) \vee b_1 b_2 (b_3 b_4 \vee c_1) \vee c_1 c_2 \vee d$.



Мал. 1.11.

Відповідна контактна схема роботи автомата прийме такий вигляд як на малюнку 1.11. В утвореній спрощеній контактній схемі кількість контактів зменшилася до 21, в той час як в розглянутій раніше було 33 контакти.

8. Відмітимо на завершення розгляду ідеї технічних застосувань булькової алгебри наступне. В наш час особливо широке застосування набула булькова алгебра при реалізації так званих **швидкодіючих безконтактних елементів автоматики**, які характеризуються неймовірно великою швидкістю зміни своїх станів. Завдяки такій величезній швидкості ці елементи складають основу в конструкції сучасних ЕОМ. Такі елементи в тій чи іншій комбінації входять в так звані **електронно-імпульсні схеми**, основними складовими яких є логічні елементи, які реалізують три основні логічні операції булевої алгебри — кон'юнкцію, диз'юнкцію, заперечення.

5.5 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Яка алгебра називається бульовою?

2. Який тип має бульова алгебра?

3. Як називаються операції бульової алгебри?

4. Що таке нуль бульової алгебри?

5. Що таке одиниця бульової алгебри?

6. Що таке регулярна бульова алгебра?

7. Що таке нерегулярна бульова алгебра?

8. Які приклади бульових алгебр Ви знаєте?

9. Поясніть, чому алгебра висловлень є регулярною бульовою алгеброю.

10. Поясніть, чому алгебра множин є регулярною бульовою алгеброю.

11. Що Ви знаєте про алгебру подій?

12. Що таке алгебра екстремумів $\mathcal{E}_n$ скінченної множини?

13. Поясніть, чому алгебра екстремумів $\mathcal{E}_n$ є нерегулярною алгеброю.

14. На чому оснований принцип двоїстості для бульових алгебр?

15. Нехай B — множина всіх натуральних дільників числа 36, тобто $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Введемо такі операції над цими числами: $0 \overset{df}{=} 1$; $1 \overset{df}{=} 36$; $a + b \overset{df}{=} \text{НСК}(a, b)$; $a \cdot b \overset{df}{=} \text{НСД}(a, b)$; $a' \overset{df}{=} 36 : a$; де $a, b \in B$. Перевірити, які з властивостей 5.1.1 — 5.1.17 бульових алгебр (сторінка 96) виконуються для введених операцій на множині B.

16. Аналогічні завдання перевірити для множини $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ всіх дільників числа 30.

17. Перевірити, чи правильні наступні рівності для алгебри множин, та записати двоїсті до них:

    а) $(A \cap B') \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$;

    б) $A \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$;

    в) $(A \cup B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C')$;

    г) $(A \cap B) \cup (A \cap B)' = U$;

    д) $(A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = A \cup B$;

    е) $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C' = U$;

    є) $(A \cup B') \cap (A' \cup C) \cap (B' \cup D)' = \varnothing$;

    ж) $(A \cap B' \cap (A' \cup B))' = U$;

    з) $((A \cup B)' \cap (A' \cup B'))' = A \cup B$;

    и) $(A' \cup B' \cup C)' \cup (A' \cup B)' \cup (A' \cup C) = U$;

    і) $((A' \cap B') \cap (A' \cup B'))' = A \cup B$;

    ї) $(A \cup B) \cup (B' \cap A) \cup (A' \cap B) = A \cup B$,
    де U — універсальна множина, яка грає роль одиниці в алгебрі множин; роль нуля грає порожня множина $\varnothing$.

18. Вказані вище рівності записати на мові алгебри висловлень і аналогічно перевірити, які з них істинні рівносильності, та записати двоїсті до них.

19. Перевірити справедливість наступних співвідношень для алгебри висловлень та записати двоїсті до них:

    а) $(p \wedge q) \vee (q \wedge p) \vee \overline{p} \vee \overline{q} \equiv T$;

б) $\overline{p \vee \overline{q}} \equiv \overline{p} \wedge q$;

в) $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) \equiv T$;

г) $(p \wedge q) \vee (q \wedge p) \vee (\overline{p} \vee \overline{q}) \equiv T$;

д) $(p \vee (g \wedge r)) \wedge (\overline{p} \vee (q \wedge r)) \equiv q \wedge r$;

е) $(p \wedge q) \vee r \vee (\overline{p} \wedge q) \vee q \equiv T$;

є) $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r) \equiv (p \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (q \wedge r)$;

ж) $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \overline{s}) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q}) \equiv p$;

з) $(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge s) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge \overline{s}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge q) \equiv p$.

20. Довести такі рівності з алгебри множин та записати двоїсті до них:

а) $(A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (B \cap C) = C$;

б) $(A \cap B \cap C)' \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap (B \cup A')) = A' \cup B' \cup C'$;

в) $(A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = A \cup B$;

г) $(A' \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (B' \cap C) \cup (B' \cap A) = B'$;

д) $(A \cup (A' \cap B)) \cap (A' \cup (B' \cap A)) = (A \cup B) \cap (B' \cup A')$;

е) $(A \cup B \cup C)' \cup (A \cup B')' \cup (A' \cap B' \cap C) = A'$.

21. Довести наступні рівності з алгебри висловлень та записати двоїсті до них:

а) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \overline{r}) \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge \overline{p} \equiv F$;

б) $p \wedge (p \vee q) \vee \overline{p \wedge q} \equiv T$;

в) $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q) \equiv \overline{p} \vee q$;

г) $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q}) \equiv p \vee r$;

д) $((p \wedge q) \wedge (s \wedge r) \vee p \vee r) \wedge \overline{p} \vee \overline{p \vee r} \equiv \overline{p}$;

е) $\overline{p \vee \overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{s}} \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r \wedge \overline{s}) \vee \overline{p \vee \overline{q} \vee r} \equiv \overline{p} \wedge q$.

22. Вказані у вправі 20 рівності записати на мові алгебри висловлень, довести їх істинність та записати двоїсті до них в алгебрі висловлень.

23. Вказані у вправі 21 рівносильності записати на мові алгебри множин, довести їх істинність та записати двоїсті до них в алгебрі множин.

24. Хто із видатних людей вперше показав можливість технічних застосувань бульової алгебри? Дайте коротке біографічне повідомлення.

25. Що розуміють під електричним контактом?

26. Що розуміють під контактною схемою?

27. Що розуміють під інверсними між собою контактами?

28. Поясніть, чому стан, в якому може перебувати контактна схема, можна описати бульовою функцією станів її контактів.

29. Що таке структурна формула контактної схеми?

30. Які контактні схеми називаються еквівалентними між собою?

31. Які Ви знаєте дві основні задачі, пов'язані з дослідженням роботи контактних схем?

32. Що таке аналіз роботи контактної схеми та як він реалізується?

33. Що таке синтез контактної схеми та як він здійснюється?

34. В чому полягає задача побудови найпростішої контактної схеми?

35. Як реалізується в контактній схемі

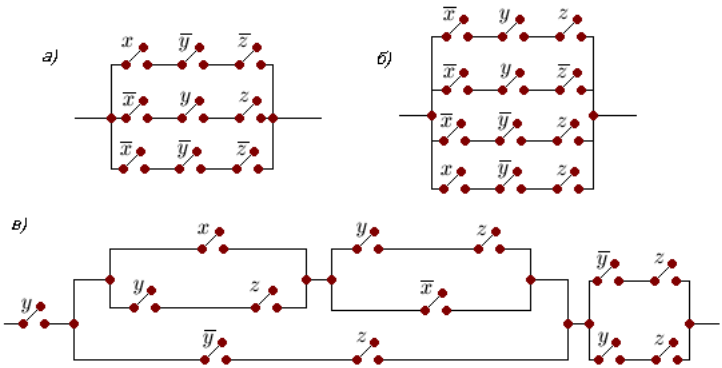
    а) паралельне сполучення контактів;

    б) послідовне сполучення контактів?

36. Якими структурними формулами описується паралельне та послідовне сполучення контактів?

37. Яка ідея використання схем в конструкціях сучасних ЕОМ та як ці схеми називаються? З чого вони складаються?

38. Проаналізувати роботу наступних контактних схем, склавши відповідні їм структурні формули, спростити їх та намалювати спрощені еквівалентні початковим схеми:



Мал. 1.12.

39. Кожний член комітету з трьох осіб голосує шляхом натискання кнопки, яка замикає перемикач, розташований під столом, за яким він сидить. Замикаючи перемикач, він голосує „за“, розмикаючи — „проти“. Накреслити схему, яка б замикалась (лампочка засвітилася) щоразу, коли більшість членів проголосують „за“.

40. У великій залі на кожній з чотирьох стін розташований перемикач. Побудувати таку схему, щоб в будь-який момент можна було включити або виключити світло в залі поворотом лише одного довільного перемикача.

41. * На кожному з двох поверхів двоповерхового будинку розташований перемикач. Побудувати таку схему, щоб в будь-який момент можна було би включити або виключити лампочку, що розташована в коридорі між поверхами, поворотом лише одного довільного перемикача. Як узагальнити розв'язування даної задачі з метою економії світла у випадку більшої кількості поверхів, причому на кожному поверсі є лампочка?

5.6 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

15. Виконуються властивості 5.1.1 — 5.1.17, властивості 5.1.18, 5.1.19 не виконуються. Тому бульова алгебра нерегулярна.

16. Виконуються властивості 5.1.1 — 5.1.19. Тому алгебра є бульовою і регулярною.

17. Всі рівності крім є), — правильні. Двоїстими до заданих рівностей є відповідно такі:

а) $(A \cup B') \cup (B \cup A') = (AB) \cup (A \cup B)'$;

б) $A \cup (B \cup C') = (A \cup B) \cup (A \cup C)'$;

в) $(AB) \cup C' = (A \cup C')(B \cup C')$;

г) $(A \cup B)(A \cup B)' = \varnothing$;

д) $(A \cup B)(A' \cup B)(A \cup B') = AB$;

е) $(A \cup B \cup C)(A' \cup B \cup C)B'C' = \varnothing$;

є) $(AB') \cup (A'C) \cup (B'D)' = U$;

ж) $(A \cup B' \cup (A'B))' = \varnothing$;

з) $((AB)' \cup (A'B'))' = AB$;

и) $(A'B'C)'(A'B)'(A'C) = \varnothing$;

і) $((A' \cup B') \cup (A'B'))' = AB$;

ї) $(AB)(B' \cup A)(A' \cup B) = A \cap B$.

18.

а) $(a\overline{b}) \vee (b\overline{a}) \equiv (a \vee b)\overline{(ab)}$; $(a \vee \overline{b})(b \vee \overline{a}) \equiv ab \vee \overline{a \vee b}$;

б) $a(b\overline{c}) \equiv (ab)\overline{ac}$; $a \vee (b \vee \overline{c}) \equiv (a \vee b) \vee \overline{a \vee c}$;

в) $(a \vee b)\overline{c} \equiv a\overline{c} \vee b\overline{c}$; $ab \vee \overline{c} \equiv (a \vee \overline{c})(b \vee \overline{c})$;

г) $(ab) \vee \overline{ab} \equiv T$; $(a \vee b)\overline{(a \vee b)} \equiv F$;

д) $(ab) \vee (\overline{a}b) \vee (a\overline{b}) \equiv a \vee b$; $(a \vee b)(\overline{a} \vee b)(a \vee \overline{b}) \equiv ab$;

е) $(abc) \vee (\overline{a}bc) \vee \overline{b} \vee \overline{c} \equiv T$; $(a \vee b \vee c)(\overline{a} \vee b \vee c)\overline{b}\overline{c} \equiv F$;

є) $(a \vee \overline{b})(\overline{a} \vee c)\overline{\overline{b} \vee d} \equiv F$; $(a\overline{b}) \vee (\overline{a}c) \vee \overline{\overline{b}d} \equiv T$;

ж) $\overline{(a\overline{b}(\overline{a} \vee b))} \equiv T$; $\overline{a \vee \overline{b} \vee \overline{a}b} \equiv F$;

з) $\overline{\overline{a \vee b}(\overline{a} \vee \overline{b})} \equiv a \vee b$; $\overline{\overline{ab} \vee \overline{\overline{a}\overline{b}}} \equiv ab$;

и) $\overline{\overline{a} \vee \overline{b} \vee c} \vee \overline{\overline{a} \vee b} \vee (\overline{a} \vee c) \equiv T$; $\overline{(\overline{a}\overline{b}c)}\,\overline{(\overline{a}b)}(\overline{a}c) \equiv F$;

і) $\overline{(\overline{a}\overline{b})(\overline{a} \vee \overline{b})} \equiv a \vee b$; $\overline{(\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (\overline{a}\overline{b})} \equiv ab$;

ї) $(a \vee b) \vee (\overline{b}a) \vee (\overline{a}b) \equiv a \vee b$, $(ab)(\overline{b} \vee a)(\overline{a} \vee b) \equiv ab$.

19. Вказані співвідношення правильні, крім е). Двоїстими до них відповідно є такі:

а) $(p \vee q)(q \vee p)\overline{p}\,\overline{q} \equiv F$;

б) $\overline{p\overline{q}} \equiv \overline{p} \wedge q$;
в) $(p \vee q)(\overline{p} \vee q)(p \vee \overline{q})(\overline{p} \vee \overline{q}) \equiv F$;
г) $(p \vee q)(q \vee p)(\overline{p}\,\overline{q}) \equiv F$;
д) $(p(q \vee r)) \vee (\overline{p}(q \vee r)) \equiv q \vee r$;
е) $(p \vee q)r(\overline{p} \vee q)q \equiv F$;
є) $(pq) \vee (\overline{p}r) \equiv (p \vee r)(\overline{p} \vee q)(q \vee r)$;
ж) $(p \vee q \vee r \vee s)(p \vee q \vee r \vee \overline{s})(p \vee q \vee \overline{r})(p \vee \overline{q}) \equiv p$;
з) $(p \vee \overline{q} \vee \overline{r} \vee s)(p \vee \overline{q} \vee \overline{r} \vee \overline{s})(p \vee \overline{q} \vee r)(p \vee q) \equiv p$.

20. Відповідно двоїстими до вказаних рівностей є такі:
а) $(A \cup B' \cup C)(A' \cup B' \cup C)(B \cup C) = C$;
б) $(A \cup B \cup C)'(A' \cup B' \cup C)(A' \cup (B \cap A')) = A' \cap B' \cap C'$;
в) $(A \cup B)(A' \cup B)(A \cup B') = AB$;
г) $(A' \cup B' \cup C')(A' \cup B' \cup C)(B' \cup C)(B' \cup A) = B'$;
д) $(A(A' \cup B)) \cup (A'(B' \cup A)) = (AB) \cup (B'A')$;
е) $(ABC)'(AB')'(A' \cup B' \cup C) = A'$.

Вказівка. Доведення вказаних співвідношень і тих, що відмічені у вправах 17 — 23, проводяться на основі властивостей відповідних операцій з алгебри висловлень та алгебри множин.

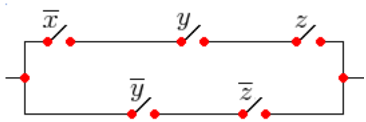
21. Відповідно двоїстими рівносильностями є такі:
а) $(pqr) \vee (pq\overline{r}) \vee p\overline{q} \vee \overline{p} \equiv T$;
б) $(p \vee pq)\overline{p \vee q} \equiv F$;
в) $(p \vee q)(\overline{p} \vee \overline{q})(\overline{p} \vee q) \equiv \overline{p}q$;
г) $(p \vee q)(\overline{p} \vee r)(\overline{p} \vee \overline{q} \vee r)(p \vee \overline{q}) \equiv pr$;
д) $((((p \vee q) \vee (s \vee r))pr) \vee \overline{p})\overline{pr} \equiv \overline{p}$;
е) $\overline{(p\overline{q}\,\overline{r}\,\overline{s})}(\overline{p} \vee q \vee r \vee \overline{s})\overline{(p\overline{q}r)} \equiv \overline{p} \vee q$.

22. На мові висловлень відповідні співвідношення та двоїсті до них із вправи 20 будуть такими:
а) $a\overline{b}c \vee \overline{a}\overline{b}c \vee bc \equiv c \quad (a \vee \overline{b} \vee c)(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)(b \vee c) \equiv c$;
б) $\overline{abc} \vee \overline{a}\,\overline{b}c \vee \overline{a}(b \vee \overline{a}) \equiv \overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c}$; $\overline{(a \vee b \vee c)}(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)(\overline{a} \vee b\overline{a}) \equiv \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$;
в) $ab \vee \overline{a}b \vee a\overline{b} \equiv a \vee b$; $(a \vee b)(\overline{a} \vee b)(a \vee \overline{b}) \equiv ab$;
г) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \vee \overline{a}\overline{b}c \vee \overline{b}c \vee \overline{b}a \equiv \overline{b}$; $(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)(\overline{b} \vee c)(\overline{b} \vee a) \equiv \overline{b}$;
д) $(a \vee \overline{a}b)(\overline{a} \vee \overline{b}a) \equiv (a \vee b)(\overline{b} \vee \overline{a})$; $(a(\overline{a} \vee b)) \vee (\overline{a}(\overline{b} \vee a)) \equiv ab \vee \overline{b}\overline{a}$;
е) $\overline{(a \vee b \vee c)} \vee \overline{(a \vee \overline{b})} \vee (\overline{a}\overline{b}c) \equiv \overline{a}$; $\overline{(abc)}\overline{(a\overline{b})}(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c) \equiv \overline{a}$.

23. На мові алгебри множин рівносильності з вправи 21 та двоїсті до них приймуть відповідно вигляд таких рівностей:
а) $(P \cup Q \cup R)(P \cup Q \cup R')(P \cup Q')P' = \varnothing$;
$PQR \cup PQR' \cup PQ' \cup P' = U$;

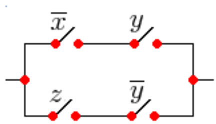
б) $P(P \cup Q) \cup (PQ)' = U$; $(P \cup PQ)(P \cup Q)' = \varnothing$;
в) $(PQ) \cup P'Q' \cup P'Q = P' \cup Q$;
$(P \cup Q)(P' \cup Q')(P' \cup Q) = P'Q$;
г) $PQ \cup P'R \cup P'Q'R \cup PQ' = P \cup R$;
$(P \cup Q)(P' \cup R)(P' \cup Q' \cup R)(P \cup Q') = PR$;
д) $((PQ)(SR) \cup P \cup R)P' \cup (P \cup R)' = P'$;
$((((P \cup Q) \cup (S \cup R))PR) \cup P')(PR)' = P'$;
е) $(P \cup Q' \cup R' \cup S')' \cup (P'QRS') \cup (P \cup Q' \cup R)' = P'Q$;
$(PQ'R'S')'(P' \cup Q \cup R \cup S')(PQ'R)' = P' \cup Q$.
38.

а) Відповідна структурна формула контактної схеми має такий вигляд: $\Phi(x, y, z) \equiv x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$. У результаті спрощення ця формула прийме такий вигляд: $\Phi(x, y, z) \equiv \overline{x}yz \vee \overline{y}\,\overline{z}$. Цій формулі відповідає еквівалентна схема на (мал. 1.13):



Мал. 1.13.

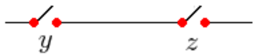
б) $\Phi(x, y, z) \equiv \overline{x}yz \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z$. У результаті спрощення маємо $\Phi(x, y, z) \equiv \overline{x}y \vee \overline{y}z$. Останній структурній формулі відповідає контактна схема на (мал. 1.14):



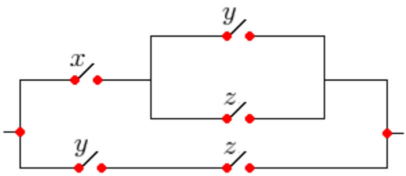
Мал. 1.14.

в) $\Phi(x, y, z) \equiv y((x \vee yz)(yz \vee \overline{x}) \vee \overline{y}z)(\overline{y}z \vee yz)$. Спрощена структурна формула матиме такий вигляд: $\Phi(x, y, z) \equiv yz$. Цій формулі відповідає контактна схема (див. мал. 1.15):

39. $\Phi(x, y, z) \equiv x(y \vee z) \vee yz$. Контактна схема матиме вигляд як на (мал. 1.16):

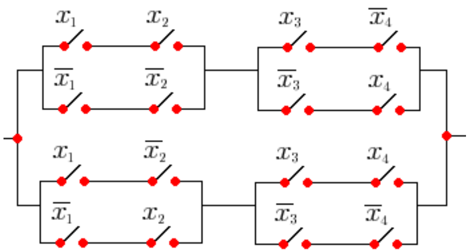


Мал. 1.15.



Мал. 1.16.

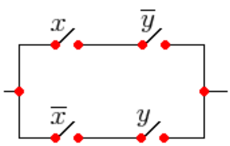
40. Контактна схема матиме вигляд як на (мал. 1.17): Відповідна структурна формула така: $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x_1 x_2 \vee$



Мал. 1.17.

$\overline{x}_1 \overline{x}_2)(x_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_3 x_4) \vee (x_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2)(x_3 x_4 \vee \overline{x}_3 \overline{x}_4)$.

41. Контактна схема для двоповерхового будинку така як на (мал. 1.18): Відповідна структурна формула така: $\Phi(x, y) \equiv x\overline{y} \vee \overline{x} y$.



Мал. 1.18.

6 Система натуральних чисел; метод математичної індукції та його застосування

1. Система натуральних чисел як впорядковане напівкільце.
2. Аксіоми Пеано.
3. Принцип математичної індукції, різні форми індукції.
4. Метод повної математичної індукції та його застосування до розв'язування задач.
5. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.
6. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

6.1 Система натуральних чисел як впорядковане напівкільце

1. Відомо, що в математиці для дослідження кількісних співвідношень в реальному світі використовується як одне із основних інструментів число. Не вдаючись в деталі вчення про числа, відмітимо лише, що основою побудови будь-яких числових систем є натуральні числа. В математиці при побудові системи натуральних чисел є різні підходи. В першу чергу — це виділення **кількісної характеристики натурального числа** (кількості елементів класу скінченних множин, тобто, говорять, потужності множини). Крім кількісної характеристики натурального числа, для вивчення натуральних чисел **вводиться порядкова характеристика натурального числа** — це відношення слідування, для якого мають місце спеціальні умови — аксіоми Пеано.

2. Введемо систему натуральних чисел як деяке впорядковане напівкільце.

Означення 6.1.1. *Алгебраїчна система виду* $(\mathbb{N}; +, \cdot, \leqslant)$ *називається системою натуральних чисел, якщо алгебра* $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ *з двома бінарними операціями додавання* $+$ *і множення* $\cdot$ *є комутативним напівкільцем з одиницею* $1 \in \mathbb{N}$*, тобто виконуються співвідношення*

1. $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})((a + b) + c = a + (b + c))$ *— асоціативність* $+$*;*

2. $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$ — *асоціативність* $\cdot$*;*

3. $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a + b = b + a)$ — *комутативність* $+$*;*

4. $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a \cdot b = b \cdot a)$ — *комутативність* $\cdot$*;*

5. $(\forall a \in \mathbb{N})(1 \cdot a = a \cdot 1 = a)$ $1 \in N$ — *одиниця в напівкільці* $(\mathbb{N}; +, \cdot)$*, тобто 1 — нейтральний елемент відносно операції* $\cdot$*;*

6. $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})(a(b + c) = ab + ac \wedge (b + c)a = ba + ca)$ — *дистрибутивність множення відносно додавання,*

   а $\leqslant$ *є бінарним відношенням лінійного порядку в алгебрі* $(\mathbb{N}; +, \cdot)$*, регулярним відносно операції додавання і множення та повним на множині* $\mathbb{N}$*, тобто мають місце співвідношення*

7. $(\forall a \in \mathbb{N})(a \leqslant a)$ — *рефлексивність відношення* $\leqslant$*, де* $a \leqslant b$ *означає* $(a < b \vee a = b)$*,* $a < b$ *означає, що* $b = a + c$ *для деякого* $c \in \mathbb{N}$*;*

8. $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})(a \leqslant b \wedge b \leqslant c \to a \leqslant c)$ — *транзитивність* $\leqslant$*;*

9. $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a \leqslant b \wedge b \leqslant a \to a = b)$ — *антисиметричність* $\leqslant$*;*

10. $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})(a \leqslant b \to a + c \leqslant b + c)$ — *регулярність* $\leqslant$ *відносно додавання;*

11. $(\forall a, b, c \in \mathbb{N})(a \leqslant b \to ac \leqslant bc)$ — *регулярність* $\leqslant$ *відносно множення;*

12. $(\forall a, b \in \mathbb{N})(a \leqslant b \vee b \leqslant a)$ — *лінійність порядку* $\leqslant$*;*

13. $(\forall A \subset \mathbb{N})(A \neq \varnothing \to (\exists a \in A)(\forall b \in A)(a \leqslant b))$ — *повнота порядку* $\leqslant$*, яка вказує на те, що довільна непорожня підмножина володіє найменшим елементом.*

3. Легко бачити, що одиниця 1 є найменшим елементом довільної підмножини $A \subset \mathbb{N}$, яка містить цю одиницю, причому для довільного елемента $a \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення:

$$a < a + 1;$$
$$1 \leqslant a,$$

а елементи a і $a' = a + 1$ називаються **сусідніми** в силу того, що між елементами a і a' не існує таких елементів b, щоб виконувалися співвідношення $a < b < a'$. Останнє вказує на те, що множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел **дискретна**.

Можна також показати, що для довільних елементів $a, b \in \mathbb{N}$ знайдеться такий елемент $n \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність

$$a < nb,$$

яку називають **нерівністю Архімеда**.

4. Відмітимо також, що в розглядуваній системі натуральних чисел вводяться часткові бінарні операції, обернені відповідно до операції додавання та множення — це операції віднімання $-$ та ділення :, а саме:

1. Якщо $a < b$, то **різницею** $b - a$ елементів b і a з множини $\mathbb{N}$ є такий елемент $c \in \mathbb{N}$, що $b = a + c$, тобто

$$c \overset{df}{=} b - a \overset{df}{\Longleftrightarrow} (b = a + c \wedge a < b);$$

якщо ж $b \leqslant a$, то різниця $b - a$ не визначена.

2. **Часткою** $a : b$ елементів $a, b \in \mathbb{N}$ є такий елемент $c \in \mathbb{N}$, що $a = bc$, тобто

$$c \overset{df}{=} a : b \overset{df}{\Longleftrightarrow} (a = bc \wedge c \in \mathbb{N}).$$

При детальному дослідженні всіх вказаних чотирьох операцій можна показати, що вони володіють цілим рядом цікавих властивостей, які будуть детально вивчатися в розділі „Теорія цілих чисел“ курсу „Алгебра і теорія чисел“. Відмітимо лише, що ці операції володіють, наприклад, властивостями **скорочення**, а саме — для довільних елементів $a, b, c \in \mathbb{N}$ справедливі співвідношення

$$a \pm c = b \pm c \Rightarrow a = b;$$
$$ac = bc \Rightarrow a = c;$$
$$a : c = b : c \Rightarrow a = b.$$

6.2 Аксіоми Пеано

1. Як було відмічено вище, введення системи натуральних чисел можна здійснити за допомогою аксіом Пеано (1858 р. —

1932 р.). Основним поняттям при розгляді цих аксіом є **відношення слідування, наступності**, за допомогою яких розкривається порядкова характеристика натурального числа. При цьому той елемент, який слідує за елементом a, позначатимемо за допомогою a'; тоді говорять також, що елемент a передує елементу a', який є наступним для a.

Означення 6.2.1. *Множина $\mathbb{N}$, у якій введено відношення слідування, називається **системою натуральних чисел**, якщо мають місце такі чотири аксіоми:*

1. *Існує такий елемент в множині $\mathbb{N}$, який не слідує ні за жодним іншим елементом з $\mathbb{N}$; цей елемент позначають за допомогою символу 1 і називають **одиницею системи натуральних чисел**, тобто $1 \neq a'$ для будь-якого $a \in \mathbb{N}$;*
2. *За будь-яким елементом $a \in \mathbb{N}$ слідує єдиний елемент $a' \in \mathbb{N}$;*
3. *Кожному наступному елементу $a' \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, крім одиниці 1, передує єдиний відповідний елемент $a \in \mathbb{N}$;*
4. *(Аксіома індукції). Довільна підмножина $M \subset \mathbb{N}$, яка містить одиницю і з кожним елементом $a \in \mathbb{M}$ містить наступний елемент $a' \in M$, співпадає з усією множиною $\mathbb{N}$.*

На мові бінарних відношень аксіоми Пеано можна подати більш компактно, а саме. Нехай відношення слідування на множині $\mathbb{N}$ позначимо за допомогою однорідного бінарного відношення $f \subset \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ такого, що

$$(a_1; a_2) \in f \overset{df}{\Longleftrightarrow} a_2 = a_1'$$

для будь-яких елементів $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$. Тоді:

аксіома 1 означає, що $1 \notin \breve{f}(\mathbb{N})$;

аксіома 2 означає, що f є функцією, заданою на множині $\mathbb{N}$;

аксіома 3 означає, що f є взаємно однозначною функцією з множиною значень $\breve{f}(N) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

аксіома 4 (аксіома індукції) означає, що довільна підмножина $M \subset \mathbb{N}$, яка задовольняє умові $(1 \in M \wedge \breve{f}(M) \subset M)$, співпадає з усією множиною $\mathbb{N}$, тобто $M = \mathbb{N}$.

Більш коротко ці аксіоми можна було би виразити так: на множині $\mathbb{N}$ з виділеним елементом $1 \in \mathbb{N}$ можна задати таке бінарне відношення $f \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, що f є бієкцією між $\mathbb{N}$ і $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ такою, що для довільної підмножини $M \subset \mathbb{N}$ виконується співвідношення

$$1 \in M \wedge \breve{f}(M) \subset M \Rightarrow M = \mathbb{N}.$$

Вперше, і в дещо іншому вигляді, ці аксіоми запропонував італійський математик і логік Джузеппе Пеано у 1891 р., який розглядав ці аксіоми на множині $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ з нулем 0.

2. На базі розглянутих вище аксіом на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел вводяться операції додавання і множення, відношення порядку $<$ та доводяться їх властивості:

а) кожній парі $(a; b)$ елементів відповідає такий єдиний елемент $a + b \in \mathbb{N}$, що

$$a + 1 \overset{df}{=} a'; \; a + b' \overset{df}{=} (a + b)';$$

б) кожній парі $(a; b)$ елементів $a, b \in \mathbb{N}$ відповідає такий єдиний елемент $a \cdot b \in \mathbb{N}$, що

$$a \cdot 1 \overset{df}{=} a; \; ab' \overset{df}{=} ab + a;$$

в) $a < b \overset{df}{\Longleftrightarrow} (\exists c \in \mathbb{N})(b = a + c)$, де $a, b \in \mathbb{N}$ — довільні елементи множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел.

Зауважимо, що аксіома індукції, можна показати, рівносильна повноті порядку $\leqslant$, введеній раніше і яку ще називають **принципом найменшого числа**.

6.3 Принцип математичної індукції, різні форми індукції

1. Аксіома індукції є основою методу доведення в математиці, який називається **методом повної математичної індукції**. Цей метод доведення математичних тверджень базується на так званому **принципі повної математичної індукції**, який є одним з основних тверджень в сучасній математиці. Цей принцип є по суті перефразуванням аксіоми індукції і має вигляд такої теореми:

Теорема 6.3.1. *Нехай твердження $T(n)$, що має форму одномісного предиката із змінною $n \in \mathbb{N}$, заданого на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел, задовольняє двом умовам:*

1. $T(1)$ істинно, тобто одиниця 1 задовольняє предикат $T(n)$;

2. Для довільного натурального $k \in \mathbb{N}$ з істинності $T(k)$ випливає істинність $T(k+1)$.

Тоді для будь-якого натурального n істинно твердження $T(n)$.

Доведення очевидним чином випливає з аксіоми індукції. Дійсно, нехай $T \overset{df}{=} \{n \in \mathbb{N} | T(n)\} \subset \mathbb{N}$ — множина істинності твердження $T(n)$. На основі 1 з умови теореми маємо, що $1 \in T$, а на основі 2 випливає, що для будь-якого натурального $k \in \mathbb{N}$ маємо $k+1 \in T$, якщо $k \in T$. Тому на основі аксіоми індукції робимо висновок про те, що $T = \mathbb{N}$, тобто довільне натуральне $n \in T$ задовольняє твердження $T(n)$ і, отже, $T(n)$ істинне ■

З використанням елементів математичної логіки цей принцип можна подати у такій символічній формі:

$$(T(1) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(T(k) \rightarrow T(k+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})T(n).$$

2. Крім розглянутого вище в (теоремі 6.3.1) принципу **повної** математичної індукції, який ще називають **основною формою** принципу математичної індукції, мають також місце і інші форми цього принципу та їх узагальнення, що випливають з аксіоми індукції та принципу найменшого числа, який, як вказувалося вище, є перефразовкою повноти природного порядку $\leqslant$, введеного раніше на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел. Відмітимо деякі з них у вигляді наступних теорем.

Теорема 6.3.2. *(Узагальнення основної форми принципу математичної індукції). Якщо твердження $T(k_0)$ істинно для певного натурального $k_0 \in \mathbb{N}$ і для довільного натурального $k \in \mathbb{N}$ такого, що $k_0 \leqslant k$, з припущення істинності $T(k)$ випливає істинність $T(k+1)$, то для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$ такого, що $k_0 \leqslant n$, істинно твердження $T(n)$.*

Символічно це узагальнення можна виразити так: $(k_0 \in \mathbb{N} \wedge \wedge T(k_0) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(k_0 \leqslant k \wedge T(k) \rightarrow T(k+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(k_0 \leqslant \leqslant n \rightarrow T(n))$.

Теорема 6.3.3. *(Друга форма принципу математичної індукції). Нехай твердження $T(n)$, де $n \in \mathbb{N}$, яке задане на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел, задовольняє двом умовам:*

1. $T(1)$ істинно;

2. Для довільного натурального $k \in \mathbb{N}$ з припущення істинності $T(m)$ для всіх натуральних $m < k$ випливає істинність $T(k)$.

Тоді для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$ істинно твердження $T(n)$.

Символічно ця друга форма принципу математичної індукції матиме такий вигляд: $(T(1) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})((\forall m \in \mathbb{N})(m < k \to T(m)) \to T(k))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})T(n)$.

Теорема 6.3.4. *(Узагальнення другої форми принципу математичної індукції). Нехай твердження $T(n)$, де $n \in \mathbb{N}$, яке задане на множині $\mathbb{N} \setminus \{1, 2, ..., k_0 - 1\}$ натуральних чисел, де $k_0 \in \mathbb{N}$ — певне натуральне число, задовольняє двом умовам:*

1. $T(k_0)$ — істинно;

2. Для довільного натурального $k \in \mathbb{N}$ з припущення істинності $T(m)$, для всіх натуральних $k_0 \leqslant m < k$ випливає істинність $T(k)$.

Тоді для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$ такого, що $k_0 \leqslant n$, істинно твердження $T(n)$.

Символічно це узагальнення матиме такий вигляд: $(k_0 \in \mathbb{N} \wedge \wedge (\forall k \in \mathbb{N})((\forall m)(k_0 \leqslant m < k \to T(m)) \wedge k_0 < k \to T(k))) \Rightarrow (\forall n \in \in \mathbb{N})(k_0 \leqslant n \to T(n))$.

6.4 Метод повної математичної індукції та його застосування до розв'язування задач

1. Як було зазначено вище, на основі принципу математичної індукції ґрунтується один із важливих методів доведення математичних тверджень — це **метод повної математичної індукції**, який часто використовується для математичного обґрунтування певної висунутої гіпотези.

Схема застосування цього методу наступна. Нехай сформульована у вигляді математичного твердження $T(n)$, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число, певна гіпотеза, істинність якої слід встановити для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$. Доведення істинності такого твердження $T(n)$ для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$ виконують за допомогою таких **трьох кроків** (мається на увазі використання основної форми принципу математичної індукції):

1. **База індукції** — перевіряється, встановлюється істинність твердження $T(1)$;

2. **Крок індукції** — робиться припущення про істинність твердження $T(k)$, де $k \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число, і на його основі доводиться істинність твердження $T(k+1)$;

3. **Висновок** — на основі перших двох кроків та принципу математичної індукції робиться висновок про те, що твердження $T(n)$ істинне для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що на практиці, при конкретній реалізації методу повної математичної індукції для тієї чи іншої задачі найбільш складним і громіздким є другий крок — крок індукції.

2. Даний метод можна використовувати при дослідженні різноманітних тверджень, задач, які символічно можна подати у вигляді

$$(\forall n \in M \subset \mathbb{N}) T(n)$$

або

$$(\forall n \in M \subset \mathbb{Z}) T(n),$$

де нескінченна множина M, на якій заданий предикат $T(n)$, що виражає певне твердження, є підмножиною натуральних чисел $\mathbb{N}$ або цілих чисел $\mathbb{Z}$.

Цей метод широко використовується і при доведенні цілого ряду теорем з алгебри, геометрії, математичного аналізу, і при доведенні багатьох тотожностей, нерівностей, і при обчисленні різноманітних сум, добутків, і при розв'язуванні задач на подільність цілих чисел, і при дослідженні різноманітних послідовностей тощо.

Розглянемо для ілюстрації приклади розв'язування деяких задач із перелічених вище типів.

Задача 6.4.1. *Вивести формулу для обчислення суми перших n непарних натуральних чисел та показати, що вона виконується для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$.*

Розв'язання. Очевидно, що суму S_n перших n непарних натуральних чисел $1, 3, 5, 7, ..., (2n-1)$ можна формально записати як суму перелічених n доданків, тобто

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1).$$

Задача полягає в тому, щоб таку суму записати у вигляді деякого компактного виразу $A(n)$, який для будь-якого конкретного значення $n_0 \in \mathbb{N}$ дає можливість легко обчислити відповідну суму S_{n_0} перших n_0 непарних натуральних чисел. Оскільки нам невідомий вигляд цього виразу $A(n)$ в загальному вигляді, то обчислимо перш за все суми $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, ...$, замітимо закономірність в цій послідовності сум, що дасть нам можливість висунути гіпотезу про вигляд формули для суми для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$. В результаті безпосередніх обчислень отримаємо:
$S_1 = 1 = 1^2$;
$S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$;
$S_3 = (1 + 3) + 5 = 4 + 5 = 9 = 3^2$;
$S_4 = (1 + 3 + 5) + 7 = 9 + 7 = 16 = 4^2$;
$S_5 = (1 + 3 + 5 + 7) + 9 = 16 + 9 = 25 = 5^2$;
....
На основі отриманих значень для сум $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, ...$ **висуваємо гіпотезу** про те, що формула для обчислення суми S_n для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$ матиме такий вигляд:

$$S_n = n^2.$$

Тепер обґрунтуємо справедливість цієї гіпотези, застосувавши основну форму принципу повної математичної індукції.

База індукції. $S_1 = 1 = 1^2$ — істина.

Крок індукції. Нехай формула $S_k = k^2$ істинна для натурального $k \in \mathbb{N}$; доведемо, що вона істинна для $k + 1$, тобто істинна рівність $S_{k+1} = (k+1)^2$. Дійсно, маємо: $S_{k+1} = S_k + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 2 - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, що і треба було показати.

Висновок. На основі принципу повної математичної індукції та виконання бази і кроку індукції виконується рівність $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що розв'язування даної задачі по суті склалося з таких етапів дослідження:

- спостереження, експеримент — обчислили суми $S_1, S_2, S_3, \ldots$ з метою пошуку загальної форми виразу цих сум;

- висунення гіпотези — подали вигляд формули для суми S_n при будь-якому натуральному $n \in \mathbb{N}$;

- обґрунтування, доведення істинності висунутої гіпотези — застосували метод повної математичної індукції.

Задача 6.4.2. *Довести, що для довільного натурального* $n \in \mathbb{N}$ *число* $a_n = 4^n + 15n - 1$ *ділиться на 9.*

Доведення. Застосуємо основну форму принципу повної математичної індукції.

База індукції. $a_1 = 4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18 \vdots 9$, тобто $a_1 = 18$ ділиться на 9 — істина.

Крок індукції. Нехай $a_k \vdots 9$, тобто $a_k = 4^k + 15k - 1$ ділиться на 9 — істина; покажемо, що $a_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ ділиться на 9 — теж істина, де $k \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число. Маємо: $a_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 = (4 \cdot 4^k + 4 \cdot 15k - -4) - 3 \cdot 15k + 15 + 3 = 4 \cdot (4^k + 15k - 1) - (45k - 18) = 4 \cdot a_k + 9(-5k + 2)$. Легко бачити, що обидва доданки $4a_k$ і $-9 \cdot (5k - 2)$ отриманої суми діляться на 9. Тому те, що a_{k+1} ділиться на 9, є теж істиною.

Висновок. На основі принципу повної математичної індукції і того, що база і крок індукції виконуються, робимо висновок про те, що для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$ число $a_n = 4^n + 15n - 1$ ділиться на 9 ■

Задача 6.4.3. *Довести, що для всіх натуральних* n *виконується рівність* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доведення. Застосуємо до даної задачі теж основну форму принципу повної математичної індукції. Нехай $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + + \ldots + n^2$ — сума квадратів перших n натуральних чисел.

База індукції. $S_1 = 1^2 = 1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ — істина.

Крок індукції. Нехай $S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ — істина. Покажемо, що $S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$ теж істина, де $k \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число. Справді, маємо: $S_{k+1} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2) + (k+1)^2 = S_k + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \dfrac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \dfrac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \dfrac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} = \dfrac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$, що і треба було показати.

Висновок. На основі бази і кроку індукції та принципу повної математичної індукції виконується рівність $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$.

Задача 6.4.4. *Довести, що для довільного натурального* $n \in \mathbb{N}$ *такого, що* $n > 2$, *виконується нерівність* $\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(n-1)\cdot n} < \dfrac{1}{2}$.

Доведення. Застосуємо до цієї задачі узагальнення основної форми принципу повної математичної індукції. Введемо позначення $S_n = \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(n-1)\cdot n}$, де $3 \leqslant n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число, яке більше за 2.

База індукції. $S_3 = \dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$ — істина.

Крок індукції. Нехай $S_k = \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(k-1)\cdot k} < \dfrac{1}{2}$ — істина; покажемо, що $S_{k+1} = \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(k)\cdot(k+1)} < \dfrac{1}{2}$ теж істина, де $k \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число таке, що $3 \leqslant k$. Дійсно, маємо: $S_{k+1} = \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(k)\cdot(k+1)} = \left(\dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + ... + \dfrac{1}{(k-1)\cdot k}\right) +$

$$+ \frac{1}{k\cdot(k+1)} = S_k + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$
$$= \left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-$$
$$-\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{k+1} < \frac{1}{2},$$ що і треба було показати.

Висновок. На сонові бази і кроку індукції та принципу повної математичної індукції виконується нерівність $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+$ $+\frac{1}{(n-1)\cdot n} < \frac{1}{2}$ для будь-якого натурального числа $n \in \mathbb{N}$, яке більше за 2.

Задача 6.4.5. *Послідовність чисел $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, що задається умовами $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n-1} + a_n = a_{n+1}$, де $n \in \mathbb{N}$, називається* ***рядом Фібоначчі****. Довести, що члени цього ряду володіють властивістю: $a_n^2 = a_{n-1}\cdot a_{n+1} + (-1)^n$, де $n \in \mathbb{N}$ — будь-яке натуральне число.*

Доведення. Легко бачити, що перші кілька членів ряду Фібоначчі мають такий вигляд: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Застосуємо до даної задачі основну форму принципу повної математичної індукції.

База індукції. При $n = 1$ маємо $a_1^2 = 1^2 = 1$ і $a_0\cdot a_2 + (-1)^1 = 1\cdot 2 - 1 = 1$, що вказує на те, що рівність $a_1^2 = a_0\cdot a_2 + (-1)^1$ виконується, тобто вона істинна.

Крок індукції. Нехай для $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $a_k^2 = a_{k-1}a_{k+1} + (-1)^k$; доведемо, що виконується аналогічна рівність $a_{k+1}^2 = a_k a_{k+2} + (-1)^{k+1}$ для $k+1 \in \mathbb{N}$, де $k \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число. Дійсно, маємо: $a_{k+1}^2 = (a_{k+1}^2 - a_k\cdot a_{k+2}) + a_k\cdot a_{k+2} = a_{k+1}^2 - a_k\cdot(a_k + a_{k+1}) + a_k\cdot a_{k+2} = a_{k+1}^2 - a_{k+1}a_k - a_k^2 + a_k\cdot a_{k+2} = a_{k+1}(a_{k+1} - a_k) - a_k^2 + a_k\cdot a_{k+2} = a_{k+1}\cdot a_{k-1} - a_k^2 + a_k\cdot a_{k+2} = -(a_k^2 - a_{k+1}\cdot a_{k-1}) + a_k\cdot a_{k+2} = -(-1)^k + a_k\cdot a_{k+2} = a_k\cdot a_{k+2} + (-1)^{k+1}$, тобто $a_{k+1}^2 = a_k\cdot a_{k+2} + (-1)^{k+1}$, що й треба було довести.

Висновок. На основі принципу повної математичної індукції та доведених бази і кроку індукції робимо висновок про те, що рівність $a_n^2 = a_{n-1}\cdot a_{n+2} + (-1)^n$ має місце для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$ ■

6.5 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Сформулюйте означення системи натуральних чисел як спеціально впорядкованого напівкільця з одиницею.
2. Що Ви розумієте під поняттям напівкільця?
3. Дайте означення строгого і нестрогого порядку в системі натуральних чисел.
4. Який існує взаємозв'язок між строгим і нестрогим порядком в системі натуральних чисел?
5. Який порядок називається лінійним?
6. Який порядок називається повним?
7. Що таке найменший елемент впорядкованої підмножини?
8. Як вводиться віднімання в системі натуральних чисел?
9. Як вводиться ділення в системі натуральних чисел?
10. Чому віднімання та ділення є частковими бінарними операціями в системі натуральних чисел?
11. Що означає, що порядок в системі натуральних чисел є регулярним як відносно додавання, так і відносно множення?
12. Доведіть, що операції додавання, віднімання, множення скоротні в системі натуральних чисел.
13. Які числа в системі натуральних чисел називаються сусідніми?
14. Чому числа виду a і $a+1$, де $a \in \mathbb{N}$, є сусідніми між собою?
15. Сформулюйте і доведіть нерівність Архімеда.
16. Сформулюйте означення системи натуральних чисел на основі аксіом Пеано.

17. Які числа в системі натуральних чисел називаються наступними, попередніми?

18. Чи будь-яке число в системі натуральних чисел володіє: а) наступним числом; б) попереднім числом?

19. Чи будьяке число в системі натуральних чисел може бути: а) наступним; б) попереднім?

20. Скільки існує для даного числа а) наступних чисел; б) попередніх чисел?

21. Сформулюйте аксіому індукції Пеано.

22. Як сформулювати аксіоми Пеано на мові відображення системи натуральних чисел?

23. Як на основі аксіоми Пеано вводяться дії додавання та множення в системі натуральних чисел?

24. Що таке принцип найменшого числа в системі натуральних чисел?

25. Довести, що аксіома індукції рівносильна принципу найменшого числа в системі натуральних чисел.

26. Що таке метод повної математичної індукції та коли його можна застосувати?

27. Сформулюйте основну форму принципу повної математичної індукції.

28. Як символічно записати основну форму принципу повної математичної індукції?

29. Сформулюйте узагальнення основної форми принципу повної математичної індукції.

30. Як символічно записати узагальнення основної форми принципу повної математичної індукції?

31. Сформулюйте другу форму принципу повної математичної індукції.

32. Як символічно записати другу форму принципу повної математичної індукції?

33. Сформулюйте узагальнення другої форми принципу повної математичної індукції.

34. Як символічно записати узагальнення другої форми принципу повної математичної індукції?

35. Наведіть приклади задач, у яких можна використати

    а) основну форму,

    б) узагальнення основної форми,

    в) другу форму,

    г) узагальненням другої форми принципу повної математичної індукції.

36. Вкажіть основні кроки при застосуванні методу повної математичної індукції, якщо вона виражена

    а) основною формою,

    б) узагальненням основної форми,

    в) другою формою,

    г) узагальнення другої форми принципу повної математичної індукції.

37. Які Ви знаєте типи задач, при розв'язанні яких можна використати метод повної математичної індукції?

38. Довести, що для будь-якого натурального виконуються такі рівності:

    а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2);$

    б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2;$

    в) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n(n+1)(n+2) = \dfrac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3);$

    г) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + ... + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1};$

д) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

е) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^2}{5 \cdot 7} + ... + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n^2+n}{4n+2}$.

39. Довести, що для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$ виконуються умови подільності:

а) $(6^{2n} - 1) \vdots 35$;

б) $(n^5 - n) \vdots 5$;

в) $(3^{2n+2} - 8n - 9) \vdots 64$;

г) $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) \vdots 11$;

д) $(11^{n+1} + 12^{2n-1}) \vdots 133$;

е) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 19$;

є) $(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) \vdots 9$;

ж) $(3^{2n+1} + 40n - 3) \vdots 64$.

40. Довести, що для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$ виконуються такі нерівності:

а) $3n < 2^{n+1}$;

б) $n < 2^n$;

в) $\dfrac{n}{2} < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{2^n - 1} \leqslant n$;

г) $\underbrace{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + ... + \sqrt{n}}}}}_{n} < \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4n+1}\right)$;

д) $1 < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + ... + \dfrac{1}{3n+1} < 2$;

е) $1 + nx \leqslant (1+x)^n$, де $1 + x > 0$ (нерівність Бернуллі);

є) $\sqrt{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$;

ж) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} < 2$;

з) $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)^2} < \dfrac{5}{4}$.

41. Вказати формули для обчислення таких сум і добутків та обґрунтувати їх правильність:

а) $S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - ... + (-1)^n n$;

б) $S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - ... + (-1)^n (2n - 1)$;

в) $S_n = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + ... + n(3n + 1)$;

г) $S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} n^2$;

д) $P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$;

е) $P_n = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \cdot 16^{\frac{1}{16}} \cdot 2^{\frac{1}{2^n}}$.

42. Знайти формулу для обчислення загального члена a_n послідовності $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, якщо

а) $a_1 = 5$; $a_2 = 7$; $a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$, де $n = 2, 3, 4, ...$;

б) $a_1 = 2; a_2 = 6; a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{n+2}{n}$, де $n = 2, 3, 4, ...$;

в) $a_1 = 2; a_n = 3a_{n-1} + 1$, де $n = 2, 3, 4, ...$

43. Відомо, що $a_1 = 3$; $a_2 = 7$; $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, де $n = 1, 2, 3, ...$ Дослідити вигляд виразу $r_{n+1} = a_{n+2} a_n - a_{n+1}^2$ та обґрунтувати правильність його вибору.

44. Знайти число d_n всіх діагоналей опуклого n-кутника.

45. Знайти найбільше число частин, на які розбивається площина за допомогою n прямих.

46. * Знайти найбільше число частин, на які розбивається трьохвимірний простір за допомогою n площин.

47. Знайти найбільше число частин, на які розбивається площина за допомогою n кіл.

48. * Знайти найбільше число частин, на які розбивається трьохвимірний простір за допомогою n сфер.

49. Знайти формулу для обчислення суми $S_n = 1 + (1 + 2) + (1 + + 2 + 3) + ... + (1 + 2 + ...n)$.

50. Обчислити суму $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{11...1}_{n}$.

51. * Встановити вигляд сум

    а) $S(n,k) = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$, де $k < n; n, k \in \mathbb{N}$;

    б) $S(n,k,l,i) = i^k + (i+l)^k + (i+2l)^k + ... + (i+nl)^k$, де $i, k, l, n \in \mathbb{N}$, причому $k < n$.

52. * Знайти суму n-ої групи чисел, на які розбито натуральний ряд

    а) 1; (2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 9, 10); ... ;

    б) 1; (2, 3, 4); (5, 6, 7, 8, 9); (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16); ... .

6.6 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

41. а) $(-1)^n\left[\frac{n+1}{2}\right]$, де $[x]$ — ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$; б) $(-1)^n n$; в) $n(n+1)^2$; г) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$; д) $\frac{1}{n+1}$; е) $2^{2-\frac{n+2}{2^n}}$.

42. а) $2n+3$; б) $n(n+1)$; в) $\frac{1}{2}(5 \cdot 3^{n-1} - 1)$.

43. $r_{n+1} = (-1)^n \cdot 19$, де $n \in \mathbb{N}$.

44. $\frac{n(n-3)}{2}$, де $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$.

45. $\frac{n(n+1)}{2} + 1$, де $n \in \mathbb{N}$.

47. $n^2 - n + 2$, де $n \in \mathbb{N}$.

49. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, де $n \in \mathbb{N}$.

50. $\frac{10^{n+1}-10-9n}{81}$, де $n \in \mathbb{N}$.

52. $\frac{n(n^2+1)}{2}$; б) $(2n-1)(n^2-n+1)$, де $n \in \mathbb{N}$.

7 Найпростіші поняття про кільце цілих чисел

1. Адитивна впорядкована група цілих чисел як мінімальна група, що містить адитивну впорядковану півгрупу натуральних чисел.

2. Впорядковане абелеве кільце цілих чисел як мінімальне кільце, що містить систему натуральних чисел, та деякі його властивості.

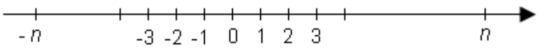
3. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.

4. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

7.1 Адитивна впорядкована група цілих чисел як мінімальна група, що містить адитивну впорядковану півгрупу натуральних чисел

1. Як було відмічено в попередній темі, натуральні числа в першу чергу використовуються для кількісної характеристики скінченних множин, для потреб рахунку окремих об'єктів та природного їх впорядкування. На основі цих потреб природно вводяться дії додавання та множення натуральних чисел, з якими узгоджується природний порядок натуральних чисел. У результаті ми прийшли до розгляду комутативного напівкільця з одиницею та лінійним повним порядком. У цьому півкільці виконуються знамениті аксіоми Пеано, які можна було би покласти в основу побудови системи натуральних чисел.

2. Потреби практики приводять до необхідності розширення поняття натурального числа, до введення симетричних до натуральних чисел — так званих від'ємних чисел — та числа нуль 0 для початку відліку як, говорять, в додатному напрямку, так і у від'ємному напрямку. Згадаймо лише відомі з дитинства: а) відлік температур в градусній шкалі — „температура повітря 10 градусів нижче нуля“, і „температура повітря 12 градусів вище нуля“; б) або ж в грошових відліках — прибуток і видаток або, що теж саме, дохід і борг; в) відлік часу в роках до нової ери і в новій ері. Аналогічну картину відліку в обидві сторони ми спостерігаємо на так званій координатній прямій, коли від фіксованої точки на прямій — початку відліку, відкладаємо однакові відрізки в одну сторону, і їх кінці зображаємо як натуральні числа, а коли відкладемо відрізки тієї ж самої довжини в іншу сторону, то їх кінці зображатимуть відповідні від'ємні числа, а початок відліку зображатиме число нуль 0 (малюнок 1.19).



Мал. 1.19.

Відмітимо, що не менш (якщо не більш) важливою причиною для введення нової, більш широкої, системи чисел є вимога і потреби, як самої математики, так і її застосувань, так розширити систему натуральних чисел, щоб до самої простої операції — додавання натуральних чисел — існувала скрізь визначена обернена до неї операція — віднімання. В історичному розвитку математики і самого поняття числа така причина була, мабуть, головною, яка і привела в кінці кінців до появи від'ємних чисел (недаремно вони раніше називалися „неможливими“, „хибними“ тощо; та навіть згадаймо своє дошкільне дитинство, коли запитання типу „який результат отримається, коли від п'яти відняти вісім?“ для багатьох із нас приводило до відповіді типу „отримаємо щось неможливе“).

3. Множину $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ доповнимо символом нуль 0 і символами виду $-n$ з множини $N^- = \{-1, -2, -3, ..., -n, ...\}$. У результаті отримається множина $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup N^- \cup \{0\}$, яку назвемо **множиною цілих чисел**. При цьому елементи множини $\mathbb{N}$ називатимемо **додатними цілими числами**; їх іноді позначатимемо із знаком $+$, тобто $+n \overset{df}{=} n$ (хоча часто, як правило, без потреби цей знак плюс пропускатимемо). Цілі числа з множини N^- будемо називати **цілими від'ємними числами** або цілими числами із знаком мінус. Число нуль 0 можна вживати як зі знаком плюс, так із знаком мінус, тобто $+0 \overset{df}{=} -0 = 0$. Числа з множини $\mathbb{N} \cup \{0\}$ будемо називати **цілими невід'ємними**, а з множини $\mathbb{N}^- \cup \{0\}$ — **цілими недодатними**.

Для довільного натурального n числа n і $-n$ будемо називати

взаємно протилежними одне до одного, а протилежним до числа нуль 0 будемо вважати цей самий нуль. У з'язку з такою назвою вважатимемо, що для довільного цілого числа $a \in \mathbb{Z}$ числа a і $-a$ є взаємно протилежні між собою. А тому звідси випливає така рівність: $-(-a) = a$, яка вказує на те, що протилежним числом до числа $-a$, протилежного до a, є саме число a.

4. Перш ніж вводити дії додавання, віднімання та множення цілих чисел, розглянемо поняття модуля (абсолютної величини) цілого числа.

Означення 7.1.1. ***Модулем (абсолютною величиною)*** *цілого числа a називається те із чисел a і −a, яке невід'ємне, і позначається символічно |a|.*

Отже, за означенням маємо:

$$|a| \overset{df}{=} \begin{cases} a, \ a \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \\ -a, \ a \in N^-. \end{cases}$$

Наприклад, $|-3| = -(-3) = 3$; $|5| = 5$; $0 = 0$. Використавши введене в системі натуральних чисел відношення $\leqslant$ лінійного порядку, робимо висновок про те, що модуль $|a|$ довільного цілого числа $a \in \mathbb{Z}$ є невід'ємним числом і, отже, задовольняє нерівність

$$0 \leqslant |a| \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

5. Використавши поняття модуля цілого числа, введемо операцію додавання цілих чисел таким чином:

Означення 7.1.2. ***Сумою*** $a + b$ ***двох цілих чисел*** $a, b \in \mathbb{Z}$ *є таке ціле число* $c \in \mathbb{Z}$*, що:*

1. $c \overset{df}{=} \begin{cases} a + b; a, b \in \mathbb{N}; \\ -(|a| + |b|); a, b \in N^-; \end{cases}$

2. $c \overset{df}{=} a + 0 = 0 + a = a; a \in \mathbb{Z};$

3. $c \overset{df}{=} \begin{cases} a + b = b + a = 0; |a| = |b|, a \in \mathbb{N}, b \in N^-; \\ a + b = b + a = a - |b|; a \in \mathbb{N}, b \in N^-, |b| < a; \\ a + b = b + a = -(|b| - a); a \in \mathbb{N}, b \in N^-, a < |b|, \end{cases}$

де під різницею $k - l$ *розуміється різниця між такими натуральними числами* $k, l \in \mathbb{N}$*, що* $l < k$*.*

На основі введеного означення суми двох цілих чисел легко перевірити, що **додавання цілих чисел володіє** такими **властивостями**, як:

1. Асоціативність: $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})(a + b + c = a + (b + c))$;
2. Комутативність: $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(a + b = b + a)$;
3. Нуль 0 є нейтральним елементом: $(\forall a \in \mathbb{Z})(a + 0 = 0 + a = a)$;
4. Довільний елемент $a \in \mathbb{Z}$ має єдиний протилежний елемент $-a$: $(\forall a \in \mathbb{Z})(\exists! -a \in \mathbb{Z})(a + (-a) = (-a) + a = 0)$;
5. Для довільних елементів $a, b \in \mathbb{Z}$ рівняння $x+b = a$ має єдиний розв'язок: $x = a + (-b)$;
6. Для операції додавання цілих чисел має місце обернена операція віднімання: $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(a - b \stackrel{df}{=} a + (-b))$;
7. Операції додавання, віднімання скоротні: $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(a \pm c = b \pm c \rightarrow a = b)$;
8. $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(-(a + b) = (-a) + (-b))$;
9. $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(a - b = -(b - a))$.

6. На основі перших чотирьох властивостей можна зробити висновок про те, що справедлива така теорема:

Теорема 7.1.1. *Система цілих чисел $(\mathbb{Z}; +, \leqslant)$ є мінімальною лінійно впорядкованою абелевою групою, яка містить впорядковану абелеву півгрупу $(\mathbb{N}; +, \leqslant)$ натуральних чисел, де природне відношення порядку $\leqslant$ між цілими числами є продовженням природного лінійного порядку між натуральними числами, яке узгоджується з додаванням та відніманням цілих чисел.*

Відмітимо, що **природне відношення нестрогого порядку** $\leqslant$ для цілих чисел визначається за допомогою співвідношення

$$a \leqslant b \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} b - a \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

де $a, b \in \mathbb{Z}$ — довільні цілі числа, а **строгий порядок** $<$ визначається співвідношенням

$$a < b \overset{df}{\Longleftrightarrow} b - a \in \mathbb{N},$$

причому співвідношення

$$a \leqslant b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

вказує на взаємозв'язок між вказаними порядками.

Те, що порядок $\leqslant$ узгоджується з додаванням та відніманням цілих чисел, виражається такою умовою:

$$a \leqslant b \Rightarrow a \pm c \leqslant b \pm c,$$

де $a, b, c \in \mathbb{Z}$ — довільні цілі числа. Зауважимо, що на відміну від природного порядку $\leqslant$ для натуральних чисел, який був повним, для цілих чисел продовження цього природного порядку уже не є повним. Справа в тому, що в системі натуральних чисел довільна непорожня підмножина є обмеженою знизу, а у випадку цілих чисел відносно вказаного порядку є і підмножини, які обмежені знизу, і підмножини, обмежені зверху, і підмножини, які необмежені і знизу, і зверху (наприклад, навіть сама множина $\mathbb{Z}$ цілих чисел є необмеженою множиною як знизу, так і зверху).

Нагадаємо означення обмежених знизу, зверху підмножин цілих чисел.

Означення 7.1.3. *Підмножина $A \subset \mathbb{Z}$ називається* ***обмеженою знизу відносно порядку*** $\leqslant$*, якщо для деякого цілого числа $a_0 \in \mathbb{Z}$ виконується умова $a_0 \leqslant a$ для всіх цілих чисел $a \in A$ з множини A, тобто $(\exists a_0 \in \mathbb{Z})(\forall a \in A \subset \mathbb{Z})(a_0 \leqslant a)$; тоді число a_0 називається* ***нижньою межею для множини*** *A; а якщо ще при цьому $a_0 \in A$, тобто нижня межа належить самій множині A, то a_0 називається* ***найменшим елементом цієї множини*** *A.*

Двоїстим чином дається означення **обмеженої зверху підмножини** $A \subset \mathbb{Z}$ **цілих чисел**, її **верхньої межі** та **найбільшого елемента** (дайте самостійно ці означення).

7.2 Впорядковане абелеве кільце цілих чисел як мінімальне кільце, що містить систему натуральних чисел, та деякі його властивості

1. Використавши поняття модуля цілого числа, введемо операцію множення цілих чисел.

Означення 7.2.1.

$$a \cdot b \overset{df}{=} \begin{cases} |a| \cdot |b|; (a;b) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup (N^- \times N^-); \\ -(|a| \cdot |b|); (a;b) \in (\mathbb{N} \times N^-) \cup (N^- \times \mathbb{N}); \\ 0; a = 0 \vee b = 0. \end{cases}$$

На основі введеного означення множення та раніше розглянутих додавання і віднімання цілих чисел можна показати, що мають місце такі властивості цих операцій:

1. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, де $a \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число — одиниця 1 є нейтральним елементом відносно множення;

2. $(\forall a \in \mathbb{Z})((-1) \cdot a = a \cdot (-1) = -a)$;

3. $(\forall a \in \mathbb{Z})(0 \cdot a = a \cdot 0) = 0$ — нуль 0 є поглинаючим елементом відносно множення;

4. Комутативність множення: $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(ab = ba)$;

5. Дистрибутивність множення відносно додавання та віднімання цілих чисел: $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z})((a \pm b)c = ac \pm bc)$;

6. Порядок $\leqslant$ узгоджується з множенням у вигляді таких співвідношень:

   $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\forall c \in \mathbb{N})(a \leqslant b \to ac \leqslant bc)$;

   $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\forall c \in N^-)(a \leqslant b \to bc \leqslant ac)$.

2. На основі відмічених вище властивостей та **теореми** з попереднього пункту робимо висновок про те, що справедлива така теорема:

Теорема 7.2.1. *Система цілих чисел* $(\mathbb{Z}; +, \cdot, \leqslant)$ *є мінімальним лінійно впорядкованим комутативним кільцем з одиницею, яке містить систему натуральних чисел* $(\mathbb{N}; +, \cdot, \leqslant)$.

Можна показати, що отримане кільце цілих чисел **не має дільників нуля**, тобто для довільних цілих чисел $a, b \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення

$$a, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0.$$

3. Оскільки ділення в системі натуральних чисел не завжди здійсненне, то очевидно, що в системі цілих чисел ділення теж не завжди здійсненне, тобто рівняння виду $ax = b$, де a, b — цілі числа, не завжди має цілий розв'язок (наприклад, рівняння $-4x = 10$ не має цілого розв'язку).

Тому на практиці використовують так зване ділення цілих чисел з остачею.

Означення 7.2.2. *Ціле число* $a \in \mathbb{Z}$ *ділиться на ціле число* $b \in \mathbb{Z}$ *з остачею, якщо знайдуться такі цілі числа* q *і* r, *що*

$$a = bq + r, \quad \textit{де} \;\; 0 \leqslant r < |b|,$$

причому q *називається* ***неповною часткою***, *а число* r *—* ***остачею (залишком) від ділення*** *на* b.

Наприклад, для $a = 14$, $b = -3$ маємо $14 = -3 \cdot (-4) + 2$, де $q = -4$, $r = 2$; $0 \leqslant 2 < |-3| = 3$.

При вивченні системи цілих чисел важливу роль відіграє **теорема про ділення з остачею,** а саме:

Теорема 7.2.2. *Довільне ціле число* $a \in \mathbb{Z}$ *можна поділити на будь-яке ціле число* $b \neq 0$ *з остачею і при тому єдиним способом, тобто частка і остача при діленні* a *на* b *встановлюється однозначно.*

Доведення цієї теореми і набагато повніші дослідження теорії подільності в системі цілих чисел буде здійснено пізніше, при вивченні дисципліни „алгебра і теорія чисел“.

4. Відмітимо, що в більш детальних дослідженнях систему цілих чисел вводять як спеціальну алгебраїчну систему, базовою множиною якої є фактор-множина $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{N}}$, яка складається з класів еквівалентності $\varepsilon_{\mathbb{N}}$, побудованих на декартовому квадраті $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ системи натуральних чисел $(\mathbb{N}; +; \cdot; \leqslant)$ за допомогою такої еквівалентності $\varepsilon_{\mathbb{N}}$:

$$(k; l) \equiv (m; n)(\varepsilon_{\mathbb{N}}) \overset{df}{\Longleftrightarrow} k + n = l + m,$$

де $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа. Позначимо за допомогою $[(k; l)]$ клас еквівалентності по $\varepsilon_{\mathbb{N}}$, тобто

$$[(k; l)] \overset{df}{=} \{(m; n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | k + n = l + m\}.$$

На фактор-множині $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{N}}$ введемо операції додавання і множення:

$$[(k; l)] \oplus [(m; n)] \overset{df}{=} [(k + m; l + n)];$$
$$[(k; l)] * [(m; n)] \overset{df}{=} [(km + ln; kn + lm)].$$

Можна, виявляється, показати, що так введені операції додавання $\oplus$ та множення $*$ класів утворюють комутативне кільце $((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{N}}; \oplus, *)$ з одиницею, ізоморфне розглянутому вище кільцю $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ цілих чисел та в якому можна ввести лінійний порядок, що узгоджується з введеними діями. Роль нуля, наприклад, грає клас $[(k; k)]$, роль одиниці — клас $[(k + 1; k)]$, роль протилежного елемента до класу $[(k; l)]$ — клас $[(l; k)]$, відношення порядку $\leqslant$ між класами можна ввести таким співвідношенням:

$$[(k; l)] \leqslant [(m; n)] \overset{df}{\Leftrightarrow} k + n \leqslant l + m,$$

а операцію віднімання виразити рівністю

$$[(k; l)] \ominus [(m; n)] \overset{df}{=} [(k + n; l + m)].$$

5. На завершення відмітимо, що система цілих чисел архімедівськи впорядкована, тобто, як і для системи натуральних чисел, виконується **нерівність Архімеда**, яка має вигляд такого співвідношення: $(\forall k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(k < n \cdot l)$.

7.3 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Які причини спонукали до необхідності розширення поняття натурального числа? Навести ілюструючі приклади з практики та математики.

2. З яких елементів утворена множина $\mathbb{Z}$ цілих чисел?

3. Що таке модуль(абсолютна величина) цілого числа?

4. Як вводиться дія додавання для цілих чисел?

5. Перелічіть основні властивості додавання цілих чисел та обґрунтуйте їх справедливість.

6. Як вводиться дія віднімання цілих чисел?

7. Дайте визначення природних відношень порядку $<$ та $\leqslant$ для цілих чисел і вкажіть їх взаємозв'язок?

8. Які Ви знаєте властивості природного відношення порядку для цілих чисел?

9. Поясніть, чому відношення природного порядку для цілих чисел лінійне?

10. Яка підмножина цілих чисел називається обмеженою знизу, обмеженою зверху, обмеженою відносно природного порядку?

11. Що таке нижня межа, верхня межа для заданої підмножини цілих чисел відносно природного порядку?

12. Який елемент називається найменшим, найбільшим для заданої підмножини цілих чисел відносно природного порядку? Чи для всякої множини існують вони?

13. Як вводиться дія множення для цілих чисел?

14. Перелічіть основні властивості множення цілих чисел та обґрунтуйте їх справедливість.

15. Що собою представляє система цілих чисел $(\mathbb{Z}; +, \leqslant)$ відносно додавання та природного порядку $\leqslant$ цілих чисел? Вказати її зв'язок з системою $(\mathbb{N}; +, \leqslant)$ натуральних чисел.

16. Що собою представляє система цілих чисел $(\mathbb{Z}; +, \cdot, \leqslant)$ відносно додавання, множення та природного порядку $\leqslant$ цілих чисел? Вказати її зв'язок з системою $(\mathbb{N}; +, \cdot, \leqslant)$ натуральних чисел.

17. Як вводиться ділення цілих чисел з остачею? Чи для всіх цілих чисел воно визначене?

18. Сформулюйте основну теорему про ділення цілих чисел з остачею. Який вона має вигляд для натуральних чисел?

19. Доведіть, що введене бінарне відношення природного порядку $\leqslant$ є лінійним порядком в системі цілих чисел, який узгоджується з діями додавання і множення цілих чисел.

20. Раніше було введено еквівалентність $\varepsilon_{\mathbb{N}}$ на множині $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ з системи натуральних чисел $(\mathbb{N}; +, \cdot, \leqslant)$. Покажіть, що це справді еквівалентність, яка, крім того, узгоджується з діями додавання та множення і з природним порядком $\leqslant$ натуральних чисел.

21. Доведіть, що справді операції додавання $\oplus$ та множення $*$ $\varepsilon_{\mathbb{N}}$-класів на множині $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ є скрізь визначеними бінарними операціями.

22. Доведіть, що алгебра $((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{N}}; \oplus, *)$ є комутативним кільцем з одиницею.

23. Довести, що кільця $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ і $((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{N}}; \oplus, *)$ ізоморфні між собою.

24. Нехай $m \in \mathbb{N}$ — натуральне число, відмінне від одиниці. Перевірити, чи підмножина $mZ \subset \mathbb{Z}$ множини $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел замкнута відносно операцій додавання, віднімання, множення.

25. Дослідити, якими є підкільця кільця $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ всіх цілих чисел.

26. Відомо, що ціле число $n \in \mathbb{Z}$ не ділиться на 7. Виявснити, чи ділиться на 7 число $n^6 - 1$.

27. Нехай $k, l \in \mathbb{Z}$ — довільні цілі числа. Чи завжди існує таке ціле число $n \in \mathbb{Z}$, що виконується нерівності $nl \leqslant k < (n+1)l$?

28. Довести, довільна непорожня підмножина $A \subset \mathbb{Z}$ цілих чисел має найменший (найбільший) елемент відносно природного порядку $\leqslant$, якщо A — обмежена знизу (зверху) підмножина.

29. Нехай $m \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число. Доведіть, що серед цілих чисел $m, m+1, m+2, ..., m+n-1$ одне з них ділиться на n, де $n \in \mathbb{N}$ — будь-яке натуральне число.

30. Дослідити, якими можуть бути залишки при діленні четвертих степенів цілих чисел на 9.

31. *Узагальнити попередню вправу у такому вигляді: дослідити, якими можуть бути залишки k-тих степенів цілих чисел при діленні цих степенів на n, де $k, n \in \mathbb{N}$ — фіксовані натуральні числа.

32. Сформулюйте та доведіть нерівність Архімеда, яка має місце в системі цілих чисел.

7.4 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

25. kZ, де $k \in \mathbb{Z}$.

26. **Вказівка**. Подати число $n \in \mathbb{Z}$ у вигляді $n = 7k + r$, де $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ а $k \in \mathbb{Z}$. Тоді легко показати, що $n^6 - 1$ не ділиться на 7.

27. Ні; наприклад, для $k = -1, l = 0$ не існує цілого $n \in \mathbb{Z}$ такого, щоб виконувалися нерівності $nl \leqslant k < (n+1)l$.

28. **Вказівка**. Застосувати відповідні означення, повноту порядку $\leqslant$, або метод математичної індукції.

29. **Вказівка**. Використати те, що $m, m+1, m+2, ..., m+n-1$ є послідовністю з n різних сусідніх цілих чисел.

30. $r = 0; 1; 4; 7$.

32. Для системи цілих чисел нерівність Архімеда має такий вигляд: $(\forall k, l \in \mathbb{Z})(l \in \mathbb{N} \to (\exists n \in \mathbb{N})k < nl)$. **Вказівка**. Для доведення цієї нерівності використати метод математичної індукції.

8 Найпростіші поняття про поле раціональних чисел та поле дійсних чисел

1. Поле раціональних чисел як мінімальна алгебраїчна система, що містить систему цілих чисел; різні шляхи його введення.

2. Деякі властивості поля раціональних чисел.

3. Поле дійсних чисел як мінімальне неперервне розширення поля раціональних чисел.

4. Деякі властивості поля дійсних чисел.

5. Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи.

6. Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ.

8.1 Поле раціональних чисел як мінімальна алгебраїчна система, що містить систему цілих чисел; різні шляхи його введення

1. Цілі числа цілком задовольняють потреби рахунку окремих предметів, кількісної характеристики скінченних множин. Але, переходячи, наприклад, до підрахунку кількості груп, кожна з яких містить одну і ту ж саму кількість предметів, ми приходимо до останньої по підрахунку групи, у якої уже може виявитися лише **деяка частина предметів** у порівнянні з тими однаковими кількостями, які складають попередні групи. У результаті приходимо до деякої частини групи, яка не представляє єдиної цілої групи. Тому матимемо деяку частину одиниці виміру.

З такими випадками вимірювань ми зустрічаємося на кожному кроці, коли приходиться мати справу з частинками цілої якоїсь одиниці, тобто, говорять, мати справу з дробовими частинами (від слова „дробити“ чи „дрібнити“ на менші частинки). Таким чином приходимо природно до поняття дробу як частинки цілого.

2. Дамо загальне означення дробу у вигляді назви **раціонального (дробового) числа**.

Означення 8.1.1. ***Раціональним (дробовим) числом*** *називається запис виду* $\dfrac{p}{q}$*, де* $q \in \mathbb{N}$ *— довільне натуральне число,*

$p \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число, а розділова риска „–“ — це розділовий знак; при цьому число q називають ***знаменником****, а число p —* ***чисельником раціонально числа*** $\frac{p}{q}$.

Означення 8.1.2. *Раціональні числа $\frac{p}{q}$ і $\frac{r}{s}$ називаються* ***рівними між собою****, якщо виконується умова $ps = rq$, тобто*

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \overset{df}{\Longleftrightarrow} ps = rq,$$

де $q, s \in \mathbb{N}; p, r \in \mathbb{Z}$.

Наприклад, $\frac{-3}{8} = \frac{-9}{24}$, оскільки $(-3) \cdot 24 = (-9) \cdot 8 = -72$.

Означення 8.1.3. ***Скороченням дробового числа*** $\frac{p}{q}$ *називається заміна цього числа рівним йому дробовим числом $\frac{r}{s}$ таким, що модулі чисельника r і знаменника s числа $\frac{r}{s}$ будуть меншими в порівнянні з модулями чисельника p і відповідно знаменника q числа $\frac{p}{q}$.*

Наприклад, дробове число $\frac{12}{28}$ скоротимо на 2 і отримаємо $\frac{6}{14}$, а скоротивши останнє число ще на 2, остаточно матимемо $\frac{3}{7}$; отже, $\frac{12}{28} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

Означення 8.1.4. *Дробове число $\frac{p}{q}$ називається* ***нескоротним****, якщо найбільший спільний дільник для p і q рівний одиниці, що записують рівністю $(p; q) \overset{df}{=} 1$; а якщо ж $(p; q) = d > 1$, то дробове число можна, говорять, скоротити на натуральне число d, в результаті чого і отримається уже нескоротний дріб.*

Наприклад, в дробовому числі $\frac{12}{28}$ маємо $(12; 28) = 4$; тому рівність $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ вказує на те, що це дробове число $\frac{12}{28}$ скоротили на найбільший спільний дільник чисельника і знаменника $d = (12; 28) = 4$ і отримали нескоротний дріб $\frac{3}{7}$. Легко бачити, що:

а) довільне дробове число можна завжди перетворити в нескоротний дріб;

б) нескоротні раціональні числа $\frac{p}{q}$ і $\frac{r}{s}$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності $p = r$ і $q = s$.

3. Позначимо множину всіх раціональних чисел через $\mathbb{Q}$, тобто $\mathbb{Q} \overset{df}{=} \left\{ \frac{p}{q} \middle| q \in \mathbb{N} \wedge p \in \mathbb{Z} \right\}$. Введемо на цій множині дії додавання $+$ і множення $\cdot$ та відношення „$\leqslant$“, а саме: нехай $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$; тоді

$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \overset{df}{=} \frac{ps + rq}{qs} = \frac{m}{n}$, де $(m, n) = 1$;[4]

$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \overset{df}{=} \frac{pr}{qs} = \frac{m}{n}$, де $(m, n) = 1$;

$\frac{p}{q} \leqslant \frac{r}{s} \overset{df}{\iff} ps \leqslant rq$.

Оскільки $\frac{0}{s} = \frac{0}{1}$, $\frac{s}{s} = \frac{1}{1}$, де $s \in \mathbb{N}$, то легко бачити, що $\frac{0}{1}$ грає роль нейтрального дробового числа при додаванні, $\frac{1}{1}$ — роль нейтрального числа при множенні і $\frac{0}{1}$ — роль поглинаючого числа (нуля) при множенні; тобто

$$\frac{p}{q} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{p}{q} = \frac{p}{q};\ \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q};\ \frac{p}{q} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{0}{1}.$$

4. Можна показати, що алгебраїчна система $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}; +, \cdot, \leqslant)$ є лінійно впорядкованим полем, у якому відношення $\leqslant$, введене вище, є лінійним відношенням нестрогого порядку, яке узгоджується з введеними діями додавання та множення. У цьому полі дії віднімання та ділення на ненульове раціональне число можна задати через дії додавання та відповідно множення раціональних чисел, а саме:

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} \overset{df}{=} \frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right) = \frac{ps - rq}{qs} = \frac{m}{n},\ \text{де } (m, n) = 1;$$

$$\frac{p}{q} : \frac{r}{s} \overset{df}{=} \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qs} = \frac{m}{n},\ \text{де } r \neq 0; (m, n) = 1.$$

[4]Найбільший спільний дільник двох чисел m і $n = 1$.

Означення 8.1.5. *Отримана алгебраїчна система* $(\mathbb{Q}; +, \cdot, \cdot, \leqslant)$ *називається* ***полем раціональних чисел***.

5. Отримане поле $(\mathbb{Q}; +, \cdot, \leqslant)$ є справді мінімальним розширенням системи цілих чисел $(\mathbb{Z}; +, \cdot, \leqslant)$. Дійсно, легко бачити, що введені раніше дії додавання, віднімання, множення та відношення порядку $\leqslant$ раціональних чисел виду $\frac{p}{1}$, $\frac{r}{1}$, які взаємно однозначним чином можна співставити з цілими числами p та відповідно r, мають вигляд, аналогічний тому вигляду, що має місце для цілих чисел, а саме:
$\frac{p}{1} \pm \frac{r}{1} = \frac{p \pm r}{1} \Leftrightarrow p \pm r$ — дії додавання, віднімання;
$\frac{p}{1} \cdot \frac{r}{1} = \frac{p \cdot r}{1} \Leftrightarrow p \cdot r$ — дія множення;
$\frac{p}{1} \leqslant \frac{r}{1} \Leftrightarrow p \leqslant r$ — відношення порядку для цілих чисел $p, q, \in \mathbb{Z}$.
Зауважимо при цьому, що розділову риску „$-$“, яка була нами введена раніше формально як розділовий знак між чисельником p і знаменником q при визначенні раціонального числа $\frac{p}{q}$, тепер можна по суті змістовно трактувати як знак ділення між цілими числами $p \in \mathbb{Z}$ і $q \in \mathbb{N}$, а саме: $\frac{p}{q} \stackrel{df}{=} \frac{p}{1} : \frac{q}{1} \stackrel{df}{=} p : q$. Цим самим можна трактувати довільне раціональне число $\frac{p}{q}$ як частку від ділення цілого числа $p \in \mathbb{Z}$ на натуральне число $q \in \mathbb{N}$. А тому нуль $\frac{0}{1}$ і одиниця $\frac{1}{1}$ поля раціональних чисел співпадають з нулем 0 і одиницею 1 кільця цілих чисел. В силу відміченого зауваження і визначення поля раціональних чисел робимо висновок про те, що це поле є дійсно розширенням системи цілих чисел: всі цілі числа $p \in \mathbb{Z}$ — це є частинний випадок раціональних чисел виду $\frac{p}{1}$, а ті раціональні числа виду $\frac{p}{q}$, в яких $q > 1$ і $(p, q) = 1$, є новими числами, які не містяться в кільці $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$.

6. Поле раціональних чисел можна було би коротко визначити наступним способом.

Означення 8.1.6. *Полем раціональних чисел називається таке поле, яке є мінімальним розширенням системи цілих чисел.*

У цьому означенні присутні всі аксіоми поля, а слова „мінімальне розширення системи цілих чисел“ означають те, що система цілих чисел міститься у цьому полі і має місце аксіома, яка є по суті узагальненням аксіоми індукції системи натуральних чисел:

$$(\mathbb{Z} \subset \mathbb{M} \subset \mathbb{Q} \wedge (\forall a, b \in M)(b \neq 0 \to ab^{-1} \in M)) \Rightarrow M = \mathbb{Q},$$

де

$\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних чисел;

b^{-1} — обернений елемент до ненульового елемента $b \in M \subset \mathbb{Q}$.

Безперечно, що при такому означенні 8.1.6 поля раціональних чисел можна було би показати, що довільне раціональне число можна подати як частку двох цілих чисел $p, q \in \mathbb{Z}$, причому $q \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ — натуральне число.

7. Поле раціональних чисел іноді вводять і як фактор-систему $((\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{Z}}; \oplus, *, \leqslant)$, де $((\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{Z}})$ — фактор-множина, що складається з класів еквівалентності $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$, побудованих на декартовому добутку $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ множин $\mathbb{Z}$ цілих чисел і $\mathbb{N}$ натуральних чисел за допомогою такої еквівалентності:

$$(p; q) \equiv (r; s)(\varepsilon_{\mathbb{Z}}) \overset{df}{\Longleftrightarrow} ps = qr,$$

де $p, r \in \mathbb{Z}$ — довільні цілі числа, $q, s \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа, а $[(p; q)]$ — клас еквівалентності по $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$, тобто

$$[(p; q)] \overset{df}{=} \{(r; s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} | ps = qr\}.$$

На фактор-множині $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{Z}}$ введемо операції додавання та множення:

$$[(p; q)] \oplus [(r; s)] \overset{df}{=} [(ps + qr; qs)];$$
$$[(p; q)] * [(r; s)] \overset{df}{=} [(pr; qs)].$$

Виявляється, що так введені операції додавання $\oplus$ та множення $*$ утворюють поле $((\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{Z}}; \oplus, *)$, ізоморфне побудованому вище полю раціональних чисел, у якому можна ввести лінійний порядок $\leqslant$, який узгоджується із введеними діями додавання $\oplus$ та множення $*$. Роль нуля в цьому полі грає клас $[(0;1)]$, роль одиниці — клас $[(1;1)]$, роль протилежного елемента до класу $[(p;q)]$ — клас $[(-p;q)]$, роль оберненого елемента до ненульового класу $[(p;q)]$, де $p \neq 0$, — клас $[(q;p)]$. Операції віднімання, ділення, обернені до операції додавання $\oplus$ і відповідно множення $*$, виражаються рівностями

$$[(p;q)] \ominus [(r;s)] \stackrel{df}{=} [(ps - qr; qs)];$$
$$[(p;q)] : [(r;s)] \stackrel{df}{=} [(ps; qr)], \text{ якщо } r \neq 0,$$

а відношення порядку $\leqslant$ між класами вводиться за допомогою співвідношення

$$[(p;q)] \leqslant [(r;s)] \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} ps \leqslant rq.$$

8.2 Деякі властивості поля раціональних чисел

1. Поняття модуля (абсолютної величини) раціонального числа вводиться аналогічно тому, як це поняття вводилося для цілих чисел.

Означення 8.2.1. $\left|\frac{p}{q}\right|$ — ***модуль раціонального числа*** $\frac{p}{q}$, *якщо виконується рівність*

$$\left|\frac{p}{q}\right| \stackrel{df}{=} \begin{cases} \frac{p}{q}, \textit{де } p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \textit{тобто } p \geqslant 0; \\ -\frac{p}{q}, \textit{де } p \in N^-, \textit{тобто } p < 0, \end{cases}$$

де $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ *— довільні цілі числа.*

Отже, модуль $\left|\frac{p}{q}\right|$ раціонального числа $\frac{p}{q}$ — це таке невід'ємне раціональне число, яке співпадає з $\frac{p}{q}$, якщо $p \geqslant 0$, або з $\frac{-p}{q}$, якщо $p < 0$.

2. Дамо означення правильного і неправильного дробів:

Означення 8.2.2. *Раціональне число* $\frac{p}{q}$ *називається* ***правильним дробом****, якщо* $|p| < q$, *і* ***неправильним дробом****, якщо* $|p| \geqslant q$.

Очевидно, що $\frac{p}{q}$ — правильний дріб тоді і тільки тоді, коли виконуються нерівності

$$-1 < \frac{p}{q} < 1,$$

що рівносильно нерівностям $-q < p < q$.

Справедлива така теорема:

Теорема 8.2.1. *Довільне раціональне число можна єдиним чином подати у вигляді суми цілого числа і невід'ємного правильного дробу.*

Доведення легко випливає з теореми 7.2.2 про ділення цілого числа з остачею, сторінка 145 (доведення проведіть самостійно).

Означення 8.2.3. *Зведення раціонального числа* $\frac{p}{q}$ *до суми* $n + \frac{r}{q}$ *цілого числа* $n \in \mathbb{Z}$ *і невід'ємного правильного дробу* $\frac{r}{q}$, *тобто* $\frac{p}{q} \overset{df}{=} n + \frac{r}{q}$, *називається* ***виділенням цілої частини*** n ***раціонального числа*** $\frac{r}{q}$, *а правильний дріб* $\frac{r}{q}$ ***називається дробовою частиною числа*** $\frac{p}{q}$.

Приклади.

1. $\frac{35}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 8}{9} = 3 + \frac{8}{9}$;
2. $\frac{-49}{13} = \frac{-4 \cdot 13 + 3}{13} = -4 + \frac{3}{13}$.

Зауважимо, що в цілях скорочення запису при виділенні цілої частини додатного раціонального числа знак додавання у записі $\frac{p}{q} = n + \frac{r}{q}$ пропускають. Аналогічне скорочення здійснюють і у випадку від'ємного раціонального числа. В результаті раціональні числа з попередніх прикладів можна подати у такій формі:

1. $\frac{35}{9} = 3 + \frac{8}{9} = 3\frac{8}{9}$;

2. $\dfrac{-49}{13} = -\dfrac{49}{13} = -\dfrac{3\cdot 13+10}{13} = -\left(3+\dfrac{10}{13}\right) = -3\dfrac{10}{13}$
або ж $\dfrac{-49}{13} = -4+\dfrac{3}{13} = \overline{4}\dfrac{3}{13}$, де в останньому записі знак „мінус“ виставлений над цілою частиною, а в передостанньому записі вжита від'ємна дробова частина, оскільки знак „мінус“ в записі стосується до всього раціонального числа.

3. Відношення природного порядку $\leqslant$, яке введене для раціональних чисел на сторінці 153, показує, що елементи поля раціональних чисел володіють властивістю, яка не була притаманна для системи цілих чисел — це властивість **щільності**, яка розкривається в такій теоремі:

Теорема 8.2.2. *Для будь-яких раціональних чисел $\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ таких, що $\dfrac{p}{q} < \dfrac{r}{s}$, знайдеться безліч раціональних чисел $\dfrac{k}{l}$, що задовольняють нерівностям $\dfrac{p}{q} < \dfrac{k}{l} < \dfrac{r}{s}$, де $q, l, s \in \mathbb{N}$; $p, k, r \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Нехай $\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$ — такі раціональні числа, що $\dfrac{p}{q} < \dfrac{r}{s}$, де $q, s \in \mathbb{N}$; $p, r \in \mathbb{Z}$, і $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число. Оскільки $\dfrac{p}{q} = \dfrac{ps\cdot(n+1)}{qs\cdot(n+1)} < \dfrac{rq(n+1)}{qs(n+1)} = \dfrac{r}{s}$, то очевидно, що $(n+1) \leqslant$ $\leqslant rq(n+1) - ps(n+1)$. Тому має місце такий ланцюжок нерівностей для раціональних чисел: $\dfrac{p}{q} = \dfrac{ps\cdot(n+1)}{qs\cdot(n+1)} < \dfrac{ps(n+1)+1}{qs(n+1)} <$ $< \dfrac{ps(n+1)+2}{qs(n+1)} < ... < \dfrac{ps(n+1)+n}{qs(n+1)} < \dfrac{rq(n+1)}{qs(n+1)} = \dfrac{r}{s}$, який вказує на те, що між раціональними числами $\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}$, де $\dfrac{p}{q} < \dfrac{r}{s}$, розмістилося n різних раціональних чисел $\dfrac{k}{l}$, що задовольняють нерівності $\dfrac{p}{q} < \dfrac{k}{l} < \dfrac{r}{s}$, де $n \in \mathbb{N}$ — будь-яке раціональне число, чим і завершується доведення теореми ■

Зауважимо, що оскільки поле раціональних чисел володіє властивістю щільності, то воно не є дискретним, тобто воно не володіє властивістю „мати сусідні елементи“, як це мало місце для системи цілих чисел, коли, наприклад, числа k і $k+1$ є сусідніми цілими числами, а між ними не існує ні жодного цілого числа l такого, щоб виконувалися нерівності $k < l < k+1$.

4. Подібно до того, як система цілих чисел архімедівськи упорядкована, поле раціональних чисел, легко показати, теж архімедівськи упорядковане, тобто виконується **нерівність Архімеда**, яка для раціональних чисел має вигляд такого співвідношення:

$$\left(\forall \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}\right)\left(r \in \mathbb{N} \to (\exists n \in \mathbb{N})\left(\frac{p}{q} < n \cdot \frac{r}{s}\right)\right).$$

8.3 Поле дійсних чисел як мінімальне неперервне розширення поля раціональних чисел

1. Раніше уже не раз відмічалося, що одним із основних інструментів дослідження кількісних співвідношень в реальному житті є **число**. А тому не дивно, що поняття числа є одним із самих важливих понять в математиці. Різноманітні задачі практики, які пов'язані з різними вимірюваннями, порівняннями, оцінками тих чи інших величин, неможливо реалізувати без застосування чисел.

При дослідженні та розв'язуванні таких задач приходимо до висновку про те, що по мірі ускладнення задач, пов'язаних з вимірюваннями, оцінками певних величин, а особливо геометричних величин чи таких величин, як маса, різноманітні електромагнітні характеристики, необхідно розширювати систему чисел. Так від системи натуральних чисел ми перейшли до системи цілих чисел, від системи цілих чисел — до системи раціональних чисел, яка виявилась лінійно впорядкованим полем з властивістю щільності, коли між будь-якими двома заданими різними раціональними числами існує безліч лінійно впорядкованих раціональних чисел, обмежених вказаними числами.

2. Виявляється, що і введене нами вище лінійно впорядковане поле раціональних чисел, хоча воно і володіє властивістю щільності, недостатнє навіть для багатьох задач шкільної математики. Згадайте лише відому задачу на вимірювання довжини гіпотенузи рівнобедреного прямокутного трикутника з катетами одиничної довжини або задачу про вимірювання довжини кола одиничного радіуса.

Виявляється, що жодну із цих двох задач неможливо розв'язати, виходячи з числового поля раціональних чисел. Або візьмемо, здавалось би, нескладну алгебраїчну задачу „знайти додатний розв'язок рівняння $x^{n+1} = p$, де p — просте число, а $n \in \mathbb{N}$ — задане натуральне число", яку теж неможливо розв'язати в полі раціональних чисел.

3. Тому виникло питання про те, щоб мінімально розширити згадане поле раціональних чисел до такого поля, яке б містило як підполе лінійно впорядковане поле раціональних чисел і разом з тим давало можливість розв'язувати різноманітні практичні задачі вимірювання величин. Таке поле називають **полем дійсних чисел**. На даний час існують кілька різних теорій побудови поля дійсних чисел. Всі ці побудови можна розбити на два класи. **Перший клас** — це **конструктивна побудова**, коли на основі попередньої числової системи як будівельного матеріалу конструюють числа нової числової системи. **Другий клас** — це **аксіоматична побудова**, коли основні властивості чисел нової системи задаються аксіомами.

4. Введемо означення поля дійсних чисел як мінімального попереднього розширення лінійно впорядкованого поля раціональних чисел.

Нехай $(\mathbb{Q}; +; \cdot; \leqslant)$ — лінійно впорядковане поле раціональних чисел, а впорядкована пара підмножин $(A; B)$ з $\mathbb{Q}$ утворюють **розбиття множини** $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Це означає, що — це такі непорожні підмножини, які задовольняють умовам:

$$A \cup B = \mathbb{Q} \ \wedge \ A \cap B = \varnothing,$$

тобто A і B — це непорожні підмножини з $\mathbb{Q}$, які між собою не перетинаються, а їх об'єднання дає всю множину $\mathbb{Q}$.

Означення 8.3.1. *Пара підмножин $(A; B)$ множини $\mathbb{Q}$ раціональних чисел утворюють **розріз** даного впорядкованого **поля раціональних чисел**, якщо ці підмножини утворюють таке розбиття множини $\mathbb{Q}$, яке задовольняє співвідношення*

$$(\forall a \in A, b \in B)(a \leqslant b),$$

*причому підмножина A називається **лівим класом**, а підмножина B — **правим класом** розрізу, а сам розріз $(A; B)$ називається*

***розрізом Декекінда** в честь німецького математика, який запропонував розглядувану нижче теорію побудови поля дійсних чисел.*

Мал. 1.20. Юліус Вільгельм Ріхард Дедекінд (1831 — 1916 роки)

При детальному дослідженні розрізів $(A; B)$ в полі раціональних чисел виявляється, що існують три типи розрізів:

1. Лівий клас A має найбільший елемент, а правий клас B не має найменшого елемента; наприклад, до класу A входять всі раціональні числа $a \in A$ такі, що $a \leqslant \frac{3}{7}$, а до класу B — всі інші раціональні числа, тобто всі такі раціональні числа $b \in B$, що $\frac{3}{7} < b$; тоді лівий клас A має найбільший елемент $\frac{3}{7}$, а правий клас B не має найменшого елемента.

2. Лівий клас A не має найбільшого елемента, а правий клас B має найменший елемент; наприклад, до класу B входять всі такі раціональні числа $b \in B$, що $-5 \leqslant b$, а до класу A — всі інші раціональні числа, тобто всі такі раціональні числа $a \in A$, що $a < -5$; тоді правий клас B має найменший елемент -5, а лівий клас A не має найбільшого елемента.

3. Лівий клас A не має найбільшого елемента, а правий клас B не має найменшого елемента; наприклад, до класу A віднесемо всі такі раціональні числа $a \in A$, що $a^2 \leqslant 2$, а до правого класу — всі інші раціональні числа, тобто всі такі раціональні числа $b \in B$,

що $2 < b^2$; неважко показати, що в цьому випадку ні лівий клас A не має найбільшого елемента, ні правий клас B не має найменшого елемента.

Означення 8.3.2. *Розрізи $(A; B)$ перших двох типів називаються* ***раціональними****, а те раціональне число, яке є найбільшим в лівій підмножині A чи найменшим в правій підмножині B, називається* ***граничним елементом розрізу****, який взаємно однозначним чином співставляється з відповідним розрізом першого чи другого типу.*

Означення 8.3.3. *Розріз $(A; B)$ третього типу, який очевидно не має раціонального граничного елемента, називається* ***ірраціональним розрізом****, якому взаємно однозначним чином будемо співставляти елемент нової природи — не раціональне число, яке називатимемо* ***ірраціональним числом****.*

У результаті отримаємо нову більш широку в порівнянні з множиною $\mathbb{Q}$ раціональних чисел множину $\mathbb{R}$, яку назвемо **множиною дійсних чисел**, що є об'єднанням $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup Ir$ множини раціональних чисел і множини Ir ірраціональних чисел, причому $\mathbb{Q} \cap Ir = \varnothing$.

Для зручності можна розглядати в зв'язку з цим лише раціональні та ірраціональні розрізи $(A; B)$ такі, що в множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел підмножина A завжди не має найбільшого елемента, а підмножина B завжди має найменший елемент. Тоді цей граничний елемент розрізу $(A; B)$ є раціональним, якщо розріз $(A; B)$ раціональний, або є ірраціональним, якщо розріз $(A; B)$ ірраціональний (у якого, акцентуємо, підмножина B не має найменшого елемента в множині $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, але має його в множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел). В результаті отримана множина $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел є, говорять, **неперервною множиною**, оскільки всі розрізи володіють граничними елементами, які утворюють цю множину $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

5. На множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел можна ввести відношення порядку $\leqslant$ та алгебраїчні операції додавання, множення та обернені до них — віднімання і ділення. Введемо для зручності таке позначення:

$$\alpha = (B; C),$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$ — дійсне число, що є граничним елементом розрізу $(B; C)$, який складається з розбиття множини $\mathbb{Q}$ раціональних чисел на дві підмножини такі, що

$$(\forall b, c \in \mathbb{Q})(b \in B \wedge c \in C \rightarrow b \leqslant c),$$

причому α є найменшим елементом множини C, якщо $\alpha \in \mathbb{Q}$ і розріз $(B; C)$ є раціональним, або ж $\alpha \in Ir$ і розріз є ірраціональним.

Означення 8.3.4. *Числа $\alpha_1 = (B_1; C_1)$ і $\alpha_2 = (B_2; C_2)$ називаються **рівними між собою дійсними числами**, якщо $B_1 = B_2$, тобто*

$$\alpha_1 = \alpha_2 \overset{df}{\Longleftrightarrow} B_1 = B_2.$$

Очевидно, що $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow C_1 = C_2$, оскільки $C_1 = \mathbb{Q} \setminus B_1$, $C_2 = \mathbb{Q} \setminus B_2$.

Означення 8.3.5. *Відношення нестрогого і строгого порядків у множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел вводяться наступним чином:*

а) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \overset{df}{\Longleftrightarrow} B_1 \subset B_2$;

б) $\alpha_1 < \alpha_2 \overset{df}{\Longleftrightarrow} B_1 \subset B_2 \wedge B_1 \neq B_2$.

Легко бачити, що введені відношення нестрогого і строгого порядків в множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел лінійні.

Нехай $\alpha_1 = (B_1; C_1)$, $\alpha_2 = (B_2; C_2)$ — два дійсних числа.

Означення 8.3.6. ***Сумою** $\alpha_1 + \alpha_2 \overset{df}{=} (B; C)$ **цих двох дійсних чисел** називається таке дійсне число $\alpha \overset{df}{=} (B; C)$, що $B \overset{df}{=} B_1 + B_2 \overset{df}{=} \{b_1 + b_2 | b_1 \in B_1 \wedge b_2 \in B_2\}$, $C \overset{df}{=} \mathbb{Q} \setminus B$.*

Можна довести, що нуль $0 \overset{df}{=} (\{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}, \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leqslant x\}) \overset{df}{=} (B_0; C_0)$ є нейтральним елементом відносно додавання дійсних чисел, тобто виконується співвідношення

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha).$$

Означення 8.3.7. *Дійсне число $-\alpha \overset{df}{=} (-C; -B)$ називається **протилежним до числа** $\alpha = (B; C)$, якщо $-C \overset{df}{=} \{-c | c \in C\}$, $-B \overset{df}{=} \{-b | b \in B\}$, причому граничний елемент $c \in B$ розрізу $(B; C)$ перетворюється в граничний елемент $-c \in -B$ розрізу $(-C; -B)$.*

Наприклад, до числа $3 = (\{x \in \mathbb{Q} | x < 3\}, \{x \in \mathbb{Q} | 3 \leqslant x\})$ протилежним є число $-3 = (\{x \in \mathbb{Q} | x < -3\}, \{x \in \mathbb{Q} | -3 \leqslant x\})$.

Можна показати, що до кожного дійсного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ існує єдине протилежне число $-\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що виконуються рівності

$$-\alpha + \alpha = \alpha + (-\alpha) = 0; \; -(-\alpha) = \alpha,$$

причому алгебра $(\mathbb{R}; +)$ є абелевою групою.

Означення 8.3.8. *Дійсне число $\alpha = (B; C)$ називається*
а) ***від'ємним****, якщо $\alpha < 0$, тобто $B \subset B_0 \wedge B \neq B_0$;*
б) ***додатним****, якщо $0 < \alpha$, тобто $B_0 \subset B \wedge B_0 \neq B_0$.*

Означення 8.3.9. ***Добутком*** $\alpha_1 \alpha_2 \overset{df}{=} (B; C)$ ***двох додатних дійсних чисел*** $\alpha_1 = (B_1; C_1)$ *і* $\alpha_2 = (B_2; C_2)$ *називається таке дійсне число* $\alpha \overset{df}{=} (B; C)$, *що* $B \overset{df}{=} B_1 B_2 \overset{df}{=} \{b \in \mathbb{Q} | b \leqslant 0 \vee (\exists b_1 \in \in B_1, b_2 \in B_2)(0 < b_1, b_2 \wedge b = b_1 b_2)\}$, $C = \mathbb{Q} \setminus B$.

Очевидно, що дійсне число $\alpha \in \mathbb{R}$ додатне тоді і тільки тоді, коли протилежне до нього дійсне число $-\alpha$ від'ємне, тобто виконується співвідношення $((0 < \alpha) \Leftrightarrow (-\alpha < 0))$ для довільного дійсного числа $\alpha \in \mathbb{R}$.

Означення 8.3.10. ***Добуток при множенні двох дійсних чисел*** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ***коли хоча би одне з цих чисел від'ємне*** *подамо на основі означення 8.3.9 таким чином:*

а) якщо $\alpha \in \mathbb{R}$ – додатне, а $\beta \in \mathbb{R}$ – від'ємне дійсні числа, де, отже, $0 < \alpha$, $\beta < 0$, то

$$\alpha \cdot \beta \overset{df}{=} -(\alpha \cdot (-\beta)) < 0;$$

б) якщо $\alpha \in \mathbb{R}$ – від'ємне, а $\beta \in \mathbb{R}$ – додатне дійсні числа, де отже, $\alpha < 0$, $0 < \beta$ то

$$\alpha \cdot \beta \overset{df}{=} -(-(\alpha) \cdot \beta) < 0;$$

в) якщо ж $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – від'ємні дійсні числа, тобто $\alpha, \beta < 0$, то

$$0 < \alpha \cdot \beta \overset{df}{=} (-\alpha) \cdot (-\beta).$$

Якщо один із множників α, β нульовий, то приймемо $\alpha \cdot \beta \overset{df}{=} 0$.

Очевидно, що роль нейтрального елемента при множенні дійсних чисел грає звичайна одиниця 1, тобто $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha)$.

Можна показати, що до кожного ненульового дійсного числа існує єдине обернене число α^{-1} таке, що виконуються рівності $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$, звідки легко вводиться ділення на ненульове дійсне число α так: $\beta : \alpha \overset{df}{=} \dfrac{\beta}{\alpha} \overset{df}{=} \beta\alpha^{-1}$.

В кінці-кінців, відмітимо, утвориться лінійно упорядковане поле $(\mathbb{R}; +, \cdot, \leqslant)$ дійсних чисел, яке, говорять, буде мінімальним неперервним розширенням лінійно упорядкованого поля $(\mathbb{Q}; +, \cdot, \leqslant)$ раціональних чисел.

6. Побудоване поле дійсних чисел, виявляється, є таким розширенням поля раціональних чисел, що за допомогою дійсних чисел можна виконувати вимірювання різноманітних величин. Підтвердженням цього факту є те, що між числами впорядкованої множини $(\mathbb{R}; \leqslant)$ дійсних чисел і точками координатної (числової) прямої встановлюється взаємно однозначна відповідність (детальніше з цим можна познайомитися в тих розділах математики, які присвячені побудові системи дійсних чисел).

8.4 Деякі властивості поля дійсних чисел

1. Для дійсних чисел поняття модуля (абсолютної величини) дійсного числа вводиться цілком аналогічно тому, як це поняття вводилося для раціональних чисел.

Означення 8.4.1. $|\alpha|$ — ***модуль дійсного числа*** $\alpha \in \mathbb{R}$, *якщо виконується умова*

$$|\alpha| \overset{df}{=} \begin{cases} \alpha, \ \textit{якщо}\ 0 \leqslant \alpha; \\ -\alpha, \ \textit{якщо}\ \alpha < 0. \end{cases}$$

Отже, модуль $|\alpha|$ дійсного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ — це невід'ємне дійсне число, яке співпадає з α, якщо $0 \leqslant \alpha$, або з $-\alpha$, якщо $\alpha < 0$.

Відмітимо деякі найпростіші властивості модулів дійсних чисел, які пов'язані з введеними вище діями над дійсними числами:

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|;$$
$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha \pm \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|;$$
$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|;$$
$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

2. Подібно до того, як впорядковане поле раціональних чисел володіє властивістю щільності, відміченою раніше, впорядковане поле дійсних чисел теж володіє аналогічною властивістю щільності, а саме — справедлива така теорема:

Теорема 8.4.1. *Для будь-яких дійсних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, що $\alpha < \beta$, знайдеться безліч дійсних чисел $\gamma \in \mathbb{R}$ таких, що задовольняють подвійну нерівність $\alpha < \gamma < \beta$.*

3. Як і впорядковане поле раціональних чисел архімедівськи впорядковане, поле дійсних чисел теж архімедівськи впорядковане, тобто виконується **нерівність Архімеда**, яка в данному випадку має вигляд такого співвідношення:

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(0 < \beta \to (\exists n \in \mathbb{N})\alpha < n\beta).$$

На основі нерівності Архімеда неважко доводиться теорема про ділення дійсних чисел з остачею, яка є узагальненням відповідної теореми для цілих чисел:

Теорема 8.4.2. *Для будь-яких дійсних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ таких, що $0 < \beta$, знайдуться єдині ціле число $n \in \mathbb{Z}$ і дійсне число $r \in \mathbb{R}$ такі, що виконуються умови*

$$\alpha = n\beta + r; \ 0 \leqslant r < \beta.$$

Наслідок. Для довільного дійсного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ знайдеться таке єдине ціле число $n \in \mathbb{Z}$, що виконуються нерівності

$$n \leqslant \alpha < n + 1.$$

4. Для дійсних чисел, крім розглянутих вище дій, вводиться і унарна операція піднесення до степеня. У зв'язку з цим розглянемо, як вводяться піднесення до цілого степеня та пов'язане з ним добування кореня натурального степеня.

Якщо $\alpha \in \mathbb{R}$, причому $\alpha \neq 0$, то за означенням маємо:

$$a^0 \overset{df}{=} 1;$$
$$a^n \overset{df}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}};$$
$$a^{-n} \overset{df}{=} \frac{1}{\alpha^n},$$

де $n \in \mathbb{N}$ — натуральне число.

Має місце така теорема:

Теорема 8.4.3. *Для довільного дійсного додатного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ і будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$ існує таке єдине дійсне додатне число $\beta \in \mathbb{R}$, що виконується рівність $\beta^n = \alpha$, і це єдине число β позначається символічно $\sqrt[n]{\alpha}$; символічно формулювання цього твердження матиме такий вигляд:*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(0 < \alpha \to (\exists! \beta \in \mathbb{R})\beta^n = \alpha);\ \beta \overset{df}{=} \sqrt[n]{\alpha};$$

*отримане значення називається **арифметичним коренем** n**-го степеня з додатного дійсного числа** $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Якщо $n \in \mathbb{N}$ — парне натуральне число, то можна показати, що не існує кореня n-го степеня з від'ємного дійсного числа, а якщо ж $n \in \mathbb{N}$ — непарне натуральне число, то існує єдиний корінь $\sqrt[n]{\alpha}$ з довільного дійсного числа $\alpha \in \mathbb{R}$, знак якого співпадає з знаком α. Будемо вважати, що $\sqrt[n]{0} = 0$ для будь-якого натурального числа $n \in \mathbb{N}$.

Ввівши поняття кореня $\sqrt[n]{\alpha}$ натурального степеня n з дійсного числа, можна далі визначити поняття степеня з дробовим показником для додатного дійсного числа, а саме:

$$\alpha^{\frac{p}{q}} \overset{df}{=} \sqrt[q]{\alpha^p},\ \text{де } 0 < \alpha, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}.$$

Для арифметичних коренів можна довести ряд властивостей, відомих з шкільної математики:

1. $\sqrt[n]{\alpha\beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$;
2. $\sqrt[n]{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}$;
3. $\sqrt[n]{\alpha^m} = (\sqrt[n]{\alpha})^m$;

4. $\sqrt[kn]{\alpha^k} = \sqrt[n]{\alpha}$;
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\alpha}} = \sqrt[nm]{\alpha}$;
6. $\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}$,

де $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — довільні додатні дійсні числа.

Аналогічні властивості мають місце і для степенів з раціональними показниками, а саме:

1. $\alpha^{r_1} \cdot \alpha^{r_2} = \alpha^{r_1+r_2}$;
2. $\dfrac{\alpha^{r_1}}{\alpha^{r_2}} = \alpha^{r_1-r_2}$;
3. $(\alpha^{r_1})^{r_2} = \alpha^{r_1 r_2}$;
4. $(\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r$;
5. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r}$;
6. $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^r = \alpha^{-r}$,

де $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — довільні додатні дійсні числа, а $r_1, r_2, r \in \mathbb{Q}$ — довільні раціональні числа.

5. Відмічена нами система дійсних чисел визначена як мінімальне неперервне розширення системи раціональних чисел, коли в основу побудови дійсних чисел взято так звані **перерізи Дедекінда**. Відповідна теорія побудови системи дійсних чисел називається **теорією Дедекінда**.

В математиці існує цілий ряд інших теорій побудови системи дійсних чисел, з якими можна познайомитися в дисципліні „Теорія числових систем“. Згадаємо лише назви деяких з них. Відомою теорією побудови системи дійсних чисел є **теорія дійсних чисел Кантора**, основними об'єктами в якій для побудови дійсних чисел є так звані фундаментальні та збіжні послідовності раціональних чисел. У шкільному курсі математики для побудови системи дійсних чисел використовуються елементи **теорії дійсних чисел Вейєрштрасса**, основним об'єктом у якій є нескінченні десяткові дроби. Відомими є також теорія побудови дійсних чисел за допомогою ланцюгових дробів, теорія Колмогорова за допомогою відображень $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, які задовольняють таким умовам: $\left[\dfrac{f(kn)}{k}\right] = f(n)$, $kf(n) < f(kn)$, де $k, n \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа, причому $\left[\dfrac{p}{q}\right]$ означає найбільше невід'ємне число таке, що

$\left[\dfrac{p}{q}\right] q \leqslant p$, де $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

8.5 Питання для самоперевірки засвоєння знань та вправи

1. Чому цілих чисел недостатньо для використання їх в практиці?
2. Яке число називається раціональним (дробовим)?
3. Які раціональні числа називаються рівними між собою?
4. Що таке скорочення дробового числа?
5. Яке дробове число називається нескоротним?
6. Як можна звести дробове число до нескоротного виду? Навести відповідні приклади.
7. Як вводяться дії додавання та множення раціональних чисел?
8. Як вводиться відношення порядку $\leqslant$ для раціональних чисел?
9. Що таке лінійно впорядковане поле раціональних чисел?
10. Як вводяться дії віднімання та ділення раціональних чисел?
11. Як пояснити, що система раціональних чисел є мінімальним розширенням системи цілих чисел?
12. Як пояснити, що позначення раціонального числа у вигляді символічного запису $\dfrac{p}{q}$ можна трактувати як ділення чисельника p на знаменник q?
13. Який вигляд має узагальнення аксіоми індукції для системи раціональних чисел?
14. Як можна ввести систему раціональних чисел у вигляді фактор-системи $((\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\varepsilon_{\mathbb{Z}}; \oplus, *, \leqslant)$, що складається з класів еквівалентності $[(p;q)]$ по відношенню $\varepsilon_{\mathbb{Z}}$, якщо $(p;q) \equiv \equiv (r;s)(\varepsilon_{\mathbb{Z}}) \overset{df}{\Longleftrightarrow} ps = qr$, де $p, r \in \mathbb{Z}; q, s \in \mathbb{N}$?

15. Як вводяться арифметичні операції додавання, віднімання, множення, ділення та відношення природного порядку $\leqslant$ для класів $[(p;q)]$?
16. Що таке модуль раціонального числа?
17. Яке раціональне число називається правильним дробом, неправильним дробом?
18. Проведіть самостійне доведення теореми про подання раціонального числа у вигляді суми цілого числа і невід'ємного правильного дробу.
19. Що таке ціла частина і дробова частина раціонального числа та як їх знайти для даного раціонального дробу?
20. В чому полягає властивість щільності поля раціональних чисел? Сформулюйте відповідну теорему.
21. Чому поле раціональних чисел архімедівськи упорядковане? Який вигляд має відповідна нерівність Архімеда?
22. Чому в задачах вимірювання величин недостатньо раціональних чисел?
23. Наведіть приклад алгебраїчної задачі, яка вказує на необхідність розширення системи раціональних чисел.
24. Яка різниця між конструктивним і аксіоматичним підходом побудови системи дійсних чисел?
25. Що таке розріз Дедекінда в системі раціональних чисел?
26. Які типи розрізів Дедекінда можуть зустрічатися при їх розгляді в системі раціональних чисел?
27. Що таке граничний елемент розрізу Дедекінда?
28. Як визначаються раціональне та ірраціональне числа за допомогою розрізів Дедекінда?
29. Чому отриману за допомогою розрізів Декекінда систему дійсних чисел називають неперервною?

30. Як вводиться рівність дійсних чисел за допомогою розрізів Дедекінда?
31. Як вводиться відношення порядків $\leqslant, <$ дійсних чисел за допомогою розрізів Дедекінда?
32. Як вводиться дія додавання дійсних чисел?
33. Як вводиться нуль за допомогою розрізу Дедекінда?
34. Яке дійсне число називається протилежним до даного дійсного числа?
35. Як утворюється адитивна група в системі дійсних чисел?
36. Як вводяться від'ємні і додатні дійсні числа в системі дійсних чисел ?
37. Як вводиться дія множення додатних дійсних чисел?
38. Як вводиться множення для довільних дійсних чисел?
39. Що таке обернене дійсне число до даного дійсного числа?
40. Що таке впорядковане поле дійсних чисел?
41. Що таке модуль дійсного числа?
42. Які властивості модуля дійсного числа Ви знаєте?
43. В чому полягає властивість щільності для впорядкованого поля дійсних чисел? Сформулюйте відповідну теорему.
44. Чому поле дійсних чисел архімедівськи упорядковане? Сформулюйте відповідну нерівність Архімеда для дійсних чисел.
45. Сформулюйте теорему про ділення дійсних чисел з остачею.
46. Як вводиться дія піднесеня дійсних чисел до цілого степеня?
47. Що таке арифметичний корінь n-го степеня з дійсного числа? Сформулюйте відповідну теорему про його існування.
48. Чи для будь-якого натурального степеня існує корінь з дійсного числа?

49. Як вводиться поняття степеня дійсного числа з дробовим показником?

50. Перелічіть кілька властивостей для арифметичних коренів, які Вам відомі з шкільної математики.

51. Який вигляд мають згадані властивості для степенів дійсних чисел з дробовими показниками?

52. Які Ви ще знаєте назви теорій дійсних чисел, крім розглянутої теорії перерізів Дедекінда?

53. Скоротити дроби:

    а) $\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{x^3-1}$;

    б) $\dfrac{x^3+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$;

    в) $\dfrac{a^2+a+1}{(a^2+a)^2-(a^2+a)-2}$.

54. Знайти всі значення $k \in \mathbb{Z}$ такі, щоб значення дробу $\dfrac{k^3+k+3}{k+1}$ було цілим числом.

55. Знайти суму $S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{100}$, якщо відомо, що $a_1 = \dfrac{1}{3\cdot 5}$; $a_2 = \dfrac{1}{5\cdot 7}$; $a_3 = \dfrac{1}{7\cdot 9}$; $a_4 = \dfrac{1}{9\cdot 11}$ і т. д.

56. Спростити вираз $(y(1-x^2y^{-2})+x(x^{-2}y^2-1)+xy(x^{-2}-y^{-2}))\times$ $\times(x^{-2}-y^{-2})^{-1}(x+y+1)^{-1}$ і знайти його значення при $x=\dfrac{2}{3}$, $y=-0.3$.

57. * Довести, що виконується нерівність $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100} < \dfrac{1}{10}$.

58. * Довести, що виконуються нерівності $1 < \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} +$ $+\dfrac{1}{k+3} + ... + \dfrac{1}{3k} + \dfrac{1}{3k+1} < 2$ при довільному натуральному числі $k \in \mathbb{N}$.

59. Обчислити $\sqrt{\dfrac{810}{1920}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{1920}{810}}$; $\sqrt[3]{-\dfrac{1920}{810}}$.

60. Відомо, що дріб $\dfrac{a}{b}$ нескоротний. Поясніть, що дроби $\dfrac{a-b}{ab}$, $\dfrac{a+b}{ab}$ теж нескоротні.

61. Довести формулу „складного радикала“ для дійсних чисел: якщо $a, b \in \mathbb{R}$ такі, що $b \leqslant a^2$, $0 \leqslant a, b$, то $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm$ $\pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

62. Застосувавши формулу „складного радикала“, спростити вираз $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

63. Довести, що сума $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ є ірраціональне число.

64. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{5}{2+\sqrt[3]{3}}$.

65. Довести, що для довільних додатних дійсних чисел x, y, z виконується нерівність $\sqrt{xz}+\sqrt{yz}-\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y+z}{2}$. Яку умову повинні задовольняти x, y, z, щоб ця нерівність перетворилась у рівність?

66. Довести, що виконується нерівність $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{a^n+b^n}{2}$, де $a, b \in \mathbb{R}$ — довільні додатні дійсні числа, а $n \in \mathbb{N}$ — натуральне число.

67. * Відомо, що $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ — довільні додатні дійсні числа такі, що $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$. Довести, що виконується нерівність $n \leqslant a_1 + a_2 + ... + a_n$, а рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

68. Довести, що виконується нерівність $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+...+\dfrac{a_n}{a_1} \geqslant n$, якщо $a_1, a_2, ..., a_n$ — довільні додатні дійсні числа. Пояснити,

що ця нерівність перетворюється у рівність тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

69. Довести, що для будь-яких дійсних чисел a_1, b_1, a_2, b_2 виконується така нерівність Коші:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

8.6 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

53. а) $\frac{x^2+x+1}{x-1}$; б) $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$; в) $\frac{1}{a^2+a-2}$.
54. 0; -2.
55. $\frac{400}{609}$.
56. xy; при $x = \frac{2}{3}$, $y = -0.3$ маємо -0.2.
57. **Вказівка.** Розглянути вираз $A_n = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2}$.
58. **Вказівка.** Використати метод математичної індукції.
59. $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt[3]{2}$; $-\sqrt[3]{2}$.
60. **Вказівка.** Застосувати метод доведення від супротивного.
61. **Вказівка.** Застосувати рівносильність $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$, якщо $a, b \geqslant 0$.
62. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.
63. **Вказівка.** Застосувати метод доведення від супротивного.
64. $\frac{5}{11}\left(4 - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right)$.
65. Рівність виконується, якщо $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z}$.
66. **Вказівка.** Застосувати метод математичної індукції.
67. **Вказівка.** Застосувати метод математичної індукції.
68. **Вказівка.** Використати результати вправи 67.
69. **Вказівка.** Використати очевидну нерівність $0 \leqslant (x-y)^2$, де $x, y \in \mathbb{R}$.

9 Поле комплексних чисел

9.1 Вступ; побудова поля комплексних чисел як мінімального розширення поля дійсних чисел

1. Будемо вважати, що нам відоме поле $\mathcal{R}$ дійсних чисел, яке є спеціальною алгебраїчною системою, що визначена як мінімальне неперервне розширення алгебраїчної системи раціональних чисел. Раніше уже відмічалось, що в основу побудови системи дійсних чисел можна взяти **аксіоматичну теорію Дедекінда**, за допомогою якої кожне дісне число вважається граничним елементом раціонального, або ірраціонального розрізу Дедекінда. Серед конструктивних теорій побудови системи дійсних чисел відомими є **теорія Кантора**, в основі якої покладено розгляд фундаментальних та збіжних послідовностей раціональних чисел, **теорія Вейерштрасса**, основними об'єктами якої є нескінченні десяткові дроби, відомі з шкільної математики, **теорія Колмогорова**, що використовує спеціальні послідовності невід'ємих цілих чисел тощо. Одне з аксіоматичних означень системи дійсних чисел можна дати як лінійно впорядкованого поля $\mathcal{R}$ всіх дійсних чисел, в якому довільна обмежена зверху непорожня підмножина $X \subset \mathbb{R}$ має точну верхню грань. Більш детальне вивчення такого поля проводиться у вступі до математичного аналізу. Це поле також систематично вивчається на старших курсах в дисципліні **„Числові системи“**. Це поле було основною областю, на якій розглядалися ті чи інші обєкти в шкільному курсі математики.

Ясно, що дійсні числа відіграють надзвичайно важливу роль як в математиці, так і в практичній діяльності. Вони дають, наприклад, можливість ввести вимірювання різного виду (обчислення довжини, об'ємів, площ, ваги і т.п.), вивчати рухи матеріальних тіл і т.п.

Проте виявилося, що дійсних чисел недостатньо. Існує цілий ряд задач, для розв'язання яких потрібно розширяти поле дійсних чисел (наприклад, в теорії електромагнетизму, в квантовій теорії поля і т.д.). Навіть у самій алгебрі приходимо до необхідності розширення поля дійсних чисел. Розглянемо, наприклад, одну із елементарних задач — розв'зати квадратне рівняння $x^2+1=0$. Виявляється, що в полі дійсних чисел це рівняння розв'язків не має — немає дійсного числа, квадрат якого в сумі з одиницею дав би нуль.

2. Далі побудуємо мінімальне розширення поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел до такого поля $\mathcal{C}$, у якому рівняння $x^2+1=0$ мало би розв'язок. Позначимо цей розв'язок так: $x=i$, де i назвемо **уявною одиницею**. Отже, $i^2=-1$. По суті маємо що $i=\sqrt{-1}$. Дійсно, рівняння $x^2+1=0$ рівносильне рівнянню $x^2=-1$, що в свою чергу приводить до рівностей $x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$. Відмітимо, що позначення для уявної одиниці вперше ввів Леонард Ейлер як першу літеру латинського слова **image** (в перекладі на українську мову означає образ, уявний, уява).

У ролі базової множини поля $\mathcal{C}$ візьмемо множину $\mathbb{C} \overset{df}{=} \{a+ +bi | a,b\in\mathbb{R}\wedge i^2=-1\}$.

Домовимося про наступні позначення елементів в цій множині $\mathbb{C}$.

1. Якщо $a=0$, то $a+bi \overset{df}{=} bi$.
2. Якщо $b=0$, то $a+bi \overset{df}{=} a$.
3. Якщо $a=b=0$, то $a+bi \overset{df}{=} 0$.
4. Якщо $a=0$, $b=1$ то $1\cdot i \overset{df}{=} i$.

Мал. 1.21. Леонард Ейлер (1707 — 1783 роки)

Очевидно, що $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i \notin \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{C}$.

Введемо на множині $\mathbb{C}$ дії додавання і множення, які позначатимемо відповідно тими самими символами, що і в полі $\mathcal{R}$ дійсних чисел.

Нехай $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$. Тоді

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) \overset{df}{=} (a + c) + (b + d)i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) \overset{df}{=} (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Інтуїтивно ці дії введені по аналогії з тим, як виконуються аналогічні дії зі звичайними алгебраїчними двочленами, пам'ятаючи при цьому про рівність $i^2 = -1$. Очевидно, що $ib = bi$, де $b \in \mathbb{R}$. Легко бачити, що $bi \notin \mathbb{R}$, якщо $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, звідки випливає нерівність $bi \neq 0$.

Виявляється, що кожен елемент $z \in \mathbb{C}$ єдиним способом зображується у вигляді суми $a + bi$, тобто $(\exists! a, b \in \mathbb{R})(z = a + bi)$. Справді, нехай для зображення z маємо $z = a + bi$ і $z = a_1 + b_1 i$, де $a, b, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, тобто $a + bi = a_1 + b_1 i$. Використавши введене вище означення додавання для елементів з $\mathbb{C}$, отримаємо рівність $(b - b_1)i = a_1 - a$. У цій рівності очевидно $b - b_1 = 0$, тобто $b = b_1$. В противному випадку на основі введеного множення для елементів із $\mathbb{C}$ отримаємо $i = \dfrac{a_1 - a}{b - b_1} \in \mathbb{R}$, що протирічить тому, що $i \notin \mathbb{R}$. А оскільки $b = b_1$, то з тієї ж рівності отримаємо $a = a_1$; а це вказує на те, що іншого зображення для $z = a + bi$ не існує.

3. Справедлива така теорема:

Теорема 9.1.1. *Множина $\mathbb{C}$ з введеними вище операціями додавання і множення на цій множині є полем, в якому поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел є його підполем.*

Доведення. Легко бачити, що алгебра $(\mathbb{C};+)$ є абелева група. Дійсно, $0+(a+bi) = (0+0i)+(a+bi) = (0+a)+(0+b)i = (a+bi)+(0+ +0i) = (a+bi)+0$ для довільного елемента $z_1 = a+bi$, що вказує на те, що 0 — нульовий (тобто нейтральний) елемент відносно операції додавання. Легко бачити, що для довільних $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ виконуються рівності $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + + d)i = (c + a) + (d + b)i = (c + di) + (a + bi) = z_2 + z_1$, що вказує на комутативність операції додавання. Аналогічно показуємо, що виконується рівність $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ для довільних $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = e + fi$, тобто операція додавання асоціативна. Накінець бачимо, що $(a+bi)+((-a)+(-b)i) = ((-a)+ +(-b)i)+(a+bi) = 0+0i = 0$ для довільного елемента $z_1 = a+bi \in \mathbb{C}$, що вказує на те, що виконується співвідношення

$$(\forall z_1 \in \mathbb{C})(\exists z_1' \in \mathbb{C})(z_1 + z_1' = z_1' + z_1 = 0),$$

де в ролі z_1' для $z_1 = a+bi$ виступає протилежний елемент $-z \stackrel{df}{=} z_1' = = (-a) + (-b)i$. Отже, дійсно алгебра $(\mathbb{C};+)$ є абелевою адитивною групою.

Аналогічним чином показуємо, що алгебра $(\mathbb{C} \setminus \{0\};\cdot)$ є теж абелевою групою. Дійсно, для довільного елемента $z_1 = a + bi$ маємо $1\cdot z_1 = (1+0\cdot i)(a+bi) = (1\cdot a-0\cdot b)+(1\cdot b+0\cdot a)\cdot i = a+bi = (a+bi)\times \times 1 = (a + bi)(1 + 0i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a + bi$, що вказує на те, що 1 є одиницею (тобто нейтральним елементом) відносно множення. Неважко бачити, що $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = = (ac-bd)+(ad+bc)i = (ca-db)+(cb+da)\cdot i = (c+di)(a+bi) = z_2\cdot z_1$, де $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di \in \mathbb{C}$ — довільні елементи, тобто операція множення комутативна. Аналогічно можна показати, що операція множення асоціативна, тобто для довільних елементів $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ виконується рівність $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (самостійно доведіть цю рівність). Залишилось показати, що для довільного ненульового елемента $z_1 = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ існує обернений елемент $z_1^{-1} \stackrel{df}{=} z_1' = a' + b'i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, тобто такий елемент $z_1' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, що виконуються рівності

$$z_1 \cdot z_1' = z_1' \cdot z_1 = 1.$$

Оскільки операція множення комутативна, то досить показати виконання однієї з вказаних рівностей. Покажемо, наприклад, що виконується рівність

$$z_1 \cdot z_1^{-1} = 1.$$

Використавши єдиність представлення комплексного числа у вигляді суми $z = c + di$, де $c, d \in \mathbb{R}$, з вказаної рівності отримаємо в кінці кінців систему двох рівнянь з невідомими $a', b' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered}(a + bi)(a' + b'i) = 1;\\ (aa' - bb') + (ab' + ba')i = 1 + 0 \cdot i;\\ \begin{cases} aa' - bb' = 1;\\ ba' + ab' = 0.\end{cases}\end{gathered}$$

Ров'язавши отриману систему рівнянь відносно невідомих a', b', матимемо такий єдиний розвязок :

$$\begin{cases} a' = \dfrac{a}{a^2 + b^2};\\ b' = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}.\end{cases}$$

Отже, алгебра $(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ є абелевою мультиплікативною групою.

Залишилося показати, що операція множення дистрибутивна відносно операції додавання, тобто для довільних елементів $z = a + bi,\ z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i\ \in \mathbb{C}$ виконуються такі рівності:

$$\begin{gathered} z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2;\\ (z_1 + z_2)z = z_1 z + z_2 z.\end{gathered}$$

Оскільки введені операції комутативні, достатньо показати виконання однієї із вказаних рівностей. В результаті рівносильних перетворень справді маємо: $z(z_1 + z_2) = (a + bi)((a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)) = (a + bi) \cdot ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) = (a(a_1 + a_2) - b(b_1 + b_2)) + (a(b_1 + b_2) + b(a_1 + a_2))i = ((aa_1 - bb_1) + (aa_2 - bb_2)) + ((ab_1 + ba_1) + (ab_2 + ba_2))i = ((aa_1 - bb_1) + (ab_1 + ba_1)i) + ((aa_2 - bb_2) + (ab_2 + ba_2)i) = (a + bi)(a_1 + b_1 i) + (a + bi)(a_2 + b_2 i) = zz_1 + zz_2$, що і потрібно було показати. Отже, дійсно алгебра $\mathcal{C} = (\mathbb{C}; +, \cdot)$ є полем. А те, що поле $\mathcal{R}$ дійсних чисел є підполем поля $\mathcal{C}$, випливає із самої конструкції базової множини $\mathbb{C}$ поля $\mathcal{C}$: $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a = a + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$. Теорема доведена повністю ■

4. Відмітимо, що в полі $\mathcal{C}$ можна ввести дію віднімання „$-$“ елементів із $\mathbb{C}$ і дію ділення „:“ на ненульові елементи з $\mathbb{C}$:

а) оскільки елемент $-z \overset{df}{=} -(a+bi) \overset{df}{=} (-a) + (-b)i$ є протилежним елементом до елемента $z = a + bi$, то маємо: $z_1 - z_2 \overset{df}{=} z_1 + (-z_2) = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2)i = (a_1 + b_1 i) + ((-a_2) + (-b_2)i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$;

б) оскільки елемент $z^{-1} \overset{df}{=} \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}i$ є оберненим елементом до елемента $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то маємо: $z_1 : z_2 \overset{df}{=} z_1 \times z_2^{-1} \overset{df}{=} \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)^{-1} = (a_1 + b_1 i)\left(\dfrac{a_2}{a_2^2+b_2^2} + \dfrac{-b_2}{a_2^2+b_2^2}i\right) = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$, де $z_2 \neq 0$.

5. Зауважимо, що конструкція побудови поля $\mathcal{C}$ отрималася такою, що це поле є мінімальним розширенням поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел, до якого приєднано новий елемент $i \notin \mathbb{R}$, такий, що рівняння $x^2 + 1 = 0$ має розв'язок в цьому полі $\mathcal{C}$: $x_{1,2} = \pm i = \pm\sqrt{i}$, тобто i — це такий (новий по відношенню до $\mathbb{R}$) елемент в полі $\mathcal{C}$, що $i^2 = -1$. Це поле $\mathcal{C}$ і називається **полем комплексних чисел**. Таким чином вводимо наступне означення.

Означення 9.1.1. *Полем $\mathcal{C}$ комплексних чисел називається таке мінімальне розширення поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел, яке містить (новий по відношенню до $\mathbb{R}$) елемент i, який задовольняє умову $i^2 + 1 = 0$.*

6. Поле комплексних чисел іноді будують як множину $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ всіх впорядкованих пар множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, на якій вводять дії додавання і множення пар, а саме:

$$(a;b) + (c;d) \overset{df}{=} (a+c; b+d);$$
$$(a;b) \cdot (c;d) \overset{df}{=} (ac - bd; ad + bc),$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ — довільні дійсні числа з поля $\mathcal{R} = (\mathbb{R}; +, \cdot)$. Тоді аналогічно розглянутій вище теоремі можна показати, що відносно введених вище операцій на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ утворюється поле, підполем якого є множина пар виду $(a; 0)$, яке ізоморфне полю $\mathcal{R}$ дійсних чисел. Можна також показати, що введене нами раніше поле $\mathcal{C}$ комплексних чисел ізоморфне тільки що сконструйованому полю. Дійсно, відповідність $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, задана рівністю $f(a + bi) \stackrel{df}{=} (a; b)$, де $a, b \in \mathbb{R}$, є взаємно однозначною і задовольняє умовам

$$f((a + bi) + (c + di)) = f(a + bi) + f(c + di);$$
$$f((a + bi) \cdot (c + di)) = f(a + bi) \cdot f(c + di),$$

причому $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ — будь-які дійсні числа.

Виявляється, що довільне мінімальне розширення поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел, що містить елемент, квадрат якого рівний -1, ізоморфне полю $\mathcal{C}$ комплексних чисел. Звідси можна зробити висновок про те, що всі такі мінімальні розширення поля $\mathcal{R}$ ізоморфні між собою. Отже, поле $\mathcal{C}$ комплексних чисел з точністю до ізоморфізму визначено однозначно.

Виникає питання, а чи не можна розширити поле $\mathcal{C}$ комплексних чисел до такого нового поля, яке зберігало би всі властивості поля $\mathcal{C}$. Виявляється, що відповідь на це питання негативна (більш детально з цим можна познайомитись в спеціальній дисципліні „Числові системи“). Таким чином, ніяких інших числових полів, крім поля $\mathcal{C}$ комплексних чисел та його підполів, немає. Тому під **числовими полями** як правило розуміють поле комплексних чисел та всі його підполя. До речі відмітимо, що поле $\mathcal{Q}$ раціональних чисел, виявляється, є мінімальним числовим полем.

9.2 Деякі властивості комплексних чисел, зображених в алгебраїчній формі; спряженеість комплексних чисел

1. Комплексні числа позначатимемо, як було відмічено вище, латинською буквою z або цією буквою з індексом: $z_0, z_1, z_2, \ldots$.

Означення 9.2.1. *Запис комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ у вигляді суми $z = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$, називається алгебраїчною формою зображення комплексних чисел.*

При цьому $Re(z) \stackrel{df}{=} a$ називається **дійсною частиною числа** z, bi називається **уявною його частиною**, $Im(z) \stackrel{df}{=} b$ — **коефіцієнтом при уявній частині**, i називається **уявною одиницею**, а число bi, де $b \neq 0$, називається **чисто уявним чсилом** (Re — це скорочення слова **real**, що означає дійсний, а Im — скорочення слова **image**).

На основі доведених раніше домовленостей для позначень та дій над комплексними числами $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ маємо такі корисні для подальшої роботи співвідношення:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$ — рівність комплексних чисел;
2. $z_1 = 0 \Leftrightarrow (a = b = 0)$ — нульовий елемент $\mathcal{C}$;
3. $z_1 = 1 \Leftrightarrow (a = 1 \wedge b = 0)$ — одиничний елемент $\mathcal{C}$;
4. $z_1 = i \Leftrightarrow (a = 0 \wedge b = 1)$ — уявна одиниця $\mathcal{C}$;
5. $-z_1 = -a + (-b)i$ — протилежний елемент до z_1;
6. $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ — сума комплексних чисел;
7. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_1) = (a - c) + (b - d)i$ — різниця комплексних чисел ;
8. $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ — добуток комплексних чисел ;
9. $z_1^{-1} = \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}i$ — обернений елемент до z_1;
10. $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$ — частка комплексних чисел.

2. Для кращого засвоєння виконання введених вище арифметичних операцій додавання, віднімання, множення та ділення над комплексними числами слід запам'ятати те, що з цими числами ми „працюємо" як з алгебраїчними двочленами, враховуючи рівність $i^2 = -1$ та властивості операцій в полі. Якщо словесні формулювання для додавання і віднімання комплексних чисел виражаються в простій формі (сформулюйте самостійно!), то для множення і, особливо, ділення комплексних чисел ці формулювання досить громіздкі. При виконанні дії ділення $\dfrac{z_1}{z_2}$ над комплексними числами $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ зручно чисельник і знаменник дробу $\dfrac{a+bi}{c+di}$ домножити на число $\overline{z_2} = c - di$, що значно полегчує знаходження відповідного результату.

Приклади. Виконати дії:

а) $z_1 = (5 - 2i)(2 + 3i)$;

б) $z_2 = \dfrac{2+3i}{3+4i}$.

Розв'язання. Використавши вище наведені поради, отримаємо:

а) $z_1 = (5 - 2i)(2 + 3i) = 5 \cdot 2 - 2i \cdot 2 + 5 \cdot 3i - (2i) \cdot (3i) = 10 - 4i + 15i + 6 = 16 + 11i$;

б) $\dfrac{2+3i}{3+4i} = \dfrac{(2+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{2 \cdot 3 + 3i \cdot 3 - 2 \cdot 4i - 3i \cdot 4i}{3 \cdot 3 + 4i \cdot 3 - 3 \cdot 4i - 4i \cdot 4i} = \dfrac{6 + 9i - 8i + 12}{9 + 12i - 12i + 16} = \dfrac{18+i}{25+0i} = \dfrac{18}{25} + \dfrac{1}{25} \cdot i$.

Означення 9.2.2. *Комплексні числа $z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$ називаються **взаємно спряженими між собою**, тобто це така пара комплексних чисел, у яких дійсні частини рівні, а коефіцієнти при уявних частинах протилежні між собою.*

Найпростіші властивості взаємно спряжених комплексних чисел розкриває така теорема:

Теорема 9.2.1. *а) Сума $z + \overline{z}$ та добуток $z \cdot \overline{z}$ взаємно спряжених чисел є дійсне число, причому $z \cdot \overline{z} \geqslant 0$.*

б) Взаємно спряжені між собою числа співпадають тоді і лише тоді, коли вони є дійсними числами, тобто $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

в) Спряжене число до спряженого є початкове число, тобто $\overline{\overline{z}} = z$.

Доведення. Нехай $z = a + bi$, $\overline{z} = a + bi$ — взаємно спряжені комплексні числа. Тоді очевидним чином отримаємо

а) $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \in \mathbb{R}$; $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$, причому $a^2 + b^2 \geqslant 0$;

б) $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow bi = -bi \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

в) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$, що і треба було довести ■

З даної теореми якраз і випливає порада, вказана вище, як спростити виконання ділення на комплексне число: щоб поділити $z_1 = a+bi$ на $z_2 = c+di$, краще чисельник і знаменник дробу $\dfrac{a+bi}{c+di}$ помножити на число $\overline{z_2} = c-di$, спряжене до z_2 (дивись, наприклад, виконання ділення $\dfrac{2+3i}{3+4i}$, наведеного вище).

4. Справедлива наступна теорема про заміну чисел на відповідно спряжені їм числа:

Теорема 9.2.2. *Якщо у виразі $\Phi(z_1, z_2, ..., z_k)$, що може містити лише арифметичні операції над числами $z_1, z_2, ..., z_k$, замінити ці числа на відповідно спряжені до них числа $\overline{z_1}, \overline{z_2}, ..., \overline{z_k}$, то отримаєтьcя вираз $\Phi(\overline{z_1}, \overline{z_2}, ..., \overline{z_k})$, який спряжений до виразу $\Phi(z_1, z_2, ..., z_k)$, тобто матиме місце рівініcть*

$$\overline{\Phi(z_1, z_2, ..., z_k)} = \Phi(\overline{z_1}, \overline{z_2}, ..., \overline{z_k}). \tag{9.2.1}$$

Доведення. Перш за все доведемо, що рівність 9.2.1 має місце для суми і добутку двох чисел $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$. Дійсно, маємо: $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c) - - (b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$;

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd) - -(ad+bc)i = (a-bi)(c-di) = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$. Звідси як наслідок випливає, що рівність (9.2.1) правильна і для різниці та частки двох комплексних чисел. Дійсно, маємо:

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1 + (-z_2)} = \overline{z_1} + \overline{-z_2} = \overline{z_1} + \overline{-c-di} = \overline{z_1} + (-c+di) = = \overline{z_1} - (c-di) = \overline{z_1} - \overline{c+di} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\dfrac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} - \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i = = \dfrac{a-bi}{c-di} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. А оскільки у виразі $\Phi(z_1, z_2, ..., z_k)$ можуть міститися перелічені вище арифметичні операції, то, здійснюючи крок за кроком перетворення виду $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, отримаємо потрібну рівність (9.2.1), чим і завершується доведення теореми ■

Приклад. На основі теореми 9.2.2 робимо висновок про те, що має місце рівність $\left(\overline{\dfrac{(3-2i)-(6+7i)}{5+4i}}\right) = \dfrac{(3+2i)-(6-7i)}{5-4i}$, справедливість якої перевірте самостійно обчисленням лівої і правої чостини цієї рівності.

Наслідок. *Відображення $f : \mathbb{C} \xrightarrow{на} \mathbb{C}$, задане рівністю $f(z) = \overline{z}$, де $z \in \mathbb{C}$, є ізоморфізмом поля $\mathcal{C}$ самого на себе, тобто, говорять, є автоморфізмом.*

Доведення очевидне з рівності $f(z) = \overline{z}$ та теореми 9.2.2.

5. Відомо, що поле $\mathcal{R}$ дійсних чисел лінійно впорядковане за допомогою, наприклад, відношення менше, яке позначається символом $<$ та визначається співвідношенням:

$$a < b \overset{df}{\Longleftrightarrow} a - b \text{ — від'ємне число},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$ — довільні дійсні числа. Це відношення, як ми знаємо, монотонне відносно операції додавання та множення дійсних чисел, тобто задовольняє співвідношенням

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$
$$a < b \land 0 < c \Rightarrow ac < bc,$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$ — довільні дійсні числа.

Виникає питання, чи можна лінійно впорядкувати поле $\mathcal{C}$ комплексних чисел так, щоб відповідний порядок був монотонним відносно додавання та множення комплексних чисел. Відповіддю на це питання є така теорема:

Теорема 9.2.3. *Поле $\mathcal{C}$ комплексних чисел лінійно впорядкувати не можна.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто поле $\mathcal{C}$ вдалося впорядкувати. Відповідний порядок позначимо, як і в полі $\mathcal{R}$ дійсних чисел, символом $<$. Тоді, наприклад, для ненульових чисел $-i$ та i

повинно виконуватись одне із таких чотирьох співвідношень:

$$-i < 0 \wedge i < 0; \tag{9.2.2}$$

$$0 < -i \wedge 0 < i; \tag{9.2.3}$$

$$0 < -i \wedge i < 0; \tag{9.2.4}$$

$$-i < 0 \wedge 0 < i. \tag{9.2.5}$$

Однак, легко бачити, ні жодне з цих співідношень (9.2.2) — (9.2.5) не виконується. Дійсно, якби виконувалося співвідношення 9.2.2, то отримали б $i + (-i) < 0 + (-i)$, тобто $0 < -i$ і, разом з тим, $-i < 0$, що неможливо. Аналогічно, якщо справедливо (9.2.3), маємо $(-i)+0 < (-i)+i$, тобто $-i < 0$ і, разом з тим, $0 < -i$, що теж неможливо. У випадку (9.2.4) маємо: $(i \cdot (-i) < 0 \cdot (-i) \wedge 0 \cdot (-i) < (-i) \cdot (-i))$, тобто $1 < 0 \wedge 0 < -1$, що неможливо. Накінець, у випадку (9.2.5) отримаємо $(-i) \cdot i < 0 \cdot i \wedge 0 \cdot i < i \cdot i$, тобто $1 < 0 \wedge 0 < 1$, що теж неможливо. Тому припущення про те, що поле $\mathcal{C}$ комплексних чисел можна впорядкувати, приводить до протиріччя. Отже, теорема 9.2.3 справедлива, що і треба було довести ■

9.3 Модуль комплексного числа та деякі його властивості

1. Узагальненням абсолютної величини дійсного числа є поняття модуля комплексного числа.

Означення 9.3.1. *Число r називаєтьcя* ***модулем комплексного числа*** *$z = a + bi$, якщо $r \overset{df}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$, і яке, як правило, позначаєтьcя за допомогою виразу $|a+bi|$, тобто $|a+bi|$ — модуль числа $a + bi \in\overset{df}{\Longleftrightarrow} |a + bi| \overset{df}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$.*

З наведеного означення безпосередньо випливає, що модуль довільного комплексного числа є невід'ємне дійсне число та справді є узагальненням модуля (абсолютної величини) дійсного числа.

Властивості модуля комплексного числа розкриває така теорема:

Теорема 9.3.1. *Для будь-яких комплексних чисел $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ мають місце такі співвідношення:*

1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;

2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

3. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, *де* $z_2 \neq 0$;

6. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

7. $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$;

8. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$.

Доведення. Нехай $z = a + bi$, $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тоді отримаємо:

1. $|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$;
   $|-z| = |-(a + bi)| = |(-a) + (-b)i| = \sqrt{(-a)^2 + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$;

2. $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (-ab + ab)i = a^2 + b^2 = |z|^2$;

3. $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

4. $|z_1 \cdot z_2| = |(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)| = |(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i| = \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2} = \sqrt{a_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2} = \sqrt{a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2} = \sqrt{a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|$;

5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = |z_1 \cdot z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| = |z_1| \cdot \dfrac{|z_2^{-1}|}{|z_2 \cdot z_2^{-1}|} = |z_1| \cdot \dfrac{|z_2^{-1}|}{|z_2| \cdot |z_2^{-1}|} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;

6. Легко бачити, що $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a \leqslant 2|z|$; $|z + 1|^2 = (z + 1)\overline{(z + 1)} = (z + 1)(\overline{z} + 1) = z\overline{z} + (z + \overline{z}) + 1 \leqslant |z|^2 + 2|z| + 1 = (|z| + 1)^2$, звідки $|z + 1| \leqslant |z| + 1$. Тоді

при $z_2 \neq 0$ маємо: $|z_1 + z_2| = \left|z_2 \cdot \left(\dfrac{z_1}{z_2} + 1\right)\right| = |z_2| \cdot \left|\dfrac{z_1}{z_2} + 1\right| \leqslant$ $\leqslant |z_2|\left(\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| + 1\right) = |z_2| \cdot \left(\dfrac{|z_1|}{|z_2|} + 1\right) = |z_1| + |z_2|$; у випадку $z_2 = 0$ очевидно, що $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

7. $|z_1| - |z_2| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| - |z_2| \leqslant (|z_1 + z_2| + |-z_2|) - |z_2| =$ $= (|z_1 + z_2| + |z_2|) - |z_2| = |z_1 + z_2| + (|z_2| - |z_2|) = |z_1 + z_2|$;

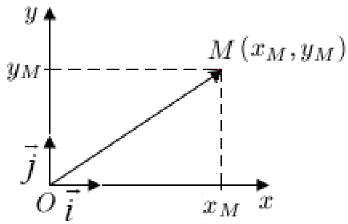
8. Оскільки з попередньої нерівності очевидним чином випливає нерівність $-(|z_1| - |z_2|) = |z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 + z_2|$, то легко бачити, що тоді справедлива і нерівність $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$,

що і треба було довести ■

9.4 Геометричне зображення комплексних чисел

1. Геометричне зображення комплексних чисел важливе для кращого розуміння зв'язку їх з дійсними числами. Крім того, така геометрична інтерпретація комплексних чисел дає можливість розв'язувати відповідні алгебраїчні задачі із застосуванням геометричних ілюстрацій.

Нехай Oxy — прямокутна декартова система координат на площині. Відомо, що між всіма точками M цієї координатної площини і впорядкованими парами $(x_M; y_M)$ дійсних чисел встановлюється взаємно однозначна відповідність: кожній точці M взаємно однозначним чином відповідає впорядкована пара $(x_M; y_M)$ дійсних чисел, де x_M — абсциса точки M, а y_M — ордината точки M. Звідси випливає, що кожній такій точці $M(x_M; y_M)$ можна взаємно однозначно співставити комплексне число $z_M = x_M + iy_M$ (див. нижче відповідний малюнок 1.22). Тоді зрозуміло, що точки $M_x(x_M; 0)$, розташовані на координатній осі Ox, зображають множину $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел, а точки $M_y(0; y_m)$, розташовані на координатній осі Oy, зображатимуть множину $Ri \stackrel{df}{=} \{yi | y \in \mathbb{R}\}$ всіх чисто уявних чисел (крім, звичайно, точки O, в якій $y_0 = 0$). В зв'язку з цим вісь Ox називають **дійсною віссю**, вісь Oy — **уявною віссю**, а саму координатну площину — **комплексною площиною**.



Мал. 1.22.

Уже з такої геометричної інтерпретації комплексних чисел стає зрозумілим, наскільки „розширилося“ поле $\mathcal{C}$ комплексних чисел в порівнянні з полем дійсних чисел (**увага!!!** — насправді, як буде відмічено пізніше, „кількості“ елементів цих полів співпадають, тобто між множинами $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ можна встановити взаємно однозначну відповідність; хоча це, на перший погляд, здається дещо дивним).

2. На практиці досить зручною є інша геометрична інтерпретація комплексних чисел — у вигляді напрямлених відрізків (векторів), початком кожного із яких є початок координат, а кінцем — точка координатної площини Oxy, яка відповідає комплексному числу: $z_M = x_M + i \cdot y_M \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j}$, де $(\vec{i}, \vec{j})$ — ортонормований базис цієї координатної площини (див. малюнок 1.22). Така геометрична інтерпретація дає можливість ілюструвати так звані **лінійні операції над комплексними числами** — додавання, віднімання, множення на дійсне число — та інші поняття, пов'язані з ними. Неважко, наприклад, показати, що виконуються такі відповідності:

1. $z_M + z_K \leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OK}$;

2. $z_M - z_K \leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OK}$;

3. $\alpha \cdot z_M \leftrightarrow \alpha \cdot \overrightarrow{OM}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$;

4. z_M і $\overline{z_M} = z_{\overline{M}} \Leftrightarrow$ симетрично розташовані відносно осі Ox вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{O\overline{M}}$ (точки M_{z_M} і $M_{\overline{z}_M}$ симетричні відносно осі Ox);

5. z_M і $-z_M = z_{-M} = \Leftrightarrow$ симетрично розташовані відносно точки O вектори $\overrightarrow{OM}$ і $-\overrightarrow{OM}$ (точки M_{z_M} і M_{-z_M} симетричні відносно точки O);

6. $|z_M|$ — модуль $z_M \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM}|$ — довжина (модуль) вектора $\overrightarrow{OM}$;

7. $\{z_M \Big| |z_M| = r\} \leftrightarrow \{M_z \Big| |\overrightarrow{OM_z}| = r\}$ — коло з центром O і радіусом $r \geqslant 0$.

Зауважимо, що вектор $\overrightarrow{OM}$ часто називають **радіус-вектором** точки M.

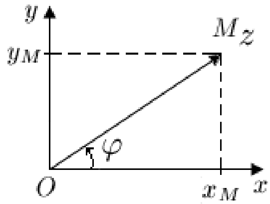
9.5 Тригонометрична форма комплексного числа

1. Арифметичні операції над комплексними числами (а особливо лінійні операції) зручно виконувати тоді, коли ці числа зображені в алгебраїчні формі. Однак, піднесення комплексних чисел до степеня, а особливо добування кореня з комплексного числа, викликають значні (а часто і непереборні) труднощі, якщо ці числа задані в алгебраїчній формі.

Справа значно полегшується, якщо комплексні числа подавати в так званій тригонометричній формі. Зупинимося докладніше на її введенні.

Означення 9.5.1. *Запис комплексного числа $z = x + iy$ у вигляді $z \overset{df}{=} |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ називається **тригонометричною формою зображення цього числа**, де число $r \overset{df}{=} |z| \overset{df}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$ називається **модулем числа** z, число $\varphi \overset{df}{=} \underline{arg}(z)$ називається **аргументом числа** z, причому $0 \leqslant \varphi \overset{df}{=} (\widehat{Ox, \overrightarrow{OM_z}}) < 2\pi$ — це величина кута між віссю Ox і радіусом-вектором точки M_z (див. малюнок 1.23).*

Легко бачити, що будь-яке ненульове комплексне число z єдиним способом зображується в тригонометричній формі, тобто має місце співвідношення $(\forall z \neq 0)(\exists! r, \varphi)(z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi))$.



Мал. 1.23.

2. Очевидно також, що між алгебраїчною та тригонометричною формами зображення комплексних чисел існує тісний взаємозв'язок, який дає можливість перейти від однієї форми запису числа до іншої. Формули, які дають можливість здійснення такого переходу, мають наступний вигляд, а їх справедливість безпосередньо випливає з означень тригонометричних функцій та з наведеного вище малюнка 1.23.

1. Нехай $z = x + iy$ — алгебраїчна форма зображення комплексного числа z; тоді

$$\boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \ \sin\varphi = \dfrac{y}{r}, \ \text{де } r \neq 0; \end{cases}}$$

якщо $r = 0$, то в ролі φ можна взяти довільне значення з проміжку $[0; 2\pi)$.

2. Нехай $z = r(\cos\varphi + isin\varphi)$ — тригонометрична форма запису числа z; тоді

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Зауважимо, що модуль комплексного числа можна тлумачити як узагальнення абсолютної величини дійсного числа, а аргумент комплексного числа — як узагальнення знака („плюс“, „мінус“) дійсного числа.

3. Приклади.

1. Записати в тригонометричній формі комплексне число $z_1 = \sqrt{3} - i$ та зобразити його в координатній площині Oxy радіус-

вектором.

Розв'язання. Використавши вказані вище формули вираження комплексного числа в тригонометричній формі, отримаємо:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2;$$
$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi = 330^\circ.$$

Отже, $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$ — тригонометрична форма зображення числа z_1. Зображення цього числа z_1 в координатній площині Oxy радіусом-вектором див. нижче (малюнок 1.24).

2. Записати комплексне число $z_2 = 3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ в алгебраїчній формі та зобразити його в координатній площині Oxy радіусом-вектором.

Розв'язання. Застосувавши формули вираження комплексного числа в алгебраїчній формі, які вказані вище, матимемо:

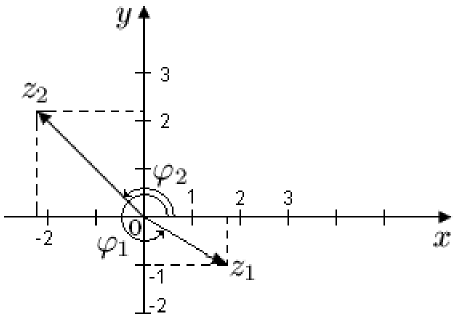
$$\begin{cases} x_2 = 3\cos\dfrac{3\pi}{4} = 3\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{-3\sqrt{2}}{2}, \\ y_2 = 3\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Отже, $z_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ — алгебраїчна форма запису числа z_2. Зображення числа z_2 в координатній площині Oxy радіусом-вектором вказано на малюнку 1.24, де $\varphi_2 = \dfrac{3\pi}{4}$.

4. Зауваження. Існує ще і так звана **показникова форма зображення комплексних чисел** $z = r \cdot e^{i\varphi}$, з якою більш грунтовніше можна познайомитися в курсі „Теорія функцій комплексної змінної". Відмітимо також, що має місце така очевидна рівність:

$$\cos(arg(z) + 2k\pi) + i\sin(arg(z) + 2k\pi) = \cos(arg(z)) + i\sin(arg(z)),$$

де $k \in \mathbb{Z}$, яка часто використовується в практиці.



Мал. 1.24.

9.6 Множення та ділення комплексних чисел, зображених в тригонометричній формі

1. Якщо додавати і віднімати комплексні числа, записані в алгебраїчній формі, досить легко, то множити, а особливо ділити їх в такій формі менш зручно. Зате множити і ділити їх досить зручно, якщо вони записані в тригонометричній формі. Дійсно, нехай $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді маємо:

$z_1z_2 = (r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1))(r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) = (r_1r_2)((\cos\varphi_1 \cdot \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)) = (r_1 \cdot \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{(r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)))}{r_2((\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \cdot (\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)))} =$$

$$= \frac{r_1(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{r_2(\cos 0 + i\sin 0)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

де $z_2 \neq 0$.

Отже, маємо:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),}$$

тобто модуль добутку (частки) комплексних чисел дорівнює добутку (частці) їх модулів, а аргумент добутку (частки) цих чисел дорівнює сумі (різниці) їх аргументів.

2. Зрозуміло, що таке правило множення (ділення) комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі, можна поширити на довільну кількість чисел. **Наприклад**, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (r_1 \cdot r_2 \cdot r_3) \cdot$ $\cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3))$, де $z_j = r_j(\cos \varphi_j + i \sin \varphi_j)$, а $j = 1, 2, 3$.

9.7 Формула Муавра; деякі наслідки

1. Розглянемо частинний випадок розглянутих вище рівностей, коли потрібно піднести комплексне число до цілого степеня. В результаті ми прийдемо до формули Муавра (Муавр А. — англійський

Мал. 1.25. Муавр Абрахам де (1667 — 1754 роки)

математик, відомий своїми працями в області теорії рядів, теорії ймовірностей, комплексних чисел).

Теорема 9.7.1. *Для довільного цілого числа $n \in \mathbb{Z}$ виконується рівність*

$$\boxed{(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)),}$$

*яка **називається формулою Муавра**, де $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — довільне комплексне число, записане в тригонометричній формі.*

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції для $n \in \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Очевидно, що ця формула правильна при $n = 0, 1$: $1 = = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^0 = r^0 \cdot (\cos(0\cdot\varphi) + i\sin(0\cdot\varphi)) = 1$; $r(\cos\varphi + +i\sin\varphi) = (r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r^1(\cos(1\cdot\varphi + i\sin(1\cdot\varphi)) = r(\cos\varphi + +i\sin\varphi)$. Нехай формула правильна для довільного $n = k \in \mathbb{N}$, тобто виконується рівність $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))$. Тоді маємо: $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k+1} = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k \cdot (r(\cos\varphi + +i\sin\varphi)) = (r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi)))(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) = r^{k+1}(\cos((k+ + 1)\varphi) + i\sin((k+1)\varphi))$, що вказує на справедливість формули при $n = k+1$. Тому за принципом математичної індукції робимо висновок про те, що формула Муавра правильна для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо тепер $n = -k$, де $k \in \mathbb{N}$. Тоді отримаємо $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = (r\cdot(cos\varphi + i\sin\varphi))^{-k} = = \dfrac{1}{(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k} = \dfrac{r^0(\cos(0\varphi) + i\sin(0\varphi))}{r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))} = r^{-k}(\cos(-k\varphi) + + i\sin(-k\varphi)) = r^n(cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, що вказує на те, що і для від'ємних цілих чисел формула Муавра правильна. Теорема доведена повністю ■

2. Формула Муавра дає можливість значно простіше виконувати обчислення комплексних чисел при піднесенні їх до цілого степеня. Розглянемо в ролі ілюстрації такий приклад.

Приклад. Обчислити $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)^{12}$.

Розв'язання. Перетворивши комплексне число $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3i}{2}$ в тригонометричну форму, отримаємо: $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)^{12} = = \left(\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^{12} = \left(\sqrt{3}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^{12} = (\sqrt{3})^{12}\cdot \cdot\left(\cos\left(12\cdot\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\cdot\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 3^6\cdot(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) = 729\cdot \cdot(1 + i\cdot 0) = 729\cdot 1 = 729.$

Наслідок. Для довільного натурального $n \in \mathbb{N}$ справедливі такі рівності:

$$\cos(n\varphi) = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \\ + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \cdot \sin^4 \varphi - \dots . \quad (9.7.1)$$

$$\sin(n\varphi) = C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \\ + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \cdot \sin^5 \varphi - \dots . \quad (9.7.2)$$

Доведення випливає з формули Муавра при $r = 1$ і з формули бінома Ньютона. Дійсно, при $r = 1$ маємо: $\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n \varphi + i \cdot C_n^1 \cdot \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin\varphi + i^2 \cdot C_n^2 \cdot \cos^{n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \dots + i^n \sin^n \varphi$. Згрупувавши в останньому виразі ланцюжка рівностей дійсну та уявну частини комплексного числа, отримаємо формули (9.7.1), (9.7.2) ■

Зауважимо, що отримані вище формули (9.7.1), (9.7.2) є не що інше як узагальнення шкільних формул з тригонометрії для синуса і косинуса подвійного кута.

Приклад. При $n = 4$ формули (9.7.1), (9.7.2) приймуть відповідно такий вигляд:

$$\cos(4\varphi) = \cos^4 \varphi - 6\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi;$$
$$\sin(4\varphi) = 4\cos^3 \varphi \sin\varphi - 4\cos\varphi \cdot \sin^3 \varphi.$$

9.8 Добування кореня з комплексного числа; двочленні рівняння; геометричний зміст коренів

1. Розглянемо тепер, як добувається корінь n-го степеня з комплексного числа, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число.

Означення 9.8.1. *Комплексне число ω називається* ***коренем n-го степеня з комплексного числа*** *z, якщо виконується рівність $\omega^n = z$ і позначається символом $\sqrt[n]{z}$.*

Для знаходження або, як висловлюються, добування кореня з комплексного числа використаємо розглянуту вище формулу Муавра.

Нехай $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ — корінь n-го степеня з комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тобто $\omega^n = z$. Тоді за формулою Муавра маємо:

$$\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

звідки отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \rho^n = r; \\ n\theta = \varphi + 2k\pi, \text{де } k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

яка дає розв'язок

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|z|}, \\ \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}, \text{де } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отже, отримаємо

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$
$$\text{де } n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}, \varphi = arg(z), z = |z|. \tag{9.8.1}$$

Виявляється, що при $z \neq 0$ існує точно n різних значень коренів $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$ з комплексного числа z, де $n \in \mathbb{N}$. Якщо ж взяти $k = m$, де $m < 0$ або ж $n - 1 < m$, то ω_m співпадає з одним із значень $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$. Дійсно, нехай $m = n \cdot l + k$, де $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$; $l \in \mathbb{Z}$. Тоді матимемо $\dfrac{\varphi + 2m\pi}{n} = \dfrac{\varphi + 2(nl + k)\pi}{n} = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2l\pi$, що вказує на те, що ω_m співпадає з одним із значень $\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$.

Висновок. Операція добування кореня в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел завжди здійснима, тобто $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{C})(\exists \sqrt[n]{z})$; при цьому маємо: якщо $z = 0$, то $\sqrt[n]{0} = 0$ — єдиний корінь; якщо ж $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z} = \omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ — n різних коренів

ω_k, де $k = \overline{0, n-1}$,[5] $\varphi = arg(z)$, що вказує на те, що операція добування кореня не є однозначною.

2. Формула (9.8.1) дає можливість легко знаходити розв'язки найпростіших двочленних рівнянь в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел.

Означення 9.8.2. *Рівняння виду $az^n + b = 0$, де $a, b \in \mathbb{C}$, причому $a \neq 0$, називається двочленним рівнянням n-го степеня.*

Очевидно, що розв'язки такого рівняння будуть такими:

якщо $b = 0$, то $z = 0$ — єдиний розв'язок;

якщо ж $b \neq 0$, то $z^n = -\dfrac{b}{a}$, звідки на основі формули (9.8.1) отримаємо n різних коренів $\omega_k = \sqrt[n]{|r|}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, де $k = \overline{0, n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi = arg(r)$, $r = -\dfrac{b}{a}$.

3. Розглянемо **геометричний зміст коренів** $\omega_k = \sqrt[n]{z}$ n-го степеня з комплексного числа z, де $k = \overline{0, n-1}$. Оскільки модулі цих коренів рівні між собою, а аргументи послідовно при зміні k на одиницю відрізняються між собою на $\dfrac{2\pi}{n}$, то з геометричної точки зору цим кореням на комплексній (координатній) площині Oxy відповідають точки, які є вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло з центром в точці O і радіусом $R = \sqrt[n]{|z|}$, причому $arg(\omega_0) = \dfrac{arg(z)}{n} = \dfrac{\varphi}{n}$ (див. відповідний малюнок 1.26).

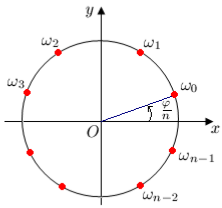
4. Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 + 16 = 0$ та зобразити його корені на комплексній площині.

Розв'язання. Використавши формулу (9.8.1) знаходження коренів двочленного рівняння, отримаємо:

$$\omega_k = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{|-16|}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) =$$

[5] Запис $\overline{0, n-1}$ означає теж саме, що і запис $0, 1, 2, ..., (n-1)$, авторами використовуються обидва, в залежності від зручності запису.



Мал. 1.26.

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$, де $-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$; $k = 0, 1, 2, 3$. Тоді 4 корені матимуть такий вигляд:

$$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2};$$
$$\omega_1 = 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};$$
$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2};$$
$$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

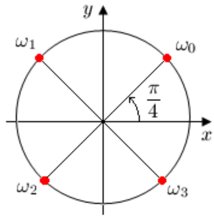
Отримані корені очевидно відповідають вершинами квадрата, вписаного в коло з центром в точці O і радіусом $R = 2$, причому $arg(\omega_0) = \frac{\pi}{4}$ (див. відповідний малюнок 1.27).

5. Зауважимо, що у полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел довільне ненульове комплексне число $z \in \mathbb{C}$ має n різних коренів n-го степеня. Легко при цьому бачити (**покажіть самостійно!**), що:

а) якщо $z \in \mathbb{R}$ і $z > 0$, то таке дійсне число z має два дійсних корені, коли $n \in \mathbb{N}$ — парне число, і один дійсний корінь, коли $n \in \mathbb{N}$ — непарне число;

б) якщо $z \in \mathbb{R}$ і $z < 0$, то таке дійсне число z має один дійсний корінь, коли $n \in \mathbb{N}$ — непарне число, і не має жодного дійсного кореня, коли $n \in \mathbb{N}$ — парне число;

в) якщо ж $z \notin \mathbb{R}$, тобто $z \in \mathbb{C}$ — уявне число, то воно має всі n різних уявних корені.



Мал. 1.27.

9.9 Корені n-го степеня з одиниці та їх властивості

1. Оскільки $1 = \cos 0 + i \sin 0$, то, позначивши корені n-го степеня з одиниці через ε_k, отримаємо таку формулу для знаходження цих коренів:

$$\boxed{\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \text{де } k = \overline{0, n-1}.}$$

Наприклад, для $n = 4$ маємо: $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = i, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = -i$. З міркувань, проведених вище, робимо висновок про те, що одиниця має два дійсних корені $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_m = -1$, якщо $n = 2m \in \mathbb{N}$ — парне число, і один дійсний корінь $\varepsilon_0 = 1$, якщо $n = 2m-1 \in \mathbb{N}$ — непарне число. При зображенні коренів n-го степеня з одиниці легко бачити, що їх зображеннями є вершини правильного n-кутника, вписаного в одиничне коло з центром в точці O площини Oxy, причому корінь ε_0 зображає вершину цього n-кутника, яка лежить на додатній дійсній півосі Ox, а інші корені ε_k і ε_{n-k} зображатимуть попарно симетрично розташовані вершини цього n-кутника відносно дійсної осі Ox.

2. Розглянемо наступні три властивості коренів n-го степеня з одиниці, які мають практичне застосування.

Між коренями n-го степеня з одиниці і коренями n-го степеня з довільного числа $z \in \mathbb{C}$, не рівного нулю, існує тісний взаємозв'язок, який розкриває така теорема:

Теорема 9.9.1. *Знаючи всі корені n-го степеня з одиниці і один з коренів ω_k n-го степеня з комплексного числа $z \in \mathbb{C}$, не рівного нулю, можна знайти всі корені цього числа z, помноживши відомий його корінь ω на кожен з коренів n-го степеня з одиниці.*

Доведення. Дійсно, нехай ω — один з коренів n-го степеня з числа $z \in \mathbb{C}$, тобто $\omega^n = z$, і ε_k — довільний корінь n-го степеня з одиниці, тобто $\varepsilon_k^n = 1$, де $k = \overline{0, n-1}$. Розглянемо n добутків $\omega \cdot \cdot \varepsilon_0, \omega \cdot \varepsilon_1, \omega \cdot \varepsilon_2, ..., \omega \cdot \varepsilon_{n-1}$. Покажемо, що всі вони є різними коренями n-го степеня з числа z. Справді, $(\omega\varepsilon_k)^n = \omega^n \cdot \varepsilon_k^n = z \cdot 1 = z$, тобто $\omega \cdot \varepsilon_k$ — корінь n-го степеня з числа z, де $k = \overline{0, n-1}$. Покажемо, що всі корені $\omega \cdot \varepsilon_k$, де $k = \overline{0, n-1}$, — різні корені для z. Дійсно, якби виконувалася рівність $\omega\varepsilon_k = \omega\varepsilon_l$, де $0 \leqslant k, l \leqslant n-1$ і $k \neq l$, то отримали би рівність $\varepsilon_k = \varepsilon_l$, що протирічить тому, що корені $\varepsilon_k, \varepsilon_l$ з одиниці різні, чим і завершується доведення теореми ■

Дана теорема дає можливість полегшити на практиці обчислення коренів n-го степеня з числа $z \in \mathbb{C}$, якщо відомий один з його коренів і відомі корені n-го степеня з одиниці.

Наприклад, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — корені кубічні з 1, а $\omega = 2 - 2\sqrt{3} \cdot i$ — корінь кубічний з числа -64. Тоді всі значення кореня кубічного з числа -64 будуть такими: $\omega \cdot \varepsilon_0 = = (2 - 2\sqrt{3}i) \cdot 1 = 2 - 2\sqrt{3}i$; $\omega \cdot \varepsilon_1 = (2 - 2\sqrt{3}i)\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4$;

$$\omega\varepsilon_2 = (2 - 2\sqrt{3}i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4.$$

3. Нехай $E_n \overset{df}{=} \{\varepsilon_k | k \in \overline{0, n-1} \wedge (\varepsilon_k)^n = 1\}$ — множина всіх коренів n-го степеня з одиниці. Справедлива така теорема:

Теорема 9.9.2. *Алгебра $\mathcal{E}_\backslash = (E_n; \cdot)$ є абелевою групою, яка називається* ***мультиплікативною абелевою групою коренів n-го степеня з одиниці***.

Доведення. Асоціативність і комутативність множення виконуєтся для комплексних чисел. А тому вони виконуются і для елементів множини E_n. Очевидно, що $\varepsilon_0 = 1 \in E_n$ є одиницею в алгебрі $\mathcal{E}_n$ відносно множення. Зрозуміло, що E_n — замкнута множина відносно множення коренів. Дійсно, якщо $\varepsilon_k, \varepsilon_l \in E_n$,тобто

$(\varepsilon_k)^n = (\varepsilon_l)^n = 1$, то $(\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l)^n = (\varepsilon_k)^n \cdot (\varepsilon_l)^n = 1 \cdot 1 = 1$, що вказує на те, що $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_l \in E_n$. Оскільки $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$, де $k = \overline{0, n-1}$, то маємо $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{n-k} = (\varepsilon_1)^k \cdot (\varepsilon_1)^{n-k} = (\varepsilon_1)^{k+(n-k)} = (\varepsilon_1)^n = 1$, що вказує на те, що $(\varepsilon_k)^{-1} = \varepsilon_{n-k}$, тобто для кожного кореня ε_k з одиниці існує обернений елемент $(\varepsilon_k)^{-1} = \varepsilon_{n-k}$, який теж є коренем з одиниці. Отже, дійсно алгебра $\mathcal{E}_n = (E_n; \cdot)$ є мультиплікативною абелевою групою, що і треба було довести ■

Наслідок. *Мультиплікативна абелева група $\mathcal{E}_n = (E_n; \cdot)$ коренів n-го степеня з одиниці є скінченною абелевою групою з n різних степенів $(\varepsilon_1)^k$, де $k = \overline{0, n-1}$, таких, що $(\varepsilon_1)^n = \varepsilon_0 = 1$.*

Доведення безпосередньо випливає з теореми 9.9.2, якщо прийняти до уваги очевидні рівності $(\varepsilon_1)^k = \varepsilon_k$, $(\varepsilon_1)^{-k} = \varepsilon_{-k} = \varepsilon_{n-k}$.

Зауважимо, що такого виду групу, що розглянута в наслідку, називають **скінченною циклічною групою n-го порядку**.

4. Очевидно, що довільний корінь n-го степеня з одиниці є також і коренем степеня mn з одиниці, де $m \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число. А звідси випливає, що серед коренів n-го степеня з одиниці, де $n = m \cdot l$ — складене число, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, є корені m-го і l-го степенів з одиниці. Наприклад, ε_m є коренем l-го степеня з одиниці, а ε_l є коренем m-го степеня з одиниці. Разом з тим зустрічаються і такі корені, які не є коренями ніякого меншого степеня з одиниці ні при жодному натуральному $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Наприклад, ε_1 не є коренем k-го степеня з одиниці, якщо $\varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ — корінь n-го степеня з одиниці і $k < n$, де $n > 1$.

Такі корені називаються **первісними коренями n-го степеня з одиниці**.

Означення 9.9.1. *Корінь n-го степеня з одиниці називається* ***первісним****, якщо він не є коренем з одиниці ніякого меншого степеня.*

Виникає питання, які корені n-го степеня з одиниці, крім кореня ε_1, є первісними. Відповідь на це питання дає така теорема:

Теорема 9.9.3. *Серед коренів ε_k, де $k = \overline{0, n-1}$, n-го степеня з одиниці первісними є всі такі корені $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$, для яких k і n між собою взаємно прості, де $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*

Доведення. Розглянемо довільні натуральні числа $k, n \in \mathbb{N}$ такі, що $k < n$. Нехай d — найбільший спільний дільник для k і n. Тоді $k = d \cdot k_1, n = d \cdot n_1$, де $n_1 \leqslant n, k_1 \leqslant k$. Якщо k не є взаємно просте з n, то $1 < d, n_1 < n$ і $(\varepsilon_k)^{n_1} = (\varepsilon_1)^{kn_1} = (\varepsilon_1)^{dk_1n_1} = ((\varepsilon_1)^{dn_1})^{k_1} = (\varepsilon_1^n)^{k_1} = (\varepsilon_n)^{k_1} = 1^{k_1} = 1$, що вказує на те, що ε_k не є первісним коренем n-го степеня з одиниці. Якщо ж k взаємно просте з n, то $d = 1$. Взявши $(\varepsilon_k)^m = (\varepsilon_1^k)^m = (\varepsilon_1)^{km} = \cos\dfrac{2\pi \cdot km}{n} + i\sin\dfrac{2\pi \cdot km}{n} = 1$, бачимо, що km ділиться на n, звідки (в силу взаємної простоти k і n) m ділиться на n, що вказує на те, що ε_k є первісним коренем з одиниці. Теорема доведена повністю ■

Наслідок. *Якщо $n \in \mathbb{N}$ — просте число, то всі корені n-го степеня з одиниці є первісними, крім кореня $\varepsilon_0 = 1$.*

Доведення очевидним чином випливає з теореми 9.9.3 та означення простого числа.

Приклад. Знайти первісні корені 12-го степеня з одиниці.

Розв'язання. Взаємно простими чмслами з числом $n = 12$ є, очевидно, такі числа: $1, 5, 7, 11$, які менші 12; тому первісними коренями 12-го степеня з одиниці є такі корені: $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}$.

Зауважимо, що роль первісних коренів в групі $\mathcal{E}_n$ полягає в тому, що всі вони є твірними елементами цієї групи.

9.10 Питання для самоперевірки знань та вправи

1. Які Ви знаєте назви теорії побудови системи дійсних чисел? Дайте їм коротку характеристику.

2. Вкажіть одне з найважливіших застосувань теорії дійсних чисел в практиці.

3. Вкажіть деякі задачі, для розв'язання яких виникла потреба розширення системи дійсних чисел.

4. Вкажіть ідею мінімального розширення $\mathcal{C}$ поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел.

5. Що таке уявна одиниця та як вона позначається?

6. Як позначаються елементи розширення $\mathcal{C}$ поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел та які домовленості приймаються для їх позначення?

7. Як вводяться дії додавання та множення в розширенні $\mathcal{C}$ поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел?

8. Доведіть, що виконується рівність $ib = bi$, де $b \in \mathbb{R}$, а $i \in \mathbb{C}$ — уявна одиниця.

9. Доведіть, що кожен елемент $z \in \mathbb{C}$ розширення поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел єдиним способом зображається у вигляді суми $z = a + bi$, де $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Доведіть, що алгебра $\mathcal{C} = (\mathbb{C}; +)$ є абелевою групою відносно дії додавання елементів з розширення $\mathcal{C}$, а алгебра $(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ є абелевою групою відносно множення елементів з множини $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

11. Доведіть дистрибутивність множення відносно додавання в алгебрі $\mathcal{C} = (\mathbb{C}; +; \cdot)$.

12. Як можна ввести дію віднімання в алгебрі $(\mathbb{C}; +)$?

13. Як можна ввести дію ділення в алгебрі $(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$?

14. Поясніть, чому поле $\mathcal{R}$ дійсних чисел є підполем поля $\mathcal{C} = (\mathbb{C}; +; \cdot)$.

15. Дайте означення поля комплексних чисел.

16. Як можна ввести поле комплексних чисел з використанням введення операції додавання та множення на множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ всіх впорядкованих пар множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел?

17. Як можна довести ізоморфізм між довільними мінімальними розширеннями поля $\mathcal{R}$ дійсних чисел до поля $\mathcal{C}$ комплексних чисел?

18. Що таке числове поле?

19. Яким є найменше числове поле?

20. Що таке алгебраїчна форма зображення комплексного числа?

21. Як виконуються арифметичні дії над комплексними числами, представленими в алгебраїчній формі?

22. Які комплексні числа називаються взаємно спряженими між собою?

23. Доведіть, що сума взаємно спряжених комплексних чисел є дійсним числом.

24. Доведіть, що добуток взаємно спряжених комплексних чисел є невід'ємним дійсним числом.

25. Вкажіть критерій того, щоб взаємно спряжені комплексні числа співпадали між собою.

26. Яким є спряжене число до спряженого числа?

27. Сформулюйте теорему про заміну в арифметичному виразі комплексних чисел на відповідно спряжені до них числа.

28. Доведіть, що відображення $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, задане рівністю $f(z) = \overline{z}$, де $\overline{z}$ — спряжене число до комплексного числа $z \in \mathbb{C}$, є автоморфізмом поля $\mathcal{C}$ комплексних чисел.

29. Доведіть, що поле $\mathcal{C}$ комплексних чисел не можна лінійно впорядкувати.

30. Що таке модуль комплексного числа?

31. Перелічіть основні властивості модуля комплексного числа.

32. Доведіть, що $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ — довільні комплексні числа.

33. Доведіть, що $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ — довільні комплексні числа.

34. Як геометрично можна зобразити комплексні числа точками на площині?

35. Як геометрично можна зобразити комплексні числа напрямленими відрізками, векторами на площині?

36. Проілюструйте на координатній площині лінійні операції над комплексними числами за допомогою відповідних операцій над векторами, що зображають ці числа.

37. Вкажіть на координатній площині фігуру, всі точки якої зображають всі комплексні числа z такі, що задовольняють умову $2 \leqslant |z| \leqslant 4$.

38. Що таке тригонометрична форма зображення комплексного числа?

39. Що таке модуль та аргумент комплексного числа з геометричної точки зору?

40. Вкажіть формули переходу від алгебраїчної форми зображення комплексного числа до тригонометричної форми і навпаки.

41. Поясніть, чому модуль комплексного числа можна тлумачити як узагальнення абсолютної величини дійсного числа.

42. Що таке показникова форма комплексного числа?

43. Сформулюйте правила множення та ділення комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, та вкажіть відповідні формули. Як вони виводяться?

44. Який вигляд має формула Муавра та як вона доводиться?

45. Як за допомогою формули Муавра вивести формули для $\cos(n\varphi), \sin(n\varphi)$, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число?

46. Який вигляд має формула знаходження кореня з комплексного числа та як вона виводиться?

47. Що таке двочленне рівняння в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел та як воно розв'язується?

48. Вкажіть геометричний зміст коренів n-го степеня з комплексного числа, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число.

49. Який вигляд має формула знаходження коренів n-го степеня з одиниці, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число?

50. Який геометричний вигляд мають зображення коренів n-го степеня з одиниці, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число?

51. Сформулюйте теорему знаходження коренів n-го степеня з довільного комплексного числа за допомогою коренів n-го степеня з одиниці, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число.

52. Доведіть, що множина всіх коренів n-го степеня з одиниці відносно множення є мультиплікативною абелевою групою, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число.

53. Поясніть, чому вказана вище група є скінченною циклічною групою n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число.

54. Що таке первісний корінь n-го степеня з одиниці, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число?

55. Вкажіть критерії того, які з коренів n-го степеня з одиниці є первісними, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число.

56. Скільки існує первісних коренів n-го степеня з одиниці, якщо $n \in \mathbb{N}$ — просте число, та яка їх роль в групі $\mathcal{E}_n$?

57. Знайти дійсну та уявну частину комплексного числа

    а) $(3i-2)^4 + (3i+2)$;

    б) $\dfrac{(i+2)(i+1)}{2-i} - \dfrac{(i-1)(i-2)}{2+i}$;

    в) $\left(\dfrac{i^{27}+2}{i^{111}+1}\right)^2$;

    г) $\dfrac{(2i+1)^3 - (3i+1)^2}{(5i+1)^2 + (i+3)^3}$;

    д) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2008}$;

    е) $\dfrac{(1-i)^{129}}{(1+i)^{127}}$.

58. Обчислити i^{160}, i^{265}, i^{483}, $(-i)^{585}$, $(-i)^{130}$, $(-i)^{1125}$, $(-i)^{1184}$; узагальнити результат для i^n, де $n \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число.

59. Обчислити

    а) $(1-i)^{4n}$;

б) $\dfrac{(1-i)^n}{(1+i)^{n-2}}$, де $n \in \mathbb{Z}$.

60. Обчислити $(4z^2+4i)(2i^7z^2-3)$, якщо

а) $z = \dfrac{i-1}{2}$;

б) $z = -\dfrac{1+i}{2}$.

61. Знайти множину всіх самоспряжених комплексних чисел.

62. Дослідити, при яких умовах сума, різниця, добуток, частка двох комплексних чисел z_1, z_2 є

а) дійсним числом;

б) чисто уявним числом;
аналогічна задача для двох взаємно спряжених чисел z_1, z_2, тобто таких z_1, z_2, що $z_2 = \overline{z_1}$.

63. Знайти значення таких виразів:

а) $(3+4i)(2+3i)-(i-3)(i+2)$;

б) $(2+i)(3+7i)-(3i+5)(2i+1)$;

в) $\dfrac{(5-7i^3)(7+6i^7)}{3-i^3}$;

г) $(2+i^5)^3+(2+i^7)^3$;

д) $(3+i^9)^3-(3i^5)^3$;

е) $\dfrac{(2-i^3)(4-i^7)}{1-i^7}$.

64. Знайти критерій того, щоб значення виразу $\dfrac{z+2}{z-1}$ було:

а) дійсним числом;

б) чисто уявним числом, де $z \in \mathbb{C}$ — комплексне число.

65. Знайти дійсні розв'язки рівняння

а) $(2+i)x+(1+2i)y = 1-4i$;

б) $(3+i)x+(1+3i)y = 4-9i$.

66. Знайти всі комплексні числа, які спряжені до свого а) квадрата; б) куба.

67. Розв'язати такі рівняння в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел:

    а) $z + \bar{z} = 10$;

    б) $3z + \bar{z} = 2i - 1$;

    в) $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$;

    г) $z^2 - 2z\bar{z} - 3 - 3i = 0$;

    д) $z\bar{z} = 2iz - \dfrac{1+i}{2}$;

    е) $z\bar{z} = 2\bar{z} + 4 - 2i$;

    є) $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$;

    ж) $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 3i$; з)$z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 + 3i$;

    и) $z\bar{z} - 2z = 3 - i$.

68. Розв'язати наступні системи рівнянь в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел:

    а) $\begin{cases} (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1 + i, \\ (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1 + 3i; \end{cases}$

    б) $\begin{cases} (3+2i)z_1 + 2iz_2 = 5 + 3i, \\ (1+i)z_1 + iz_2 = 2 + 2i; \end{cases}$

    в) $\begin{cases} z_1^7 z_2^5 = 1, \\ z_1^{19} z_2^{13} = 1, \\ z_1^2 + z_2^2 = -2; \end{cases}$

    г) $\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 1 + i, \\ iz_1 + 3z_2 = 2 - 3i. \end{cases}$

69. Розв'язати такі рівняння в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел:

    а) $z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$;

    б) $z^2 + 5z + 9 = 0$;

    в) $z^2 + 5z + 5 - 3i = 0$;

    г) $z^2 + (2 - i^3)z + 7i - 1 = 0$;

д) $(1+i)z^2 - z + 1 + 2i = 0$;

е) $(1+i)z^2 + iz + 2 + 4i = 0$;

є) $z^2 + z + 1 + i = 0$;

ж) $z^4 + 1 = 0$.

70. Довести, що

а) $(1 \pm i)^{8n} = 4^{2n}$;

б) $(1 \pm i)^{4n} = (-1)^n 4^n$.

71. Довести, що число $\dfrac{z-1}{z+1}$ є чисто уявним тоді і тільки тоді, коли $|z| = 1, Im(z) \neq 0$.

72. Довести, що $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$, якщо $x + iy = (s + it)^n$, де $n \in \mathbb{Z}; x, y \in \mathbb{R}$.

73. Обчислити

а) $(1+i)^n + (1-i)^n$;

б) $(1+i)^n - (1-i)^n$;

в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n + \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n$;

г) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, де $n \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число.

74. Обчислити вираз $z^{6n-3} + \dfrac{1}{z^{6n-3}} + z^{6n} + \dfrac{1}{z^{6n}}$, якщо $z + \dfrac{1}{z} = 1, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$.

75. Довести, що комплексне число $z \in \mathbb{C}$ можна подати у вигляді $z = \dfrac{a-bi}{a+bi}$, де $a, b \in \mathbb{R}$, тоді і тільки тоді, коли $|z| = 1$.

76. Знайти критерій того, щоб числа $(z+a)(z+b)$ та $\dfrac{z+c}{z+d}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$, були

а) дійсними числами;

б) чисто уявними числами.

77. Довести, що алгебра $Z[i] \overset{df}{=} \{m + ni | m, n \in \mathbb{Z} \wedge i^2 = -1\}$ є областю цілісності (називається **кільцем гауссових цілих чисел**).

78. Зобразити на координатній площині суму та різницю комплексних чисел z_1 та z_2, якщо

    а) $z_1 = 3 - 2i; z_2 = 2 + 3i$;

    б) $z_1 = 4 + 5i; z_2 = 5 - 4i$.

79. Побудувати точки, що зображають дані комплексні числа, та подати ці числа в тригонометричній формі:

    а) i;
    б) 1;
    в) -1;
    г) $1 + i$;
    д) $1 - i$;
    е) $-i$;
    є) $-1 - i$;
    ж) $1 - i\sqrt{3}$;
    з) $-1 + i$;
    и) $-1 - i\sqrt{3}$;
    і) $\dfrac{-1 + i}{\sqrt{2}}$;
    ї) $\sqrt{3} - i$.

80. Сформулювати геометричною мовою критерій того, щоб виконувалися наступні рівності:

    а) $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$;

    б) $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$, де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ — комплексні числа.

81. Дати геометричне тлумачення таким нерівностям:

    а) $|Re(z)| \leqslant |z|$;

    б) $|Im(z)| \leqslant |z|$;

    в) $|z| \leqslant |Re(z)| + |Im(z)|$.

82. Побудувати на координатній площині множини точок, які зображають комплексні числа $z \in \mathbb{C}$, що задовольняють таким умовам:

    а) $|Re(z)| \leqslant 2$;

    б) $-1 \leqslant Im(z) \leqslant 3$;

    в) $2 \leqslant |z| \leqslant 3$;

    г) $|z - 2| \geqslant 2$;

д) $0 < |z + 2i| \leqslant 1$;

е) $|z - 2| + |z + 1| = 3$;

є) $\dfrac{\pi}{3} \leqslant arg(z) \leqslant \dfrac{3}{4}\pi$;

ж) $\begin{cases} |z| = |z + \frac{3}{i}|, \\ |z| \leqslant 2; \end{cases}$

з) $\log_{\frac{1}{2}} |z| \leqslant \log_{\frac{1}{2}} |z - 2|$;

и) $\log_{\sqrt{3}} \left(\dfrac{|z|^2 - |z| + 1}{|z| + 2} \right) \leqslant 2$;

і) $|z - 2i| \leqslant |z - i|$;

ї) $|z - 1| + |z - 2| \leqslant 4$.

83. Дати геометричне тлумачення таким нерівностям та встановити їх істинносні значення:

а) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

б) $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;

в) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$;

г) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

84. Подати в тригонометричній формі такі числа:

а) $\sqrt{3} - i$;

б) $1 + i$;

в) $-\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$;

г) $(3i - 4)^8$;

д) $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2i^5(\cos(60^\circ) + i\sin(60^\circ))}$;

е) $\dfrac{i - 1}{i\left(1 - \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right) + sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)}$;

є) $-ctg\alpha - i$, де $\pi < \alpha < 2\pi$;

ж) $1 - i \cdot tg\alpha$, де $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

85. Обчислити:

а) $\dfrac{2(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{(\operatorname{tg}(30^\circ)-i)^{15}(-\sin(30^\circ)+i\cos(30^\circ))}{(1-i)^{2008}}$;

в) $\dfrac{(\operatorname{ctg}(\beta)+i)(\cos(\theta)-i\sin(\theta))(-\cos(\theta)+i\sin(\theta))}{(1+i\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$;

г) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{23}}{(1-i)^{42}}+\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{23}}{(-1-i)^{42}}$;

д) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2007}-\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2007}$;

е) $(1-\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^{2006}$;

є) $(1+\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))^{-2006}$;

ж) $(-2+i\sqrt{12})^{2007}$.

86. В яких межах змінюється аргумент в розв'язках таких нерівностей:

а) $|z+2i|<2$;

б) $|z-3|<1$;

в) $|z+2+2i|\leqslant\sqrt{2}$;

г) $|z+2|<|z|$?

87. * Знайти аргумент числа а) $\omega=z^2-z$; б) $\omega=z^2+z$, якщо $z=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$, $0\leqslant\alpha<2\pi$.

88. За допомогою нерівностей з комплексною змінною $z\in\mathbb{C}$ записати такі множини точок комплексної площини:

а) півплощину, розташовану зліва від уявної осі;

б) півплощину, розташовану в третьому квадранті;

в) смуги шириною 2π, які паралельні відповідно осям Ox, Oy;

г) зовнішність одиничного кола з центром в точці, якій відповідає число $2i$.

89. Розв'язати такі рівняння в полі комплексних чисел:

    а) $z - |z| + 1 + 2i^5 = 0$;

    б) $z + |z + 1| + i = 0$;

    в) $z|z| - 2z + i = 0$;

    г) $z|z| - 2iz^2 + 2i = 0$.

90. Розв'язати наступні системи рівнянь в полі комплексних чисел:

    а) $\begin{cases} |z| = |z - 2i|, \\ |z - 1| = |z - i|; \end{cases}$

    б) $\begin{cases} \left|\dfrac{z - 12}{z - 8i}\right| = \dfrac{5}{3}, \\ \left|\dfrac{z - 4}{z - 8}\right| = 1; \end{cases}$

    в) $\begin{cases} z_1^3 + z_2^{17} = 0, \\ z_1^5 z_2^{11} = 1; \end{cases}$

    г) $\begin{cases} z_1^2 - z_2^3 = 0, \\ z_1^5 z_2^7 = 1. \end{cases}$

91. Подати в комплексній формі рівняння таких ліній:

    а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

    б) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

    в) $xy = a^2$;

    г) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

92. Довести, що для довільного цілого числа $k \in \mathbb{Z}$ виконуються такі рівності:

    а) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{3k} = 1$;

    б) $\left(\dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}\right)^{6k} = 1$.

93. Довести, що три різні точки, що зображають комплексні числа $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}$.

94. Нехай $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Довести, що точки, які зображають комплексні числа $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, є вершинами правильного трикутника тоді і тільки тоді, коли $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

95. Довести такі рівності:

    а) $|z_1\overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)$;

    б) $|z_1\overline{z_2} - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)$;

    в) $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 - 2(|z_1\overline{z_2}| - Re(z_1\overline{z_2}))$;

    г) $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 + 2(|z_1\overline{z_2}| + Re(z_1\overline{z_2}))$.

96. * Узагальнити задачу 94 на довільне натуральне число $n > 3$, розглядаючи правильний n-кутник.

97. Обчислити $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)^n$, де $n \in \mathbb{Z}$ — довільне ціле число.

98. * Розв'язати рівняння $\left(\dfrac{1 - ix}{1 + ix}\right)^n = i$, де $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$.

99. Знайти такі значення $a \in \mathbb{R}$, щоб кожен комплексний розв'язок z рівняння $|z - i\sqrt{2}| = (a + 1)^2$ був розв'язком нерівності $a^2 - 4a < |z - \sqrt{2}|$.

100. Знайти такі значення $a \in \mathbb{R}$, щоб хоча би один розв'язок рівняння $|z - ai| = a + 4$ був розв'язком нерівності $|z - 2| < 1$.

101. Обчислити а) $(1 + \omega)^n$; б) $\omega^n + \overline{\omega^n}$, якщо $\omega = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$, n — довільне натуральне число.

102. Знайти суму $\dfrac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + ... + cos(nx)$.

103. Довести рівність $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

104. Знайти суму і добуток всіх коренів n-го степеня з одиниці.

105. Скільки значень має $\sqrt[n]{z}$ і як вони розташовані на координатній площині, якщо а) $z = 1, n = 2$; б) $z = i, n = 4$; в) $z = 64, n = 6$; г) $z = -4, n = 4$?

106. Який зв'язок існує між формулами знаходження всіх коренів рівнянь $z^n - 1 = 0$ і $z^n - 5 = 0$?

107. Вказати зв'язки між парами коренів а) ε_k та ε_{n-k}; б) ε_1^k та ε_k n-го степеня з одиниці з алгебраїчної та геометричної точок зору.

108. З'ясувати, чи рівними є множини значень коренів для а) $\sqrt{i^4}$ та $(\sqrt{i})^4$; б) $\sqrt[3]{i^4}$ та $(\sqrt[3]{i})^4$.

109. При яких a, n множина розв'язків рівняння $z^n - a = 0$, де $n \in \mathbb{N}$, містить:

   а) дійсні корені;

   б) тільки дійсні корені;

   в) тільки комплексні корені?

110. Скільки існує первісних коренів n-го степеня з одиниці, якщо а) $n = 4$; б) $n = 7$; в) $n = 9$; г) $n = 20$?

111. Відомо, що z_0 є один з коренів n-го степеня для числа $z \in \mathbb{C}$. Знайти всі його корені, якщо

   а) $n = 4; z_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;

   б) $n = 6; z_0 = 2 + i$.

112. З'ясувати, при яких $n, k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\sqrt[nk]{z^k} = \sqrt[n]{z}$.

113. Знайти всі корені n-го степеня з числа z та зобразити їх на координатній площині, якщо а) $z = -8; n = 3$; б) $z = 8; n = 6$; в) $z = -1; n = 7$; г) $z = -i; n = 8$.

114. Знайти всі значення кореня

а) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$;

б) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$;

в) $\sqrt[4]{8i\sqrt{3}-8}$;

г) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$;

д) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$;

е) $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$;

є) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$;

ж) $\sqrt[n]{2+2i}$.

115. Розв'язати такі рівняння в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел:

а) $z^3 = 2+2i$;

б) $(z-2+i)^3 = \sqrt{12}+2i$;

в) $z^8 = 1+i$;

г) $(z-i)^4 = 1+i$;

д) $\overline{z} = z^{n-1}$;

е) $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$;

є) $z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;

ж) $(z+1)^n = (z-1)^n$;

з) $(z+i)^n = (z-i)^n$;

и) $z^n - naz^{n-1} - C_n^2 a^2 z^{n-2} - ... - a^n = 0$.

116. Знайти суму та добуток всіх коренів n-го степеня з одиниці, якщо а) $n=6$; б) $n=7$; в) $n=15$; г) $n=k$.

117. Серед коренів 15-го степеня з одиниці знайти всі такі, які мають порядок: а) 2; б) 3; в) 5; г) 6.

118. Знайти значення виразу $\dfrac{1}{\varepsilon_1^n\varepsilon_2^n}+\dfrac{1}{\varepsilon_2^n\varepsilon_3^n}+\dfrac{1}{\varepsilon_3^n\varepsilon_1^n}$, якщо $n\in\mathbb{N}$, а $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ — корені 3-го степеня з одиниці.

119. * Показати, що сума всіх первісних коренів n-го степеня з одиниці є дійсним числом. Знайти це число.

120. * Знайти суму та добуток всіх первісних коренів n-го степеня з одиниці, якщо а) $n=6$; б) $n=7$; в) $n=15$; г) $n=k$.

121. Скласти таблицю Келі для мультиплікативної групи коренів 6-го степеня з одиниці.

122. Нехай $\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ — множина всіх коренів n-го степеня з комплексного числа $a\in\mathbb{C}$. Довести, що $\{\overline{\omega_1},\overline{\omega_2},...,\overline{\omega_n}\}$ — множина всіх коренів n-го степеня з комплексного числа $\overline{a}$.

123. Довести: якщо ω — корінь n-го степеня з числа a, то і $\overline{\omega}$ — теж корінь n-го степеня з цього числа a.

124. Довести: об'єднання множин всіх коренів n-го степеня з комплексних чисел a та $-a$ є множиною всіх коренів степеня $2n$ з числа a^2.

125. Довести: множина всіх коренів n-го степеня з комплексного числа утворює геометричну прогресію.

126. Нехай $\mathcal{E}_n=(E_n;\cdot)$ — мультиплікативна група коренів n-го степеня з одиниці, де $E_n=\{\varepsilon_k|\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n};0\leqslant k<$ $<n\}$. Довести, що

    а) $\varepsilon_k=\varepsilon_1^k$, де $0\leqslant k<n$;

    б) $\varepsilon_k\varepsilon_l=\begin{cases}\varepsilon_{k+l}, k+l<n,\\ \varepsilon_{k+l-n}, k+l\geqslant n;\end{cases}$

    в) $\varepsilon_k^{-1}=\varepsilon_{n-k}=\overline{\varepsilon_k}$;

    г) $\overline{\varepsilon_k}$ — первісний корінь, якщо ε_k — первісний корінь;

    д) $-\varepsilon_k$ — первісний корінь степеня $2n$ з одиниці, якщо ε_k — первісний корінь степеня n з одиниці;

    е) група $\mathcal{E}_n$ ізоморфна адитивній групі $(Z_n;+)$.

127. * Довести: якщо $m, n \in \mathbb{N}$ — взаємно прості натуральні числа, то кожен корінь степеня mn з одиниці можна подати як добуток деяких коренів з одиниці степенів m і n.

128. * Обчислити такі суми:

а) $\varepsilon_1^k + \varepsilon_2^k + ... + \varepsilon_n^k$;

б) $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + ... + \varepsilon^{n-1}$;

в) $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + ... + n\varepsilon^{n-1}$;

г) $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + ... + n^2\varepsilon^{n-1}$, де $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ — корені n-го степеня з одиниці.

129. Розв'язати такі рівняння в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел:

а) $z^n + z^{n-1} + ... + z + 1 = 0$;

б) $z^n - z^{n-1} + ... + (-1)^n z + (-1)^n = 0$;

в) $(z + z_0)^n - (z - z_0)^n = 0$;

г) $(z + z_0)^n + (z - z_0)^n = 0$.

130. Знайти критерій того, щоб система рівнянь $\begin{cases} z^n - 1 = 0, \\ z^m - 1 = 0 \end{cases}$ мала єдиний розв'язок.

131. При якій умові кожен розв'язок рівняння $z^n - 1 = 0$ є розв'язком рівняння $z^m - 1 = 0$?

132. * Числа $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ відповідають трьом послідовним вершинам паралелограма. Виразити положення його четвертої вершини. Як виразити положення наступної четвертої вершини у випадку прямокутника, квадрата, довільного правильного n-кутника, якщо z_1, z_2 відомі його сусідні вершини.

133. * Дано три трикутники, вершинами яких є точки, що відповідають таким трійкам комплексних чисел: $0, 1, z_1$; $0, z_2, z_1 z_2$; $0, z_2, \frac{z_2}{z_1}$. Показати, що ці трикутники подібні між собою, та вказати коефіцієнти подібності. Чи не можна цю задачу узагальнити на довільні n-кутники?

134. * Вершинами випуклого многокутника на координатній площині є точки, які зображають комплексні числа $z_1, z_2, ..., z_n$. Вказати множину всіх таких точок, які є зображенням чисел виду $z = \sum\limits_{i=1}^{n} = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + ... + \lambda_n z_n$, де $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = a$ для деякого фіксованого числа $a \in \mathbb{R}$.

135. * Обчислити тригонометричні суми:

а) $S_1 = \sin k\alpha + \sin(k+l)\alpha + \sin(k+2l)\alpha + ... + \sin(k+ln)\alpha$;

б) $S_2 = \cos k\alpha + \cos(k+l)\alpha + \cos(k+2l)\alpha + ... + \cos(k+ln)\alpha$;

в) $S_3 = \sin\alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + C_n^2 \sin 3\alpha + ... + C_n^n \sin(n+1)\alpha$;

г) $S_4 = \cos\alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + ... + C_n^n \cos(n+1)\alpha$.

136. * Обчислити такі суми:

а) $S_1 = 1 - 3 \cdot C_n^2 + 9 \cdot C_n^4 - 27 \cdot C_n^6 + ...$;

б) $S_2 = C_n^1 - 3 \cdot C_n^3 + 9 \cdot C_n^5 - 27 \cdot C_n^7 + ...$;

в) $S_2 = C_n^1 - \frac{1}{3} \cdot C_n^3 + \frac{1}{9} \cdot C_n^5 - \frac{1}{27} \cdot C_n^7 + ...$;

г) $S_4 = \sqrt{3^n} - \sqrt{3^{n-2}} \cdot C_n^2 + \sqrt{3^{n-4}} \cdot C_n^4 - \sqrt{3^{n-6}} \cdot C_n^6 + ...$

137. * На множині R^2 задано операції: $(a;b)+(c;d) = (a+c;b+d)$; $(a;b)*(c;d) = (ac+3bd; ad+bc+2bd)$. Довести, що алгебра $(R^2;+;*)$ є полем. Чи існує в ньому підполе, ізоморфне полю дійсних чисел? Чи має в цьому полі розв'язок рівняння виду $x^2+1=0$?

138. * Довести, що побудоване вище у попередній вправі поле $(R^2;+;*)$ ізоморфне полю комплексних чисел. Як в цьому полі розв'язати рівняння виду $x^2+1=0$?

139. * На множині R^2 задано операції: $(a;b)+(c;d) = (a+\alpha c; b+\beta d)$; $(a;b)*(c;d) = (ac+\gamma bd; ad+bc+\delta bd)$, де $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ — фіксовані дійсні числа. Вияснити, при яких $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ алгебра $(R^2;+;*)$ є полем. Як в цьому полі розв'язати рівняння виду $x^2+1=0$?

140. * На множині R^4 задано операції:

$(a,b,c,d) + (a_1,b_1,c_1,d_1) = (a+a_1, b+b_1, c+c_1, d+d_1)$

$(a, b, c, d) * (a_1, b_1, c_1, d_1) = (aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1, ab_1 + ba_1 + cd_1 - dc_1, ac_1 + ca_1 + db_1 - bd_1, ad_1 + da_1 + bc_1 - cb_1)$.

Отримана алгебра $(R^4; +; *)$ називається **алгеброю кватерніонів**. Дослідити, які аксіоми поля мають місце в цій алгебрі. Чи можна задати ізоморфізм поля комплексних чисел в цю алгебру?

141. Для заданого дійсного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ зобразити множину точок площини, які відповідають комплексним числам $z \in \mathbb{C}$, які є розв'язками рівняння $\dfrac{z-1}{z-i} = \lambda$.

142. * Нехай різним комплексним числам $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ відповідають точки координатної площини, які не лежать на одній прямій. Довести, що ці точки є точками одного і того ж кола тоді і тільки тоді, коли подвійне відношення $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ вказаних чисел z_1, z_2, z_3, z_4 є дійсним числом.

143. Знайти умови того, щоб число $\dfrac{z}{\overline{z}}$ було коренем n-го степеня з одиниці.

144. Знайти всі такі натуральні $n \leqslant 20$, для яких сума всіх первісних коренів n-го степеня з одиниці дорівнює:

    а) 0;

    б) 1;

    в) додатньому числу, відмінному від 1;

    г) від'ємному числу.

145. Довести: якщо r, s — взаємно прості числа, то ε є первісним коренем степеня rs з одиниці тоді і тільки тоді, коли ε є добутком первісного кореня степеня r і первісного кореня степеня s з одиниці.

146. Довести: якщо ε — первісний корінь непарного степеня n з одиниці, то $-\varepsilon$ — первісний корінь степеня $2n$ з одиниці.

147. * Довести, що для довільного натурального $n > 1$ сума сум усіх первісних коренів степенів d, які є дільниками числа n, рівна нулю.

148. * Довести, що сума всіх первісних коренів

а) простого степеня p дорівнює -1;

б) степеня p^k, де $k > 1$, p — просте число, рівна 0;

в) степеня rs для взаємно простих чисел r і s рівна добутку суми всіх первісних коренів степеня r і степеня s;

г) степеня $n > 1$ рівна $(-1)^t$, де n — добуток t простих множників, і рівна 0 — в решті випадків.

149. * **Многочленом ділення кола (круговим многочленом)** називається добуток всіх множників $x - \varepsilon_k$, де ε_k — первісний корінь n-го степеня з одиниці, і позначають його через $\Phi_n(x)$. Знайти многочлени ділення кола для натуральних чисел $n \in \in \mathbb{N}$: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 6; е) 12; є) p, де p — просте число; ж) p^k, де p — просте число, а $k \in \mathbb{N}$ — натуральне число і $1 < k$.

150. * Довести такі властивості многочленів кола:

а) $\prod_{d/n} \Phi_d(x) = x^n - 1$;

б) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, якщо $1 < n \in \mathbb{N}$ — непарне число;

в) $\Phi_n(x) = \prod_{d/n}(x^d - 1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, де μ — функція Мебіуса;

г) $\Phi_n(x) = \Phi_k(x^{\frac{n}{k}})$ де $k \in \mathbb{N}$ — натуральне число, яке ділиться на довільний простий дільник числа n;

д) $\Phi_n(x) = \Phi_{n/p}(x^p)(\Phi_{n/p}(x))^{-1}$, де n ділиться на просте число p, але не ділиться на p^2.

151. * Знайти многочлени ділення кола для натуральних чисел: а) 10; б) 30; в) 36; г) 100; д) 216; е) 1000.

152. * Довести, що для довільного многочлена ділення кола виконуються такі властивості:

а) всі коефіцієнти є цілими числами;

б) старший коефіцієнт дорівнює 1;

в) вільний член рівний -1, якщо $n = 1$;

г) вільний член рівний 1, якщо $1 < n$.

153. * Знайти суму коефіцієнтів кругового многочлена $\Phi_n(x)$, де $n \in \mathbb{N}$ — довільне натуральне число.

9.11 Відповіді та вказівки до розв'язання деяких вправ

56. $n-1$.

57. а) $-117+123i$; б) $2.8i$; в) $2+1.5i$; г) $\frac{81-106i}{222}$; д) 1; е) 2.

58. $1; i; -i; -i; -1; -i; 1; i^n = i^{4k+r} = i^r$, де $0 \leqslant r \leqslant 3$.

59. а) $(-1)^n 4$; б) $2(-1)^n i^{n+1}$.

60. а) $-8i$; б) $-12i$.

61. $\mathbb{R}$.

62.

а) $Im(z_1) \pm Im(z_2) = 0$ для $z_1 \pm z_2$; $Im(z_1) \cdot Re(z_2) \pm Re(z_1) \cdot \cdot Im(z_2) = 0$ для $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$;

б) $Re(z_1) \pm Re(z_2) = 0$ для $z_1 \pm z_2$; $Re(z_1) \cdot Re(z_2) \mp Im(z_1) \cdot Im(z_2) = = 0$ для $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, причому $z_1 z_2 \neq 0$, $z_1 + z_2 \neq 0$;

для двох взаємно спряжених чисел z, $\overline{z}$ маємо:

$z + \overline{z} = 2Re(z)$; $z - \overline{z} = 2Im(z)$; $z\overline{z} = |z|^2$; $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{z^2}{|z|}$, що вказує на те, що $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$, $z - \overline{z} \in Ri$; $z\overline{z} \in R^{\geqslant 0}$; $\frac{z}{\overline{z}} \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли $z \in \mathbb{R}$ або $Re(z) = 0$.

63. а) $1+18i$; б) $4i$; в) $25-2i$; г) 12; д) $18+53i$; е) $\frac{13-i}{2}$.

64.

а) $z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

б) $\begin{cases} (x+2)(x-1) = 0; \\ y \neq 0, \end{cases}$

де $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$.

65. а) $(2; -3)$; б) $\left(\frac{21}{8}; -\frac{31}{8}\right)$.

66.

а) $\left\{1; 0; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$;

б) $\{0; \pm 1; \pm i\}$.

67. а) $5 + i \cdot Im(z)$; б) $-\frac{1}{4} + i$; в) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; г) $\varnothing$; д) $-\frac{1}{4} + (-1 \pm \sqrt{7})i$; е) $3-i$; $-1-i$; є) $z = \alpha \pm i\sqrt{7 - \alpha^2 - 6\alpha}$, де $\alpha \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$; ж) $\varnothing$; з) $\frac{1}{2}(i \pm \sqrt{15})$; и) $(1 \pm 0.5\sqrt{15}) + 0.5i$.

68. а) $(1+i; i)$; б) $(1-i; 2)$; в) $(i; i)$, $(-i; -i)$; г) $(i; 1-i)$.

69. а) $\frac{1}{2}((4+3i) \pm (2+i))$; б) $\frac{1}{2}(-5 \pm i\sqrt{11})$; в) $\frac{1}{2}(-5 \pm (3+2i))$; г) $\frac{1}{2}(-(2+i) \pm (4-3i))$; д) $\frac{1}{4}((1-i) \pm (1-5i))$; е) $-2i$; $\frac{1}{2}(-1+3i)$; є) $\frac{1}{2}(-1 \pm (1-2i))$; ж) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ — чотири розв'язки.

70. **Вказівка.** Показати, що $(1 \pm i)^4 = -4$.

72. **Вказівка.** Застосувати властивості спряженості комплексних чисел.

73.

а) $(-1)^n \cdot 2^{\frac{n+2}{2}} \cdot cos\frac{3n\pi}{4}$;

б) $(-1)^{n+1} \cdot 2^{\frac{n+2}{2}} \cdot i \cdot sin\frac{3n\pi}{4}$;

в) $i^n + (-i)^n = \begin{cases} 0, n = 2k+1, \\ 2, n = 4k; \\ -2, n = 4k+2, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

г) $2i \cdot (-1)^{n+1} sin\frac{n\pi}{3}$.

74. **Вказівка.** Застосувати метод математичної індукції: 0.

75. **Вказівка.** Використати рівність $|\overline{z}| = |z|$

76. Нехай $z = x+iy$; $A = (z+a)(z+b)$; $B = \frac{z+c}{z+d}$, де $a, b, c, d, x, y \in \in \mathbb{R}$

а) $A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(2x+a+b) = 0$;

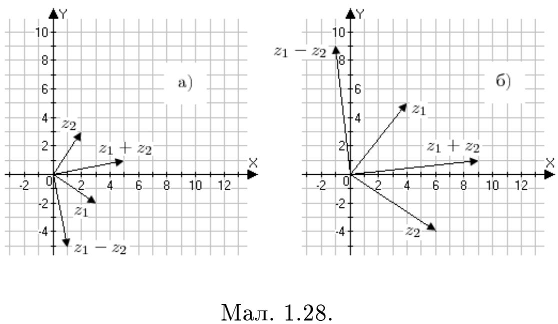
$B \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+d)^2 + y^2 \neq 0; \\ y(d-c) = 0 \end{cases}$

б) $A \in Ri \setminus \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+a)(x+b) - y^2 = 0; \\ y(2x+a+b) \neq 0; \end{cases}$

$B \in Ri \setminus \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+d^2) + y^2 \neq 0; \\ (x+c)(x+d) + y^2 = 0; \\ y(d-c) \neq 0. \end{cases}$

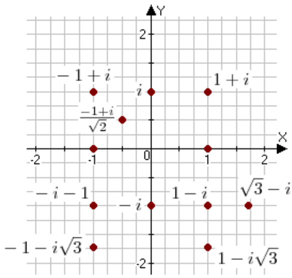
77. **Вказівка.** Використати те, що кільце цілих чисел є область цілісності.

78. Малюнок 1.28.



Мал. 1.28.

79. Малюнок 1.29.



Мал. 1.29.

а) $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$;
б) $1=\cos 0+i\sin 0$;
в) $-1=\cos\pi+i\sin\pi$;
г) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;
д) $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;
е) $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;
є) $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;
ж) $1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$;
з) $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;
и) $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;
і) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$;
ї) $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

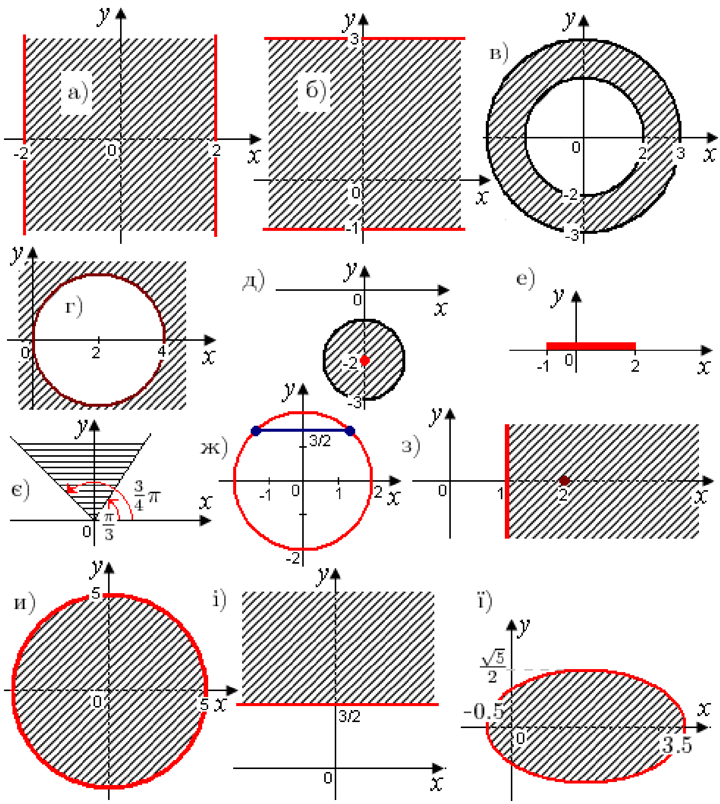
80. а) Напрями векторів, які зображають z_1, z_2, співпадають; б) напрями векторів, які зображають z_1, z_2, протилежні.

81. а), б): довжина сторони прямокутника не перевищує довжини його діагоналі; або довжина катета не перевищує довжини гіпотенузи прямокутного трикутника;

в) довжина діагоналі прямокутника не перевищує суму довжин його суміжних сторін; або довжина гіпотенузи не перевищує суму довжин катетів прямокутного трикутника.

82. Малюнок 1.30.

83. а) Довжина сторони трикутника не менша за різниць довжин двох інших сторін та не більша за їх суму, або довжина ді-



Мал. 1.30.

агоналі паралелограма не менша за різницю двох його суміжних сторін та не більша за їх суму;

б) сума квадратів довжин діагоналей паралелограма рівна сумі квадратів довжин його сторін;

в) довжини діагоналей паралелограма рівні між собою;

г) квадрат довжини сторони трикутника рівний сумі квадратів двох інших сторін, або квадрат довжини діагоналі паралелограма рівний сумі квадратів двох суміжних сторін.

У випадках а), б) співвідношення істинні, а у випадках в), г) хибні.

84.

а) $2 \cdot (\cos \frac{11}{12}\pi + i \cdot \sin \frac{11}{12}\pi)$;

б) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4})$;

в) $\cos \frac{13}{12}\pi + i \cdot \sin \frac{13}{12}\pi$;

г) $5^8 \cdot (\cos(2\pi - 8\alpha) + i \cdot \sin(2\pi - 8\alpha))$, де $\alpha = arctg\frac{3}{4}$;

д) $\cos \frac{3}{2}\pi + i \cdot \sin \frac{3}{2}\pi$;

е) $\frac{1}{\sqrt{2}\cdot \sin \frac{\pi}{5}} \cdot (\cos \frac{11}{20}\pi + i \cdot \sin \frac{11}{20}\pi)$;

є) $-\frac{1}{\sin \alpha} \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$;

ж) $-\frac{1}{\cos \alpha} \cdot (cos(\pi - \alpha) + i \cdot sin(\pi - \alpha))$.

85.

а) $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right)\right)$;

б) $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2^{990}\cdot\sqrt{3^{15}}}$;

в) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{sin\beta} \cdot (\cos(\pi - 2\cdot\theta - \alpha) + i \cdot \sin(\pi - 2\cdot\theta - \alpha))$;

г) -2^{19}; д) 2; е) $-2^{2006}(\sin \frac{\alpha}{2})^{2006} \cdot (\cos 1003\alpha - i \cdot \sin 1003\alpha)$;

є) $\frac{\cos 1003\alpha - i\cdot\sin 1003\alpha}{2^{2006}\cdot(\cos\frac{\alpha}{2})^{2006}}$; ж) 4^{2007}.

86. а) $(\pi; 2\pi)$; б) $\left(0; \arcsin \frac{1}{3}\right) \cup \left(2\pi - \arcsin \frac{1}{3}; 2\pi\right)$;

в) $\left(\frac{13}{12}\pi; \frac{17}{12}\pi\right)$; г) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$.

Вказівка. Застосовувати геометричне тлумачення заданих нерівностей.

87. а) $\arg(\omega) = \begin{cases} \text{не визначено}, \alpha = 0; \\ \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\alpha, 0 < \alpha < \pi; \\ -\frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\alpha, \pi \leqslant \alpha < 2\pi; \end{cases}$

б) $\arg(\omega) = \begin{cases} \text{не визначено}, \alpha = \pi; \\ \frac{3}{2}\alpha, 0 < \alpha < \pi; \\ \frac{3}{2}\alpha - \pi, \pi < \alpha < 2\pi. \end{cases}$

88. а) $Re(z) < 0$; б) $Re(z) < 0 \wedge Im(z) < 0$;

в) $x_0 + 2k\pi < Re(z) < x_0 + 2(k+1)\pi$ або $y_0 + 2l\pi < Im(z) < y_0 + + 2(l+1)\pi$, де $k, l \in \mathbb{Z}$; $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$;

г) $(z - 2i) > 1$.

Вказівка. Застосувати геометричну інтерпретацію комплексних чисел.

89. а) $\frac{3}{2} - 2i$; б) $-1 - i$; в) i, $i \cdot (-1 \pm \sqrt{2})$; г) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4}i$.

90. а) $1 + i$; б) $6 + 8i$, $6 + 17i$; в) $(i; i), (-i; -i)$; г) $(1; 1)$.

91. а) $|z+c|+|z-c|=2a$, де $c^2=a^2-b^2$, $b\leqslant a$; $a,b,c\in\mathbb{R}$, або $|z+ci|+|z-ci|=2b$, де $b^2-a^2=c^2$, $a\leqslant b$; $a,b,c\in\mathbb{R}$;

б) $|z+c|-|z-c|=2a$, де $c^2=a^2+b^2$; $a,b,c\in\mathbb{R}$;

в) $z^2-\overline{z}^2=4a^2i$;

г) $|z-a|\cdot|z+a|=a^2$ або $z^2\overline{z}^2=a^2(z^2+\overline{z}^2)$ або $a^2\left(\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2+\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2\right)=$ $=1$.

92. **Вказівка.** Застосувати формулу Муавра.

93. **Вказівка.** Використати поняття кутового коефіцієнта прямої.

94. **Вказівка.** Застосувати геометричне тлумачення комплексних чисел, та подати їх у тригонометричній формі.

95. **Вказівка.** Подати комплексні числа в алгебраїчній формі.

97. **Вказівка.** Подати число $A_n=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^n$ в тригонометричній формі. Тоді $A_{6k+3}=A_{6k+1}=A_{6k+5}=0$, $A_{6k}=2$; $A_{6k+2}=-1-i\sqrt{3}$, $A_{6k+4}=-1+i\sqrt{3}$, де $k\in\mathbb{Z}$ — ціле число.

98. $x_k=-tg\frac{\pi+4k\pi}{4n}$, $k=0,1,...,(n-1)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Вказівка. Застосувати формулу Муавра.

99. **Вказівка.** Застосовувати геометричне тлумачення комплексних чисел та розв'язати нерівність $|a+1|+\sqrt{a^2-4}\leqslant 2$.

100. **Вказівка.** Застосовувати геометричне тлумачення комплексних чисел та розв'язати нерівність $\sqrt{a+4}+1\geqslant|2-ai|$.

101. а) Нехай $A_n=(1+\omega)^n$. Тоді

$$A_n=\begin{cases}1, n=6k;\\ -1, n=6k+3;\\ \frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, n=6k+1;\\ -\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, n=6k+2;\\ -\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, n=6k+4;\\ \frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, n=6k+5, k\epsilon\mathbb{N}.\end{cases}$$

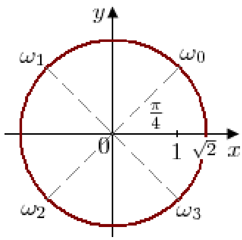
б) $\omega^n+\overline{\omega^n}=\begin{cases}2, n=3k;\\ -1, n=3k\pm1; k\in\mathbb{N}.\end{cases}$

102. $\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{n}{2}x\cdot\ \cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$. **Вказівка.** Застосовувати формулу Муавра до суми виду $\sum_{i=1}^{n}(\cos k\alpha+i\cdot\sin k\alpha)$, де $k\in\mathbb{Z}$.

103. **Вказівка.** Використати формулу Муавра.

104. $0; (-1)^{n-1}$. **Вказівка.** Застосовувати формулу $\varepsilon_1^k = \varepsilon_k$, де $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, ...(n-1)$.

105. $\sqrt[n]{z}$ має n значень ω_k, де $k = 0, 1, ...(n-1)$, які зображаються вершинами правильного n-кутника (при $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$), вписаного в коло радіуса $\left|\sqrt[n]{|z|}\right|$ з центром у початку координат, причому $arg(\omega_0) = \frac{azg(z)}{n}$. Наприклад, у випадку г) $z = -4$, $n = 4$ маємо $\omega_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, де $k = 0, 1, 3$, $arg(\omega_0) = \frac{\pi}{4}$, (відповідний малюнок 1.31).



Мал. 1.31.

106. Якщо ε_k — корінь рівняння $z^n - 1 = 0$, де $k = 0, 1, ..., (n-1)$, то $\omega_k = |\sqrt[n]{5}| \cdot \varepsilon_k$ — корінь рівняння $z^n - 5 = 0$.

107. а) $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{n-k} = 1$; $\arg(\varepsilon_k) + \arg(\varepsilon_{n-k}) = 2\pi$; ε_k і ε_{n-k} — зображаються вершинами правильного n-кутника, вписаного в одиничне коло з центром в початку координат, причому вершини розташовані симетрично відносно осі Ox;

б) $\varepsilon_1^k = \varepsilon_k$, $\arg(\varepsilon_k) = k \cdot \arg(\varepsilon_1)$.

108. а) ні; б) так.

109. а) $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$; б) $a = 0$, або $n = 1$, $a \in \mathbb{R}$, або $a > 0$, $n = 2$; в) $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

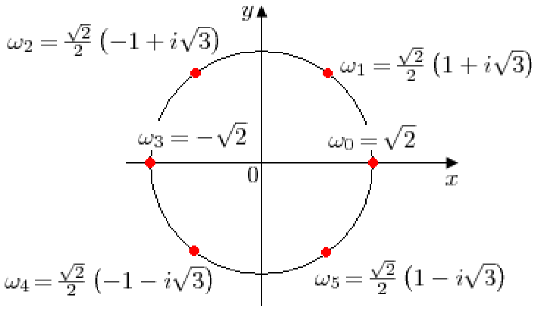
110. а) 2; б) 6; в) 6; г) 8.

111. а) $\pm\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$; $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$; б) $(2+i)\varepsilon_k$, де $\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{k\pi}{3}$, $k = 0, 1, ..., 5$.

112. $k = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

113. Зображеннями коренів ω_k, де $k = 0, 1, ...(n-1)$, є вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса з центром у початку координат і радіусом $r = \left|\sqrt[n]{|z|}\right|$, причому $\omega_k =$

$= \left|\sqrt[n]{|z|}\right| \left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, $\varphi = arg(\omega_0) = \frac{1}{n}arg(z)$. а) $r = 2; \varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $r = \sqrt{2}; \varphi = 0$; в) $r = 1; \varphi = \frac{\pi}{7}$ г) $r = 1; \varphi = \frac{3\pi}{16}$. Наприклад, у випадку б) зображення коренів $\omega_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$, де $k = 0, ..., 5$, подано на малюнку 1.32.



Мал. 1.32.

114.

а) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}} \cdot \left(\cos\frac{17\pi+24k\pi}{36} + i \cdot \sin\frac{17\pi+24k\pi}{36}\right)$; $k = 0, 1, 2$;

б) $2\sqrt{3} \cdot \left(\cos\frac{\pi+3k\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi+3k\pi}{6}\right)$; $k = 0, 1, 2, 3$;

в) $2 \cdot \left(\cos\frac{\pi+3k\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi+3k\pi}{6}\right)$; $k = 0, 1, 2, 3$;

г) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}} \cdot \left(\cos\frac{(19+24k)\pi}{72} + i \cdot \sin\frac{(19+24k)\pi}{72}\right)$; $k = 0, 1, ..., 5$;

д) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}} \cdot \left(\cos\frac{(2+3k)\pi}{12} + i \cdot \sin\frac{(2+3k)\pi}{12}\right)$; $k = 0, 1, ..., 7$;

е) $\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{(7+8k)\pi}{32} + i \cdot \sin\frac{(7+8k)\pi}{32}\right)$; $k = 0, 1, ..., 7$;

є) $2 \cdot \left(\cos\frac{(5+6k)\pi}{30} + i \cdot \sin\frac{(5+6k)\pi}{30}\right)$; $k = 0, 1, ..., 9$;

ж) $\sqrt[2n]{8} \cdot \left(\cos\frac{(1+8k)\pi}{4n} + i \cdot \sin\frac{(1+8k)\pi}{4n}\right)$; $k = 0, 1, ..., (n-1)$;

115.

а) $-1 + i$; $\frac{1}{2}((1+\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-1)i)$; $\frac{1}{2}((1-\sqrt{3}) - (\sqrt{3}+1)i)$;

б) $(2 - i) + \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right) \cdot \varepsilon_1^k$, де $\varepsilon_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k = 0, 1, 2$;

в) $\sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{\pi}{32} + i\sin\frac{\pi}{32}\right) \cdot \varepsilon_1^k$, де $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $k = 0, 1, ..., 7$;

г) $i + \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right) \cdot \varepsilon_1^k$, де $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $k = 0, 1, ..., 3$;

д) $z = \begin{cases} 1, n = 1; \\ a \in \mathbb{R}, n = 2; \\ \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \end{cases}$

$k = 0, 1, ..., (n-1)$, $n > 2$;

е) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{7} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{7}$, $k = 1, 2, ..., 6$;

є) $\cos\frac{k\pi}{4} + i\sin\frac{k\pi}{4}$, $k = 1, 2, ..., 7$;

ж) $-i \cdot ctg\frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, ..., (n-1)$;

з) $ctg\frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, ..., (n-1)$;

и) $\frac{a}{\sqrt{n}2\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^{-1} - 1}$, $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

116. а) $0; -1$; б) $0; 1$; в) $0; 1$; г) 0; $(-1)^{k-1}$.

117. а) $\varnothing$; б) $\{\varepsilon_5; \varepsilon_{10}\}$; в) $\{\varepsilon_3; \varepsilon_6; \varepsilon_9\}$; г) $\varnothing$, де $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{15} + i\sin\frac{2k\pi}{15}$, $k = 0, 1, 2, ..., 14$.

118. 3, якщо $n = 3k$, і 0, якщо $n = 3k - 2$ або $n = 3k - 1$, де $k \in \mathbb{N}$.

119.* $s_n = \sum_{(k,n)=1} \cos\frac{2k\pi}{n}$, де $k = 1, 2, ..., n$. **Вказівка**. Використати рівність $(k; n) = (n - k, n)$. Виявляється, що

$$s_n = \begin{cases} 1, n = 1; \\ (-1)^r, n \text{ — добуток } r \text{ різних простих чисел;} \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

120.* а) $1; 1$; б) $-1; 1$; в) $\sum_{(k,15)=1} \cos\frac{2k\pi}{15} = 1; 1$; г) $\sum_{(k,n)=1} \cos\frac{2k\pi}{n}$, де $k = 1, 2, ..., n$; 1.

121.

$\cdot$	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_0	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_0
ε_2	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_0	ε_1
ε_3	ε_3	ε_4	ε_5	ε_0	ε_1	ε_2
ε_4	ε_4	ε_5	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3
ε_5	ε_5	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4

122. **Вказівка**. Застосувати означення кореня та спряженості комплексних чисел.

123. **Вказівка**. Використати рівність $\overline{\varepsilon_k} = \varepsilon_{n-k}$, де $\varepsilon_l = \cos\frac{2l\pi}{n} + i\sin\frac{2l\pi}{n}$, $l = 0, 1, ..., (n-1)$.

124. **Вказівка**. Застосувати рівність $\omega^{2n} - a^2 = (\omega^n - a)(\omega^n + a)$.

125. **Вказівка**. Використати рівність $\varepsilon_1^k = \varepsilon_k$, де $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, ..., (n-1)$.

126. **Вказівка**. Використати означення множини $E_n = \left\{\varepsilon_k | \varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; k = 0, 1, ..., (n-1)\right\}$ коренів n-го степеня з одиниці.

127. **Вказівка**. Застосувати вказане означення вправи 126 та властивості взаємної простоти натуральних чисел.

128.

а) 0, якщо k не ділиться на n, і n, якщо k ділиться на n;

б) 0, якщо $\varepsilon \neq 1$, і n, якщо $\varepsilon = 1$;

в) $-\frac{n}{1-\varepsilon}$ при $\varepsilon \neq 1$ і $\frac{n^2+n}{2}$ при $\varepsilon = 1$;

г) $-\frac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$ при $\varepsilon \neq 1$ і $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ при $\varepsilon = 1$.

129.

а) $\cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, ..., n$. **Вказівка**. Розглянути рівняння $\frac{z^{n+1}-1}{z-1} = 0$;

б) $\cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$, де $k = 0, 1, ..., n$, причому $k \neq m$, якщо $n = 2m-1$, або $\cos\frac{\pi+2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n+1}$, де $k = 0, 1, ..., n$, причому $k \neq m$, якщо $n = 2m$;

в) $\frac{1+itg\varphi\varphi}{-tg^2\varphi+itg\varphi}$, де $\varphi = \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, ..., (n-1)$;

г) $\frac{1+itg\varphi}{-tg^2\varphi+itg\varphi}$, де $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = 0, 1, ..., (n-1)$.

130. $(m, n) = 1$. Розглянути рівняння $km = ln$, де $m, n \in \mathbb{N}$, а $k = 0, 1, ..., (n-1)$, $l = 0, 1, ..., m$ — невідомі.

131. n є дільником m.

132.* $z_4 = z_1 - z_2 + z_3$ — четверта вершина паралелограма; якщо z_1, z_2 — сусідні вершини квадрата, то інші дві його вершини z_3, z_4 обчислюються за допомогою співвідношення $z_{3,4} = \frac{1}{2}\left((z_1 + z_2) \pm i \cdot (z_1 - z_2)\right)$. **Вказівка.** Для знаходження вершини z_i правильного n-кутника, у якого z_1, z_2 — задані сусідні вершини, можна застосувати формулу $z_k = z_0 + (z_1 - z_0)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, де $z_0 = \frac{1}{2}\left((z_1 + z_2) + i(z_1 - z_2)ctg\frac{\pi}{n}\right)$ — його центр, $k = 0, 1, ..., (n-1)$.

133. $k_{21} = |z_2|, k_{31} = \left|\frac{z_2}{z_1}\right|, k_{32} = \frac{1}{|z_1|}$ — коефіцієнти подібності пар вказаних в умові трикутників.

135. **Вказівка**. Застосувати формули Муавра до сум виду $\sum_{m=1}^{n}(\cos((k+lm)\alpha)+i\cdot\sin((k+lm)\alpha))$.

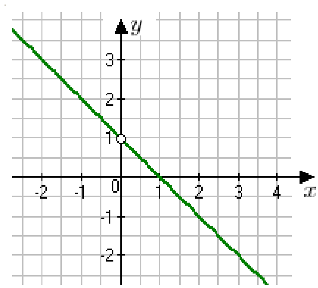
136. **Вказівка**. Застосувати формули Муавра та розкладу бінома Ньютона $(a+bi)^n$. Наприклад, у випадку в) маємо: $\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$; $\left(1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = C_n^0\cdot 1^n\cdot\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^0 + C_n^1\cdot 1^{n-1}\cdot\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^1 + C_n^2\cdot 1^{n-2}\cdot\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^2 + C_n^3\cdot 1^{n-3}\cdot\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^3 + ...$, що дає $S_3 = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\sin\frac{n\pi}{6} = C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + ...$

137. Так; рівняння виду $t^2+1=0$ має розв'язки $t_{1,2} = \pm\frac{1}{2}(\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

138. Ізоморфізм задається рівністю $f(x+iy) = (x;0)+(y;0)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

140. Виконуються всі аксіоми, крім комутативності операції $*$.

141. На площині — це множина точок прямої $x+y=1$, крім точки $M(0;1)$ (див. відповідний малюнок 1.33).



Мал. 1.33.

143. $z\neq 0$; $arg(z)=\frac{k\pi}{n}$, де $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. **Вказівка**. Застосувати тригонометричну форму комплексного числа та його спряженість.

144. а) $\{4,8,9,12,16,18,20\}$; б) $\{1,6,10,14,15\}$; в) $\varnothing$ г) $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$.

145. **Вказівка**. Застосувати вправи 126, 127.

146. **Вказівка**. Застосувати вправу 126.

147. **Вказівка**. Застосувати вправу 116 г), врахувавши те, що всі корені є первісними точно для одного степеня.

148. **Вказівка**. Застосувати вправи 145, 147, 119, 120.

149. а) $x-1$; б) $x+1$; в) x^2+x+1; г) x^2+1; д) x^2-x+1; е) x^4-x^2+1; є) $x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1$; ж) $\frac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1}$. **Вказівка**. Використати означення кругового многочлена.

150. **Вказівка**. Застосувати вправи 148, 149.

151.

а) $x^4-x^3+x^2-x+1$;
б) $x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1$;
в) $x^{12}-x^6+1$;
г) $x^{40}-x^{30}+x^{20}-x^{10}+1$;
д) $x^{72}-x^{36}+1$;
е) $x^{400}-x^{300}+x^{200}-x^{100}+1$.

152. **Вказівка**. Використати вправи 150 для а), б) і 120 для в), г).

153. $\Phi_1(1)=0$; $\Phi_{p^k}(1)=p$, де $p\in P$ — просте число, і $\Phi_n(1)=1$ — в інших випадках. **Вказівка**. Використати вправу 150.

Орієнтовні завдання контрольної роботи № 2

1. Скласти таблицю Келі для адитивної групи $(Z_n; \oplus)$ остач при діленні цілих чисел на $n \in \mathbb{N}$ та вказати нейтральний елемент пари взаємно протилежних елементів, підгрупи цієї групи та їх твірні елементи.

2. Скласти таблицю Келі для мультиплікативної групи $(E_n; \odot)$ коренів n-го степеня з одиниці та вказати одиничний елемент, пари взаємно обернених елементів, її підгрупи та їх твірні елементи.

3. Встановити ізоморфізм між групами $(Z_n; \oplus)$ і $(E_n; \odot)$, відміченими вище.

4. Вказати, які властивості з означень кільця, поля виконуються чи не виконуються на множинах kN; kQ^+; $(-k)Z$; kR; $Q[\sqrt{k}]$, де $k \in \mathbb{N}$.

5. На множині Z_n задати операції додавання $\oplus$ і множення $\odot$ за правилом: результат виконання цих операцій над парою $(a; b)$ є остача від ділення на n суми $a + b$ чи добутку ab відповідно. Скласти таблиці Келі для цих операцій та встановити, чи утворюється кільце та з якими властивостями, чи поле відносно цих операцій. Визначити всі їх підкільця і підполя та їх твірні елементи.

6. Знайти алгебраїчну форму комплексного числа z та спряженого до нього числа $\overline{z}$, якщо

   а) $z = \frac{i^5 - i^{4k}}{(i^{13}+i^4)^3}$;

   б) $z = \frac{i+i^{4k}}{2-2i^{4k+1}}$, де $k \in \mathbb{N}$.

7. Знайти тригонометричну форму комплексного числа z та спряженого до нього числа і зобразити їх на комплексній площині, якщо

   а) $z = \frac{5i^{10} - 5i^{21}}{i^{20}}$;

   б) $z = \frac{14i^{41}}{i^5 - i^{16}}$.

8. Розв'язати рівняння в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел:

   а) $8i\overline{z} + 2i^3 = 20i^{40} - 4i^2 z\overline{z}$;

   б) $z^4 + 2(iz)^2 + 8i^6 = 0$;

   в) $z^2 - 2z\overline{z} - 3 - 3i = 0$;

   г) $z\overline{z} - 2\overline{z} + 2i - 4 = 0$;

   д) $z + 1 + 2i = |z|$;

   е) $2iz^2 - z|z| - 2i = 0$.

9. Обчислити:

   а) $\left(\frac{\sqrt{3}-i^9}{\sqrt{3}+i^{25}}\right)^{12n}$;

   б) $\sqrt{\frac{i^2-i^{4n+1}}{\sqrt{3}+i^7}}$;

   в) $\sqrt{\frac{1+i^5\sqrt{3}}{i^{40}+i^3}}$;

   г) $\left(\frac{i^9+\sqrt{3}}{i^7-i^2\sqrt{3}}\right)^{4n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

10. Обчислити:

    а) $(1-i)^n \pm (1+i)^n$;

    б) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$;

    в) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{2n+1} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2n+1}$, де $n \in \mathbb{Z}$.

11. Побудувати на комплексній площині множину точок, яка відповідає такому співвідношенню:

а) $\log_2 |z+2| - \log_2 |z \cdot i| < 0$;

б) $|z-2i| - |z+4i| \leqslant 0$.

12. Знайти всі значення кореня:

а) $\sqrt[3]{\frac{1-i^5}{1+i\sqrt{3}}}$;

б) $\sqrt[4]{72(i\sqrt{3}+i^2)}$;

в) $\sqrt[8]{\frac{1+i^{21}}{\sqrt{3}+i^{503}}}$.

13. Розв'язати рівняння в полі $\mathcal{C}$ комплексних чисел:

а) $(z+1)^4 = 1-i^5$;

б) $(z+2+i^3)^3 - 2\sqrt{3} + 2i^3$;

в) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$;

г) $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

14. Вивести формули для обчислення таких виразів:

а) $S_n = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n (2n-1)$;

б) $S_n = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} n^2$;

в) $P_n = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$;

г) $P_n = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} 2^{\frac{1}{2n}}$.

Список використаних джерел

1. *Биркгоф Г.* Теория решоток. — Москва: Наука, 1984. — 568 с.
2. *Бродский Я. С., Слипенко А. К.* Функциональные уравнения. — Киев: Вища школа, 1983. — 96 с.
3. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — Москва: Мир, 1965. — 456 с.
4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. — Москва: Наука, 1979. — 624 с.
5. *Гнеденко Б. В.* Куср теории вероятностей. — Москва: Наука, 1988. — 456 с.
6. *Гохман А. В., и др.* Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. — Саратов: СГУ, 1969. — 90 с.
7. *Гретцер Г.* Общая теория решоток. — Москва: Мир, 1982. — 456 с.
8. *Жлуктенко В. І., Наконечний С. І.* Теорія ймовірностей і математична статистика. — Київ: КНЕУ, 2001. — Т. 1. — 336 с.
9. *Завало С. Т.* Арифметика, алгебра і елементи аналізу. — Київ: Рад. шк., 1969. — 504 с.
10. *Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І.* Алгебра і теорія чисел. — Київ: Вища школа, 1974. — Т. 1. — 446 с.

11. *Завало С. Т., Левіщенко С. С., Рокіцький І. О.* Алгебра і теорія чисел. Практикум. — Київ: Вища школа, 1983. — Т. 1. — 232 с.

12. Збірник задач з алгебри. Ч. 1 / Під ред. І. О. Рокіцького. — Вінниця: ВДПУ, 2002. — 176 с.

13. *Игошин В. И.* Задачник-практикум по математической логике. — Москва: Просвещение, 1986. — 158 с.

14. *Игошин В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов. — Саратов: СГУ, 1991. — 256 с.

15. *Калужнин Л. А.* Что такое математическая логика. — Москва: Наука, 1964. — 152 с.

16. *Кострыкин А. И.* Сборник задач по алгебре. — Москва: Факториал, 1995. — 454 с.

17. *Кулик В. Т., Рокіцький І. О.* Алгебра. — Вінниця: Глобус — Прес, 2005. — 264 с.

18. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. — Москва: Высшая школа, 1979. — 560 с.

19. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. — Москва: ФМ, 1962. — 396 с.

20. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — Москва: Наука, 1968. — 432 с.

21. *Ляпин Е. С.* Упражнения по теории груп. — Москва: Наука, 1967. — 264 с.

22. *Ляпин Е. С., Евсеев А. Е.* Алгебра и теория чисел. — Москва: Просвещение, 1974. — 384 с.

23. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. — Москва: Наука, 1970. — 382 с.

24. *Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.* Алгебра 9. — Харків: Гімназія, 2009. — 384 с. — Підручник для 9 класів з поглибленим вивченням математики.

25. *Никольская И. Л.* Математическая логика. — Москва: Высшая школа, 1981. — 128 с.

26. *Пензов Ю. Е.* Элементы математической логики. — Саратов: СГУ, 1968. — 144 с.

27. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Москва: Наука, 1979. — 496 с.

28. *Столяр А. А.* Элементарное введение в математическую логику. — Москва: Просвещение, 1965. — 164 с.

29. Теория полугруп и ее приложения / Под ред. В. В. Вагнера. — Саратов: СГУ, 1965. — 352 с.

30. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. — Москва: Наука, 1977. — 228 с.

31. *Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С.* Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 — 11 кл. — Київ: Зодіак — ЕКО, 2000. — 608 с.

Покажчик

Формат $60 \times 84/16$. Умовн. друк 15,5 арк.
Друк різографний. Тираж 300 примірників
Папір офсетний. Зам. № 2077

Друк ТОВ фірма „Планер“
м. Вінниця, вул. Визволення, 2
тел. (0432)52-08-64, 52-08-65
www.planer.com.ua, sale@planer.com.ua