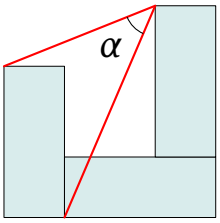
8–9 класи

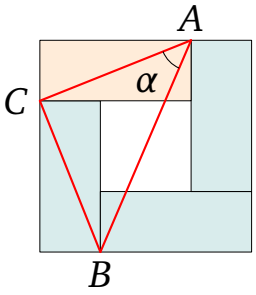
1. Три прямокутники, які зображено на рисунку — рівні. Визначіть величину відміченого кута α (у градусах).



(*Catriona Agg [@Cshearer41 на x.com]*)

Розв'язання.

Помітимо, що чотирикутник, який на рисунку відмічено жовтим кольором — це такий самий прямокутник, як і інші три. Тоді $\angle ACB = 90^\circ$ (це можна обгрунтувати, наприклад, простим підрахунком кутів, або ж розглянувши поворот з центром в точці C на кут 90°) і $AC = CB$, що і означає, що $\alpha = 45^\circ$.



Відповідь. 45°.

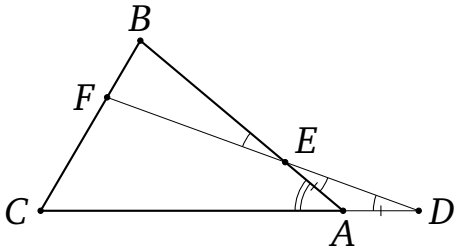
2. У трикутнику ABC з $\angle A = 40^\circ$ на сторонах AB і BC вибрані точки E і F такі, що $\angle BEF = 20^\circ$. Доведіть, що $AE + AC > CF$.

(*Олександр Дзюняк*)

Розв'язання.

Продовжимо FE до перетину із прямою AC в точці D. Оскільки $\angle BEF = \angle AED = 20^\circ$, $\angle EAD = 180^\circ - \angle EAC = 140^\circ$, то з трикутника EAD знаходимо, що $\angle EDA = 20^\circ$, тобто він рівнобедрений.

$\angle CFE = 20^\circ + \angle B$ як зовнішній кут трикутника FBE. Тоді у трикутнику CFD $\angle F > \angle D$, тобто $CD > CF$, що рівносильне тому, що $CA + AE > CF$, що і потрібно було довести.



3. В рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектрису CD. Пряма, перпендикулярна CD, що проходить через точку D, перетинає пряму AC в точці E. Знайдіть EC, якщо $AD = 1$.

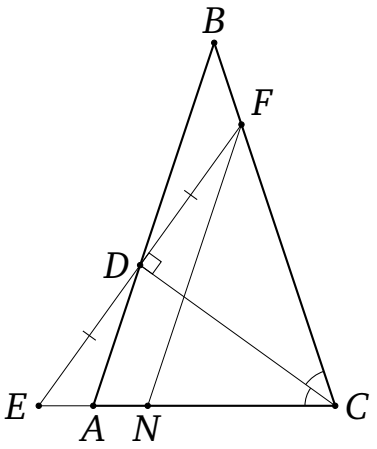
(*В'ячеслав Ясінський*)

Розв'язання.

Нехай пряма ED перетинає BC в точці F. Оскільки прямокутні трикутники EDC і FDC рівні (за катетом і прилеглим гострим кутом), то $ED = DF$, $EC = FC$.

Позначимо на прямій AC таку точку N, що FN паралельне AB. Помітимо, що AD — середня лінія трикутника ENF. Тому $FN = 2AD = 2$. Трикутник FNC рівнобедрений ($\angle FNC = \angle BAC = \angle FCN$), тому $FC = 2$. Таким чином, $EC = 2$.

Відповідь. 2.

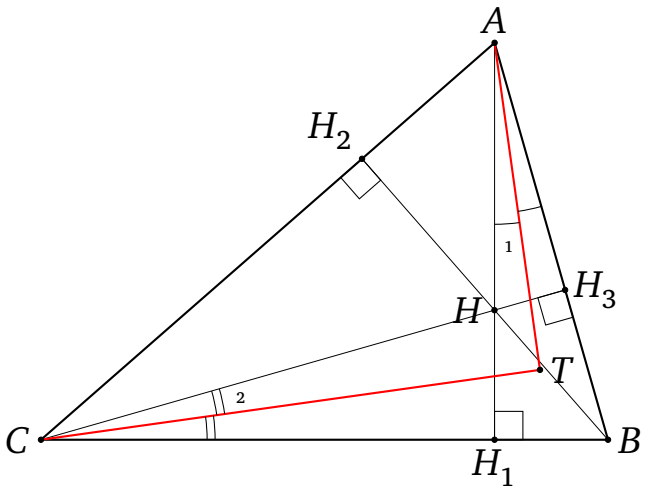


4. В гострокутному трикутнику ABC висоти AH_1, BH_2, CH_3 перетинаються в точці H. Бісектриси кутів $\angle BAH_1$ та $\angle BCH_3$ перетинаються в точці T. Доведіть, що точка T належить колу з діаметром AC.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. З трикутника CAH_1: $\angle CAH_1 = 90^\circ - \angle C$, з трикутника BAH_1: $\angle BAH_1 = 90^\circ - \angle B$, а його половина $\angle 1 = 45^\circ - \frac{1}{2}\angle B$. Тоді $\angle CAT = 90^\circ - \angle C + 45^\circ - \frac{1}{2}\angle B = 135^\circ - \angle C - \frac{\angle B}{2}$.

Аналогічно $\angle ACH_3 = 90^\circ - \angle A$ (з трикутника ACH_3), $\angle BCH_3 = 90^\circ - \angle B$ (з трикутника BCH_3) і його половина $\angle 2 = 45^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Отже, $\angle ACT = 90^\circ - \angle A + 45^\circ - \frac{\angle B}{2} = 135^\circ - \angle A - \frac{\angle B}{2}$. Сума отриманих кутів дорівнює $270^\circ - \angle A - \angle B - \angle C = 90^\circ$ і в трикутнику ACT цей кут при вершині T — прямий. Тому точка T належить колу з діаметром AC.



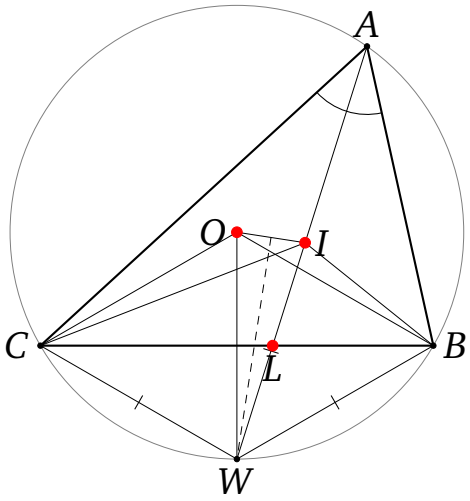
5. На дошці було зображено трикутник ABC, у якого $\angle A = 60^\circ$, а також відмічено центр вписаного кола — точку I, центр описаного кола — точку O, і основу бісектриси кута A трикутника — точку L. Учитель витер дошку,

залишивши лише точки O, I, L. Як відновити початковий трикутник ABC за цими трьома точками?

(*Григорій Філіпповський*)

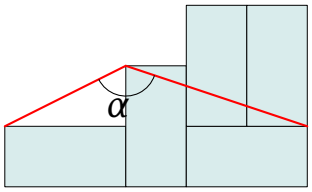
Розв'язання.

Нехай бісектриса кута A при продовженні перетинає описане коло трикутника ABC в точці W. Відомо, що $IW = BW = CW$ — теорема «трилисника». Оскільки $\angle BOC = 2A = 120^\circ$, а $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, то точки B, I, O, C належать одному колу з центром в точці W. Тоді серединний перпендикуляр до OI перетинає пряму IL в точці W. Очевидно, $OW = R$ — радіус описаного кола трикутника ABC. Це коло з центром O перетинає пряму IL у вершині A. Перпендикуляр, проведений через точку L до OW, перетинає описане коло в вершинах B і C.



10–11 класи

1. П'ять прямокутників, які зображено на рисунку — рівні. Визначіть величину відміченого кута α (у градусах).



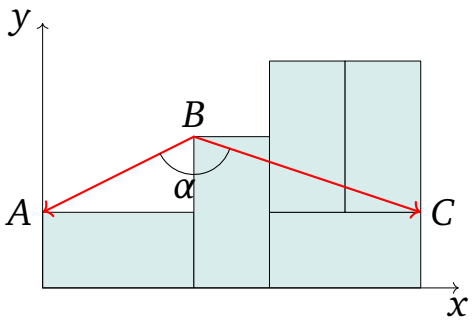
(*Catriona Agg [@Cshearer41 на x.com]*)

Розв'язання.

З рисунка можна встановити, що розміри прямокутника співвідносяться як 2:1. Введемо початок координат так, як показано на рисунку. Тоді $A(0;1)$, $B(2;2)$, $C(5;1)$. Маємо $\overrightarrow{BA}(-2;-1)$, $\overrightarrow{BC}(3;-1)$. Тоді

$$\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-2\cdot 3+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

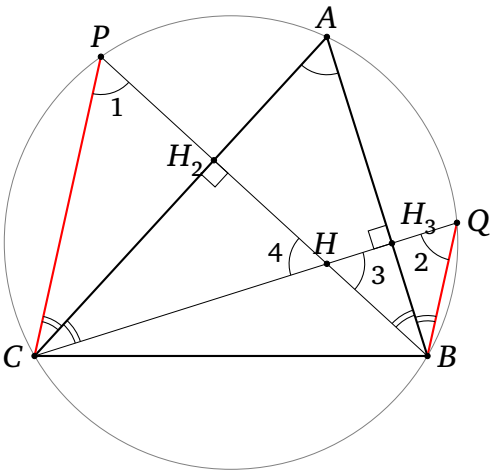
звідки $\angle ABC = 135^\circ$.



2. Висоти BH_2 і CH_3 гострокутного трикутника ABC продовжено до перетину з описаним навколо трикутника ABC колом в точках P і Q. Виявилось, що $BQ \parallel CP$. Знайдіть величину кута A трикутника ABC.

(*Микита Солієв*)

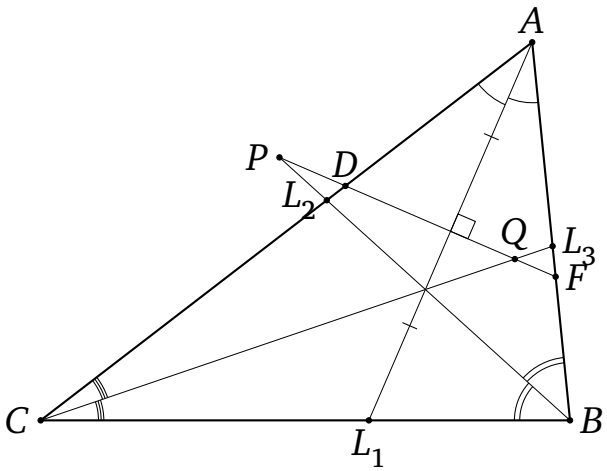
Розв'язання. Очевидно, $\angle 1 = \angle 2 = \angle A$ (вписані, які спираються на одну дугу). $\angle ABP = 90^\circ - A$ — з трикутника ABH_2 і $\angle ABP = \angle ACP$. $\angle ACQ = 90^\circ - A$ — з трикутника ACH_3 і $\angle ABQ = \angle ACQ$ — вписані, що спираються на одну дугу. Тоді, очевидно, $\angle 3 = \angle 2$ і $\angle 4 = \angle 1$ (трикутники BHQ і CHP рівнобедрені). Але $\angle 2 = \angle PCQ$ — внутрішні різносторонні при паралельних прямих BQ і CP. Отже, в трикутнику CPH всі кути рівні і рівно по 60°. Таким чином, $\angle A = \angle 1 = 60^\circ$.



3. AL_1, BL_2 і CL_3 — бісектриси в трикутнику ABC. Серединний перпендикуляр до AL_1 перетинає BL_2 і CL_3 відповідно в точках P і Q. Доведіть, що точки B, Q, P, C належать одному колу.

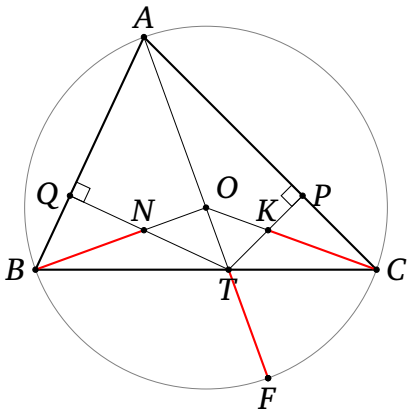
(*В'ячеслав Сатко*)

Розв'язання.



Нехай серединний перпендикуляр до AL_1 перетинає сторони AC і AB в точках D і F відповідно. Тоді $\angle ADF = \angle AFD = \frac{180^\circ - A}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$. А суміжний кут $DFB = 90^\circ + \frac{A}{2}$. Отже, в трикутнику PFB відомі кути $90^\circ + \frac{A}{2}$ і $\frac{B}{2}$. Таким чином, $\angle BPF = \frac{C}{2}$. Оскільки $\angle BPQ = \angle BCQ = \frac{C}{2}$, то P, Q, B, C лежать на одному колі.

4. Точка O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Промінь AO перетинає BC в точці T. P і Q — основи перпендикулярів, які опущено з точки T на сторони AC і AB відповідно. TP перетинає радіус OC в точці K, TQ перетинає радіус OB в точці N. Доведіть, що $CK = FT = BN$, де F — точка перетину променя AO з описаним колом трикутника ABC.



(*Олексій Карлюченко*)

Розв'язання. $\angle AOC = 2\angle B$ як центральний кут. Тоді

$$\angle ACO = \angle CAO = \frac{180^\circ - 2\angle B}{2} = 90^\circ - \angle B$$

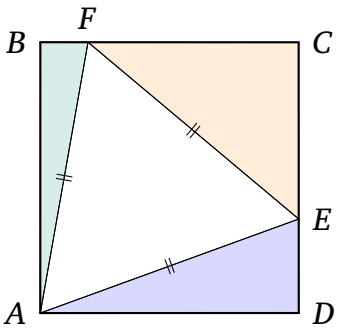
і $\angle CKP = \angle B$ (з трикутника CKP). $\angle CKP = \angle TKO = \angle B$ (як вертикальні) і $\angle PTA = \angle B$ (з трикутника APT). Отже, $OK = OT$.

Аналогічно, $\angle AOB = 2\angle C$ (як центральний) і

$$\angle OAB = \angle ABO = \frac{180^\circ - 2\angle C}{2} = 90^\circ - \angle C.$$

Тоді $\angle QNB = \angle ONT = \angle C$. З трикутника ATQ $\angle ATQ = 90^\circ - \angle QAT = \angle C$ і $ON = OT$. Таким чином, $OK = OT = ON$. Якщо від радіусів $OC = OF = OB$ віднімемо рівні відрізки, то отримаємо $CK = FT = BN$.

5. У прямокутник $ABCD$ вписано правильний трикутник AFE (див. рисунок). Нехай S_1, S_2 і S_3 — площі трикутників ABF, ADE та ECF відповідно. Доведіть, що $S_3 = S_1 + S_2$.



(*Олег Черкаський*)

Розв'язання.

Передусім зазначимо, що площа прямокутного трикутника з гіпотенузою c і гострим кутом α може бути обчислена за формулою $S = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha$.

Справді, прилеглий до кута α катет дорівнює $c\cos\alpha$, тому площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} \cdot c\cos\alpha \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha.$$

Нехай $\angle BAF = \beta$, тоді $\angle DAE = 30^\circ - \beta$, $\angle CFE = 30^\circ + \beta$.

Тоді

$$S_1 = \frac{1}{4}a^2 \sin(60^\circ - 2\beta),$$
$$S_2 = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\beta,$$
$$S_3 = \frac{1}{4}a^2 \sin(60^\circ + 2\beta).$$

Тоді рівність $S_1 + S_2 = S_3$ рівносильна тригонометричній тотожності:

$$\sin(60^\circ - \alpha) + \sin\alpha = \sin(60^\circ + \alpha),$$

яку легко довести за формулами додавання.