Рівняння та нерівності: самостійно вдосконалюємо знання та вміння

Вінниця

2017

УДК 512.13:378.016(075.8)
ББК 22.141я73+74.58я73
Н 22

Автор: ***Наконечна Л.Й.*** – доцент кафедри алгебри і
методики навчання математики ВДПУ
імені Михайла Коцюбинського

Пропонований навчальний посібник складений згідно навчальної програми курсу «Елементарна математика» (другий семестр) для студентів педагогічних університетів спеціальності 014.04 Середня освіта (математика).

Рекомендовано до друку вченою радою інституту математики, фізики і технологічної освіти ВДПУ імені Михайла Коцюбинського
(протокол № 8 від 10.02.2010)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пропонований посібник підготовлено відповідно до діючої програми з елементарної математики для студентів першого курсу освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» напряму підготовки «Математика». Елементарна математика - це дисципліна професійно-практичної підготовки, яка відіграє важливу роль у підготовці майбутніх учителів математики до викладання математики в середній загальноосвітній школі та в інших типах середніх загальноосвітніх навчально-виховних закладів, у професійних закладах освіти. За навчальним планом «Елементарна математика» вивчається з першого по четвертий семестр. Посібник розроблено для другого семестру.

Зміст навчального матеріалу, поданого у посібнику, розподілено на 10 тем, кожна з яких має наступну структуру:

- ✓ вхідний тест для самоперевірки залишкових знань з теми, сформованих під час вивчення математики в школі;
- ✓ основні теоретичні відомості;
- ✓ приклади розв’язування завдань;
- ✓ завдання для самостійної роботи;
- ✓ додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи;
- ✓ вихідний тест для самоперевірки знань та умінь з теми.

Приклади розв’язування завдань поділено за методами розв’язування, після кожного з яких пропонуються завдання для самостійної роботи.

Завдання для самостійної роботи та вихідний тест для самоперевірки знань та умінь з теми поділено на три рівні складності: репродуктивний, репродуктивно-продуктивний та продуктивний. Рівневий підхід дає змогу студенту обирати завдання певного рівня та бачити наступний рівень, до якого слід прагнути.

Посібник може бути корисним не лише для студентів педагогічних університетів, а й для учнів, зокрема, у процесі підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання, для учителів шкіл, людей, які займаються самоосвітою.

Вхідне тестування на початку розгляду кожної теми дасть можливість студентам оцінити рівень залишкових знань, сформованих в умовах вивчення шкільної математики. Якщо в результаті проходження тестування студент розв'язав правильно більше 60% завдань, то він може продовжити опрацювання теми за посібником. Якщо ж кількість правильно розв'язаних завдань менша 60%, то йому варто усунути прогалини в знаннях, опрацювавши тему за шкільними підручниками, рекомендованою літературою.

В умовах кредитно-модульної системи організації навчального процесу використання даного посібника вбачаємо в системі обліку самостійної пізнавальної діяльності студентів. Зокрема, проходження студентом вихідного тестування дозволить оцінити результати своєї самостійної роботи з кожної теми: за правильне розв'язання усіх завдань третього рівня студент отримує 5 балів, другого рівня – 4 бали, першого рівня – 3 бали. За бажанням студент може з теми набрати два додаткових бали, підібравши п'ять завдань, способи розв'язування яких не розглянуті в посібнику. Підібрати ці завдання він зможе, опрацювавши додаткову літературу, зокрема, рекомендовану на початку вивчення теми.

Вхідне та вихідне тестування покликане розвивати у студентів навички самоконтролю за якістю самостійної роботи та формувати у них адекватну самооцінку своїх знань та умінь.

Кожна тема містить рубрику «Це важливо!», в якій виділено основні ідеї, які використовувалися в процесі розв'язування наведених прикладів. Окрім того, студент може записати власні висновки, зроблені в процесі самостійної роботи над темою в рубриці «Важливі нотатки!».

Тема 1. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Вхідний тест для самоперевірки залишкових знань з теми

1. Встановити відповідність між рівняннями та їхніми коренями:

1) $\sqrt{x}=2$; **2)** $x^2=16$; **3)** $\sqrt{-x}=2$; **4)** $\sqrt{x}=-2$.

А) ± 4; **Б)** $\varnothing$; **В)** -4; **Г)** 4.

2. Розв'язати рівняння $2x^8=10$.

А) $\frac{5}{8}$; **Б)** $\varnothing$; **В)** $\sqrt{5}$; **Г)** $\pm\sqrt{5}$; **Д)** $\sqrt[8]{5}$.

3. Розв'язати рівняння $9\sqrt[3]{x}=-27$.

А) 9; **Б)** $\varnothing$; **В)** -9; **Г)** -27; **Д)** 27.

4. Розв'язати рівняння $x^3-9=0$.

А) 3; **Б)** $\varnothing$; **В)** $\sqrt{9}$; **Г)** $\pm\sqrt[3]{9}$; **Д)** $\sqrt[3]{9}$.

5. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2}\cdot\sqrt[3]{x+4}=0$.

А) -2; -4; **Б)** $\varnothing$; **В)** -2; **Г)** -4; **Д)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

Ірраціональними називаються рівняння, в яких змінна знаходиться під знаком кореня, або під знаком операції піднесення до степеня з дробовим показником.

Основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь є наступні:

1) метод рівносильних перетворень;
2) метод піднесення обох частин рівняння до одного й того ж степеня;
3) метод введення нової змінної.

У деяких випадках є доцільним застосування графічного методу, використання властивостей функцій, множення обох частин рівняння на вираз, спряжений з однією із його частин, тощо.

1. Розв'язування ірраціональних рівнянь за допомогою рівносильних перетворень

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}=x+2$.

Розв'язання. Область допустимих значень рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases} x+3\geq 0, \\ x-1\geq 0. \end{cases}$ Для того, щоб не порушити рівносильності при піднесенні обох частин даного рівняння до квадрата, нам слід врахувати знаки обох частин рівняння. Оскільки права частина невід'ємна на ОДЗ рівняння як добуток арифметичних коренів, то й ліва теж має бути невід'ємною, тобто $x+2\geq 0$. Отже, одержимо

$$\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ x+2\ge 0, \\ (x+3)(x-1)=(x+2)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x^2+2x-3=x^2+4x+4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x=-3{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Відповідь. $\varnothing$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3}$.

Розв'язання. Піднесення обох частин рівняння до квадрата є рівносильним перетворенням, якщо ці частини мають один і той же знак. Щоб уникнути труднощів з оцінкою знака різниці $\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3}$, перепишемо задане рівняння у вигляді $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{5x+1}$. Далі матимемо:

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{5x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)^2=\left(\sqrt{5x+1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1\ge 0, \\ x+3\ge 0, \\ 3x+1+2\sqrt{(3x+1)(x+3)}+x+3=5x+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3}, \\ 2\sqrt{(3x+1)(x+3)}=x-3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{3}, \\ x\ge 3, \\ 4(3x+1)(x+3)=(x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3, \\ x=\dfrac{-23\pm 4\sqrt{31}}{11}; \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Відповідь. $\varnothing$.

<u>Це важливо!</u>

У процесі розв'язування рівнянь методом рівносильних перетворень використовують положення про рівносильність рівнянь. При цьому слід пам'ятати, що всі рівносильні перетворення рівнянь виконуються на ОДЗ рівняння. З основних теорем про рівносильність рівнянь випливають наступні твердження:

Теорема 1. $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)=g^2(x). \end{cases}$

Теорема 2. $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x)\ge 0, \\ f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0, \\ f(x)\cdot g(x)=\varphi^2(x). \end{cases}$

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати рівняння

<u>*Перший рівень*</u>

1.1 $x=\sqrt{8x+9}$. Відповідь. 9.

1.2 $\sqrt{x+4}=13-2x$. Відповідь. 5.

1.3 $(x+2)\sqrt{x}=0$. Відповідь. 0.

1.4 $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$. Відповідь. -1, 2.

1.5 $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+3}=2$. Відповідь. 1.

<u>*Другий рівень*</u>

1.6 $\sqrt{x+4}=7-\sqrt{2x+6}$. Відповідь. 5.

1.7 $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$. Відповідь. 3.

1.8 $\sqrt{x-1}=\sqrt{5x-1}-\sqrt{8+2x}$. Відповідь. 2.

1.9 $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$. Відповідь. 4.

<u>*Третій рівень*</u>

1.10 $\sqrt{x^2-2x}\cdot\sqrt{3x-7}=3-x$. Відповідь. $\frac{11+\sqrt{13}}{6}$.

1.11 $1-x=\sqrt{1-\sqrt{4x^2-7x^4}}$. Відповідь. 0; 0,5.

2. Розв’язування ірраціональних рівнянь за допомогою піднесення до степеня обох частин рівняння

<u>*Приклад 1.*</u> Розв’язати рівняння $\sqrt{x-4}-\sqrt{9-x}=1$.

Розв’язання. 1 спосіб. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Одержимо $x-4+9-x-2\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-4}=1$. Відокремивши вираз $\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-4}$, дістанемо $\sqrt{9-x}\cdot\sqrt{x-4}=2$. Знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Тоді $13x-x^2-36=4$; $x^2-13x+40=0$. Розв’язавши останнє рівняння, знаходимо $x_1=5,\ x_2=8$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $x_2=8$ є коренем рівняння, а $x_1=5$ не є коренем даного рівняння.

2 спосіб. Ліва частина рівняння є різницею двох невід’ємних на області допустимих значень рівняння виразів. Ця різниця може набувати як додатних, так і від’ємних значень. Перепишемо дане рівняння у такому вигляді: $\sqrt{x-4}=1+\sqrt{9-x}$. Тут обидві частини рівняння є невід’ємними. Піднесемо обидві частини отриманого рівняння до квадрата. Одержимо $x-4=1+9-x+2\sqrt{9-x}$. Відокремивши вираз $\sqrt{9-x}$, дістанемо $\sqrt{9-x}=x-7$. Ліва частина цього рівняння невід’ємна, отже права частина теж має бути невід’ємною, тобто $x-7\geq 0$. Знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Тоді $9-x=x^2-14x+49$; $x^2-13x+40=0$. Розв’язавши останнє рівняння, знаходимо $x_1=5,\ x_2=8$. Перший корінь не задовольняє умову $x\geq 7$, тобто є стороннім. $x_2=8$ задовольняє цю умову, отже є коренем рівняння.

Відповідь. 8.

Приклад 2. Розв’язати рівняння $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

Розв’язання. Перенесемо $\sqrt{x}$ у праву частину рівняння, одержимо $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1-\sqrt{x}$. Піднесемо обидві частини отриманого рівняння до квадрата. Одержимо $x-\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}+x$. Звідси $-\sqrt{1-x}=1-2\sqrt{x}$. Піднесемо обидві частини останнього рівняння до квадрата, дістанемо $1-x=1-4\sqrt{x}+4x$, або після спрощення $4\sqrt{x}=5x$. Далі $16x=25x^2$, $25x^2-16x=0$. Коренями цього рівняння є $x_1=0,\ x_2=\dfrac{16}{25}$. Другий з цих коренів задовольняє вихідне рівняння, а перший – для нього сторонній.

Причиною появи стороннього кореня є розширення області визначення рівняння. Дійсно, до області визначення заданого рівняння число 0 не входить, а до області визначення рівняння $25x^2-16x=0$ - входить. Значення $x_1=0$ не може бути коренем заданого рівняння, бо воно не належить до його області визначення.

Відповідь. $\dfrac{16}{25}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}=\sqrt[3]{2x-1}$.

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня. При чому, для куба двочлена будемо використовувати таку форму запису $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Дістанемо

$2x+1+6x+1+3\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}\right)=2x-1$, або

$3\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}\right)=-6x-3$. Далі, врахувавши, що $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}=\sqrt[3]{2x-1}$, маємо $\sqrt[3]{2x+1}\cdot\sqrt[3]{6x+1}\cdot\sqrt[3]{2x-1}=-2x-1$. Піднесемо обидві частини останнього рівняння до куба. Одержимо

$(2x+1)(6x+1)(2x-1)=-(2x+1)^3$. Далі $(2x+1)\left((6x+1)(2x-1)+(2x+1)^2\right)=0$. Звідси знаходимо $x_1=-0{,}5,\ x_{2,3}=0$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що його коренем є лише $x=-0{,}5$.

Зауваження. При розв’язуванні заданого рівняння ми підносили обидві частини рівняння до третього степеня, що є рівносильним перетворенням. Однак подальша заміна виразу $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}$ на вираз $\sqrt[3]{2x-1}$ могла привести (і, як показала перевірка, привела) до появи сторонніх коренів.

Відповідь. -0,5.

Це важливо!

Розв’язування ірраціональних рівнянь за допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня зводиться до заміни за допомогою деяких перетворень даного ірраціонального рівняння раціональним. Останнє рівняння може бути рівносильним вихідному ірраціональному, або бути його наслідком.

Слід враховувати, що **при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди отримуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).**

Якщо для розв'язування ірраціонального рівняння обидві частини піднести до парного степеня, то одержуємо рівняння-наслідок – коли всі корені першого будуть коренями другого, але друге рівняння може мати корені, які не задовольняють задане рівняння.

Поява сторонніх коренів може відбутися після піднесення обох частин рівняння $f(x)=g(x)$ до степеня з парним показником за рахунок того, що рівняння $\left(f(x)\right)^2=\left(g(x)\right)^2$ є наслідком не лише рівняння $f(x)=g(x)$, а й рівняння $f(x)=-g(x)$.

Причиною появи сторонніх коренів можуть бути також деякі заміни, що використовуються в процесі розв'язування (див. приклад 3).

Для того, щоб відсіяти сторонні корені, можна робити перевірку. В залежності від вигляду коренів, від їх кількості (декілька чи нескінченна множина), а інколи і від обраного способу розв'язування ці корені перевіряються або підстановкою в задане рівняння, або доведення рівносильності рівнянь, які отримуються на кожному етапі розв'язування, або якимось іншим шляхом (з використанням властивостей функцій і т.і.).

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

<u>*Перший рівень*</u>

1.12 $\sqrt{7+\sqrt{3+x}}=4$. Відповідь. 78.

1.13 $\sqrt[3]{x^2+4x-50}=3$. Відповідь. -11; 7.

1.14 $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$. Відповідь. 7.

1.15 $\dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x-5}$. Відповідь. 3.

1.16 $\sqrt{37-x^2}=x-5$. Відповідь. 6.

1.17 $\sqrt{x^2+8}-2x=1$. Відповідь. 1.

<u>*Другий рівень*</u>

1.18 $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$. Відповідь. -1.

1.19 $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7$. Відповідь. 5.

1.20 $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$. Відповідь. 4.

1.21 $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$. Відповідь. 5.

1.22 $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$. Відповідь. 0; 2.

1.23 $\sqrt[3]{5x+4}+\sqrt[3]{-5x-2}=2$. Відповідь. -0,6

1.24 $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$. Відповідь. -1.

1.25 $\sqrt[3]{2x-8}+\sqrt[3]{x-8}=2$. Відповідь. 8.

1.26 $\sqrt[3]{8x+4}+\sqrt[3]{8x-4}=2$. Відповідь. 0,5.

Третій рівень

1.27 $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=0$. Відповідь. 0.

1.28 $\sqrt[3]{2x(4x^2+3)-1-12x^2}+x=x^2-11$. Відповідь: -2; 5.

1.29 $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$. Відповідь. -2.

1.30 $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$. Відповідь. 1; 1,5; 2.

1.31 $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$. Відповідь. 1; 3.

1.32 $\sqrt[3]{4x^2+10x+4}+\sqrt[3]{2x^2-5x-3}=\sqrt[3]{2x+1}$. Відповідь. 3.

3. Розв'язування ірраціональних рівнянь за допомогою заміни змінних

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x-4\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+6=0$.

Розв'язання. Покладемо $\sqrt[3]{x}=y$. Одержимо рівняння $y^3-4y^2+y+6=0$, яке має три корені $y_1=-1,\ y_2=2,\ y_3=3$. Повертаючись до заміни, матимемо $\sqrt[3]{x}=-1\Leftrightarrow x=-1$, $\sqrt[3]{x}=2\Leftrightarrow x=8$, $\sqrt[3]{x}=3\Leftrightarrow x=27$.

Відповідь. -1, 8, 27.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$.

Розв'язання. Очевидно, що $-77\le x\le 629$. Введемо нові змінні, поклавши

$$\begin{cases}\sqrt[4]{629-x}=m,\\ \sqrt[4]{77+x}=n.\end{cases}$$

Для знаходження невідомих m і n використаємо вихідне рівняння, яке в нових змінних записується у вигляді $m+n=8$. Ще одне рівняння, яке пов'язує m і n, можна отримати із системи $\begin{cases}629-x=m^4,\\ 77+x=n^4.\end{cases}$ Додавши почленно останні два рівняння, одержимо $m^4+n^4=706$. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases}m+n=8,\\ m^4+n^4=706.\end{cases}$$

Остання система – симетрична. Розв'яжемо її за допомогою елементарних симетричних многочленів: $m+n=u,\ mn=v$. Щоб виразити друге рівняння системи через u і v, здійснимо наступні перетворення:

$(m+n)^2=m^2+2mn+n^2$; $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=u^2-2v$;

$(m^2+n^2)^2=(u^2-2v)^2$; $m^4+2m^2n^2+n^4=(u^2-2v)^2$. І остаточно отримуємо

$$m^4+n^4=(u^2-2v)^2-2m^2n^2=(u^2-2v)^2-2v^2.$$

В нових змінних система набуде вигляду

$$\begin{cases}u=8,\\ (u^2-2v)^2-2v^2=706.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=8,\\ (64-2v)^2-2v^2=706\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=8,\\ v_1=15,\ v_2=113.\end{cases}$$

Повертаючись до змінних m і n, матимемо сукупність двох систем

$$\begin{cases} m+n=8, \\ mn=15; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} m+n=8, \\ mn=113. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, одержимо розв'язки першої з них

$$\begin{cases} m_1=3, \\ n_1=5; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} m_2=5, \\ n_2=3. \end{cases}$$

Друга система дійсних розв'язків не має.

Остаточно отримуємо $\sqrt[4]{629-x}=3$, або $\sqrt[4]{629-x}=5$. Звідси $x_1=4,\ x_2=548$.

Відповідь. 4, 548.

<u>Приклад 3.</u> Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

Розв'язання. Областю визначення даного рівняння є інтервал $[-1;\infty)$. В цій області вираз $\sqrt{2x^2+5x+3}$ можна подати у вигляді $\sqrt{2x^2+5x+3}=\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x+1}$. Оскільки $3x=x+2x$, то задане рівняння можна записати таким чином: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=2x+3+2\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x+1}+x+1-20$, або $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{2x+3}\right)^2+2\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x+1}\right)^2-20$, тобто $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\right)^2-20$. Покладемо $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=y$, одержимо квадратне рівняння $y^2-y-20=0$, з якого знаходимо $y_1=5,\ y_2=-4$. Отже, розв'язування заданого рівняння звелося до розв'язування сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5, \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=-4. \end{array}\right.$$

Очевидно, що друге рівняння сукупності розв'язків не має. Розв'яжемо перше рівняння методом рівносильних перетворень

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5 \Leftrightarrow 2x+3+2\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x+1}+x+1=25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x+1}=21-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0, \\ 21-3x\ge 0, \\ 4(2x+3)(x+1)=(21-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1, \\ x\le 7, \\ x^2-146x+429=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 7, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=3, \\ x_2=73; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Відповідь. 3.

<u>Це важливо!</u>

Якщо до рівняння змінна входить у одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною) (приклад 1 та приклад 3).

Деякі ірраціональні рівняння, які містять кілька коренів *n*-го степеня, можна звести до систем раціональних рівнянь, замінивши кожен корінь новою змінною (приклад 2).

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати рівняння

<u>*Перший рівень*</u>

1.33 $x-6-\sqrt{x}=0$. Відповідь. 9.

1.34 $2x^3-x\sqrt{x}=120$. Відповідь. 4.

1.35 $\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}-2=0$. Відповідь. -7; 2.

1.36 $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$. Відповідь. ± 5.

1.37 $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2$. Відповідь. 1.

<u>*Другий рівень*</u>

1.38 $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$. Відповідь: -9; 4.

1.39 $x^2-3\sqrt{x^2-4x+20}=4x-10$. Відповідь: -1; 5.

1.40 $4-x^2+3x=2\sqrt{x^2-3x+11}$. Відповідь: 1;2.

1.41 $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$. Відповідь: -7; 2.

1.42 $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$. Відповідь. -1; 0.

1.43 $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}$. Відповідь. -2; 1.

1.44 $x^{10}-x^5-2\sqrt{x^5}+2=0$. Відповідь. 1.

<u>*Третій рівень*</u>

1.45 $\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{5+x}=2$. Відповідь. 3.

1.46 $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$. Відповідь. 1; 2; 10.

1.47 $x\sqrt[3]{35-x^3}\,(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30$. Відповідь. 2; 3.

1.48 $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$. Відповідь. 1; 4.

1.49 $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{6-x}=\sqrt{2}$. Відповідь. 2; 6.

1.50 $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5$. Відповідь. -61; 4.

1.51 $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{2}$. Відповідь. 0; 2.

1.52 $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$. Відповідь. $1\frac{2}{7}$.

1.53 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$. Відповідь. 5.

1.54 $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$. Відповідь. 2.

4. Розв'язування ірраціональних рівнянь за допомогою множення рівняння на вираз із змінною

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$.

Розв'язання. Помножимо задане рівняння на вираз $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$, спряжений до виразу $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}$. Одержимо

$$\left(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)=$$
$$=3x\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right).$$

Оскільки $\left(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)=6x$, то $6x=3x\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)$. Останнє рівняння є наслідком заданого рівняння. Одним із його коренів є $x=0$. Для знаходження інших його коренів потрібно розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$. Це рівняння теж є наслідком вихідного рівняння. Почленно додамо його до вихідного рівняння. Одержимо $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$. Розв'язуючи це рівняння, знайдемо $x=4$.

Перевіркою встановлюємо, що $x=0$ не є коренем заданого рівняння, а $x=4$ - корінь.

Відповідь. 4.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$\sqrt[3]{4-4x+x^2}+\sqrt[3]{49+14x+x^2}=3+\sqrt[3]{14-5x-x^2}$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $\sqrt[3]{(2-x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(x+7)}+\sqrt[3]{(x+7)^2}=3$. Як бачимо, ліва частина рівняння є неповним квадратом різниці. Помножимо обидві частини рівняння на вираз $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+7}$. Одержимо $2-x+x+7=3\left(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+7}\right)$, або $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+7}=3$. Розв'язуючи останнє рівняння піднесенням до куба (див. приклад 4), одержимо $2-x+x+7+3\sqrt[3]{2-x}\cdot\sqrt[3]{x+7}\left(\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+7}\right)=3^3$. І далі, врахувавши, що $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{x+7}=3$, матимемо $3\sqrt[3]{2-x}\cdot\sqrt[3]{x+7}\cdot 3=27-9$, або $\sqrt[3]{2-x}\cdot\sqrt[3]{x+7}=2$; $14-5x-x^2=8$; $x^2+5x-6=0$. Звідки знаходимо $x_1=-6,\ x_2=1$. Безпосередньою підстановкою знайдених значень у задане рівняння, переконуємося, що $x_1=-6,\ x_2=1$ - його корені.

Відповідь. -6, 1.

Це важливо!

Рівняння виду $\sqrt{ax^2+bx+c_1}\pm\sqrt{ax^2+bx+c_2}=A$ та $\sqrt{ax^2+b_1x+c}\pm\sqrt{ax^2+b_2x+c}=Ax$ можна розв'язати, помноживши обидві його частини на вираз, спряжений із лівою частиною рівняння (приклад 1). Множення на спряжений вираз обох частин рівняння є ефективним і у випадку рівняння виду $\sqrt[3]{f^2(x)} \pm \sqrt[3]{f(x)\cdot g(x)} + \sqrt[3]{g^2(x)} = A_1$, якщо $f(x) \mp g(x) = A_2$ (приклад 2).

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

<u>Перший рівень</u>

1.55 $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+8}=5$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.

1.56 $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-3}=7$. Відповідь. $\pm 2\sqrt{3}$.

<u>Другий рівень</u>

1.57 $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$. Відповідь. $-\frac{1}{3}$; 1.

1.58 $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$. Відповідь. $-\frac{8}{3}$; 1.

<u>Третій рівень</u>

1.59 $\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{2x^2-4x+3}=x$. Відповідь. $\frac{2\pm 2\sqrt{43}}{7}$; 0.

1.60 $\sqrt{4x^2+x+2}-\sqrt{x^2+x+2}=-x$. Відповідь. -2; 0.

1.61 $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$. Відповідь. 1.

1.62 $\sqrt[3]{(8+x)^2}-\sqrt[3]{64-x^2}+\sqrt[3]{(8-x)^2}=4$. Відповідь. 0.

5. *Графічний метод розв'язування ірраціональних рівнянь*

<u>Приклад 1</u>. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{9x}=x^2-2x$.

Розв'язання. Розв'язування даного рівняння традиційними методами приводить до рівняння шостого степеня, яке не так легко розв'язати. Розглянемо функції $f(x)=\sqrt[3]{9x}$, $g(x)=x^2-2x$ та побудуємо їх графіки в одній системі координат.

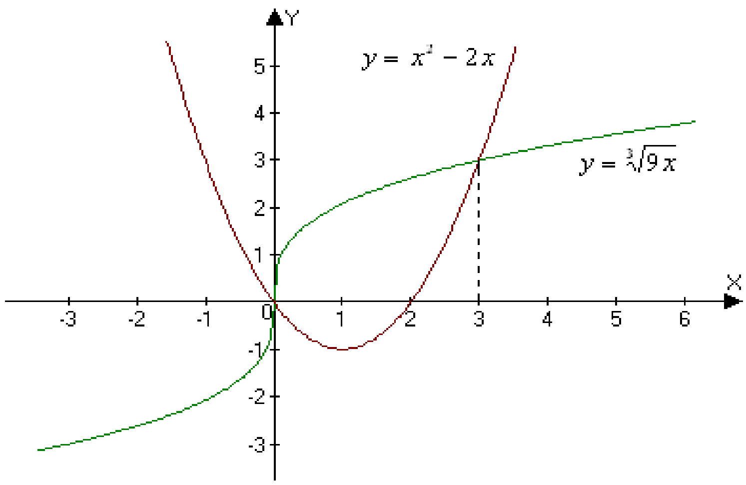

Рис. 1

Як видно з рис.1, $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$ - абсциси точок перетину цих графіків. Безпосередньою підстановкою у вихідне рівняння, переконуємося, що $x_1 = 0$ і $x_2 = 3$ - його корені.

Відповідь. 0, 3.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+1} + 2 = \sqrt{3-x}$.

Розв'язання. Розглянемо функції $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + 2$, $g(x) = \sqrt{3-x}$ та побудуємо їх графіки в одній системі координат.

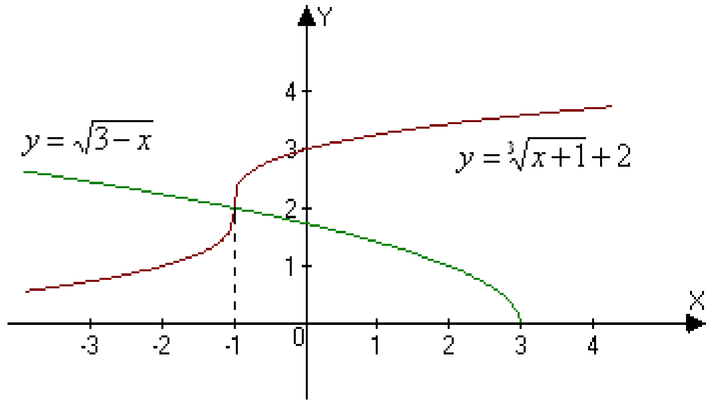

Рис. 2

Як бачимо з рисунка 2, ці графіки перетинаються у точці з абсцисою -1. При чому, перевірка показує, що $x = -1$ - корінь заданого рівняння.

Відповідь. -1.

<u>Це важливо!</u>

Розглянемо рівняння *f(x)=g(x),* де *f(x)* і *g(x)* — деякі функції. Якщо x_0 — корінь цього рівняння, то x_0 належить області визначення кожної з функцій *f(x)* і *g(x)* і виконується рівність $f(x_0)=g(x_0)$. Нехай $f(x_0)=g(x_0)=y_0$. Тоді точка $(x_0;y_0)$ належить графікам обох функцій. Навпаки, якщо графіки функцій *y=f(x)* і *y=g(x)* мають спільну точку $(x_0;y_0)$, то $y_0=f(x_0)=g(x_0)$ і число x_0 є коренем рівняння *f(x)=g(x).* Таким чином, **для знаходження коренів рівняння *f(x)=g(x)* досить знайти абсциси спільних точок графіків функцій *y=f(x)* і *y=g(x).***

Цей спосіб розв'язування рівнянь не завжди дає точні значення розв'язків, адже на практиці ми маємо справу не з графіками функцій, а з їх ескізами. Однак він допомагає у пошуку розв'язків, правильність яких обґрунтовують додатковими дослідженнями.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати графічно рівняння

1.63 $\sqrt{-x} = -x - 2$. Відповідь.-4.

1.64 $\sqrt{x-1} = x - 1$. Відповідь.1, 2.

1.65 $\sqrt{-x} = 2x^2 - 1$. Відповідь.-1.

1.66 $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{4}x$. Відповідь. ± 8, 0.

1.67 $\sqrt[3]{x-2} = \frac{1}{3}x$. Відповідь.-6, 3.

1.68 $\sqrt[3]{x-3} = x^2 + 4x + 7$. Відповідь. $\varnothing$.

1.69 $x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}$. Відповідь. 1.

6. Використання властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати рівняння $\sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} = 5$.

Розв'язання. Область допустимих значень даного рівняння задається такою системою нерівностей: $\begin{cases} x - 6 \ge 0, \\ 3 - x \ge 0. \end{cases}$ Ця система не має розв'язків, а отже не має коренів і дане рівняння.

Відповідь. $\varnothing$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

Розв'язання. Спробуємо в підкореневих виразах та правій частині рівняння виділити повні квадрати. Одержимо

$$\sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9} = 5 - (x+1)^2$$

Значення лівої частини рівняння не менше 2+3=5, а значення правої частини не перевищують 5. Рівність досягається лише при *x=-1*.

Відповідь. x=-1.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{x^2 + 10} = 4{,}8$.

Розв'язання. Зрозуміло, що найменших значень підкореневі вирази, а отже і ліва частина рівняння набувають, якщо *x=0*. Обчислимо це значення $\sqrt{5} + \sqrt{10} > 2 + 3 = 5 > 4{,}8$. Отже, дане рівняння коренів не має.

Відповідь. ∅.

<u>*Приклад 4.*</u> Розв'язати рівняння $\sqrt{x+8} + \sqrt{x-8} = 8$.

Розв'язання. Ліва частина рівняння – вираз, що задає монотонно зростаючу функцію (як сума зростаючих функцій), на області визначення рівняння $x \ge 8$. Тому кожного свого значення вона набуває лише один раз. Отже, дане рівняння може мати не більше одного кореня. Ним є *x=17*.

Відповідь. x=17.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{32-x}+2\sqrt{23-x}+3\sqrt{16-x}+4\sqrt{8-x}=4x-2.$$

Розв'язання. Усі доданки у лівій частині рівняння на проміжку $x \le 8$ визначені і монотонно спадні, а функція *y=4x-2* монотонно зростає на всій області визначення рівняння. Тому дане рівняння може мати не більше одного кореня, який знаходимо методом підбору. Ним є *x=7*.

Відповідь. x=7.

Це важливо!

Іноді знання властивостей функцій, що входять у рівняння, допомагають знаходити його розв'язки. Основні ідеї, які використовуються під час розв'язування рівнянь за допомогою властивостей функцій (***1)*** скінченність області допустимих значень рівняння, ***2)*** оцінка значень лівої та правої частини рівняння, ***3)*** монотонність функції) ґрунтуються на наступних твердженнях:

1) Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння складається із скінченного числа значень, то для розв'язування рівняння досить перевірити всі ці значення. Якщо ОДЗ рівняння – порожня множина, то рівняння коренів не має (приклад 1).

2) Якщо в процесі розв'язування рівняння $f(x)=g(x)$ з'ясувалося, що $f(x)\ge a$, $g(x)\le a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива лише у випадку, якщо $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a (приклад 2 та 3).

3) Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше одного кореня на цьому проміжку.

4) Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більше одного кореня на цьому проміжку.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

1.70 $\sqrt[3]{x-4}+1=\sqrt{9-x}.$ Відповідь. 5.

1.71 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=1.$ Відповідь. $\varnothing$.

1.72 $\sqrt[6]{x^2-1}+x^2=\sqrt[4]{2-2x^2}+x+2$. Відповідь. -1.

1.73 $2x+\sqrt{x^2-5x+6}=x^2+\sqrt[8]{10x-2x^2-12}-3$. Відповідь. 3.

1.74 $\sqrt[4]{81+x^2}=3-\sqrt{x^5+x^3}$. Відповідь. 0.

1.75 $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1-x-x^2$. Відповідь. $\varnothing$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

1.76 Розв’язати рівняння (1-12) та встановити відповідність між рівняннями та їхніми коренями.

1. $(x^2+5x)\sqrt{x-11}=0$.	**А)** $8-\dfrac{12\sqrt{21}}{7}$; 8; $8+\dfrac{12\sqrt{21}}{7}$.
2. $\sqrt{x^2+1}-3x=1$.	**Б)** 11.
3. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$.	**В)** 30.
4. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}$.	**Г)** 0.
5. $4x^2+\sqrt{4x^2-6x+5}=6x+7$.	**Д)** 6.
6. $\sqrt[4]{\dfrac{2-x}{3+x}}+\sqrt[4]{\dfrac{3+x}{2-x}}=2$.	**Е)** -0,5; 2.
7. $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x^2-3x+2}$.	**Є)** $\dfrac{15+3\sqrt{5}}{10}$.
8. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.	**Ж)** $x\in[5;8]$.
9. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$.	**З)** 1; 2.
10. $\sqrt{2x+7}-\sqrt[3]{x+7}=1$.	**І)** 1.
11. $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.	**Ї)** 3.
12. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.	**Й)** -0,5.

Розв’язати рівняння

1.77 $\sqrt{4x^2+5x-2}=2$.

1.78 $x+5\sqrt{x}-6=0$.

1.79 $(x^2-2x-1)\sqrt{x^2-5x+6}=0$.

1.80 $\sqrt{x^4+12x^2+36}-7x=0$.

1.81 $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$.

1.82 $\sqrt[4]{x^3+8}+\sqrt{x^3+8}=6$.

1.83 $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=2$.

1.84 $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$.

1.85 $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

1.86 $\sqrt{x^2-3x}\sqrt{2x-4}=x+1$.

1.87 $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1$.

1.88 $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

1.89 $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

1.90 $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x^2-3x+2}$.

1.91 $\dfrac{\sqrt{x^2+4x-12}}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+5}=\dfrac{7}{\sqrt{x-1}}$.

1.92 $x^2+2x-31+3(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{x+3}{x-1}}=0$.

1.93 $\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x-2}=3$.

1.94 $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+18}=5$.

1.95 $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

1.96 $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{2}$.

1.97 $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$.

1.98 $\sqrt[3]{4-4x+x^2}+\sqrt[3]{49+14x+x^2}=3+\sqrt[3]{14-5x-x^2}$.

1.99 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

1.100 $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

1.101 $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.

1.102 $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$.

Вихідний тест ***для самоперевірки знань та умінь з теми: „Розв'язування ірраціональних рівнянь"***

Перший рівень

Розв'язати рівняння та вказати варіант відповіді.

1. $x-4=\sqrt{x+8}$.

А) 1; **Б)** 8; **В)** 5; **Г)** -4; **Д)** інша відповідь.

2. $\sqrt{2x-5}=\sqrt{4x+7}$.

А) -6; **Б)** 3; **В)** коренів немає; **Г)** 7; **Д)** інша відповідь.

3. $\sqrt[3]{x-44}=9$.

А) 773; **Б)** 81; **В)** 53; **Г)** коренів немає; **Д)** інша відповідь.

4. $x-\sqrt{3x+1}=3$.

А) 9; **Б)** 8; **В)** 1; **Г)** -2, 5; **Д)** інша відповідь.

5. $\sqrt[4]{3x+1}=2$.

А) 1; **Б)** 5; **В)** інша відповідь.

6. $\sqrt[5]{3x+17}-2=0$.

А) 5; **Б)** -5; **В)** 53; **Г)** інша відповідь.

7. $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

А) 7; **Б)** -5; **В)** -5; 7; **Г)** інша відповідь.

8. $x+2\sqrt{x}-3=0$.

А) 1; 9; **Б)** 1;-3; **В)** 1; **Г)** інша відповідь.

9. $(x+2)\sqrt{23x-14-3x^2}=0$.

А) -2; **Б)** $\frac{2}{3}$; **В)** 7; **Г)** $\frac{2}{3};7$; **Д)** інша відповідь.

10. $\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x+4}$.

А) -1,5; **Б)** 0; **В)** -1,5; 0; **Г)** інша відповідь.

Другий рівень

Розв'язати рівняння

1. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7$.
2. $4x^2+\sqrt{4x^2-6x+5}=6x+7$.
3. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}$.
4. $\sqrt{x^2-3x}\cdot\sqrt{2x-4}=x+1$.
5. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$.

Третій рівень

Розв'язати рівняння

1. $x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x}=3$.
2. $1+\sqrt{1+8x^2-6x\sqrt{1-x^2}}=10x^2$.
3. $\sqrt[3]{4x^2+10x+4}+\sqrt[3]{2x^2-5x-3}=\sqrt[3]{2x+1}$.
4. $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$.
5. $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

Важливі нотатки!

Тема 2. СИСТЕМИ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вхідний тест для самоперевірки залишкових знань з теми

Розв'язати системи рівнянь та вказати варіант відповіді

1. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2 - 16} = 0. \end{cases}$

А) $(-4;1)$, $(4;1)$; **Б)** $(4;1)$; **В)** $(-4;1)$; **Г)** $(0;9)$; **Д)** інша відповідь.

2. $\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5. \end{cases}$

А) $(3;1)$; **Б)** $(9;1)$; **В)** $(-9;-1)$; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь.

3. $\begin{cases} 2\sqrt{-x} + \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{-x} - \sqrt{y} = 2. \end{cases}$

А) $(-4;0)$, $(4;0)$; **Б)** $(4;0)$; **В)** $(-4;0)$; **Г)** $(0;16)$; **Д)** $\varnothing$.

4. $\begin{cases} \sqrt[3]{x + 3y - 3} = 2, \\ \sqrt[10]{x + 2y} = 1. \end{cases}$

А) $(19;-10)$; **Б)** $(-19;10)$; **В)** $(5;-2)$; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь.

5. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} 2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \\ -6\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{y} = -3. \end{cases}$$

А) $\varnothing$; **Б)** один; **В)** два; **Г)** три; **Д)** більше трьох.

Основні теоретичні відомості

Дві системи рівнянь називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають однакові розв'язки (тобто кожен розв'язок першої системи є розв'язком другої і, навпаки, кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої).

Якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне йому рівняння, то одержимо систему, рівносильну даній.

Усі рівносильні перетворення систем виконуються на ОДЗ початкової системи, тобто на спільній області допустимих значень усіх рівнянь, які входять до цієї системи.

В процесі розв'язування систем ірраціональних рівнянь використовуються ті ж самі прийоми та методи, що й при розв'язуванні систем раціональних рівнянь, зокрема метод підстановки, алгебраїчного додавання, заміни змінних.

1. *Розв'язування систем ірраціональних рівнянь за допомогою піднесення до степеня обох частин рівняння*

<u>*Приклад 1*</u>**.** Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2.\end{cases}$$

Розв'язання. Обидві частини першого рівняння є невід'ємними. Внаслідок піднесення обох частини цього рівняння до квадрата одержимо рівносильне рівняння $x+y-1=1$, або $x=2-y$. Підставимо отриманий вираз у друге рівняння системи, одержимо $\sqrt{4-2y}=2y-2$, далі одержимо наступну систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases}x=2-y,\\ 2y-2\ge 0,\\ 4-2y=(2y-2)^2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-y,\\ y\ge 1,\\ 2y^2-3y=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-y,\\ y\ge 1,\\ y=0,\ \ y=1{,}5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0{,}5,\\ y=1{,}5.\end{cases}.$$

Відповідь. $(0{,}5;1{,}5)$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7,\\ 3x+2y=23.\end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases}x+y\ge 0,\\ 2x+y+2\ge 0.\end{cases}$

Піднесемо обидві частини першого рівняння до квадрату. Оскільки обидві частини цього рівняння є невід'ємними, то піднесення до квадрату обох його частин є рівносильним перетворенням на ОДЗ системи, тобто

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+2\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{2x+y+2}+2x+y+2=49,\\ x+y\ge 0,\\ 2x+y+2\ge 0.\end{cases}, \text{ або}$$

$$\begin{cases}3x+2y+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=47,\\ x+y\ge 0,\\ 2x+y+2\ge 0.\end{cases}$$

В одержане рівняння підставимо $3x+2y=23$ з другого рівняння системи, матимемо $23+2\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=47$ і далі $\sqrt{(x+y)(2x+y+2)}=12$. Останнє рівняння піднесемо почленно до квадрату та одержимо $(x+y)(2x+y+2)=144$. Після цього система рівнянь набуде вигляду

$$\begin{cases} (x+y)(2x+y+2)=144, \\ 3x+2y=23, \\ x+y\geq 0, \\ 2x+y+2\geq 0. \end{cases}$$

З другого рівняння системи виразимо $y=\dfrac{23-3x}{2}$ та підставимо в перше. Матимемо $\left(x+\dfrac{23-3x}{2}\right)\left(2x+\dfrac{23-3x}{2}+2\right)=144$, або спростивши $x^2+4x-45=0$. Звідки знаходимо $x_1=-9,\ x_2=5$. Тоді $y_1=25,\ y_2=4$. Перевіркою встановлюємо, що ці набори чисел належать області визначення вихідної системи рівнянь.

Відповідь. (-9; 25), (5; 4).

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$$

Розв'язання. Скориставшись формулою $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, піднесемо перше рівняння системи почленно до кубу, одержимо

$x+2y+x-y+2+3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}\left(\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}\right)=27$, або

$2x+y+3\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}\left(\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}\right)=25$. Підставивши в останнє рівняння $2x+y=7$ з другого рівняння системи та $\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3$ з першого, матимемо $7+9\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}=25$. Звідки $\sqrt[3]{(x+2y)(x-y+2)}=2$, а $(x+2y)(x-y+2)=8$. Повернувшись до системи рівнянь, одержимо

$$\begin{cases} (x+2y)(x-y+2)=8, \\ 2x+y=7. \end{cases}$$

Остання система легко розв'язується методом підстановки. Її розв'язками є пари чисел: (2; 3), $\left(\dfrac{13}{3},\ -\dfrac{5}{3}\right)$. Перевіркою встановлюємо, що ці набори чисел є розв'язками вихідної системи рівнянь.

Відповідь. (2; 3), $\left(\dfrac{13}{3},\ -\dfrac{5}{3}\right)$.

<u>**Це важливо!**</u>

При розв'язуванні систем ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин рівняння до степеня слід пам'ятати про рівносильність перетворень (приклади 1 та 2). Якщо систему розв'язувати за допомогою систем-наслідків, то можемо отримати сторонні розв'язки, і тоді одержані розв'язки доведеться перевіряти (приклад 3).

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати системи рівнянь

Перший рівень

2.1 $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=1.\end{cases}$ Відповідь. $\left(-\frac{5}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$.

2.2 $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-3}{y+2}}=1,\\ xy=6.\end{cases}$ Відповідь. $(6;\ 1)$, $(-1;\ -6)$.

2.3 $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y-2}{x+3}}=1,\\ xy=36.\end{cases}$ Відповідь. $(4;\ 9)$, $(-9;\ -4)$.

Другий рівень

2.4 $\begin{cases}\sqrt{x+3y+5}=2,\\ \sqrt{2x-y+3}=7y+1.\end{cases}$ Відповідь. $(-1;0)$.

2.5 $\begin{cases}\sqrt{x-y+2}=3,\\ \sqrt{x+y-4}=13-2x.\end{cases}$ Відповідь. $(6;-1)$.

2.6 $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^3}{y}}-\sqrt{\dfrac{y^3}{x}}=\dfrac{65}{6},\\ x-y=5.\end{cases}$ Відповідь. $(9;4)$.

2.7 $\begin{cases}\sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 3x+2y=4.\end{cases}$ Відповідь. $\left(1+\sqrt{5};\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.

Третій рівень

2.8 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{2x+y}}{y}+\dfrac{\sqrt[3]{2x+y}}{2x}=\dfrac{81}{182},\\ \dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{y}-\dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x}=\dfrac{1}{182}.\end{cases}$ Відповідь. $(7;13),(-7;-13),\left(\frac{13}{2};14\right),\left(-\frac{13}{2};-14\right)$.

2.9 $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1.\end{cases}$ Відповідь. $(0;0)$.

2.10 $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}.\end{cases}$ Відповідь. $(5;4)$.

2.11 $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2,\\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1.\end{cases}$ Відповідь. $\left(\dfrac{17}{12};\dfrac{5}{3}\right)$.

2. *Розв'язування систем ірраціональних рівнянь за допомогою заміни змінних*

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}9x^2+\sqrt{9x^2+2y+1}=1-2y,\\ 6x+2y=-3.\end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему в наступному вигляді:

$$\begin{cases}9x^2+2y+\sqrt{9x^2+2y+1}-1=0,\\ 6x+2y=-3.\end{cases}$$

Введемо заміну $\sqrt{9x^2+2y+1}=t,\ t\geq 0$. Тоді перше рівняння системи буде квадратним відносно нової змінної. Розв'яжемо його. $t^2-1+t-1=0$; $t^2+t-2=0$. Зайдемо $t_1=-2$, $t_2=1$. Перший корінь не задовольняє нерівність $t\geq 0$. Отже, розв'язування вихідної системи рівнянь звелося до розв'язування такої системи:

$$\begin{cases}\sqrt{9x^2+2y+1}=1,\\ 6x+2y=-3.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x^2+2y+1=1,\\ 2y=-3-6x.\end{cases}$$

Звідки $9x^2-3-6x=0$; $3x^2-2x-1=0$. $x_1=-\dfrac{1}{3}$, $x_2=1$. Далі знаходимо

$y_1=-\dfrac{1}{2}$, $y_2=-4\dfrac{1}{2}$.

Відповідь. $\left(-\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{1}{2}\right)\left(1;\ -4\dfrac{1}{2}\right)$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x+y-\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{xy}=12,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2.\end{cases}$$

Розв'язання. Область визначення даної системи $\begin{cases}x\geq 0,\\ y\geq 0\end{cases}$

Перше рівняння системи можна записати у такому вигляді:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-12=0$$

Позначимо $\sqrt{x}+\sqrt{y}=t$, очевидно, що $t\geq 0$. Одержимо квадратне рівняння $t^2-t-12=0$, коренями якого є числа $t_1=-3$, $t_2=4$. Перше значення не задовольняє умову $t\geq 0$. Отже,

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=3,\\ \sqrt{y}=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9,\\ y=1.\end{cases}$$

Відповідь. (9; 1).

Розв’яжемо систему рівнянь із другого прикладу методом заміни.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7,\\ 3x+2y=23.\end{cases}$$

Розв’язання. Задана система рівнянь розв’язана в попередньому пункті за допомогою піднесення обох частин першого рівняння системи до квадрату. Розв’яжемо її другим способом. Введемо заміну $\begin{cases}\sqrt{x+y}=a,\\ \sqrt{2x+y+2}=b.\end{cases}$ При чому $a\geq 0$, $b\geq 0$. Помічаємо, що $a^2+b^2=x+y+2x+y+2=3x+2y+2$. Отже, дана система в нових змінних набуде вигляду $\begin{cases}a+b=7,\\ a^2+b^2-2=23,\end{cases}$ або $\begin{cases}a+b=7,\\ a^2+b^2=25.\end{cases}$ Розв’яжемо цю систему $\begin{cases}a+b=7,\\ (a+b)^2-2ab=25;\end{cases}$ $\begin{cases}a+b=7,\\ 7^2-2ab=25;\end{cases}$ $\begin{cases}a+b=7,\\ ab=12.\end{cases}$ Знаходимо два розв’язки $\begin{cases}a=3,\\ b=4;\end{cases}$ та $\begin{cases}a=4,\\ b=3.\end{cases}$ Повернувшись до заміни, одержимо розв’язки даної системи (-9; 25), (5; 4).

Відповідь. (-9; 25), (5; 4).

Систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7;\end{cases}$ із третього прикладу попереднього пункту також можна було розв’язати за допомогою введення нових змінних, а саме $\sqrt[3]{x+2y}=a$, $\sqrt[3]{x-y+2}=b$. Тоді $a^3+b^3=x+2y+x-y+2=2x+y+2$ і задана система набуде вигляду $\begin{cases}a+b=3,\\ a^3+b^3-2=7.\end{cases}$

<u>*Приклад 4.*</u> Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{12}{x+y},\\ x^2+y^2=41.\end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо перше рівняння системи у вигляді $x^2-y^2+(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-12=0$. Для того, щоб внести множник $(x+y)$ під знак кореня, розглянемо два випадки.

1) Нехай $x + y > 0$, тоді $x^2 - y^2 + \sqrt{(x+y)^2 \cdot \dfrac{x-y}{x+y}} - 12 = 0$, або $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} - 12 = 0$. Покладемо $\sqrt{x^2 - y^2} = a$, де $a \ge 0$, одержимо $a^2 + a - 12 = 0$. Звідки $a_1 = -4,\ a_2 = 3$. Перший корінь – сторонній. Отже, $x^2 - y^2 = 9$ та система набуде вигляду

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases} \text{ Або } \begin{cases} x^2 = 25, \\ y^2 = 16. \end{cases}$$

Остання система має чотири розв'язки: $(5;\ 4)$, $(5;\ -4)$, $(-5;\ 4)$, $(-5;\ -4)$, але умову $x + y > 0$ задовольняє лише два - $(5;\ 4)$ та $(5;\ -4)$.

2) Нехай $x + y < 0$, тоді $x^2 - y^2 - \sqrt{(x+y)^2 \cdot \dfrac{x-y}{x+y}} - 12 = 0$, або $x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} - 12 = 0$. Знову введемо заміну $\sqrt{x^2 - y^2} = a$, $a \ge 0$, одержимо квадратне рівняння $a^2 - a - 12 = 0$. Його корені: $a_1 = -3,\ a_2 = 4$. Перший корінь не задовольняє умову $a \ge 0$, отже, $x^2 - y^2 = 16$. Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases} \text{ Звідки } \begin{cases} x^2 = 28{,}5, \\ y^2 = 12{,}5. \end{cases}$$

Розв'язки останньої системи такі: $\left(\sqrt{28{,}5};\ \sqrt{12{,}5}\right)$, $\left(\sqrt{28{,}5};\ -\sqrt{12{,}5}\right)$, $\left(-\sqrt{28{,}5};\ \sqrt{12{,}5}\right)$, $\left(-\sqrt{28{,}5};\ -\sqrt{12{,}5}\right)$. Але умову $x + y < 0$ задовольняють лише дві пари чисел: $\left(-\sqrt{28{,}5};\ \sqrt{12{,}5}\right)$ та $\left(-\sqrt{28{,}5};\ -\sqrt{12{,}5}\right)$.

Відповідь. $(5;\ 4)$, $(5;\ -4)$, $\left(-\sqrt{28{,}5};\ -\sqrt{12{,}5}\right)$, $\left(-\sqrt{28{,}5};\ \sqrt{12{,}5}\right)$.

<u>*Приклад 5.*</u> Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x + 3y} + \sqrt{5 - x - y} = 7, \\ 3\sqrt{5 - x - y} - \sqrt{2x + y - 3} = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{2x + 3y} = u$, $\sqrt{5 - x - y} = v$, $\sqrt{2x + y - 3} = w$. Тоді $u^2 = 2x + 3y$, $v^2 = 5 - x - y$, $w^2 = 2x + y - 3$. Можна перевірити, що $u^2 + 4v^2 + w^2 = 17$. Таким чином, для нових змінних отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2u + v = 7, \\ 3v - w = 1, \\ u^2 + 4v^2 + w^2 = 17. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь знаходимо $u = \dfrac{7 - v}{2}$, $w = 3v - 1$. Підставляючи ці значення в третє рівняння, одержимо квадратне відносно v рівняння $53v^2 - 38v - 15 = 0$. Звідки $v_1 = 1,\ v_2 = -\dfrac{15}{53}$. За умовою $v \ge 0$. Отже,

$v=1,\ u=3,\ w=2$. Повернувшись до заміни, одержимо систему рівнянь $\begin{cases} 2x+3y=9, \\ 5-x-y=1, \end{cases}$ з якої знаходимо x та y.

Відповідь. (3; 1).

Це важливо!

Під час розв'язування систем ірраціональних рівнянь методом заміни змінних слід враховувати, що заміна змінних (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням (звичайно, якщо при вибраній заміні не відбувається звуження ОДЗ заданого рівняння чи системи). Але якщо для подальшого розв'язування рівнянь, одержаних внаслідок заміни, користуватися рівняннями-наслідками, то можемо отримати сторонні розв'язки, і тоді одержані розв'язки необхідно перевіряти.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь

Перший рівень

2.12 $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=10, \\ \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{y+1}=16. \end{cases}$ Відповідь. $(65;\ 3)$, $(5;\ 63)$.

2.13 $\begin{cases} x-y=16, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2. \end{cases}$ Відповідь. $(25;\ 9)$.

2.14 $\begin{cases} \sqrt[3]{y}-\sqrt{x}=7, \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}=18. \end{cases}$ Відповідь. $(4;\ 729)$.

2.15 $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}=3, \\ \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{y}=10. \end{cases}$ Відповідь. $(125;\ 16)$.

2.16 $\begin{cases} 5\sqrt[3]{x-2y}+3\sqrt[3]{x+y}=13, \\ 3\sqrt[3]{x-2y}-4\sqrt[3]{x+y}=2. \end{cases}$ Відповідь. $\left(\frac{10}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

2.17 $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8. \end{cases}$ Відповідь. $(12;4), (34;-30)$.

Другий рівень

2.18 $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3. \end{cases}$ Відповідь. $(3;1)$.

2.19 $\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\frac{2}{3}x+5, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$ Відповідь. $(3;2)$, $\left(\frac{17}{27};-\frac{14}{9}\right)$.

2.20 $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3}, \\ xy = 9. \end{cases}$ Відповідь. $(1;9),(9;1).$

2.21 $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3. \end{cases}$ Відповідь. $(8;\ 1),\ (1;\ 8).$

<u>*Третій рівень*</u>

2.22 $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1, \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5. \end{cases}$ Відповідь. $(1;7),(7;-8),\left(\dfrac{49}{64};\dfrac{41}{8}\right).$

2.23 $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84. \end{cases}$ Відповідь. $(2;8),(8;2).$

2.24 $\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$ В-дь. $(5;3),(5;-3),(-\sqrt{29{,}5};\sqrt{4{,}5}),(-\sqrt{29{,}5};-\sqrt{4{,}5}).$

2.25 $\begin{cases} \sqrt{2x+y-1} - \sqrt{x+y} = 1, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$ Відповідь. $(1+\sqrt{5};0{,}5-1{,}5\sqrt{5}).$

2.26 $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$ Відповідь. $(2;3),\left(4\dfrac{1}{3};-1\dfrac{2}{3}\right).$

2.27 $\begin{cases} \sqrt{y+7x} + \sqrt{y+2x} = 5, \\ \sqrt{y+2x} - y + x = 1. \end{cases}$ Відповідь. $(1;\ 2)$.

2.28 $\begin{cases} \sqrt{5y-x} + x = 3, \\ \sqrt{2y-x} + x + y = 3. \end{cases}$ Відповідь. $(1;1)$.

3. Використання властивостей функцій до розв'язування систем ірраціональних рівнянь

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - \sqrt[5]{y} = y^3 - \sqrt[5]{x}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо перше рівняння системи в наступному вигляді:

$$\begin{cases} x^3 + \sqrt[5]{x} = y^3 + \sqrt[5]{y}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$$

Функція $f(x)=x^3+\sqrt[5]{x}$ є монотонно зростаючою на ОДЗ системи нерівностей, тобто кожного свого значення вона набирає лише в одній точці. Отже, з умови $f(x)=f(y)$ (перше рівняння системи) випливає, що $x=y$. А тому задана система рівнянь є рівносильною наступній системі:

$$\begin{cases} x=y, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y, \\ \sqrt{x}=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16, \\ y=16. \end{cases}$$

Відповідь. $(16;16)$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь

2.29 $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}, \\ 2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=3. \end{cases}$ Відповідь. $(81;81)$.

2.30 $\begin{cases} x-\sqrt[3]{y}=y-\sqrt[3]{x}, \\ x^2+xy+y^2=12. \end{cases}$ Відповідь. $(-2;-2)$, $(2;2)$.

2.31 $\begin{cases} y^2+\sqrt[4]{y-2}=\sqrt[3]{x}, \\ 2x+\sqrt[4]{2-y}=128. \end{cases}$ Відповідь. $(64;2)$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

2.32 Розв'язати системи рівнянь (1-10) та встановити відповідність між системою рівнянь та її розв'язками

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=1, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4. \end{cases}$ **А)** $(1;11),(7;5)$.

2. $\begin{cases} 9y+x+6\sqrt{xy}=100, \\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=2. \end{cases}$ **Б)** $(4;16)$.

3. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y-3}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{y-3}}=2{,}5, \\ x+y=12. \end{cases}$ **В)** $(4;4)$.

4. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4. \end{cases}$ **Г)** $(4;1),(1;4)$.

5. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2 y + y^2 x = 20. \end{cases}$ **Д)** $(1;4)$.

6. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8. \end{cases}$ **Е)** (8; 1), (1;8).

7. $\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80, \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2 y} = 5. \end{cases}$ **Є)** $(1;1)$.

8. $\begin{cases} x + y - \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$ **Ж)** $(1;2)$.

9. $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5, \\ \sqrt{2x+y} - y + x = 1. \end{cases}$ **І)** $(25;9),(12{,}25;20{,}25)$.

10. $\begin{cases} \sqrt{2y-x} + x + y = 3, \\ \sqrt{5y-x} + x = 3. \end{cases}$ **Ї)** $(8;1),(-8;1),(-8;-1),(8;-1)$.

Розв'язати системи рівнянь

2.33 $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2, \\ x^2 - 4xy + 6x = 8. \end{cases}$

2.34 $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$

2.35 $\begin{cases} 5 - \sqrt{-6-y} = \sqrt{x+y}, \\ \sqrt{x+y} + 2 = \sqrt{-3+x}. \end{cases}$

2.36 $\begin{cases} \sqrt{xy} + \sqrt{yz} = 9, \\ \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 5, \\ \sqrt{xz} + \sqrt{xy} = 8. \end{cases}$

2.37 $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$

2.38 $\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y} + \sqrt{z+4} = 6, \\ 2\sqrt{x-4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z+4} = -12, \\ x + y + z = 14. \end{cases}$

<u>Вихідний тест</u> для самоперевірки знань та умінь з теми: „Розв'язування систем ірраціональних рівнянь"

<u>Перший рівень</u>

Розв'язати системи рівнянь

1. $\begin{cases} \sqrt{x+4y+2}=2, \\ \sqrt{2x-y+8}=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-3}{y+2}}=1, \\ xy=6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6, \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=10, \\ \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{y+1}=16. \end{cases}$

<u>Другий рівень</u>

Розв'язати системи рівнянь

1. $\begin{cases} \sqrt{x+3y+1}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\dfrac{2}{3}x+5, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$

<u>Третій рівень</u>

Розв'язати системи рівнянь

1. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1, \\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sqrt{4x+y-3z+7}=2, \\ \sqrt[3]{2y+5x+z+25{,}5}=3, \\ \sqrt{y+z}-\sqrt{6x}=0. \end{cases}$

Тема 3. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Вхідний тест для самоперевірки залишкових знань з теми

1. Встановити відповідність між рівняннями та їхніми коренями:

1) $2^{3x}=1$; **2)** $3\cdot 2^{x}=24$; **3)** $2^{x}=\frac{1}{8}$; **4)** $2^{x}=-\frac{1}{8}$; **5)** $2^{x}=\sqrt[3]{4}$.

А) 3; **Б)** -3; **В)** 0; **Г)** $\frac{2}{3}$**;** **Д)** $\varnothing$**.**

2. Розв'язати рівняння $2^{x+4}-5\cdot 2^{x}=88$.

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** інша відповідь.

3. Розв'язати рівняння $7^{x+1}\cdot 2^{x-1}=49$.

А) 2; **Б)** -2; **В)** $\varnothing$**;** **Г)** 1; **Д)** інша відповідь.

4. Розв'язати рівняння $36^{x}-4\cdot 6^{x}-12=0$.

А) 1; **Б)** 2; **В)** 2; 3; **Г)** -2; 6; **Д)** інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$**.**

А) $\varnothing$; **Б)** 3; **В)** $\frac{1}{3}$; **Г)** $-\frac{1}{3}$; **Д)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

Найпростішим показниковим рівнянням є рівняння виду $a^{x}=b$, де $a>0,\ a\neq 1$. Очевидно, що при $b<0$ це рівняння дійсних коренів не має, оскільки $a^{x}>0$ для всіх дійсних значень *x*.

При розв'язуванні показникових рівнянь використовують два основних методи: 1) перехід від рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ до рівняння $f(x)=g(x)$; 2) введення нових змінних. Інколи доводиться використовувати штучні прийоми.

Розглянемо рівняння виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, де $a>0,\ a\neq 1$, та рівняння, що зводяться до них. Розв'язування таких рівнянь ґрунтується на наступній теоремі:

Теорема. Якщо $a>0,\ a\neq 1$, то рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x)=g(x)$.

1. Розв'язування найпростіших показникових рівнянь

*Приклад 1***.** Розв'язати рівняння $5^{x^2-3x}=5^{4x-6}$.

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне рівнянню $x^2-3x=4x-6$. А тому корені останнього рівняння $x_1=1$ та $x_2=6$ є коренями вихідного рівняння.

Відповідь. 1, 6.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3x^2-15x+13}=125\sqrt[3]{625}$.

Розв'язання. Зведемо всі степені до основи 5: $5^{\frac{1}{3}\left(3x^2-15x+13\right)}=5^3\cdot 5^{\frac{4}{3}}$. Далі отримуємо рівняння $5^{\frac{1}{3}\left(3x^2-15x+13\right)}=5^{\frac{13}{3}}$, яке рівносильне рівнянню $\frac{1}{3}\left(3x^2-15x+13\right)=\frac{13}{3}$. Корені останнього рівняння $x_1=0$ та $x_2=5$ є коренями вихідного рівняння.

Відповідь. 0, 5.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3^{2x-1}=5^{3-x}$.

Розв'язання. Скориставшись основними властивостями степеня, зведемо степені до одного показника x: $\frac{9^x}{3}=\frac{125}{5^x}$; $9^x\cdot 5^x=3\cdot 125$; $45^x=375$. $x=\log_{45}375$.

Відповідь. $\log_{45}375$.

Це важливо!

Якщо в лівій і правій частинах показникового рівняння стоять тільки добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул спробувати записати обидві частини рівняння як степені з одною основою, звівши таким чином задане рівняння до рівняння виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

Перший рівень

3.1 $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$. Відповідь. -4.

3.2 $16^{-1}\cdot\sqrt{64^x}=2^x$. Відповідь. 2.

3.3 $3^{x+2}\cdot 2^{x-1}=27$. Відповідь. 1.

3.4 $4^x\cdot 5^{x-1}=0{,}2\cdot 20^{3-2x}$. Відповідь. 1.

3.5 $\left(1\frac{1}{2}\right)^{x+4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1-3x}$. Відповідь. 2,5.

3.6 $(0{,}2)^{2-x}=5^{1-\frac{2}{x}}$. Відповідь. 1; 2.

3.7 $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$. Відповідь. 3.

3.8 $2^{x^2}\cdot 5^{x^2}=0{,}001\cdot(10^{3-x})^2$. Відповідь. $-3;1$.

3.9 $3^x=2^{2x}$. Відповідь. 0.

Другий рівень

3.10 $3^{2x-3}=7^{x+1}$. Відповідь. $\log_{\frac{9}{7}}189$.

3.11 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{9}{16}$. Відповідь. $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

3.12 $(0{,}6)^{x}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^{3}$. Відповідь. $-\frac{5}{2}$; 3.

3.13 $\sqrt{2^{x}\sqrt[3]{4^{x}\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$. Відповідь. $-\frac{1}{5}$; 3.

2. Розв'язування показникових рівнянь за допомогою винесення за дужки спільного множника

Приклад 1. Розв'язати рівняння $3^{6x}-3^{6x+1}-3^{6x+2}+3^{6x+3}=432$.

Розв'язання. Позбавимося числових доданків у показниках степенів $3^{6x}-3^{6x}\cdot 3^{1}-3^{6x}\cdot 3^{2}+3^{6x}\cdot 3^{3}=432$. В лівій частині рівняння винесемо за дужки спільний множник 3^{6x}: $3^{6x}\cdot(1-3-9+27)=432$; $3^{6x}\cdot 16=432$; $3^{6x}=27$; $x=\frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$5^{2x-6}-5^{2x-7}-9\cdot 5^{2x-9}=45\frac{1}{2}+22\frac{3}{4}+11\frac{3}{8}+\ldots.$$

Розв'язання. Права частина рівняння є сумою членів нескінченної спадної геометричної прогресії. Знайдемо її знаменник та суму: $q=\frac{b_2}{b_1}=22\frac{3}{4}:45\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{45\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=91$. В лівій частині рівняння винесемо за дужки спільний множник з найменшим показником 5^{2x-9}: $5^{2x-9}\cdot\left(5^{3}-5^{2}-9\right)=91$; $5^{2x-9}\cdot 91=91$; $5^{2x-9}=1$; $x=4{,}5$.

Відповідь. 4,5.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $4^{2x}-3^{2x-\frac{1}{2}}=3^{2x+\frac{1}{2}}-2^{4x-1}$.

Розв'язання. В ліву частину рівняння перенесемо доданки, які можна записати у вигляді степенів з основою 2, а у праву – степені з основою 3. Одержимо: $2^{4x}+2^{4x-1}=3^{2x-\frac{1}{2}}+3^{2x+\frac{1}{2}}$. Винесемо за дужки спільні множники в обох частинах рівняння: $2^{4x-1}(2+1)=3^{2x-\frac{1}{2}}(3+1)$; $2^{4x-1}\cdot 3=3^{2x-\frac{1}{2}}\cdot 4$. Поділивши обидві частини рівняння на 12, матимемо $2^{4x-3}=3^{2x-\frac{3}{2}}$. Або $4^{2x-\frac{3}{2}}=3^{2x-\frac{3}{2}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-\frac{3}{2}}=1$. Звідки $2x-\frac{3}{2}=0$; $x=\frac{3}{4}$.

Відповідь. $\frac{3}{4}$.

Це важливо!

Рівняння виду $c_1a^{g(x)+m_1}+c_2a^{g(x)+m_2}+...+c_ka^{g(x)+m_k}=A$, де $c_1, ..., c_k$, $m_1, ..., m_k$, a, A є дійсні числа, $a>0$, $a\neq1$, а $g(x)$ - елементарна функція, розв'язуються винесенням за дужки спільного множника.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

Перший рівень

3.14 $5^x+5^{x+2}+5^{x+4}=651$. Відповідь. 0.

3.15 $10^x-5^{x-1}\cdot2^{x-2}=950$. Відповідь. 3.

Другий рівень

3.16 $2^{12x-1}-4^{6x-1}+8^{4x-1}-16^{3x-1}=1280$. Відповідь. 1.

3.17 $2^{3x}\cdot3^x-2^{3x-1}\cdot3^{x+1}=-288$. Відповідь. 2.

3.18 $3^{3x+1}-4\cdot27^{x-1}+9^{1,5x-1}-80=0$. Відповідь. 1.

Третій рівень

3.19 $3^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}-\sqrt{9^{x-2}}-\frac{1}{\sqrt{9^{3-x}}}=258$. Відповідь. 4.

3.20 $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=4^x+4^{x+1}+4^{x+2}$. Відповідь. $\log_{\frac{3}{4}}\frac{21}{13}$.

3.21 $5^{2x}-7^x-7\cdot5^{2x+1}+5\cdot7^{x+1}=0$. Відповідь. 0.

3.22 $4^x-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$. Відповідь. 1,5.

3.23 $35\cdot3^{x^2}-7\cdot5^{2x+1}-3^{x^2}+5^{2x}=0$. Відповідь. 0; $2\log_3 5$.

3. Розв'язування показникових рівнянь за допомогою введення нових змінних

Приклад 1. Розв'язати рівняння $4^{x+1}+7\cdot2^x-2=0$.

Розв'язання. Позбудемося числових доданків у показниках степенів $4\cdot4^x+7\cdot2^x-2=0$ та у степенях із змінною в показнику степеня перейдемо до однієї основи $4\cdot2^{2x}+7\cdot2^x-2=0$. Введемо заміну $2^x=y$, $y>0$, тоді $2^{2x}=y^2$. Одержимо рівняння $4y^2+7y-2=0$, корені якого $y_1=-2$, $y_2=\frac{1}{4}$. Оскільки

$y>0$ при будь-якому дійсному значенні x, то $y_1=-2$ - сторонній корінь. Отже, $2^x=\frac{1}{4}$. Звідки $x=-2$.

Відповідь. -2.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв’язати рівняння $2^{2x+2\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1}=6$.

Розв’язання. Перепишемо задане рівняння у наступному вигляді: $2^{2\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)}-\frac{5}{2}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}-6=0$ та введемо заміну $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=y$, $y>0$. Одержимо рівняння $y^2-\frac{5}{2}y-6=0$. Звідки $y_1=4,\ y_2=-\frac{3}{2}$. Оскільки $y>0$ при будь-якому дійсному значенні x, то $y_2=-\frac{3}{2}$ - сторонній корінь. Отже, $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4$. Звідки $x+\sqrt{x^2-2}=2$. Одержали ірраціональне рівняння, яке рівносильне такій системі:

$$\begin{cases} x^2-2=(2-x)^2, \\ 2-x\geq 0. \end{cases}$$

Розв’язком системи, а отже і вихідного рівняння є $x=\frac{3}{2}$.

Відповідь. $\frac{3}{2}$.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв’язати рівняння $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=8$.

Розв’язання.

Оскільки $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x\cdot\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=\left(\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)}\right)^x=\left(\sqrt{16-15}\right)^x=1$, то вирази $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x$ і $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x$ є оберненими. Тому можна ввести заміну $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=y$, $y>0$, тоді $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=\frac{1}{y}$. Одержимо рівняння $y+\frac{1}{y}=8$, або $\frac{y^2-8y+1}{y}=0$. Коренями останнього рівняння є $y_{1,2}=4\pm\sqrt{15}$. Повернувшись до заміни, одержимо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=4+\sqrt{15}, \\ \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=4-\sqrt{15}. \end{array}\right.$$

Її розв’язками, а отже і розв’язками вихідного рівняння є числа 2 і -2.

Відповідь. -2, 2.

<u>**Це важливо!**</u>

Для розв’язування більш складних показникових рівнянь (порівняно з тими, які було розглянуто в пунктах 1 та 2) найчастіше використовують заміну змінних. Якщо до рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною). Зокрема рівняння виду $c_1 a^{2g(x)} + c_2 a^{g(x)} + c_3 = 0$ за допомогою заміни $y = a^{g(x)}$ зводиться до квадратного рівняння $c_1 y^2 + c_2 y + c_3 = 0$.

Щоб зорієнтуватись, чи можна ввести заміну змінних у даному показниковому рівнянні, часто буває корисно спочатку розв'язування позбутись числових доданків у показниках степенів (приклади 1 та 2), використовуючи формули $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ та $a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$. Потім спробувати всі степені (із змінною в показнику) звести до однієї основи та виконати заміну змінної.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

Перший рівень

3.24 $\dfrac{2^x + 10}{4} = \dfrac{9}{2^{x-2}}$. Відповідь. 3.

3.25 $2 \cdot 7^{3x} - 5 \cdot 49^{3x} + 3 = 0$. Відповідь. 0.

3.26 $\left(\sqrt[3]{5}\right)^x - \left(\sqrt[3]{5}\right)^{2x} + 20 = 0$. Відповідь. 3.

Другий рівень

3.27 $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$. Відповідь. 0.

3.28 $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$. Відповідь. $-1; 1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}$.

3.29 $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$. Відповідь. 3.

3.30 $8^x - 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^x + 2 = 0$. Відповідь. 0; 1.

3.31 $8^x - 2^{x+1} - 4 = 0$. Відповідь. 1.

Третій рівень

3.32 $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$. Відповідь. 2,5.

3.33 $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$. Відповідь. $-1; 1$.

3.34 $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$. Відповідь. $1; 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}$.

3.35 $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$. Відповідь. -2; 2.

3.36 $(2+\sqrt{5})^{\sin x} - (\sqrt{5}-2)^{\sin x} = 4$. Відповідь. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z$.

3.37 $(5+2\sqrt{6})^x + (\sqrt{2}+\sqrt{3})^x = 12$. Відповідь. $\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} 3$.

3.38 $27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8$. Відповідь. 0.

3.39 $3 \cdot 9^{-x} + 9^{x+\frac{1}{2}} + 26 = 16 \cdot \left(3^x + 3^{-x}\right)$. Відповідь. -1; 0; 1.

4. Розв'язування однорідних показникових рівнянь

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати рівняння $4^{x+1}-13\cdot 6^{x}+9^{x+1}=0$.

Розв'язання. Позбудемося числових доданків у показниках степенів. Одержимо рівняння $4\cdot 2^{2x}-13\cdot 2^{x}\cdot 3^{x}+9\cdot 3^{2x}=0$ та поділимо обидві його частини на вираз $3^{2x}\neq 0$. Одержимо рівняння $4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+9=0$, яке заміною $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=y$, де $y>0$ зводиться до квадратного рівняння $4y^{2}-13y+9=0$. Коренями останнього є $y_1=1,\ y_2=\frac{9}{4}$. Повернувшись до заміни матимемо два рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1$ та $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{9}{4}$. Розв'язком першого є $x=0$. Друге рівняння запишемо у вигляді $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$. Звідки $x=-2$.

Відповідь. -2, 0.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати рівняння $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0$.

Розв'язання. Оскільки x є показником кореня, то $x\in N,\ x>1$. Перепишемо задане рівняння наступним чином: $6\cdot 3^{\frac{2}{x}}-13\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot 3^{\frac{1}{x}}+6\cdot 2^{\frac{2}{x}}=0$. Поділимо обидві частини останнього рівняння на вираз $2^{\frac{2}{x}}\neq 0$: $6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}+6=0$. Поклавши $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=y$, одержимо квадратне рівняння $6y^{2}-13y+6=0$. Його корені - $y_1=\frac{2}{3},\ y_2=\frac{3}{2}$. Розв'язуючи рівняння $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$ та $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{3}{2}$, знайдемо $x_1=-1,\ x_2=1$. Жодне з цих чисел не належить області визначення вихідного рівняння. Отже, рівняння коренів не має.

Відповідь. $\varnothing$.

<u>Це важливо!</u>

Рівняння виду $c_1a^{2g(x)}+c_2a^{g(x)}b^{g(x)}+c_3b^{2g(x)}=0$ *називають однорідними відносно* $a^{g(x)}$ *та* $b^{g(x)}$. Після ділення обох частин даного рівняння на вираз $b^{2g(x)}\neq 0$ за допомогою заміни $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{g(x)}$ воно зводиться до квадратного рівняння $c_1y^{2}+c_2y+c_3=0$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

Перший рівень

3.40 $4^x+6^x=2\cdot 9^x$. Відповідь. 0.

3.41 $16^x+36^x=2\cdot 81^x$. Відповідь. 0.

3.42 $7\cdot 4^x-2\cdot 7^{2x}+5\cdot 14^x=0$. Відповідь. 1.

Другий рівень

3.43 $2\cdot 4^x+25^{x+1}=15\cdot 10^x$. Відповідь. $-1;\ \log_{0,4}5$.

3.44 $56\cdot 4^{x-1}-53\cdot 14^x+2\cdot 49^{x+0,5}=0$. Відповідь. $-1;1$.

Третій рівень

3.45 $100^{\frac{1}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$. Відповідь. $-0{,}5;0{,}5$.

3.46 $10\sqrt[x]{4}-29\sqrt[x]{10}+10\sqrt[x]{25}=0$. Відповідь. $\varnothing$.

3.47 $(3^x+2^x)(3^x+3\cdot 2^x)=8\cdot 6^x$. Відповідь. $0;\log_{1,5}3$.

5. Використання властивостей функцій до розв'язування показникових рівнянь

Приклад 1. Розв'язати рівняння $3\cdot 4^x+(3x-10)\cdot 2^x+3-x=0$.

Розв'язання. Дане рівняння не належить до жодного з розглянутих типів. За допомогою заміни $2^x=y$ воно зводиться до квадратного відносно y рівняння $3y^2+(3x-10)y+3-x=0$. Розв'яжемо його.

$$D=(3x-10)^2-4\cdot 3\cdot(3-x)=9x^2-60x+100-36+12x=9x^2-48x+64=(3x-8)^2$$

$$y_1=\frac{-3x+10+3x-8}{6}=\frac{1}{3},\ y_2=\frac{-3x+10-3x+8}{6}=3-x.$$

Повернувшись до заміни, одержимо два рівняння $2^x=\frac{1}{3}$ та $2^x=3-x$. Розв'язком першого рівняння є $x=-\log_2 3$. Друге рівняння можна розв'язати графічно. Але легко бачити, що його коренем є $x=1$. При чому цей корінь єдиний, оскільки вираз, що знаходиться в лівій частині останнього рівняння, задає функцію, яка зростає на множині всіх дійсних чисел, а вираз, який знаходиться в правій частині – спадну функцію.

Відповідь. $-\log_2 3$, 1.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $6^x+8^x=10^x$.

Розв'язання. Можна помітити, що $x=2$ - корінь даного рівняння. Але для того, щоб розв'язати це рівняння нам потрібно довести, що воно не має інших коренів. Для цього використаємо властивості функцій. Вирази, що знаходяться в лівій та правій частині вихідного рівняння, задають зростаючі на множині всіх дійсних чисел функції. Тому в загальному випадку дане рівняння може мати безліч розв'язків. Спробуємо перетворити це рівняння. Поділимо обидві частини рівняння на 10^x $(10^x \neq 0)$: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$. Одержали рівняння, рівносильне даному, ліва частина якого – вираз, що задає спадну функцію, а права – стале число. Таке рівняння може мати не більше одного кореня. Отже, $x = 2$ - єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 2.

<u>Приклад 3.</u> Розв'язати рівняння $x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64$.

Розв'язання. Очевидно, що дане рівняння не може мати від'ємних коренів, оскільки при $x<0$ $x \cdot 2^{x^2+2x+3} < 0$. При додатних значеннях x функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ неперервна та строго зростаюча, як добуток двох неперервних додатних зростаючих для додатних аргументів функцій $f(x) = x,\ g(x) = 2^{x^2+2x+3}$. Отже, при $x>0$ функція $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ набуває кожного свого значення лише в одній точці. Легко побачити, що $x=1$ є коренем заданого рівняння. Отже, $x=1$ - єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 1.

<u>Приклад 4.</u> Розв'язати рівняння $3^x + 3^{2-x} = 3(1+cos 2\pi x)$.

Розв'язання. З'ясуємо, яких числових значень набувають вирази, що стоять у лівій та правій частині рівняння. Оскільки $-1 \leq cos 2\pi x \leq 1$, то $0 \leq 3(1+cos\, 2\pi x) \leq 6$. Ліва частина рівняння – це сума двох додатних чисел. Скориставшись нерівністю Коші для двох чисел, знайдемо $3^x + 3^{2-x} \geq 2 \cdot \sqrt{3^x \cdot 3^{2-x}} = 2 \cdot \sqrt{3^2} = 6$. Помічаємо, що вираз, що стоїть у лівій частині рівняння обмежений знизу числом 6, а вираз, що стоїть у правій частині - обмежений зверху тим самим числом. Тому дане рівняння може мати розв'язки лише у випадку, якщо і ліва, і права частини рівняння одночасно дорівнюють 6:

$$\begin{cases} 3^x + 3^{2-x} = 6, \\ 3(1+\cos 2\pi x) = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ \cos 2\pi x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = n,\ n \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Отже, $x=1$ - корінь даного рівняння.

Відповідь. 1.

<u>Приклад 5.</u> Розв'язати рівняння $2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

Розв'язання. В правій частині рівняння ми маємо суму обернених додатних величин. Для таких чисел виконується нерівність $a + \frac{1}{a} \geq 2$. В той же час $2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} \leq 2$. Тобто умова рівності лівої і правої частини рівняння можлива лише у випадку, коли вони дорівнюють двом. Отже, дане рівняння зводиться до системи рівнянь $\begin{cases} 2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2, \\ 2^x + 2^{-x} = 2. \end{cases}$

З другого рівняння системи знаходимо *x=0*. Оскільки це значення задовольняє і перше рівняння, то *x=0* – розв'язок системи, а отже і корінь даного рівняння.

Відповідь. 0.

Це важливо!

Основні ідеї, які використовуються під час розв'язування рівнянь за допомогою властивостей функцій (оцінка значень лівої та правої частини рівняння, монотонність функції) ґрунтуються на наступних твердженнях:

1) Якщо в процесі розв'язування рівняння $f(x)=g(x)$ з'ясувалося, що $f(x)\geq a$, $g(x)\leq a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива лише у випадку, якщо $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a (приклад 4 та приклад 5).

2) Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше одного кореня на цьому проміжку (приклади 2 та 3).

3) Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більше одного кореня на цьому проміжку (приклад 1).

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

3.48 $9^x-(14-x)\cdot 3^x+33-3x=0$. Відповідь. 1; 2.

3.49 $3^x+4^x=5^x$. Відповідь. 2.

3.50 $\left(\sqrt{5}\right)^x+\left(\sqrt{4}\right)^x=3^x$. Відповідь: 2.

3.51 $2^x+3^x+4^x=99$. Відповідь: 3.

3.52 $\left(x^2+1\right)\left(2^x+2^{-x}\right)=2$. Відповідь: 0.

3.53 $-2^{x^2+4x+6}=x^2+4x$. Відповідь. -2.

3.54 $2^x+2^{-x}=2\cos\dfrac{x}{3}$. Відповідь. 0.

3.55 $2^{x^2-4x+5}=1+\sin^2\dfrac{\pi x}{4}$. Відповідь. 2.

Розв'язати рівняння графічно

3.56 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=-x$. Відповідь. $\varnothing$.

3.57 $3^x=\dfrac{1}{3}x^2$. Відповідь. -1.

3.58 $2^{x^2}=x^2+12$. Відповідь. ± 2.

3.59 $2^{-x} = \sqrt{x}$. Відповідь. $\frac{1}{2}$.

3.60 $2^{x} = 3x - 1$. Відповідь. 3.

3.61 $3^{x} + 2x = 5$. Відповідь. 1.

3.62 Доведіть, що рівняння $8^{x}(3x+1) = 4$ може мати не більше одного дійсного кореня і знайдіть цей корінь.

6. Розв'язування показниково-степеневих рівнянь

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати рівняння $(x+5)^{x^2-x-1} = x+5$.

Розв'язання. Розглянемо випадки:

1. $x+5=1$, $x_1=-4$.
2. $x+5=-1$, $x_2=-6$.
3. $x+5=0$, $x_3=-5$.
4. $x^2-x-1=1$, $x_4=-1$, $x_5=2$.

Перевіркою встановлюємо, що всі знайдені числа задовольняють рівняння.

Відповідь. -6; -5; -4; -1; 2.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати рівняння $(x-2)^{x-4} = 1$.

Розв'язання. Розглянемо випадки:

1. $x-2=1$, $x_1=3$.
2. $x-2=-1$, $x_2=1$.
3. $x-4=0$, $x_3=4$.

Перевіркою встановлюємо, що 3 і 4 є коренями рівняння, а 1 не задовольняє рівняння.

Відповідь. 3; 4.

<u>**Це важливо!**</u>

Якщо рівняння містять невідоме у показнику і в основі степеня, то вони називаються ***показниково-степеневими.*** Це рівняння виду $f(x)^{g_1(x)} = f(x)^{g_2(x)}$. Розв'язуючи дані рівняння, варто пам'ятати, що вираз $f(x)^{g(x)}$ має зміст у таких випадках:

1. $f(x) > 0$, $g(x)$ - будь-яке число;
2. $f(x) < 0$, $g(x)$ - ціле число;
3. $f(x) = 0$, $g(x)$ - ціле додатне число.

Згідно з цим, розв'язування рівнянь виду $f(x)^{g_1(x)} = f(x)^{g_2(x)}$ зводиться до розгляду таких випадків: 1) $f(x)=1$, 2) $f(x)=-1$, 3) $f(x)=0$, 4) $g_1(x)=g_2(x)$. При чому у випадках 2 – 4 перевірка знайдених коренів обов'язкова.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

3.63 $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1$. Відповідь. $-1; 1; 2$.

3.64 $(x+3)^{x^2+2x-8}=1$. Відповідь. $-4;-2;2$.

3.65 $(x-2)^{x^2-x}=(x-2)^{12}$. Відповідь. $-3;1;2;3;4$.

3.66 $(3x-4)^{2x^2+2}=(3x-4)^{5x}$. Відповідь. $\frac{4}{3};\frac{5}{3};2$.

3.67 $|x|^{x^2-2x}=1$. Відповідь. $-1;1;2$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

3.68 Розв'язати рівняння (1-12) та встановити відповідність між рівняннями та їхніми коренями

1.	$2^x-(0{,}5)^{2x}-(0{,}5)^x+1=0$.	**А)** $0;\ 2\log_3 5$.
2.	$2^{-2x}+2^{2x}+2^x-2^{-x}=4$.	**Б)** 0.
3.	$35\cdot 3^{x^2}-35\cdot 5^{2x}-3^{x^2}+5^{2x}=0$.	**В)** $\log_2(\sqrt{2}-1);\ \log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4.	$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$.	**Г)** 0.
5.	$\sqrt{1+3^x-9^x}=\sqrt{4-3\cdot 3^x}$.	**Д)** -2; 2.
6.	$125\sqrt[x]{4}-70\sqrt[x]{10}+5\sqrt[x]{25}=0$.	**Е)** $[0;\ 1]$.
7.	$2^x\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^x-81\cdot 2^x+162=0$.	**Є)** 1, 3.
8.	$16^{x^2-\frac{x}{2}}-15\cdot 4^{x^2}-4^{2+x}=0$.	**Ж)** $-\sqrt{2};\sqrt{2};5$.
9.	$4^x-(19-3x)\cdot 2^x+34-6x=0$.	**З)** -1; 2.
10.	$\left\|2^x-1\right\|+\left\|2^x-2\right\|=1$.	**І)** $\varnothing$.
11.	$3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+2}}=6$.	**Ї)** $-(2+\log_3 2)$.
12.	$(x^2-1)^{3x-7}=(x^2-1)^8$.	**К)** 1, 3.

Розв'язати рівняння

3.69 $4^x-3^{x-0{,}5}=3^{x+0{,}5}-2^{2x-1}$.

3.70 $5^{2x}-7^x-35\cdot 5^{2x}+35\cdot 7^x=0$.

3.71 $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=14$.

3.72 $(11+6\sqrt{2})^x-3(3+\sqrt{2})^x+7=0$.

3.73 $2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 9^{2x-1}=0$.

3.74 $x^2\cdot 2^x+8=2x^2+2^{x+2}$.

3.75 $5^{x-2}\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}}=4$.

3.76 $5^x\cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500$.

3.77 $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1$.

3.78 $\sqrt{4^x-2^x-3}=\sqrt{4\cdot 2^x-7}$.

3.79 $2\cdot 12^x-3^{x+1}+4^{x+1}-6=0$.

3.80 $100^{6\left(x^2+x\right)}-8\cdot 100^{3x^2}\cdot 10^{7x}=2\cdot 100^{x+0,5}$.

3.81 $4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}=0$.

3.82 $8\cdot 4^{-x+\frac{1}{x}}-1+2\cdot 4^{\frac{1}{x}+1}-4^x=0$.

3.83 $16^{3x^2+6x}-11\cdot 4^{3x^2+7x}=5\cdot 2^{4x+4}$.

3.84 $8+x\cdot 2^{-x}+2^{3+x}+x=0$.

3.85 $x^2\cdot 5^x+25\cdot 5^{\sqrt{5x-4}}=x^2\cdot 5^{\sqrt{5x-4}}+5^{x+2}$.

3.86 $x^2\cdot 3^{x+3}+3^{\sqrt{x+5}+2}=x^2\cdot 3^{\sqrt{5+x}}+3^{x+5}$.

3.87 $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}=2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6$.

3.88 $\sqrt{x}(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}})=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18$.

3.89 $12+x\cdot 2^x-6x=2\cdot 4^x-x\cdot 4^x+2\cdot 2^x$.

Вихідний тест *для самоперевірки знань та умінь з теми: „Розв'язування показникових рівнянь"*

Перший рівень

Розв'язати рівняння та вказати варіант відповіді

1. $\left(1\frac{2}{3}\right)^{x+4}=\left(\frac{3}{5}\right)^{1-3x}$.

А) 2; **Б)** 2,5; **В)** 3; **Г)** -0,75; **Д)** інша відповідь.

2. $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{x+3}=\left(\frac{9}{4}\right)^{3-x}$.

А) 1; **Б)** 5; **В)** $\varnothing$**;** **Г)** інша відповідь.

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$.

А) 3; **Б)** -3; **В)** 1; **Г)** $\varnothing$**;** **Д)** інша відповідь.

4. $2^{x+3}\cdot 3^x=288$.

А) $\frac{1}{4}$, 3; **Б)** 1,5; **В)** 2; **Г)** -1,5; **Д)** інша відповідь.

5. $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$**.**

А) $\varnothing$; **Б)** 3; **В)** $\frac{1}{3}$; **Г)** $-\frac{1}{3}$; **Д)** інша відповідь.

6. $2^{3x+1}-2^{3x+2}+2^{3x+3}=48$.

А) 2; **Б)** -2; **В)** 1; **Г)** інша відповідь.

7. $5^{2x+1}-26\cdot 5^x+5=0$.

А) 1; **Б)** -1; **В)** -1, 1; **Г)** інша відповідь.

8. $5\cdot 2^{x+5}\cdot 8^{x-4}=2,5$.

А) 2; **Б)** 1,5; **В)** 0; **Г)** інша відповідь.

9. $4^{x}+6^{x}=2\cdot 9^{x}$.

А) 2; **Б)** $\varnothing$; **В)** 0; **Г)** інша відповідь.

10. $4^{x}=5-x$.

А) $\varnothing$; **Б)** 1; **В)** 0; **Г)** інша відповідь.

Розв'язати рівняння

Другий рівень

1. $35\cdot 3^{x^{2}}-35\cdot 5^{2x}-3^{x^{2}}+5^{2x}=0$.
2. $56\cdot 4^{x-1}-53\cdot 14^{x}+2\cdot 49^{x+0,5}=0$.
3. $4^{\sqrt{x+1}}-2^{\sqrt{x+1}+2}=0$.
4. $\sqrt{4^{x}-2^{x}-3}=\sqrt{4\cdot 2^{x}-7}$.
5. $(x-2)^{x^{2}-x}=(x-2)^{12}$.

Третій рівень

1. $2^{x}\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x}-81\cdot 2^{x}+162=0$.
2. $4^{x}-(19-3x)\cdot 2^{x}+34-6x=0$.
3. $(11+6\sqrt{2})^{x}-3(3+\sqrt{2})^{x}+7=0$.
4. $5^{x-2}\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}}=4$. .
5. $12+x\cdot 2^{x}-6x=2\cdot 4^{x}-x\cdot 4^{x}+2\cdot 2^{x}$.

Важливі нотатки!

Тема 4. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Вхідний тест для самоперевірки залишкових знань з теми

1. Встановити відповідність між рівняннями та їхніми коренями:
1) $\log_x 27 = 3$; 2) $\log_2 x = -3$; 3) $\log_2\left(x^2 - x\right) = 1$; 4) $\log_2(-x) = 1$;
5) $\sqrt{x-2}\cdot\log_5(x+2) = 0$.

А) 3; **Б)** -2; **В)** $\frac{1}{8}$; **Г)** -1, 2; **Д)** 2.

2. Розв'язати рівняння $\lg\left(x^2 + 2x + 5\right) = \lg 5$.
А) 0, 2; **Б)** -2, 0; **В)** 1; **Г)** інша відповідь.

3. Розв'язати рівняння $\log_3 x + \log_3(x+8) = 2$.
А) -9, 1; **Б)** 1; **В)** інша відповідь

4. Розв'язати рівняння $\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0$.
А) -1, 2 **Б)** 1/5, 5; **В)** 1/5, 25; **Г)** інша відповідь.

5. Розв'язати рівняння $\log_{x+1} 2 = 1$.
А) 0; **Б)** -1; **В)** 1; **Г)** коренів немає; **Д)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

Рівняння, які містять логарифмічну функцію, розв'язуються на основі теорем про рівносильність рівнянь, властивостей логарифмів і логарифмічної функції.

З основних властивостей логарифмічної функції випливають наступні твердження:

1. *Рівняння* $\log_a f(x) = g(x)$, *де* $a > 0, a \neq 1,\ a = const$, *рівносильне рівнянню* $f(x) = a^{g(x)}$. *Зокрема рівняння* $\log_a f(x) = b$ *рівносильне рівнянню* $f(x) = a^b$. *Тобто,* $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$.

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$. Тобто кожен розв'язок першого рівняння є розв'язком другого рівняння. Обернене ж твердження, в загальному випадку, неправильне. Тому після переходу від рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ до рівняння $f(x) = g(x)$ в кінці необхідно перевірити корені останнього рівняння підстановкою в вихідне рівняння. Замість перевірки коренів можна замінити рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильною системою

$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$ (або системою $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$) Тобто

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases} \quad \text{або} \quad \log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases}$$

Якщо під час розв'язування логарифмічного рівняння вирази $\log_a f(x)\cdot g(x)$, $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$ та $\log_a \left(f(x)\right)^n$, де n - парне число, перетворюються відповідно до формул логарифма добутку, частки та степеня, то, через те що в багатьох випадках при цьому звужується область визначення рівняння, можлива втрата коренів. Щоб цього не відбулося, необхідно вказані формули використовувати в наступному узагальненому вигляді:

- ✓ $\log_a\left(f(x)g(x)\right)=\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)|$,
- ✓ $\log_a\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\log_a|f(x)|-\log_a|g(x)|$,
- ✓ $\log_a\left(f(x)\right)^n=n\log_a|f(x)|$, n - парне число.

І навпаки, якщо під час розв'язування логарифмічного рівняння вирази $\log_a f(x)+\log_a g(x)$, $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ та $n\log_a f(x)$, де n - парне число перетворюються відповідно в вирази $\log_a\left(f(x)g(x)\right)$, $\log_a\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$, $\log_a\left(f(x)\right)^n$, то область допустимих значень вихідного рівняння може розширитися, внаслідок чого можуть з'явитися сторонні корені. Тому в подібних випадках необхідно стежити за рівносильністю перетворень, і якщо ОДЗ рівняння розширюється, то необхідно робити перевірку коренів.

1. Розв'язування логарифмічних рівнянь за означенням логарифма

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\log_3\left(4\cdot 3^{x-1}-1\right)=2x-1$.

Розв'язання. Згідно означення логарифма дане рівняння рівносильне рівнянню $4\cdot 3^{x-1}-1=3^{2x-1}$. Перепишемо його у вигляді $\dfrac{1}{3}\cdot 3^{2x}-\dfrac{4}{3}\cdot 3^x-1=0$ та введемо заміну $y=3^x$. Одержимо квадратне рівняння $y^2-4y-3=0$, коренями якого є числа: $y_1=1,\ y_2=3$. Повертаючись до заміни, маємо $3^x=1,\ 3^x=3$. Звідки $x_1=0,\ x_2=1$.

Відповідь. 0, 1.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_4\left(2\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_3 x\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$.

Розв'язання. За означенням логарифма $2\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_3 x\right)\right)=2$; або $\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_3 x\right)\right)=1$. Скористаємося ще раз означенням логарифма $1+\log_2\left(1+3\log_3 x\right)=3$; $\log_2\left(1+3\log_3 x\right)=2$. Звідки, за означенням логарифма, $1+3\log_3 x=4$; $3\log_3 x=3$; $\log_3 x=1$ та $x=3$.

Відповідь. 3.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\lg(2x-1)+\lg(x-9)=2$.

Розв'язання. *1 спосіб.* Врахувавши ОДЗ рівняння та скориставшись властивостями логарифмів, одержимо таку мішану систему, рівносильну даному рівнянню:

$$\begin{cases} 2x-1>0, \\ x-9>0, \\ \lg(2x-1)(x-9)=2. \end{cases} \text{ Звідки } \begin{cases} x>9, \\ 2x^2-19x-91=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>9, \\ x_1=-\frac{7}{2},\ x_2=13. \end{cases} \Leftrightarrow x=13.$$

2 спосіб. Записавши суму логарифмів як логарифм добутку, одержимо рівняння $\lg(2x-1)(x-9)=2$. За означенням логарифма $(2x-1)(x-9)=10^2$, або $2x^2-19x-91=0$. Звідки знаходимо $x_1=-\frac{7}{2}$, $x_2=13$. Оскільки рівняння $\lg(2x-1)(x-9)=2$ є наслідком рівняння $\lg(2x-1)+\lg(x-9)=2$, то знайдені корені необхідно перевірити підстановкою в дане рівняння. Перевіркою встановлюємо, що $x_1=-\frac{7}{2}$ - не є коренем даного рівняння, а $x_2=13$ - корінь.

Відповідь. 13.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\left(x^2-7x+6\right)\left(\log_{\frac{x}{6}}\left(\frac{4}{9}x^2\right)+2\right)=0.$

Розв'язання. Загальновідомо, що добуток двох виразів дорівнює нулю, якщо принаймні один з множників дорівнює нулю. Тому, врахувавши область визначення даного рівняння, перейдемо до системи, яка рівносильна даному рівнянню:

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-7x+6=0, \\ \log_{\frac{x}{6}}\left(\frac{4}{9}x^2\right)+2=0. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-7x+6=0, \\ \log_{\frac{x}{6}}\left(\frac{4}{9}x^2\right)=-2. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x^2-7x+6=0, \\ \frac{4}{9}x^2=\left(\frac{x}{6}\right)^{-2}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 6, \\ \left[\begin{array}{l} x=1,\ x=6, \\ x=\pm 3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Як бачимо, розв'язками системи, а отже і вихідного рівняння є числа 1 та 3.

*Відповідь.*1; 3.

Це важливо!

Нагадаємо, що всі рівносильні перетворення рівнянь виконуються на ОДЗ рівняння. Для рівняння $\log_a f(x) = b$ ОДЗ задається умовою $f(x) > 0$. Але для всіх коренів рівняння $f(x) = a^b$ ця умова виконується автоматично (через те, що $a > 0$). Тому в явному вигляді для найпростіших логарифмічних рівнянь ОДЗ можна не записувати. Якщо ж у процесі розв'язування логарифмічних рівнянь за означенням логарифма попередньо доводиться перетворювати рівняння з використанням властивостей логарифмів (приклад 3), то **необхідно обов'язково враховувати ОДЗ вихідного рівняння, або робити перевірку знайдених коренів**.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

Перший рівень

4.1. $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{x^2-4x+3}{4} = -2$. Відповідь. $2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}$.

4.2. $\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5x} = 0$. Відповідь. 5.

4.3. $\sqrt{x+2} \cdot \log_4 x = 0$. Відповідь. 1.

4.4. $\sqrt{x} \cdot \log_7 (x+2) = 0$. Відповідь. 0.

Другий рівень

4.5. $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \dfrac{x^2-2x}{x-3} = 0$. Відповідь. 4; 6.

4.6. $\log_{x^2}(x+2) = 1$. Відповідь. 2.

4.7. $\log_{2x-1}(2x^2+4x+1) = 2$. Відповідь. 4.

4.8. $\log_4 \log_2 \log_3 (2x-1) = \dfrac{1}{2}$. Відповідь. 41.

Третій рівень

4.9. $\log_3(3^x-8) = 2-x$. Відповідь. 2.

4.10. $\log_2(9-2^x) = 25^{\log_5 \sqrt{3-x}}$. Відповідь. 0.

4.11. $\log_2(x+1)^2 + \log_2 \sqrt{x^2+2x+1} = 6$. Відповідь. -5; 3.

4.12. $\log_{1+x+\sin x}(x^2+x-1) = \log_{1+x+\sin x}(3x+2)$. Відповідь. 3.

2. Розв'язування логарифмічних рівнянь потенціюванням обох частин рівняння

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) = \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$.

Розв'язання. <u>*1 спосіб.*</u> Згідно твердження (2) дане рівняння рівносильне такій системі:

$$\begin{cases} 3x-1>0, \\ 3x-1=2x-3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3}, \\ x=-2. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

<u>*2 спосіб.*</u> Оскільки логарифмічна функція монотонна на всій області визначення, тобто кожного свого значення набуває при єдиному значенні аргументу, то прирівняємо підлогарифмічні вирази, тобто пропотенціюємо обидві частини рівняння. Одержимо рівняння $3x-1=2x-3$, або $x=-2$. Оскільки рівняння $3x-1=2x-3$ є наслідком даного рівняння, то необхідно перевірити, чи є $x=-2$ коренем вихідного рівняння. Перевіркою встановлюємо, що це сторонній корінь. Отже, рівняння коренів не має.

Відповідь. $\varnothing$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати рівняння $\log_3\left(4^x+15\cdot 2^x+27\right)=\log_3\left(4\cdot 2^x-3\right)^2$.

Розв'язання. Оскільки вирази $4^x+15\cdot 2^x+27$ та $\left(4\cdot 2^x-3\right)^2$ набувають лише додатних значень, то дане рівняння рівносильне такому: $4^x+15\cdot 2^x+27=(4\cdot 2^x-3)^2$, звідки $5\cdot 2^{2x}-13\cdot 2^x-6=0$. Нехай $2^x=y$, $y>0$ тоді $5y^2-13y-6=0$. Корені цього квадратного рівняння $y_1=-0{,}4$, $y_2=3$. Оскільки $y=2^x>0$, то y_1 - сторонній корінь. Отже, $2^x=3$, або $x=\log_2 3$.

Відповідь. $\log_2 3$.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати рівняння

$\lg(x-1)+\lg(x-3)+\lg(x+5)+\lg(x+7)=\lg 297$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння задається нерівністю $x>3$. На цій області вихідне рівняння рівносильне рівнянню: $\lg(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=\lg 297$, або $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$. Одержали рівняння четвертого степеня. Помічаємо, що -1+5=-3+7. Перемножимо попарно множники у лівій частині рівняння - перший з третім, а другий з четвертим: $\left(x^2+4x-5\right)\left(x^2+4x-21\right)=297$. Введемо заміну $x^2+4x-5=y$ та одержимо квадратне рівняння $y(y-16)=297$; $y^2-16y-297=0$. Його корені $y_1=-11$, $y_2=27$. Повернувшись до заміни одержимо сукупність двох квадратних рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+4x-5=-11, \\ x^2+4x-5=27. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x+6=0, \\ x^2+4x-32=0. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності дійсних коренів не має, а корені другого -8 та 4. При чому -8 не належить області визначення вихідного рівняння, тому є стороннім коренем. Отже, $x=4$.

Відповідь. 4.

<u>Це важливо!</u>

Під час розв'язування рівнянь необхідно стежити за рівносильністю перетворень на кожному кроці. Якщо ж рівняння розв'язується за допомогою рівнянь-наслідків, то в кінці необхідно робити перевірку (приклад 1, другий спосіб).

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

Перший рівень

4.13. $\log_2(5x+3)=\log_2(7x+5)$. Відповідь. $\varnothing$.

4.14. $\log_3(x^2-2)=\log_3(4x-5)$. Відповідь. 3.

4.15. $\log_4\dfrac{2}{x-1}=\log_4(4-x)$. Відповідь. 2; 3.

4.16. $\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=1$. Відповідь. 3.

Другий рівень

4.17. $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$. Відповідь. 1,5; 10.

4.18. $log_5(3x-11)+log_5(x-27)=3+log_5 8$. Відповідь. 37.

4.19. $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0{,}18$. Відповідь. 8.

4.20. $\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11$. Відповідь. $-11; 1; -5+\sqrt{14}; -5-\sqrt{14}$.

4.21. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$. Відповідь. $3; 3+\sqrt{2}$.

Третій рівень

4.22. $\log_{x-2}(2x-9)=\log_{x-2}(23-6x)$. Відповідь. $\varnothing$.

4.23. $\log_{5x-2}2+2\log_{5x-2}x=\log_{5x-2}(x+1)$. Відповідь. 1.

4.24. $\lg(3^x-2^{4-x})=2+0{,}25\lg 16-0{,}5x\lg 4$. Відповідь. 3.

4.25. $3\lg 2+\lg(2^{\sqrt{x-1}-1}-1)=\lg(0{,}4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}}+4)+1$. Відповідь. 17.

4.26. $\dfrac{5}{2}\log_2(x+3)^2-5=\log_2(3-x)^5+\log_2(x+5)^5$. В. $\dfrac{-5+\sqrt{241}}{4}$, $\dfrac{-3-\sqrt{273}}{4}$.

3. Розв'язування логарифмічних рівнянь за допомогою заміни змінної

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння – множина додатних дійсних чисел. Перетворимо дане рівняння, скориставшись формулами логарифмів добутку та частки: $(\lg 100+\lg x)^2+(\lg 10+\lg x)^2=14+\lg 1-\lg x$. Замінимо в останньому рівнянні lgx на y. Одержимо рівняння $(2+y)^2+(1+y)^2=14-y$, яке зводиться до квадратного рівняння $2y^2+7y-9=0$. Його коренями є числа: $y_1=-4{,}5$, $y_2=1$. Повертаючись до заміни, маємо $\lg x=-4{,}5$, $\lg x=1$. Звідки $x_1=10^{-4,5}$, $x_2=10$.

Відповідь. $10^{-4,5}$, 10.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{4x}2$.

Розв'язання. Врахувавши ОДЗ рівняння, яка задається такою системою нерівностей:

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x\neq 1/2, \\ x\neq 1/4. \end{cases}$$

та скориставшись формулою $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$, перейдемо в логарифмах до основи 2. Одержимо рівняння, рівносильне на ОДЗ даному $\dfrac{1}{\log_2 x}\cdot\dfrac{1}{\log_2 2x}=\dfrac{1}{\log_2 4x}$; $\dfrac{1}{\log_2 x}\cdot\dfrac{1}{\log_2 2+\log_2 x}=\dfrac{1}{\log_2 4+\log_2 x}$. Введемо заміну $\log_2 x=y$ та розв'яжемо одержане дробово-раціональне рівняння: $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{y+2}$; $\dfrac{y+2-y\cdot(y+1)}{y(y+1)(y+2)}=0$; $\dfrac{y^2-2}{y(y+1)(y+2)}=0$. Звідки $y=\pm\sqrt{2}$. Повертаючись до заміни, одержимо рівняння: $\log_2 x=-\sqrt{2}$, $\log_2 x=\sqrt{2}$, коренями яких є числа: $x_1=2^{-\sqrt{2}}$, $x_2=2^{\sqrt{2}}$.

Відповідь. $2^{-\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{2}}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{x}{9}} x^2+5\log_{9x}x^3-12\log_{3x}\sqrt{x}=0$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння – множина дійсних чисел, що задовольняють систему нерівностей: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 9, \\ x\neq 1/9, \\ x\neq 1/3. \end{cases}$

Перейдемо в логарифмах до основи 3, скориставшись формулою переходу до нової основи, та застосуємо формули для логарифма степеня, добутку та частки. Матимемо рівняння: $\dfrac{2\log_3 x}{\log_3 x-\log_3 9}+\dfrac{15\log_3 x}{\log_3 x+\log_3 9}-\dfrac{6\log_3 x}{\log_3 x+\log_3 3}=0$.

Введемо заміну $\log_3 x=y$ та розв'яжемо одержане рівняння: $\dfrac{2y}{y-2}+\dfrac{15y}{y+2}-\dfrac{6y}{y+1}=0$; $y\left(\dfrac{2}{y-2}+\dfrac{15}{y+2}-\dfrac{6}{y+1}\right)=0$; $\dfrac{y(11y^2-9y-2)}{(y-2)(y+2)(y+1)}=0$.

Його коренями є числа: $y_1=0,\ y_2=1,\ y_3=-\dfrac{2}{11}$. Повертаючись до заміни, одержимо $\log_3 x=0$, $\log_3 x=1$, $\log_3 x=-\dfrac{2}{11}$. Звідки $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=3^{-\frac{2}{11}}$.

Відповідь. $1;\ 3;\ 3^{-\frac{2}{11}}$.

<u>Це важливо!</u>

Оскільки дуже часто в логарифмічних рівняннях можна ввести заміну лише після перетворень рівняння, то необхідно насамперед знайти ОДЗ рівняння, на якій і виконувати перетворення, рівносильні на кожному кроці.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

<u>Перший рівень</u>

4.27. $\log_5^2 x + 2\log_5 x = -1$. Відповідь. $0{,}2$.

4.28. $\dfrac{1}{5-4\lg(x+1)} + \dfrac{5}{1+4\lg(x+1)} = 2$. Відповідь. $-1+\sqrt{10};\ 9$.

4.29. $\log_x 2 + \log_2 x = 2{,}5$. Відповідь. $\sqrt{2};\ 4$.

4.30. $4 - \lg x = 3\sqrt{\lg x}$. Відповідь. 10.

<u>Другий рівень</u>

4.31. $\log_x 9 \cdot \log_{9x} 9 = \log_{81x} 9$. Відповідь. $9^{-\sqrt{2}},\ \ 9^{\sqrt{2}}$.

4.32. $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8$. Відповідь. $2^{-7};\ 2$.

4.33. $\log_{\frac{1}{3}}^2 27x + \log_3 \dfrac{x^3}{9} + 1 = 0$. Відповідь. $3^{-1};3^{-8}$.

4.34. $0{,}1\lg^4 x - \lg^2 x + 0{,}9 = 0$. В-дь. $10^{-3};10^{-1};\ 10;\ 10^3$.

4.35. $\dfrac{1}{\lg x} + \dfrac{1}{\lg 10x} + \dfrac{3}{\lg 100x} = 0$. Відповідь. $10^{\frac{-4-\sqrt{6}}{5}},\ 10^{\frac{-4+\sqrt{6}}{5}}$.

<u>Третій рівень</u>

4.36. $2\log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3\log_{9x} 3 = 0$. Відповідь. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4.37. $\log_{x+1}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \log_{x-\frac{1}{2}}(x+1)$. Відповідь. 1.

4.38. $\log_{3x+7}(5x+3) + \log_{5x+3}(3x+7) = 2$. Відповідь. 2.

4.39. $(0{,}4)^{\lg^2 x+1} = (6{,}25)^{2-\lg x^3}$. Відповідь. $10;10^5$.

4.40. $(1{,}25)^{1-\log_2^2 x} = (0{,}64)^{2\log_2 2x}$. Відповідь. 0,5; 32.

4.41. $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8\sqrt{x^2} = 0$. Відповідь. -64; -1.

4. Розв'язування рівнянь, які містять невідоме в основі та в показнику степеня логарифмуванням обох частин рівняння

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати рівняння $x^{5-\log_2 x-\log_x 2}=8$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння – множина додатних дійсних чисел, відмінних від одиниці. В цій області вирази, які містяться в обох частинах рівняння, набувають лише додатних значень, а тому логарифми цих виразів існують. Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння за основою 2. Одержимо рівняння $\log_2 x^{5-\log_2 x-\log_x 2}=\log_2 8$, або $(5-\log_2 x-\log_x 2)\log_2 x=3$. Замінимо $\log_2 x$ на y. Оскільки $x>0, x\neq 1$, то $y\neq 0$ і $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}=\dfrac{1}{y}$. Одержимо рівняння $\left(5-y-\dfrac{1}{y}\right)y=3$, або $y^2-5y+4=0$. Звідки $y_1=1,\ y_2=4$. Повертаючись до заміни, знайдемо $x_1=2,\ x_2=16$. Обидва корені належать області визначення вихідного рівняння.

Відповідь. 2; 16.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати рівняння $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}=10$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння – множина додатних дійсних чисел. Перетворимо перший доданок в нашому рівнянні наступним чином: $5^{\log_5^2 x}=5^{\log_5 x\cdot\log_5 x}=\left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x}=x^{\log_5 x}$. Після цього рівняння набуде значно простішого вигляду: $x^{\log_5 x}+x^{\log_5 x}=10,\ x^{\log_5 x}=5$.Оскільки в області визначення рівняння вирази, які містяться в обох частинах рівняння, набувають лише додатних значень, то прологарифмуємо обидві частини рівняння $x^{\log_5 x}=5$ за основою 5. Одержимо рівняння $\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5 5$, $\log_5^2 x=1$. Звідки $\log_5 x=1$, або $\log_5 x=-1$. Тобто $x_1=5,\ x_2=0{,}2$.

Відповідь. 0,2; 5.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати рівняння $x^{\log_2\frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7}=1$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння – множина додатних дійсних чисел. На цій області обидві частини рівняння набувають додатних значень. Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 2. Одержимо $\log_2\left(x^{\log_2\frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7}\right)=\log_2 1$. Використавши властивості логарифмів, перетворимо рівняння: $\log_2\left(x^{\log_2\frac{x}{98}}\right)+\log_2 14^{\log_2 7}=0$; $(\log_2 x-\log_2 98)\log_2 x+\log_2 7\cdot\log_2 14=0$; $(\log_2 x-2\log_2 7-1)\log_2 x+\log_2 7\cdot(\log_2 7+1)=0$. Нехай $\log_2 x=y$, а $\log_2 7=m$. Одержимо рівняння $y^2-(2m+1)y+m^2+m=0$. Розв'яжемо його як квадратне відносно y: $D=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1$.

$$y_1 = \frac{2m+1-1}{2} = m,\ y_1 = \frac{2m+1+1}{2} = m+1.$$

Повернемося до заміни та знайдемо корені даного рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \log_2 7, \\ \log_2 x = \log_2 7 + 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = 14. \end{array}\right.$$

Відповідь. 7; 14.

<u>Це важливо!</u>

Оскільки логарифмічна функція визначена лише для додатних чисел, то перед логарифмуванням обох частин рівняння необхідно визначити знак обох частин рівняння на ОДЗ.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

<u>Перший рівень</u>

4.42. $x^{\lg x} = 10$. Відповідь. $10^{-1}; 10$.

4.43. $x^{\log_5 x} = 625$. Відповідь. $\frac{1}{25}; 25$.

4.44. $x^{\log_3 x} = 81$. Відповідь. $\frac{1}{9}; 9$.

<u>Другий рівень</u>

4.45. $x^{\log_3 x} = 9x^{-1}$. Відповідь. $\frac{1}{9}; 3$.

4.46. $x^{\lg x} = 1000x^2$. Відповідь. $10^{-1}; 10^3$.

4.47. $2x^{\lg x} + 3x^{-\lg x} = 5$. В-дь. $1; 10^{-\sqrt{\lg 1,5}}; 10^{\sqrt{\lg 1,5}}$.

4.48. $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$. Відповідь. 100.

4.49. $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$. Відповідь. $10^{-2}; 10^2$.

4.50. $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$. Відповідь. $10^{-4}; 10$.

4.51. $x^{1+\log_3 x} = 9x^2$. Відповідь. $3^{-1}; 3^2$.

4.52. $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$. Відповідь. $5^{-1}; 5^2$.

4.53. $16^{\log_x 2} = 8x$. Відповідь. $2^{-4}; 2$.

<u>Третій рівень</u>

4.54. $15^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 9x + 1} = 1$. Відповідь. $\frac{1}{3}; \frac{1}{15}$.

4.55. $x^{(\log_3 x)^3 - 3\log_3 x} = 3^{-3\log_{2\sqrt{2}} 4 + 8}$. Відповідь. $9^{-1}; 9$.

4.56. $x^{\log_2^2 x^2 - \log_2 2x - 2} + (x+2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3.$ Відповідь. $\frac{1}{\sqrt[4]{8}};1;2$.

5. Використання властивостей функцій до розв'язування логарифмічних рівнянь

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати рівняння $\frac{3\lg\left(x^2 - 3x + 2\right) + 5\lg(2 - x)}{\sqrt{1 - x}} = 3 + x$.

Розв'язання. Знайдемо область визначення даного рівняння. Вона задається наступною системою нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0, \\ 2 - x > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) > 0, \\ x < 2, \\ x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 2, \end{array}\right. \\ x < 2, \\ x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Як бачимо, область визначення даного рівняння - порожня множина. Отже, рівняння коренів не має.

Відповідь. $\varnothing$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати рівняння $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння – множина додатних дійсних чисел. Легко бачити, що дане рівняння є квадратним відносно виразу $\log_2 x$. Позначимо цей вираз через y і розв'яжемо одержане рівняння.

$y^2 + (x-1)y - 6 + 2x = 0$

$D = (x-1)^2 - 4\cdot(-6 + 2x) = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$.

$y_1 = \frac{1 - x + x - 5}{2} = -2$, $y_1 = \frac{1 - x - x + 5}{2} = 3 - x$

Повернемося до заміни і одержимо сукупність двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -2, \\ \log_2 x = 3 - x. \end{array}\right.$$

Розв'язком першого рівняння сукупності є $x = \frac{1}{4}$. Друге рівняння можна розв'язати графічно, або способом підбору. Очевидно, що $x = 2$ - є коренем цього рівняння. Окрім того, даний корінь єдиний, оскільки вираз, що стоїть в лівій частині рівняння задає функцію, що зростає на всій області визначення, а в правій частині рівняння – вираз, що задає спадну функцію. Тобто дане рівняння не може мати більше одного кореня.

Відповідь. $\frac{1}{4}$; 2.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати рівняння $\log_2(4x^2+1)=\log_2 x+8x(1-x)$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння – множина додатних дійсних чисел. Перепишемо наше рівняння у наступному вигляді: $\log_2(4x^2+1)-\log_2 x=8x-8x^2$, або $\log_2\left(\frac{4x^2+1}{x}\right)=-(8x^2-8x+2)+2$. Виділимо повний квадрат у правій частині заданого рівняння, одержимо $\log_2\left(4x+\frac{1}{x}\right)=-2(4x^2-4x+1)+2$; $\log_2\left(4x+\frac{1}{x}\right)=2-2(2x-1)^2$. Очевидно, що найбільше значення виразу, який стоїть у правій частині, дорівнює 2. З'ясуємо, яких значень може набувати вираз, що стоїть у лівій частині рівняння. На області визначення рівняння вирази $4x$ та $\frac{1}{x}$ набувають додатних значень, причому $4x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{4x\cdot\frac{1}{x}}=2\cdot 2=4$ (за нерівністю Коші). Отже, $\log_2\left(4x+\frac{1}{x}\right)\ge\log_2 4=2$. А тому наше рівняння матиме розв'язки лише у випадку, якщо ліва і права частини рівняння дорівнюють 2 одночасно, тобто коли має розв'язки така система рівнянь:

$$\begin{cases}\log_2\left(4x+\frac{1}{x}\right)=2,\\ 2-2(2x-1)^2=2.\end{cases}$$

Розв'язавши її, знайдемо $x=0{,}5$.

Відповідь. 0,5.

<u>Це важливо!</u>

У процесі розв'язування логарифмічних рівнянь з використанням функціональних методів найчастіше використовуються ті ж властивості функцій, що й у процесі розв'язування інших видів рівнянь (скінченність області визначення, оцінка лівої та правої частини рівнянь, монотонність функцій) та інші.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати рівняння

4.57. $\log_3(x+2)+3\log_3(x-2)=\log_3(4-x^2)+1$. Відповідь. $\varnothing$.

4.58. $\log_2 x = 3 - x$. Відповідь. 2.

4.59. $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$. Відповідь. 3.

4.60. $10 - \log_2 x = 3^x$. Відповідь. 2.

4.61. $x \cdot \log_2 x = 24$. Відповідь.8.

4.62. $\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} = 4 - \log_3^4\left(x^2 + x^4 + 1\right)$. Відповідь. 0.

4.63. $\log_2\left(x^2 + 1\right) = \log_2 x - x^2 + 2x$. Відповідь. 1.

4.64. $\log_2\left(6x - x^2 - 5\right) = x^2 - 6x + 11$. Відповідь. 3.

4.65. $\log_5\left(x^6 + 1 + \dfrac{1}{x^6 + 1}\right) = \log_5\left(2 - \sqrt{x + 5}\right)$. Відповідь. $\varnothing$.

4.66. $\sqrt{9 - x^2} - \log_6\left(|x| - 3\right) = 0$. Відповідь. $\varnothing$.

4.67. $(x + 1)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0$. Відповідь. $\dfrac{1}{81}$;3.

Розв'язати рівняння графічно

4.68. $\lg(x - 1) = x - 2$. Відповідь. 2.

4.69. $\lg(x + 1) = x^2 + 2x + 3$. Відповідь. $\varnothing$.

4.70. $\log_2(-x) = 3^{x+2}$. Відповідь. -2.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

4.71. Розв'язати рівняння (1-10) та встановити відповідність між рівняннями та їхніми коренями

1. $\lg(x + 1{,}5) = -\lg x$. **А)** $2^{-\frac{1}{9}}$.

2. $\dfrac{1 - \lg x}{x} = \dfrac{\lg^2 14 - \lg^2 4}{\lg 3{,}5^x}$. **Б)** $\dfrac{5}{12}$.

3. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$. **В)** 2.

4. $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14\lg x + 15$. **Г)** 100.

5. $\left|\log_{\sqrt{3}} x - 2\right| - \left|\log_3 x - 2\right| = 2$. **Д)** $9^{-1}; 9$.

6. $\log_x(2x^{x-2}-1)+4=2x.$ **Е)** $10^{-1};10^5.$

7. $3\log_{16}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\log_2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\log_{16}(4x+1)+0{,}5.$ **Є)** $\frac{5}{28}.$

8. $x^2\log_{36}(5x^2-2x-3)-x\log_{\frac{1}{6}}\sqrt{5x^2-2x-3}=x^2+x.$ **Ж)** $-1;3;-\frac{13}{5}.$

9. $7x^{\frac{1}{\log_2^2 x^3}+\log_x 2}=5+(x+7)^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}}.$ **З)** 2.

10. $\log_3\left(|x|+9\right)=4-x^2-\frac{1}{x^2}.$ **І)** $\varnothing.$

Розв'язати рівняння

4.72. $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3.$

4.73. $\lg(4{,}5-x)=\lg 4{,}5-\lg x.$

4.74. $\log_3((x-1)(2x-1))=0.$

4.75. $\log_7\left(6+7^{-x}\right)=1+x.$

4.76. $\frac{\lg 2+\lg(4-5x-6x^2)}{\lg\sqrt[3]{2x-1}}=3.$

4.77. $\lg(x^2-8)\cdot\lg(2-x)=\frac{\log_5(x^2-8)}{\log_5(2-x)}.$

4.78. $\lg(x^3+27)-0{,}5\lg(x^2+6x+9)=3\lg\sqrt[3]{7}.$.

4.79. $\frac{1-\lg^2 x^2}{\lg x-2\lg^2 x}=\lg x^4+5.$

4.80. $2\lg x^2-\lg^2(-x)=4.$

4.81. $\log_3(-x^2-8x-14)\log_{x^2+4x+4}9=1.$

4.82. $(1-\lg 2)\log_5 x=\lg 3-\lg(x-2).$

4.83. $\log_2\log_3(x^2-16)-\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{(x^2-16)}=2.$

4.84. $\lg 2+\lg\left(4^{x-2}+9\right)=1+\lg\left(2^{x-2}+2\right).$

4.85. $|\log_2(3x-1)-\log_2 3|=|\log_2(5-2x)-1|.$

4.86. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$

4.87. $1+\log_x\frac{4-x}{10}=(\lg x^2-1)\log_x 10.$

4.88. $3^{\sqrt{\log_9 4x-\frac{3}{4}}}=2^{\sqrt{\log_2 3}}.$

4.89. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\frac{2}{\log_4 x}.$

Вихідний тест для самоперевірки знань та умінь
з теми: „Розв'язування логарифмічних рівнянь"

Перший рівень

Розв'язати рівняння та вказати варіант відповіді

1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=-2.$

А) 3; **Б)** 5; **В)** 1; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь.

2. $\log_{15}(13x-1)=\log_{15}(12x-5)$

А) -4; **Б)** 2; **В)** $\varnothing$; **Г)** інша відповідь.

3. $\lg(x-9)+\lg(2x-1)=2.$

А) 12; **Б)** 13; **В)** 14; **Г)** -3,5, 13; **Д)** інша відповідь.

4. $\log_2(9-2^x)=3-x.$

А) 3; **Б)** 1; 8; **В)** 0; **Г)** 0; 3; **Д)** $\varnothing$.

5. $\log_2(-x-5)-\log_2(x-4)=3.$

А) 3; **Б)** 4, 3; **В)** $\varnothing$; **Г)** інша відповідь.

6. $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0.$

А) 3, 9; **Б)** 1/3, 1/9; **В)** 1, 2; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь

7. $\log_x(x+2)=2.$

А) 2; **Б)** -1, 2; **В)** $\varnothing$; **Г)** інша відповідь.

8. $\log_4\log_2\log_{\sqrt{5}} x=0{,}5.$

А) 2; **Б)** 5; **В)** 25; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь.

9. $\log_4 x+6\log_x 4=5.$

А) 2, 3; **Б)** 8; 12; **В)** 16; 64; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь.

10. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=3\frac{2}{3}.$

А) 2; **Б)** 3; **В)** 9; **Г)** 27; **Д)** інша відповідь.

Другий рівень

1. $\log_{x+2}(3x^2-12)=2.$

2. $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30.$

3. $x^2\cdot\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4.$

4. $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x}=4.$

5. $\log_x 5\sqrt{5}-\frac{5}{4}=\log_x^2\sqrt{5}.$

Третій рівень

1. $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0.$

2. $\log_{4x}\frac{16}{x}-3\log_2^2 x=2.$

3. $3.\ x^{\log_2 x^3-\log_2^2 x+3}-\frac{1}{x}=0.$

4. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x}+3\log_{\frac{1}{4}}(1-x)=\log_{\frac{1}{16}}(1-x^2)^2+2.$

5. $(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0.$

Тема 5. СИСТЕМИ ПОКАЗНИКОВИХ І ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ

Вхідний тест для самоперевірки залишкових знань з теми

1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3\cdot 2^x + 3^y = 9, \\ 2^x + 3^y = 5. \end{cases}$

А) $(2;3)$; **Б)** $(2;-1)$; **В)** $(\log_2 4; \log_3 3)$; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 5^{x+y} = \dfrac{1}{25}. \end{cases}$

А) $(3;-5)$; **Б)** $(1;-1)$; **В)** $\varnothing$; **Г)** інша відповідь.

3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5. \end{cases}$

А) $(6;-1)$; **Б)** $(10^6;0{,}1)$; **В)** $\varnothing$; **Г)** інша відповідь.

4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3\cdot 2^x + 3^y - 9 = 0, \\ 2^x + 3^y + 5 = 0. \end{cases}$

А) $(1;1)$; **Б)** $(2;-1)$; **В)** $(\log_2 4; \log_3 3)$; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь.

5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_2(x + 3y - 5) = 3, \\ \log_3(x - y) = \log_5 25. \end{cases}$

А) $(22;-3)$; **Б)** $(10;1)$; **В)** $\varnothing$; **Г)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

У процесі розв'язування систем показникових і логарифмічних рівнянь використовуються ті ж самі методи та прийоми, що й під час розв'язування інших видів систем рівнянь (метод алгебраїчного додавання, підстановки деякого виразу з одного рівняння в інші, заміна змінних). У багатьох випадках перед тим як використовувати той чи інший метод варто попередньо перетворити рівняння системи до більш простого вигляду.

Як і рівняння, так і системи показникових і логарифмічних рівнянь можна розв'язувати як за допомогою систем-наслідків (кожен розв'язок першої системи є розв'язком другої) з обов'язковою перевіркою розв'язків (за допомогою підстановки знайдених розв'язків у *початкову* систему), так і за допомогою рівносильних перетворень (усі розв'язки кожної з них є розв'язками іншої).

1. Розв'язування систем показникових та логарифмічних рівнянь методом підстановки

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$

Розв'язання. За означенням логарифма з другого рівняння системи одержимо рівносильне рівняння $y - x = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$. Виразимо з отриманого рівняння y через x: $y = x + 4$ та підставимо в перше рівняння системи. Одержимо $3^x \cdot 2^{x+4} = 576$, або $3^x \cdot 2^x \cdot 2^4 = 576$, $3^x \cdot 2^x = 36$, $6^x = 6^2$. Отже, $x = 2$, $y = 6$. Оскільки при розв'язуванні системи виконувались лише рівносильні перетворення, то (2; 6) – розв'язок даної системи.

Відповідь. (2; 6).

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_3(y-x) = 1. \end{cases}$

Розв'язання. Розв'яжемо дану систему за допомогою систем-наслідків.

$\begin{cases} \log_2(xy) = 2, \\ \log_3(y-x) = 1. \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 4, \\ y - x = 3. \end{cases}$

Із другого рівняння останньої системи одержимо $y = x + 3$ та підставимо в перше рівняння: $x(x+3) = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. Тоді $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Перевіримо одержані розв'язки підстановкою в початкову систему.

$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4 \end{cases}$ - розв'язок даної системи, $\begin{cases} x = -4, \\ y = -1 \end{cases}$ - сторонній розв'язок.

Цю ж систему можна було розв'язати за допомогою рівносильних перетворень, врахувавши ОДЗ рівняння при переході від рівняння $\log_2 x + \log_2 y = 2$ до рівняння $\log_2(xy) = 2$.

Відповідь. $(1;4)$.

<u>**Це важливо!**</u>

Під час розв'язування систем логарифмічних рівнянь методом підстановки досить часто спочатку доводиться здійснювати деякі перетворення рівнянь, і лише потім виражати одне невідоме через інше. Тому необхідно або слідкувати за рівносильністю перетворень (приклад 1), або якщо систему розв'язували за допомогою систем-наслідків (приклад 2), то необхідно робити перевірку знайдених розв'язків.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь

<u>*Перший рівень*</u>

5.1 $\begin{cases} 8^x = 10y, \\ 2^x = 5y. \end{cases}$ Відповідь. $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$.

5.2 $\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^{y} = \dfrac{4}{9}, \\ x+y=4. \end{cases}$ Відповідь. (2; 2).

Другий рівень

5.3 $\begin{cases} 3\cdot 2^{x} + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35. \end{cases}$ Відповідь. (-1; 11,5), (2; 1).

5.4 $\begin{cases} 2^{x} + 2y = 1, \\ 3y - 6y^{2} = 2^{x-1}. \end{cases}$ Відповідь. $\left(\log_2 \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$.

5.5 $\begin{cases} 2^{x} + 2^{y} = 12, \\ x+y=5. \end{cases}$ Відповідь. (2; 3), (3; 2).

5.6 $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_6 (x+y+1) = 1. \end{cases}$ Відповідь. (1; 4), (4; 1).

5.7 $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$ Відповідь. $(25;36)$.

Третій рівень

5.8 $\begin{cases} 2^{x}\cdot 4^{y} = 32, \\ \lg(x-y)^{2} = 2\lg 2. \end{cases}$ Відповідь. $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$, $(3;1)$.

5.9 $\begin{cases} 10^{1-\lg(x-y)} = 2,5, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 1 + 2\lg 2. \end{cases}$ Відповідь. (7; 3).

5.10 $\begin{cases} \log_{0,5}(y-x) + \log_2 \dfrac{1}{y} = -2, \\ x^{2} + y^{2} = 25. \end{cases}$ Відповідь. $\left(-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), (3;4)$.

2. Розв'язування систем показникових рівнянь за допомогою почленного множення та ділення рівнянь системи

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 5^{x}\cdot 6^{y} = 150, \\ 6^{x}\cdot 5^{y} = 180. \end{cases}$

Розв'язання. Перемножимо почленно рівняння системи, одержимо $5^{x+y}\cdot 6^{x+y} = 27000$, або $30^{x+y} = 30^{3}$. Звідки $x+y=3$. А тепер поділимо почленно рівняння системи. Матимемо $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{6}{5}\right)^{y} = \dfrac{5}{6}$; $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x-y} = \dfrac{5}{6}$; $x-y=1$. Отже, розв'язування вихідної системи зводиться до розв'язування наступної рівносильної їй системи:

$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1. \end{cases}$ Звідки $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

Відповідь. (2; 1).

Це важливо!

Розв'язування систем показникових рівнянь виду $\begin{cases} a^{f(x)} \cdot b^{g(x)} = c_1, \\ a^{g(x)} \cdot b^{f(x)} = c_2 \end{cases}$ почленним множенням та діленням рівнянь зводиться до системи найпростіших показникових рівнянь $\begin{cases} (ab)^{f(x)+g(x)} = c_1 c_2, \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)-g(x)} = \dfrac{c_1}{c_2}. \end{cases}$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь

Другий рівень

5.11 $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 144, \\ 3^x \cdot 2^y = 324. \end{cases}$ Відповідь. (4; 2).

5.12 $\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 500, \\ 2^x \cdot 5^y = 200. \end{cases}$ Відповідь. (3;2).

5.13 $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 5^x \cdot 3^y = 45. \end{cases}$ Відповідь. (1; 2).

5.14 $\begin{cases} 3^x \cdot 2^{2y} = 36, \\ 2^{2x} \cdot 3^y = 48. \end{cases}$ Відповідь. (2; 1).

3. Розв'язування систем логарифмічних та показникових рівнянь за допомогою заміни змінних

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}.$$

Розв'язання. Нехай $3^{\frac{x}{2}} = u,\ 2^y = v$, де $u > 0,\ v > 0$. В нових змінних система набуде вигляду $\begin{cases} u^2 - v^2 = 77, \\ u - v = 7. \end{cases}$ Її можна розв'язати або методом підстановки, виразивши з другого рівняння отриманої системи одну змінну через іншу та підставивши в перше рівняння, або розклавши ліву частину першого рівняння на множники, тобто

$$\begin{cases}(u-v)(u+v)=77,\\ u-v=7.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}7(u+v)=77,\\ u-v=7.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=11,\\ u-v=7.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=9,\\ v=2.\end{cases}$$

Повернувшись до заміни, одержимо таку систему найпростіших показникових рівнянь:

$$\begin{cases}3^{\frac{x}{2}}=9,\\ 2^{y}=2.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4,\\ y=1.\end{cases}$$

Відповідь. (4;1).

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}2\left(\log_{\frac{1}{y}} x-2\log_{x^2} y\right)+5=0,\\ xy^2=32.\end{cases}$$

Розв'язання. Область допустимих значень даної системи рівнянь задається наступними нерівностями:

$$\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\\ y>0,\\ y\neq 1.\end{cases}$$

Спростивши перше рівняння системи, одержимо $2(-\log_y x-\log_x y)+5=0$. На ОДЗ рівняння $y\neq 1$, $x\neq 1$, тобто $\log_x y\neq 0$. Тоді після заміни $a=\log_x y$, $a\neq 0$ і $\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}=\dfrac{1}{a}$. Рівняння набуде вигляду $\dfrac{2a^2-5a+2}{a}=0$. Розв'язавши його, знайдемо $a_1=2,\ a_2=\dfrac{1}{2}$. Отже, наша система рівносильна наступній сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_x y=2,\\ xy^2=32;\end{cases}\\ \begin{cases}\log_x y=\dfrac{1}{2},\\ xy^2=32;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x^2,\\ x^5=32;\end{cases}\\ \begin{cases}y=x^{\frac{1}{2}},\\ x^2=32;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ y=4;\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\sqrt{2};\\ y=2\sqrt[4]{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь. (2; 4), $\left(4\sqrt{2};\ 2\sqrt[4]{2}\right)$.

<u>**Це важливо!**</u>

Оскільки заміна та обернена заміна є рівносильними перетвореннями на ОДЗ системи рівнянь, то для розв'язків, одержаних під час розв'язування систем рівнянь за допомогою заміни змінних, досить перевірити, чи входять вони до ОДЗ. Сторонні розв'язки можуть з'явитись внаслідок того, що часто заміна вводиться після перетворень вихідних рівнянь, які не завжди є рівносильними перетвореннями.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь

Перший рівень

5.15 $\begin{cases} 3\cdot 7^x - 3^y = 12, \\ 7^x\cdot 3^y = 15. \end{cases}$ Відповідь. $(\log_7 5;1)$.

5.16 $\begin{cases} 4^x - 5^{2y} = 231, \\ 4^{\frac{x}{2}} - 5^y = 11. \end{cases}$ Відповідь. (4; 1).

5.17 $\begin{cases} \lg xy = 3, \\ \lg x \lg y = 2. \end{cases}$ Відповідь. (10; 100), (100; 10).

Другий рівень

5.18 $\begin{cases} 7^{2x} + 4^{2y-1} = 85, \\ 7^x - 4^y = 5. \end{cases}$ В. $(\log_7 9;1)$.

5.19 $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$ Відповідь. $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$.

5.20 $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$ Відповідь. (5; 5).

5.21 $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$ Відповідь. $\left(\frac{1}{4};64\right),(8;2)$.

Третій рівень

5.22 $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - \left(\sqrt[4]{2}\right)^{x-y} = 12, \\ 3^{\lg(2y-x)} = 1. \end{cases}$ Відповідь. (17; 9).

5.23 $\begin{cases} 3(2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y) = 10, \\ xy = 81. \end{cases}$ Відповідь. (3; 27), (27; 3).

5.24 $\begin{cases} \log_4 xy + 3\dfrac{\log_4 x}{\log_4 y} = 0, \\ \log_4 \dfrac{x}{y} - \log_4 x\cdot\log_4 y = 0. \end{cases}$ Відповідь. $\left(\frac{1}{8};\ 64\right),\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right)$.

4. Розв’язування систем показникових та логарифмічних рівнянь за допомогою логарифмування рівнянь системи

<u>*Приклад 1*</u>. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{2y^2-1}=5, \\ x^{y^2+2}=125. \end{cases} \quad (x>0)$$

Розв’язання. Оскільки $x>0$, то обидві частини рівнянь додатні. Прологарифмуємо обидві частини кожного рівняння системи за основою 5 (основу 5 обираємо через те, що праві частини обох рівнянь системи є степенями 5). Одержимо наступну систему рівнянь, рівносильну даній:

$$\begin{cases} \log_5 x^{2y^2-1}=\log_5 5, \\ \log_5 x^{y^2+2}=\log_5 125. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2y^2-1\right)\log_5 x=1, \\ \left(y^2+2\right)\log_5 x=3. \end{cases}$$

Виразимо з першого рівняння системи $\log_5 x$ та підставимо в друге рівняння

$$\begin{cases} \log_5 x=\dfrac{1}{2y^2-1}, \\ \dfrac{y^2+2}{2y^2-1}=3. \end{cases}$$

З другого рівняння знаходимо $y^2=1$. Тоді система набуде вигляду $\begin{cases} y^2=1, \\ \log_5 x=1. \end{cases}$

Або $\begin{cases} x=5, \\ y=\pm 1. \end{cases}$

Відповідь. (5; 1), (5; -1).

<u>*Приклад 2.*</u> Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y\cdot x^{\log_y x}=x^{2,5}, \\ \log_3 y\cdot \log_y\left(y-2x\right)=1. \end{cases}$$

Розв’язання. Область допустимих значень даної системи рівнянь задається наступними нерівностями:

$$\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ y\neq 1. \end{cases}$$

На вказаній області обидві частини першого рівняння системи набувають додатних значень. Прологарифмуємо перше рівняння за основою y (основу y обираємо через те, що у показнику першого рівняння системи є логарифм за основою y), а в другому - перейдемо до логарифмів з основою 3. Одержимо

$$\begin{cases} \log_y\left(y \cdot x^{\log_y x}\right) = \log_y x^{2,5}, \\ \log_3 y \cdot \dfrac{\log_3(y-2x)}{\log_3 y} = 1. \end{cases}$$

Використавши формули для логарифмів степеня та добутку, матимемо $\begin{cases} 1+\log_y^2 x = 2{,}5\log_y x, \\ \log_3(y-2x) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y^2 x - 2{,}5\log_y x + 1 = 0, \\ y-2x = 3. \end{cases}$ Як бачимо, перше рівняння системи є квадратним відносно $\log_y x$. Розв'язавши його, знайдемо $\log_y x = 2$, або $\log_y x = 0{,}5$. Отже, наша система рівносильна наступній сукупності двох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_y x = 2, \\ y-2x = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} \log_y x = 0{,}5, \\ y-2x = 3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y^2, \\ y-2y^2 = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{y}, \\ y-2\sqrt{y} = 3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \begin{cases} x = \sqrt{y}; \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{y} = -1; \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 9. \end{cases}$$

Відповідь. (3; 9).

<u>Це важливо!</u>

Якщо система містить рівняння, в яких змінна входить і до основи, і до показника степеня, то для її розв'язування можна спробувати прологарифмувати обидві частини рівняння (тільки якщо вони додатні).

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати системи рівнянь

<u>Другий рівень</u>

5.25 $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$ Відповідь. (3; 2).

5.26 $\begin{cases} x^{y-2} = 4, \\ x^{2y-3} = 64. \end{cases}$ Відповідь. (4; 3).

<u>Третій рівень</u>

5.27 $\begin{cases} x^{y^2-5y+6} = 4, \\ x^{2y^2-9y+9} = 64. \end{cases}$ Відповідь. Ø.

5.28 $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12}, \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases} \left(x>0, y>0\right)$ Відповідь. (1; 1), (4; 2).

5.29 $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$ $(x > 0, y > 0)$ Відповідь. (1; 1), (2; 4).

5.30 $\begin{cases} \log_3 y - \log_3 x = 1, \\ x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27. \end{cases}$ Відповідь. $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right), (3;9)$.

5.31 $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}, \\ \log_9 x^2 + \log_{27} y^3 = \frac{8}{3}. \end{cases}$ Відповідь. $(9;\sqrt[3]{9}), (\sqrt[3]{9}; 9)$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

5.32 Розв'язати системи рівнянь (1-10) та встановити відповідність між системами рівнянь та їхніми розв'язками

1. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ x + y = 3. \end{cases}$ **А)** (3; 2).

2. $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_6 (x + y + 1) = 1. \end{cases}$ **Б)** (1; 2), (2; 1).

3. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 4. \end{cases}$ **В)** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right), (8; 2)$.

4. $\begin{cases} \dfrac{2 \cdot 4^x + 1}{2^x + 2} - 4^x = \dfrac{y}{2^{x+1} + 4}, \\ 4 \cdot 2^{3x} + y^2 = 4. \end{cases}$ **Г)** (5,5; 2,5).

5. $\begin{cases} 7^{2x} + 4^{2y-1} = 85, \\ 7^x - 4^y = 5. \end{cases}$ **Д)** $(\log_7 9; 1)$.

6. $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \dfrac{65}{36}, \\ xy - x + y = 118. \end{cases}$ **Е)** (0; 0).

7. $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648, \\ 3^x \cdot 4^y = 432. \end{cases}$ **Є)** (–10; –12), (12; 10).

8. $\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$ **Ж)** (1; 4), (4; 1).

9. $\begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 1, \\ x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4. \end{cases}$ **З)** (2; 2).

10. $\begin{cases} \log_2 (x + y) + 2\log_3 (x - y) = 5, \\ 2^x - 5 \cdot 2^{0,5(x+y-1)} + 2^{y+1} = 0. \end{cases}$ **І)** (0,01; 0,1), (100; 10).

Розв’язати системи рівнянь

5.33 $\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

5.34 $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3\lg 2. \end{cases}$

5.35 $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

5.36 $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$

5.37 $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$

5.38 $\begin{cases} 5^{\lg x} = 3^{\lg y}, \\ (3x)^{\lg 3} = (5y)^{\lg 5}. \end{cases}$

5.39 $\begin{cases} (x+y)\cdot 3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y) = x - y. \end{cases}$

5.40 $\begin{cases} \log_2(10 - 2^y) = 4 - y, \\ \log_2 \dfrac{x+3y-1}{3y-x} = \log_2(x-1) - \log_2(3-x). \end{cases}$

5.41 $\begin{cases} \lg x \cdot \lg(x+y) = \lg y \cdot \lg(x-y), \\ \lg y \cdot \lg(x+y) = \lg x \cdot \lg(x-y). \end{cases}$

5.42 $\begin{cases} 4^{x+y} = 27 + 9^{x-y}, \\ 8^{x+y} - 21\cdot 2^{x+y} = 27^{x-y} + 7\cdot 3^{x-y+1}. \end{cases}$

***<u>Вихідний тест</u>* для самоперевірки знань та умінь з теми: „Розв’язування систем показникових і логарифмічних рівнянь”**

Розв’язати системи рівнянь

<u>Перший рівень</u>

1. $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36, \\ x + y = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = \log_5 3 + 2, \\ x + y = 20. \end{cases}$

Другий рівень

1. $\begin{cases} 10^{1-\lg(x-y)} = 25, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y) = 1+2\lg 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26, \\ xy = 64. \end{cases}$

Третій рівень

1. $\begin{cases} \dfrac{2\cdot 4^x + 1}{2^x + 2} - 4^x = \dfrac{y}{2^{x+1} + 4}, \\ 4\cdot 2^{3x} + y^2 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3(2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y) = 10, \\ xy = 81. \end{cases}$

Важливі нотатки!

Тема 6. РАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Вступ

Нерівність виду $f(x) > g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ – елементарні функції дійсної змінної, називається нерівністю з однією змінною. Розв'язком нерівності називається таке дійсне число x_0, при якому числова нерівність $f(x_0) > g(x_0)$ справедлива. Розв'язати нерівність — означає знайти множину всіх її розв'язків.

У залежності від вигляду функцій $f(x)$ і $g(x)$ нерівності поділяють на раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні та інші.

Областю визначення, або областю допустимих значень (ОДЗ) нерівності називається спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, які стоять у лівій і правій частині нерівності. Так ОДЗ нерівності $\sqrt{x-5} \le x+2$ є проміжок $[5;\ \infty)$, ОДЗ нерівності $\dfrac{x+2}{2} - 1 > \dfrac{1}{3-x}$ є множина всіх дійсних чисел, окрім $x=3$.

У процесі розв'язування нерівностей, як і під час розв'язування рівнянь, виконують деякі перетворення над ними, в результаті яких дану нерівність зводять до простішої або до системи чи сукупності простіших нерівностей. Але, якщо в процесі розв'язування рівнянь поява сторонніх коренів не особливо хвилює (в більшості випадків їх просто відкинути, зробивши перевірку), то поява сторонніх розв'язків під час розв'язування нерівностей не допустима. Це пов'язано з тим, що нерівності, як правило, мають нескінченну множину розв'язків і звичайною перевіркою відкинути сторонні розв'язки досить важко.

Тому важливо знати, які перетворення не призводять ні до втрати розв'язків, ні до появи сторонніх розв'язків. ***Дві нерівності називаються рівносильними (еквівалентними), якщо множини їхніх розв'язків співпадають.*** Нерівності, які не мають розв'язків вважаються рівносильними, оскільки мають одну й ту саму множину розв'язків - порожню множину. Якщо нерівності $f(x) > g(x)$ і $f_1(x) > g_1(x)$ рівносильні, то пишуть

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f_1(x) > g_1(x).$$

Аналогічно позначаються рівносильні системи нерівностей.

Отже, під час розв'язування нерівностей використовують перетворення, при яких нерівність замінюють рівносильною їй нерівністю. Такі перетворення називаються рівносильними. При рівносильних перетвореннях розв'язків не втрачають і не отримують сторонніх.

Наведемо основні теореми, на яких ґрунтуються рівносильні перетворення нерівностей.

Теорема 1. *Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій.*

Теорема 2. *Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, визначену і додатну на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої нерівності).*

Теорема 3. *Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, визначену і від'ємну на ОДЗ заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої нерівності).*

Основними методами розв'язування нерівностей є наступні: метод рівносильних перетворень нерівностей, загальний метод (метод інтервалів), метод заміни змінних, графічний та інші.

Під час розв'язування нерівностей ***методом рівносильних перетворень***, необхідно врахувати ОДЗ вихідної нерівності. Окрім того потрібно забезпечити, щоб кожен розв'язок першої нерівності був розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності був розв'язком першої. Для цього досить забезпечити збереження правильної нерівності на кожному кроці розв'язування не тільки при прямих, а й при зворотних перетвореннях.

Основою ***загального методу*** розв'язування нерівностей є така властивість неперервних функцій: *якщо на деякому проміжку функція неперервна і не має нулів, то вона зберігає знак на цьому проміжку.* Будь-який проміжок, на якому функція зберігає знак, називають *проміжком знакосталості* цієї функції.

Якщо функція $y = f(x)$є неперервною на своїй області визначення, то для розв'язання нерівності $f(x) > 0$ загальним методом потрібно виконати наступні дії:

1. Знайти ОДЗ нерівності.
2. Розв'язати рівняння $f(x) = 0$, тобто знайти нулі функції.
3. Поділити ОДЗ нерівності знайденими коренями рівняння на проміжки знакосталості. (Завдяки неперервності функція $y = f(x)$ на кожному з цих проміжків зберігає знак).
4. Визначити знак функції $f(x)$ на кожному з утворених проміжків. (Для цього досить встановити знак функції в одній точці відповідного проміжку. Тоді в усіх інших точках цього проміжку функція матиме той самий знак.)

Розв'язком нерівності буде об'єднання тих проміжків, на яких значення функції додатні.

Аналогічний алгоритм застосовний і для розв'язування нерівностей виду $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0$.

Для розв'язування нерівності $f(x) < g(x)$ ***графічним методом*** необхідно в одній системі координат зобразити графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$ (рис. 1). Дана нерівність виконується для тих значень *x,* для яких графік функції $f(x)$ лежить під графіком функції $g(x)$, тобто $x \in (x_1;\ x_2)$.

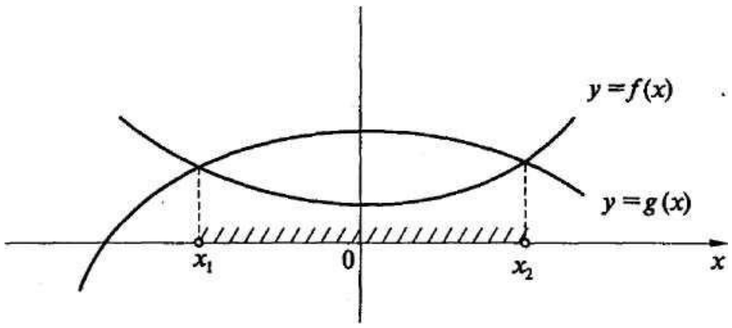

Рис. 1

Для знаходження точних значень x_1, x_2 треба розв’язати рівняння $f(x) = g(x)$.

<u>Вхідний тест</u> для самоперевірки залишкових знань з теми

Розв’язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $(x-1)(x+2) > 0$.

А) $(1;\infty)$; **Б)** $(-\infty;-2)$; **В)** $(-2;1)$; **Г)** $(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

2. $x^2 - 5x + 6 \le 0$.

А) $[2;3]$; **Б)** $(-\infty;2]\cup[3;\infty)$; **В)** $(-\infty;2]$; **Г)** $(2;3)$; **Д)** інша відповідь.

3. $x^2 - 4 \ge 0$

А) $[2;\infty)$; **Б)** $[-2;\infty)$; **В)** $[-2;2]$; **Г)** $(-\infty;-2]\cup[2;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

4. $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)} \le 0$.

А) $(-3;-2)\cup(2;3)$; **Б)** $(-3;3)$; **В)** $(-3;-2)\cup[2;3]$; **Г)** $[-2;2]$; **Д)** інша відповідь.

5. $\dfrac{1}{x} > 1$.

А) $(0;\infty)$; **Б)** $(1;\infty)$; **В)** $(0;1)$; **Г)** $(-\infty;0)$; **Д)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

Основними методами розв’язування раціональних нерівностей є метод рівносильних перетворень та метод інтервалів. Як відомо, раціональні функції є неперервними на своїй області визначення. Тому розглянутий у вступі загальний метод розв’язування нерівностей можна використовувати для розв'язування раціональних нерівностей. Але встановлення знаків функції на проміжках знакосталості займає, як правило, багато часу. Для цілої раціональної функції є простіший спосіб визначення цих знаків. Нехай $M(x)$ - деякий многочлен з коренями $x_1, x_2, ..., x_k$. Розглянемо спочатку нерівність $M(x) > 0$. Многочлен $M(x)$ можна розкласти над полем дійсних чисел на добуток лінійних множників та незвідних квадратних тричленів

$$M(x) = a(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdot ... \cdot (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdot ... \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{\beta_m} > 0$$

Оскільки, квадратні тричлени $x^2 + p_i x + q_i$ не розкладаються на множники над полем дійсних чисел, то вони набувають лише додатних значень. Тому остання нерівність рівносильна такій нерівності:

$$a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{\alpha_k}>0.$$

В залежності від знака коефіцієнта a отримана нерівність рівносильна одній з наступних нерівностей:

$M_1(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{\alpha_k}>0$ або

$M_2(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{\alpha_k}<0$.

Припустимо, що дійсні корені многочлена розташовані в порядку зростання $x_1<x_2<\ldots<x_k$. Вони розбивають числову пряму на проміжки знакосталості многочлена $M_1(x)$: $(-\infty;x_1)$, $(x_1;x_2)$, ..., $(x_k;\infty)$.

У кожній точці x проміжку $(x_k;\infty)$ виконуються нерівності $x-x_1>0,\ \ldots,\ x-x_k>0$, а тому $M_1(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{\alpha_k}>0$ при всіх $x\in(x_k;\infty)$.

Нехай $x\in(x_{k-1};x_k)$. Тоді $x-x_1>0,\ \ldots,\ x-x_{k-1}>0$, а $x-x_k<0$. Очевидно, що в даному випадку многочлен $M_1(x)$ має той знак, що й многочлен $(x-x_k)^{\alpha_k}$. Якщо α_k є парним числом, то $(x-x_k)^{\alpha_k}>0$ і $M_1(x)>0$, якщо ж α_k - непарне число, то $(x-x_k)^{\alpha_k}<0$ і $M_1(x)<0$.

Отже, знак многочлена $M_1(x)$ на проміжку $(x_{k-1};x_k)$ співпадає із знаком цього многочлена на проміжку $(x_k;\infty)$ якщо x_k є коренем парної кратності, і протилежний йому, якщо x_k - корінь непарної кратності. Таким чином при переході через корінь парної кратності многочлен $M_1(x)$ не змінює знак, а при переході через корінь непарної кратності – змінює. Тому знаки многочлена $M(x)$ на проміжках $(-\infty;x_1)$, $(x_1;x_2)$, ..., $(x_k;\infty)$ простіше можна знаходити так:

1. Знаходимо знак многочлена на одному з проміжків знакосталості і відмічаємо („стягуємо”) цей проміжок дугою. Якщо значення многочлена на проміжку додатні, то дугу розміщуємо над числовою прямою, якщо від'ємні – під нею.
2. Продовжуючи дугу, що обмежує вибраний проміжок, будуємо хвилясту лінію, яка проходить послідовно через усі корені многочлена, причому при переході через корінь непарної кратності побудована таким чином лінія перетинає числову пряму, а при переході через корінь парної кратності залишається по той же бік від неї. Таку лінію будемо називати *лінією знаків*.

Наприклад, лінія знаків для многочлена $M(x)=(x+2)^5x^2(x-2)^7(x-4)^6$ зображена рис. 2.

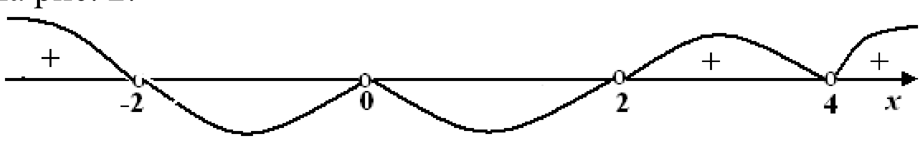

Рис.2

Тому розв'язком нерівності $M(x)<0$ є об'єднання проміжків $(-2;0)$ і $(0;2)$, а розв'язком нерівності $M(x)>0$ - $x\in(-\infty;-2)\cup(2;4)\cup(4;\infty)$.

Описаний спосіб розв’язування раціональних нерівностей називається ***методом інтервалів.*** Його можна використовувати і при розв’язуванні дробово-раціональних нерівностей.

Теорема 1. Нерівності $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $P(x)\cdot Q(x) > 0$ рівносильні.

Дійсно, якщо $Q(x)=0$, то обидві нерівності не виконуються. Якщо ж $Q(x)\neq 0$, то помножимо обидві частини першої нерівності на $Q^2(x)$ $(Q^2(x)>0)$ і одержимо другу нерівність, рівносильну заданій.

Аналогічно можна довести наступні твердження:

Теорема 2. $M(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M(x)>0, \\ M(x)=0; \end{array}\right.$

Теорема 3. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\cdot Q(x)\geq 0, \\ Q(x)\neq 0 \end{cases}$

Наведені твердження дають можливість звести розв’язування дробово-раціональних нерівностей до розв’язування нерівності виду $M(x)>0$, де $M(x)$ – деякий многочлен.

1. *Розв’язування раціональних нерівностей методом рівносильних перетворень*

<u>*Приклад 1.*</u> Розв’яжіть нерівність $\dfrac{x+2}{2}-1>\dfrac{1}{3-x}$.

Розв’язання. $\dfrac{x+2}{2}-1>\dfrac{1}{3-x} \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{2}-1-\dfrac{1}{3-x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x+2}{3-x}<0.$

Дріб від’ємний у тому випадку, коли чисельник і знаменник мають різні знаки. Отже, задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-3x+2<0, \\ 3-x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x+2>0, \\ 3-x<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1<x<2, \\ x<3, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>2, \end{array}\right. \\ x>3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<2, \\ x>3. \end{array}\right.$$

Об’єднуючи результати обох випадків, маємо $x\in(1;\ 2)\cup(3;\ \infty)$.

Відповідь. $x\in(1;\ 2)\cup(3;\ \infty)$.

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати нерівності

<u>*Перший рівень*</u>

6.1 $x^2+10\leq 7x$. Відповідь. $[2;5]$.

6.2 $-x^2+4x<4$. Відповідь $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ \infty)$.

6.3 $\quad -x^2+6x\geq 9$. Відповідь. $\{3\}$.

6.4 $\quad \dfrac{3x-2}{2x-3}<3$. Відповідь. $\left(-\infty;\ \dfrac{3}{2}\right)\bigcup\left(2\dfrac{1}{3};\infty\right)$.

<u>*Другий рівень*</u>

6.5 $\quad (x^2+10x+25)(x+3)\geq 0$. Відповідь. $\{-5\}\bigcup[-3;\ \infty)$.

6.6 $\quad \dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$. Відповідь. $(-\infty;\ 2)\bigcup(2;\ \infty)$.

6.7 $\quad \dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>3$. Відповідь. $\left(\dfrac{1-\sqrt{73}}{6};\ -1\right)\bigcup\left(1;\dfrac{1+\sqrt{73}}{6}\right)$

.

6.8 $\quad \dfrac{(x-1)(3x-2)}{5-2x}>0$. Відповідь. $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\bigcup\left(1;2\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати нерівність $\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}>0$.

Розв'язання. З теореми 1 випливає, що дана нерівність рівносильна нерівності $(x+2)(x+1)(x-1)(x-4)>0$. Нанесемо на числову пряму точки -2, -1, 1 і 4 і побудуємо лінію знаків.

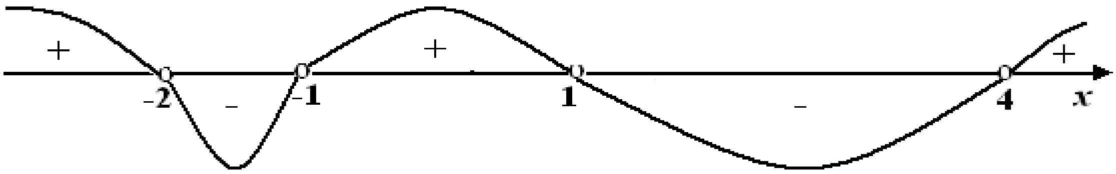

Рис. 3

Отже, $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(4;\infty)$.

Відповідь. $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(4;\infty)$.

<u>*Приклад 2*</u>**.** Розв'язати нерівність $\dfrac{(x^2-4x+4)(x^2+8x+16)x^4}{(x^2+5x+6)(x^2-6x+8)}\leq 0$.

Розв'язання. Розкладемо квадратні тричлени на множники. Матимемо $\dfrac{(x-2)^2(x+4)^2x^4}{(x+3)(x+2)(x-2)(x-4)}\leq 0$. Дана нерівність згідно теореми 3 рівносильна системі нерівностей $\begin{cases}(x+4)^2(x+3)(x+2)x^4(x-2)^3(x-4)\leq 0,\\(x+3)(x+2)(x-2)(x-4)\neq 0.\end{cases}$

Нанесемо на числову пряму точки -4, -3, -2, 0, 2 і 4 і побудуємо лінію знаків, врахувавши, що $x=-4$ і $x=0$ є коренями парної кратності, отже при переході через ці точки знак нерівності не зміниться.

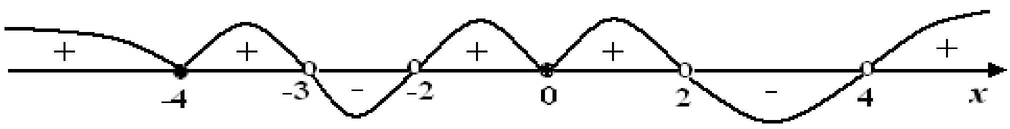

Рис. 4

Отже, $x \in \{-4\} \cup (-3;-2) \cup \{0\} \cup (2;4)$.

Відповідь. $x \in \{-4\} \cup (-3;-2) \cup \{0\} \cup (2;4)$.

<u>*Приклад 3*</u>**.** Розв'язати нерівність $\dfrac{(x-1)^2(x^2-1)^2(x^2-4)^4(x^2+2)}{(2x-1)(x^2-3x+2)(-x^2+x-2)} \le 0$.

Розв'язання. Оскільки $x^2-1=(x-1)(x+1)$, $x^2-4=(x-2)(x+2)$, а $x^2+2>0$, $-x^2+x-2<0$ при всіх дійсних значеннях x, то дана нерівність рівносильна нерівності $\dfrac{(x-1)^2(x-1)^2(x+1)^2(x-2)^4(x+2)^4}{(x-1/2)(x-1)(x-2)} \ge 0$, або системі

$$\begin{cases}(x+2)^4(x+1)^2(x-1/2)(x-1)^5(x-2)^5 \ge 0,\\(x-1/2)(x-1)(x-2) \ne 0.\end{cases}$$

Лінія знаків для першої нерівності отриманої системи зображена на малюнку. Замальованими кружечками відмічені ізольовані розв'язки системи.

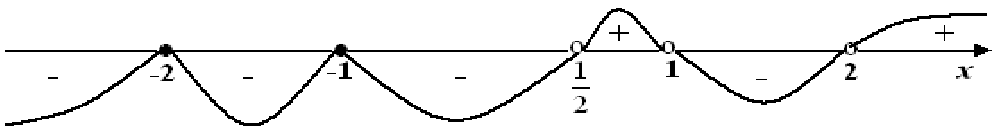

Рис.5

Отже, $x \in \{-2\} \cup \{-1\} \cup \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (2;\infty)$.

Відповідь. $x \in \{-2\} \cup \{-1\} \cup \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup (2;\infty)$.

<u>*Приклад 4.*</u> Розв'язати нерівність $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2 \le 0$.

Розв'язання. Для того, щоб розв'язати цю нерівність, спробуємо розкласти на множники многочлен $M(x)=2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2$. Для цього розв'яжемо рівняння $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$. Дане рівняння є симетричним 5-го степеня. Число $x_1=-1$ є коренем цього рівняння. Виділивши в лівій частині рівняння множник $x+1$, одержимо: $(x+1)(2x^4+x^3-6x^2+x+2)=0$. Розв'яжемо рівняння $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$, яке є симетричним парного степеня. Розділимо обидві частини цього рівняння на x^2 (оскільки число $x=0$ не є коренем рівняння) та запишемо його у вигляді

$2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0$. Зробимо заміну $x+\dfrac{1}{x}=y$, тоді $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$.

Одержимо квадратне рівняння $2(y^2-2)+y-6=0$, $2y^2+y-10=0$. Його корені

$y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{5}{2}$. Повертаючись до заміни, одержимо сукупність двох рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 2, \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Розв'язками даної сукупності є $x_{2,3}$=1, x_4=-2, x_5=-0,5. Отже, многочлен *M(x)* розкладається на такі множники: $M(x) = 2(x+2)(x+1)(x+0{,}5)(x-1)^2$. Тобто, розв'язування вихідної нерівності звелося до розв'язування нерівності $(x+2)(x+1)(x+0{,}5)(x-1)^2 \le 0$. Побудуємо лінію знаків для останньої нерівності та запишемо її розв'язки.

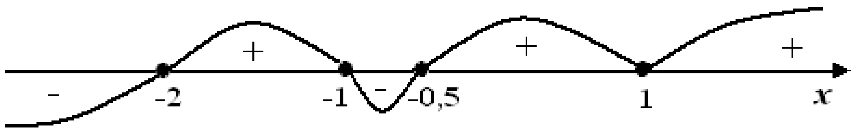

Рис. 6

Отже, $x \in (-\infty;-2] \cup [-1;-0{,}5] \cup \{1\}$.

Відповідь. $x \in (-\infty;-2] \cup [-1;-0{,}5] \cup \{1\}$.

<u>*Приклад 5.*</u> Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \frac{2x-1}{3-x} < 3, \\ x^2 - 5x + 4 \le 0. \end{cases}$

Розв'язання. Щоб розв'язати систему нерівностей потрібно розв'язати кожну нерівність системи та знайти для них спільні розв'язки. Перетворимо першу нерівність системи

$\frac{2x-1}{3-x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{5x-10}{3-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0$. Другу нерівність подамо у вигляді добутку $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \le 0$. Отже, вихідна система нерівностей рівносильна такій:

$$\begin{cases} (x-2)(x-3) > 0, \\ (x-1)(x-4) \le 0. \end{cases}$$

Побудуємо лінії знаків для кожної нерівності, заштрихуємо проміжки, що є розв'язками кожної нерівності (рис. 8) та визначимо їхні спільні розв'язки. Одержимо такі розв'язки даної системи нерівностей: $x \in [1;2) \cup (3;4]$.

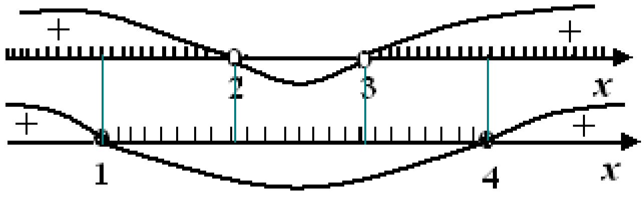

Рис. 7

Відповідь. $x \in [1;2) \cup (3;4]$.

<u>*Приклад 6.*</u> Знайти область визначення функції

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x^2-5x+6}}+\sqrt[4]{x^4-x^2}\,.$$

Розв'язання. Знаходження області визначення функції, заданої аналітично, полягає в знаходженні всіх дійсних значень аргументу, при якому вираз, за допомогою якого задана функція, має зміст. Тому, щоб знайти область визначення заданої функції, потрібно розв'язати таку систему нерівностей:

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{x^2-5x+6}\ge 0,\\ x^4-x^2\ge 0.\end{cases}\quad (*)$$

Оскільки $x^4-x^2=x^2\left(x^2-1\right)=x^2(x-1)(x+1)$, а

$$\frac{1-x}{x^2-5x+6}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-2)(x-3)\le 0,\\ (x-2)(x-3)\ne 0,\end{cases}$$ то система

(*) рівносильна наступній системі нерівностей:

$$\begin{cases}(x-1)(x-2)(x-3)\le 0,\\ (x-2)(x-3)\ne 0,\\ x^2(x+1)(x-1)\ge 0.\end{cases}$$

На рис. 9 зображено лінії знаків та штриховкою позначено розв'язки для кожної нерівності системи. Як видно з рисунка, розв'язками системи нерівностей, а отже і областю визначення даної функції є об'єднання проміжків $(-\infty;-1]\cup(2;3)$ та двох точок $x=0,\ x=1$.

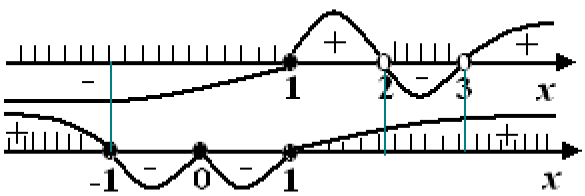

Рис. 8

Відповідь. $x\in(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup\{1\}\cup(2;3)$.

Це важливо !

Під час розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів потрібно розкласти многочлени на незвідні над полем дійсних чисел множники, нанести корені многочленів на числову вісь, визначити знак нерівності на кожному проміжку, записати відповідь, врахувавши ізольовані точки у випадку нестрогої нерівності (якщо вони є).

Завдання для самостійної роботи

Перший рівень

Розв'язати нерівності

6.9 $x(x-1)^2>0$. Відповідь. $(0;1)\bigcup(1;\infty)$.

6.10 $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$. Відповідь. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$.

6.11 $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4<0$. В-дь. $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup\left(\frac{2}{3};3\right)$.

6.12 $x^3-64x>0$. Відповідь. $(-8;0)\cup(8;\infty)$.

6.13 $x^2-7x<3$. Відповідь. $\left(\frac{7-\sqrt{61}}{2};\frac{7+\sqrt{61}}{2}\right)$.

6.14 $-x^2-16+8x\geq 0$. Відповідь. 4.

6.15 $x^2+5x+8>0$. Відповідь. $(-\infty;\infty)$.

6.16 $(x-1)(x^2-3x+8)<0$. Відповідь. $(-\infty;1)$.

6.17 $\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35}>0$. Відповідь. $(-\infty;2)\cup(3;5)\cup(7;\infty)$.

6.18 $\frac{x^2-4x-2}{9-x^2}<0$. В-дь. $(-\infty;-3)\cup(2-\sqrt{6};3)\cup(2+\sqrt{6};\infty)$.

6.19 $\frac{7x-4}{x+2}\geq 1$. Відповідь. $(-\infty;-2)\cup[1;\infty)$.

6.20 $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$. Відповідь. $(-\infty;0)\cup(3;\infty)$.

Розв'язати системи нерівностей

6.21 $\begin{cases}\frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2}<2x,\\ \frac{2x+15}{9}>\frac{1}{5}(x-1)+\frac{x}{3}.\end{cases}$ Відповідь. (2,7; 6).

6.22 $\begin{cases}2x^2+2<5x,\\ x^2\geq x.\end{cases}$ Відповідь. [1; 2).

6.23 $\begin{cases}x^2<9,\\ x^2>7.\end{cases}$ Відповідь. $(-3;-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7};3)$.

6.24 $\begin{cases}\frac{x+3}{x-2}<1,\\ \frac{2x+3}{3x-2}<2.\end{cases}$ Відповідь. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{4};2\right)$.

<u>Другий рівень</u>

Розв'язати нерівності

6.25 $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\leq 0$. Відповідь. $\{-1;1\}$.

6.26 $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)}>0$. В-дь. $(-4;-3)\cup(-2;-1)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$.

6.27 $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-3)\leq 0$.

Відповідь. $(-\infty;-4]\cup\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]\cup[4;\infty)$.

6.28 $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-6x+8)(x^2+4x+4)<0$. В-дь. $(-2;2)\cup(2;4)$.

6.29 $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$. Відповідь. $(-1;\ 5)$.

6.30 $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0$. Відповідь. $(-8;\ 1]$.

6.31 $\frac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8}>2$. Відповідь. $(-8;-1)$.

6.32 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$. Відповідь. $(-3;-2)\cup(-1;1)$.

6.33 $\frac{1}{3x-2-x^2}>\frac{3}{7x-4-3x^2}$. Відповідь. $(-\infty;1)\cup\left(\frac{4}{3};2\right)$.

6.34 $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-x+1}\le\frac{1-2x}{x^3+1}$. Відповідь. $(-\infty;-1)\cup(-1;\ 2]$.

6.35 $4x-2<x^2+1<4x+6$. Відповідь. $(-1;\ 1)\cup(3;\ 5)$.

Розв'язати системи нерівностей

6.36 $\begin{cases}(x^2+12x+35)(2x+1)(3-2x)\ge 0,\\ (x^2-2x-8)(2x-1)\ge 0.\end{cases}$ Відповідь. $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

6.37 $\begin{cases}\frac{x+3}{3-x}<2,\\ x^3<16x,\\ 4\ge x^2.\end{cases}$ Відповідь. $(0;\ 1)$.

6.38 $\begin{cases}\frac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\le 0,\\ \frac{1-x^2}{x^2+2x-8}\ge 0.\end{cases}$ В-дь. $(-4;-3)\cup[-2;-1]\cup[1;\ 2)$.

Розв'язати сукупності нерівностей

6.39 $(x-1)(x-2)(x-3)<0;\quad x^2<1$. Відповідь. $(-\infty;1)\cup(2;\ 3)$.

6.40 $\frac{3x-2}{x-3}>0;\ \frac{4x-1}{5x-2}<0$. Відповідь. $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right)\cup(3;\ \infty)$.

6.41 $x^2-5x+8\le 0;\ x^2-3x+6<0;\ x^2<1$. Відповідь. $(-1;\ 1)$.

Знайти область визначення функції

6.42 $f(x)=\sqrt[4]{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\frac{2}{\sqrt[3]{x^2-49}}$.

Відповідь. $(-\infty;-7)\cup(-7;-2]\cup(1;7)\cup(7;8]\cup(11;\infty)$.

6.43 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{3x-7-8x^2}}+\sqrt{4x^2-1}$. Відповідь. $\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

<u>*Третій рівень*</u>

Розв’язати нерівності

6.44 $(x^2+2x-3)^2-9(x^2+2x-3)+20>0$. В. $(-\infty;-4)\cup(-1-\sqrt{8};-1+\sqrt{8})\cup(2;\infty)$.

6.45 $x^4-20x^3+150x^2-500x+625>0$. Відповідь. $(-\infty;5)\cup(5;\infty)$.

6.46 $9x^3-15x^2-32x-12>0$. Відповідь. $(3;\infty)$.

6.47 $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+16>0$.

В. $(-\infty;-5-\sqrt{5})\cup(-5-\sqrt{5};-5+\sqrt{5})\cup(-5+\sqrt{5};\infty)$.

6.48 $12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12<0$. Відповідь. $(-\infty;-2)\cup\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

Розв’язати системи нерівностей

6.49 $\dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4$. Відповідь. $(-8;\,6{,}5)\cup(0;\,5)$.

6.50 $\begin{cases}\dfrac{(x-1)^3(x^2-4)^2(x^2-9)^3(x^2+1)}{(1-3x)(x^2-x-6)(x^2-3x+16)}<0,\\ \dfrac{2x^2+x-16}{x^2+x}<1.\end{cases}$ В-дь. $(-4;-3)\cup(-2;\,-1)\cup\left(0;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

Знайти область визначення функції

6.51 $f(x)=\sqrt[12]{\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4x+3}}+\sqrt{3x-5}$. Відповідь. $\left[\dfrac{5}{3};2\right]\cup(3;\,\infty)$.

6.52 $f(x)=\lg\dfrac{(x^2+4x+4)(4-x^2)}{x^2+2x+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{8x^2-x^3-15x}$. Відповідь. Ø.

Розв’язати сукупності нерівностей та систем нерівностей.

6.53 $5x-20\le x^2\le 8x;\ \ 1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2$. Відповідь. $[0;\,8]$.

6.54 $\begin{cases}x^2-5x+6>0,\\ \dfrac{3x-21}{x^2+x+4}<0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x+3>1,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}<0;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x^2+9x-20}{11x-x^2-30}\le -1,\\ x^2+18>5x.\end{cases}$ В. $(-\infty;2)\cup[2{,}5;\,\infty)$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

6.55 Розв’язати нерівності та системи нерівностей (1-10) і встановити відповідність між нерівністю чи системою та її розв’язками

1. $(2x^2-x-5)(x^2-9)(x^2-3x)\le 0$. **А)** $(-\infty;-6]\cup[-2;\infty)$.

2. $\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25}\ge 0$. **Б)** $\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{79}{75};\dfrac{3}{2}\right)\cup(2;\infty)$.

3.	$x^4+8x^3+12x^2\geq 0$.	**В)**	$\left(-\frac{5}{3};\,0\right]\cup\left(\frac{5}{3};\,\infty\right)$.
4.	$\frac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1}<0$.	**Г)**	$\left[-3;\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right]\cup\left[0;\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right]\cup\{3\}$.
5.	$\frac{3}{6x^2-x-12}<\frac{25x-47}{10x-15}-\frac{3}{3x+4}$.	**Д)**	$(-\infty;-7]\cup(-1;0)\cup(0;1]\cup(3;\infty)$.
6.	$\frac{2-x}{x^3+x^2}\geq\frac{1-2x}{x^3-3x^2}$.	**Е)**	$\left(-2;\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\,2\right)$.
7.	$\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11}{3}\cdot\frac{6-x}{x-4}\geq\frac{5(6-x)}{x-2}$.	**Є)**	$(1;\,2)$.
8.	$\begin{cases}\frac{3x+5}{7}+\frac{10-3x}{5}>\frac{2x+7}{3}-\frac{148}{21},\\ \frac{7x}{3}-\frac{11(x+1)}{6}>\frac{3x-1}{3}-\frac{13-x}{2}.\end{cases}$	**Ж)**	$(0;\,9)$.
9.	$\begin{cases}3-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}>4-\frac{7-3x}{2},\\ 7(3x-6)+4(17-x)>11-5(x-3).\end{cases}$	**З)**	$(-\infty;5)$.
10.	$\begin{cases}x^2-4x+3<0,\\ 2x-4<0.\end{cases}$	**І)**	$(-\infty;2)\cup[3{,}5;4)\cup[7;\infty)$.

Знайти область визначення функції

6.56 $f(x)=\sqrt{\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{x^3-1}}+\lg(x^2-4x+4)$.

6.57 $f(x)=\sqrt[6]{9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}+\frac{1}{\log_3(x-5)}$.

Розв’язати системи сукупностей нерівностей

6.58 $\begin{cases}(x+1)(x-3)>0;\ 2-x^2\leq 0,\\ x^2>25;\ \frac{x-1}{x+2}<0.\end{cases}$

6.59 $\begin{cases}x^4+5x^2+4\leq 0;\quad 8x^2-x^3-15x\geq 0,\\ \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4x-5}>0;\quad \frac{x-3}{x-5}<0.\end{cases}$

***Вихідний тест** для самоперевірки знань та умінь*
з теми: „Розв’язування раціональних нерівностей”

Перший рівень

Розв’язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $(x+3)^2(x-4)(x-6)^2>0$.

А) $(-3;4)\cup(6;\infty)$; **Б)** $(4;6)\cup(6;\infty)$; **В)** $(4;\infty)$; **Г)** $(-3;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

2. $\dfrac{x-3}{x+2}<2$.

А) $(-2;3)$; **Б)** $(-\infty;-2)$; **В)** $(-\infty;-7)\cup(-2;\infty)$; **Г)** $(-7;-2)$; **Д)** інша відповідь.

3. $\dfrac{(x+5)^4(x+3)^2}{(x+1)(x-2)}\le 0$.

А) $(-1;2)$; **Б)** $[-5;-3]\cup(-1;2)$; **В)** $\{-5\}\cup\{-3\}\cup[-1;2]$; **Г)** $\{-5\}\cup\{-3\}\cup(-1;2)$.

4. $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}\le 0$.

А) $(-3;-2)$; **Б)** $(2;3)$; **В)** $[2;3]$; **Г)** інша відповідь.

5. $\dfrac{x^4+2x^3+x^2}{x^2-9}<0$.

А) $(-3;3)$; **Б)** $(-3;-1)$; **В)** $(-1;0)$; **Г)** $(0;3)$; **Д)** інша відповідь.

Другий рівень

1. Розв’язати нерівність $x^4+8x^3+12x^2\ge 0$.

2. Розв’язати нерівність $\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25}\ge 0$.

3. Розв’язати нерівність $\dfrac{x-3}{x^2+3x}+\dfrac{x+3}{x^2-3x}+\dfrac{11-x}{x^2-9}\ge 0$.

4.Розв’язати систему нерівностей $\begin{cases}(2x+3)(2x+1)(x-1)<0,\\(x+5)(x+1)(1-2x)(x-3)>0.\end{cases}$

5.Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x^2-x+1)}{x^3-1}}+\lg(x^2-4x+4)$.

Третій рівень

1. Розв’язати нерівність $(2x^2-x-5)(x^2-9)(x^2-3x)\le 0$.

2. Розв’язати нерівність $\dfrac{x-3}{x^2+3x}+\dfrac{x+3}{x^2-3x}+\dfrac{21-x^2}{x^2-9}\ge 0$.

3. Розв’язати нерівність $x^4-2x^3-11x^2+12x+36>0$.

4. Знайти область визначення функції

$$f(x)=\sqrt[6]{9-\left(\frac{4x-22}{x-5}\right)^2}+\frac{1}{\log_3(x-5)}.$$

5. Розв’язати системи сукупностей нерівностей

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-3}\le 0; \quad \dfrac{x-5}{(x-6)^2(x-8)}<0,\\ x^2-9x+14<0; \quad x>x^2.\end{cases}$$

Тема 7. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

***Вхідний тест** для самоперевірки залишкових знань з теми*

Розв'язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $\sqrt{x-2} < 1.$

А) $(-\infty;3)$; **Б)** $(-\infty;3\ ]$; **В)** (2; 3); **Г)** $[2;3)$; **Д)** інша відповідь.

2. $\sqrt{3x+6} \geq 2.$

А) $[-2;\infty)$; **Б)** $[-2/3;\infty)$; **В)** $[-2;-2/3]$; **Г)** інша відповідь.

3. $(x-1)\sqrt{x} < 0.$

А) $(-\infty;1)$; **Б)** $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; **В)** $[0;+\infty)$; **Г)** (0;1); **Д)** інша відповідь.

4. $\sqrt{x^2-6x+8} > -1$**.**

А) $(-\infty;\infty)$; **Б)** $[2;4]$; **В)** $(-\infty;2]\cup[4;\infty)$; **Г)** $\varnothing$; **Д)** інша відповідь.

5. $x+1 \geq \sqrt{x+7}.$

А) [-3;2]; **Б)** $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$; **В)** [-1; 2]; **Г)** $[2;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

Ірраціональні нерівності доцільно розв'язувати зведенням їх або до рівносильних їм раціональних нерівностей, або до систем раціональних нерівностей, або за загальним методом.

Розглянемо нерівності виду $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ - раціональні функції, n - деяке натуральне число.

Під час розв'язування ірраціональних нерівностей доцільно користуватись такими твердженнями:

Теорема 1. $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x)$

$$\left(\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x)\right)$$

Теорема 2. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x). \end{cases}$

Теорема 3. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x). \end{cases} \end{array}\right.$

1. Розв'язування ірраціональних нерівностей методом

рівносильних перетворень

Приклад 1**.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-3x-18}<4-x$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою 2. Одержимо

$$\sqrt{x^2-3x-18}<4-x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-18\ge 0, \\ 4-x>0, \\ x^2-3x-18<(4-x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-6)\ge 0, \\ x<4, \\ x^2-3x-18<16-8x+x^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-6)\ge 0, \\ x<4, \\ 5x<34; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -3, \\ x\ge 6, \end{array} \right. \\ x<4, \\ x<6{,}8; \end{cases} \Leftrightarrow x\le -3.$$

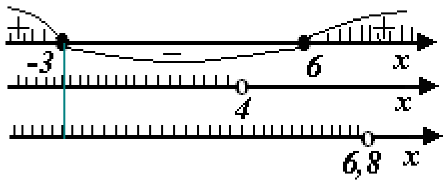

Рис. 1

Відповідь. $x\in(-\infty;-3]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1}>1+2x$.

Розв'язання. Скористаємося методом рівносильних перетворень *(цю ж нерівність пізніше розв'яжемо загальним методом та за допомогою заміни змінних)*. Згідно з теоремою 3 розглянемо дві системи нерівностей.

$$1)\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 1+2x<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1, \\ x<-0{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x<-0{,}5.$$

$$2)\begin{cases} 1+2x\ge 0, \\ x+1>(1+2x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -0{,}5, \\ 4x^2+3x<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -0{,}5, \\ -0{,}75<x<0; \end{cases} \Leftrightarrow -0{,}5\le x<0.$$

Об'єднуючи множини розв'язків цих систем, маємо відповідь $x\in[-1;0)$.

Відповідь. $x\in[-1;0)$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+6}-\sqrt{2x-5}>\sqrt{x+1}$.

Розв'язання. Для того, щоб обидві частини нерівності були невід'ємні, запишемо її у вигляді $\sqrt{x+6}>\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}$. Піднесемо обидві частини отриманої нерівності до квадрату, врахувавши ОДЗ нерівності. Одержимо

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2>\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5\ge 0, \\ x+1\ge 0, \\ x+6>2x-5+2\sqrt{(2x-5)(x+1)}+x+1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2{,}5, \\ \sqrt{(2x-5)(x+1)} < 5-x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2{,}5, \\ 5-x>0, \\ 2x^2-3x-5<25-10x+x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2{,}5, \\ x<5, \\ x^2+7x-30<0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5 \leq x < 5, \\ (x+10)(x-3)<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5 \leq x < 5, \\ -10 < x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow 2{,}5 \leq x < 3.$$

Відповідь. $x \in [2{,}5;3)$.

<u>*Приклад 4.*</u> Розв'язати нерівність $(x-4)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$.

Розв'язання. Оскільки під час розв'язування вправ розглядаються лише арифметичні значення коренів, то другий множник на ОДЗ нерівності набуває невід'ємних значень. Отже, для того, щоб нерівність мала розв'язки перший множник у лівій частині нерівності на області визначення нерівності має набувати невід'ємних значень, або другий множник має бути рівним нулеві, оскільки нерівність нестрога. Тому задана нерівність рівносильна такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-4 \geq 0, \\ x^2-x-2 \geq 0, \end{cases} \\ x^2-x-2=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 4, \\ (x+1)(x-2) \geq 0, \end{cases} \\ x=2,\ x=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ x=2, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Відповідь. $x \in \{-1\} \cup \{2\} \cup [4;\infty)$.

<u>*Приклад 5.*</u> Розв'язати нерівність $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$.

Розв'язання. ОДЗ даної нерівності – множина всіх дійсних чисел. Перенесемо всі доданки в ліву частину нерівності та розкладемо отриманий вираз на множники: $(x-3)\sqrt{x^2+4}-(x-3)(x+3) \leq 0$, $(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-(x+3)\right) \leq 0$. Як відомо, добуток двох виразів від'ємний, якщо один з виразів додатний, а другий від'ємний. Отже, потрібно розглянути два випадки.

1) $$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ \sqrt{x^2+4} \leq x+3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2+4 \leq x^2+6x+9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \geq -\dfrac{5}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

2) $$\begin{cases} x-3<0, \\ \sqrt{x^2+4} \geq x+3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ \begin{cases} x \geq -3, \\ x^2+4 \geq x^2+6x+9; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ \begin{cases} x \geq -3, \\ x \leq -\dfrac{5}{6}; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ -3 \leq x \leq -\dfrac{5}{6}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x \leq -\dfrac{5}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{6}.$$

Об'єднуючи розв'язки, одержимо $x \in \left(-\infty;-\dfrac{5}{6}\right] \cup [3;\infty)$.

Відповідь. $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; \infty).$

Це важливо!

Якщо на ОДЗ заданої нерівності якась частина нерівності може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то, перш ніж підносити обидві частини нерівності до парного степеня, ці випадки доводиться розглядати окремо. Наприклад, розв'язуючи нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ (приклад 1) на її ОДЗ, де $f(x) \geq 0$, помічаємо, що для всіх розв'язків нерівності $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ ліва частина невід'ємна (арифметичний корінь $\sqrt[2n]{f(x)} \geq 0$) і нерівність може виконуватись тільки за умови $g(x) > 0$. При цьому обидві частини нерівності $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ невід'ємні, і при піднесенні до парного степеня $2n$ обох частин нерівності одержуємо нерівність $f(x) < g^{2n}(x)$, рівносильну даній на ОДЗ. Отже, нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ рівносильна такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x). \end{cases}$$

Якщо ж за допомогою рівносильних перетворень доводиться розв'язувати нерівність виду $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ (приклад 2) на її ОДЗ, де $f(x) \geq 0$, то для правої частини даної нерівності необхідно розглянути два випадки: $g(x) \geq 0$ та $g(x) < 0$. Якщо $g(x) \geq 0$, то обидві частини нерівності $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ невід'ємні, і після піднесення до парного степеня $2n$ обох частин нерівності одержимо нерівність $f(x) > g^{2n}(x)$, рівносильну заданій. До того ж усі розв'язки нерівності $f(x) > g^{2n}(x)$ належать ОДЗ заданої нерівності, оскільки $g^{2n}(x) \geq 0$. Якщо ж $g(x) < 0$, то нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ виконується для всіх x з ОДЗ нерівності, тобто при $f(x) \geq 0$. Отже, нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x). \end{cases}$$

Під час розв'язування нерівностей виду $f(x)\sqrt{g(x)} \geq 0$, $f(x)\sqrt{g(x)} \leq 0$, $f(x)\sqrt{g(x)} > 0$ та $f(x)\sqrt{g(x)} < 0$ використовуються наступні твердження:

$$f(x)\sqrt{g(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)=0, \\ x \in D(f(x)); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad f(x)\sqrt{g(x)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)=0, \\ x \in D(f(x)); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x) \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$f(x)\sqrt{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)>0. \end{cases} \qquad f(x)\sqrt{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)<0. \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

Розв’язати нерівності

<u>*Перший рівень*</u>

7.1 $\sqrt{3x-2} > 1$. Відповідь. $(1;\ \infty)$.

7.2 $\sqrt{\dfrac{x+3}{4-x}} \ge 2$. Відповідь. $[2,6;\ 4)$.

7.3 $\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x-2}} \le 3$. Відповідь. $(-\infty;\ 0,5]\cup[0,68;\ \infty)$.

7.4 $\sqrt{x^2-10x+9} \le 3$. Відповідь. $[0;1]\cup[9;10]$.

7.5 $(2x+7)\sqrt{x^2+9} < 0$. Відповідь. $(-\infty;-3,5)$.

7.6 $(4x-6)\sqrt{x^2+7} \le 0$. Відповідь. $(-\infty;1,5]$.

7.7 $\sqrt{5x+7} < \sqrt{2-3x}$. Відповідь. $[-1,4;-0,625)$.

7.8 $\sqrt{3-7x} \ge \sqrt{6x-8}$. Відповідь. $\varnothing$.

7.9 $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt[3]{x} > 0$. Відповідь. $(0;3)$.

<u>*Другий рівень*</u>

7.10 $(3x^2-16x+21)\sqrt{2x+5} \le 0$. Відповідь. $\{-2,5\}\cup\left[2\dfrac{1}{3};3\right]$.

7.11 $(5x^2+17x+14)\sqrt{4-3x} \le 0$. Відповідь. $\left\{1\dfrac{1}{3}\right\}\cup[-2;-1,4]$.

7.12 $\dfrac{6-2x}{\sqrt{x^2+7x+12}} < 0$. Відповідь. $(3;\infty)$.

7.13 $\dfrac{3x+15}{\sqrt{x^2-5x-24}} > 0$. Відповідь. $(-5;-3)\cup(8;\infty)$.

7.14 $\sqrt{2x+10} < 3x-5$. Відповідь. $(3;\ \infty)$.

7.15 $\sqrt{(x-3)(x+1)} > 3(x+1)$. Відповідь. $(-\infty;\ -1)$.

7.16 $\sqrt{(x+4)(2x-1)} < 2(x+4)$. Відповідь. $[0,5;\ \infty)$.

7.17 $\sqrt{x^2-x-12} < x$. Відповідь. $[4;\ \infty)$.

Третій рівень

7.18 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\le 1$. Відповідь. $[3;\ \infty)$.

7.19 $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\ge 2$. Відповідь. $\left[4;\ 4\dfrac{9}{16}\right]$

7.20 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\le 1$. Відповідь. $\varnothing$.

7.21 $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\ge 0$. Відповідь. $\varnothing$.

7.22 $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x+5}<0$. Відповідь. $[4;\ 5)$

2. Розв'язування ірраціональних нерівностей загальним методом

*Приклад 1***.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1}>1+2x$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність загальним методом. Розглянемо функцію $f(x)=1+2x-\sqrt{x+1}$. Її область визначення – інтервал $[-1;\infty)$. Нулі функції знайдемо із рівняння $\sqrt{x+1}=1+2x$; $x+1=1+4x+4x^2$; $x=0$ або $x=-0{,}75$. Безпосередньою підстановкою у рівняння, переконуємося, що його коренем є лише $x=0$. Цей корінь ділить область визначення на два проміжки. Визначимо знак функції на кожному проміжку.

1) $x\in[-1;0)$ $f(-1)=1-2-0<0$. Отже, при $x\in[-1;0)$ $f(x)<0$.

2) $x\in(0;\infty)$ $f(1)=1+2-\sqrt{2}>0$. Отже, при $x\in(0;\infty)$ $f(x)>0$.

Відповідь. $x\in[-1;0)$.

*Приклад 2***.** Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}<1$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність загальним методом. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1$. Її область визначення – інтервал $[1;\infty)$. Нулі функції знайдемо із рівняння $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

Щоб розв'язати одержане рівняння, введемо заміну $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt{x-1}=b$. В нових змінних рівняння набуде вигляду $a+b=1$. Ще одне рівняння, яке пов'язує a і b, одержимо, додавши почленно такі рівняння: $2-x=a^3$ та $x-1=b^2$. Отже, $a^3+b^2=1$. Одержали таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}a+b=1,\\ a^3+b^2=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1-b,\\ (1-b)^3+b^2=1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1-b,\\ b^3-4b^2+3b=0.\end{cases}$$

Коренями останнього рівняння є $b_1=0,\ b_2=1,\ b_3=3$. Повертаючись до заміни, знаходимо $\sqrt{x-1}=0$, або $\sqrt{x-1}=1$, або $\sqrt{x-1}=3$. Звідки $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=10$. Ці точки поділяють область визначення на три проміжки. Визначимо знак функції на кожному з них.

1) $x\in(1;2)$ $f(1{,}5)=\sqrt[3]{1{,}5}+\sqrt{0{,}5}-1>0$. Отже, при $x\in(1;2)$ $f(x)>0$.

2) $x\in(2;10)$ $f(3)=\sqrt[3]{-1}+\sqrt{2}-1<0$. Отже, при $x\in(2;10)$ $f(x)<0$.

3) $x\in(10;\infty)$ $f(29)=\sqrt[3]{-27}+\sqrt{28}-1>0$. Отже, при $x\in(10;\infty)$ $f(x)>0$.

Відповідь. $x \in (2;10)$.

Це важливо!

Під час розв'язування ірраціональних нерівностей загальним методом дотримуються наступного алгоритму:

1. Звести нерівність до виду *f(x)>0* (або *f(x)<0*, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$).
2. Знайти ОДЗ нерівності.
3. Розв'язати рівняння *f(x)*=0, тобто знайти нулі функції.
4. Поділити ОДЗ нерівності знайденими коренями рівняння на проміжки знакосталості.
5. Визначити знак функції *f(x)* на кожному з утворених проміжків.

Розв'язком нерівності буде об'єднання тих проміжків, на яких значення функції додатні (для нерівності *f(x)>0*). Якщо ж нерівність нестрога, то до числа її розв'язків обов'язково входять нулі функції.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

<u>*Перший рівень*</u>

7.23 $(x-3)\sqrt{x^2+4x+3} \geq 0$. Відповідь. $\{-3\} \cup \{-1\} \cup [3;\infty)$.

7.24 $(x^2+4x+3)\sqrt{x+5} \leq 0$. Відповідь. $\{-5\} \cup [-3;-1]$.

7.25 $\sqrt{2x^2+7x+50} \geq x-3$. Відповідь. $(-\infty;\ \infty)$.

7.26 $\sqrt{x^2-5x+6} \leq x+4$. Відповідь. $\left[-\frac{10}{13};\ 2\right] \cup [3;\ \infty)$.

7.27 $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$. Відповідь. $(-\infty;-2) \cup \left[5;\ 5\frac{9}{13}\right)$.

7.28 $\frac{3}{x}+1 < \sqrt{\frac{9}{x^2}-3}$. Відповідь. $\left(-\sqrt{3};\ 0\right)$.

<u>*Другий рівень*</u>

7.29 $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5}$. Відповідь. $\varnothing$.

7.30 $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}-2\sqrt{x} \geq 0$. Відповідь. $\varnothing$.

7.31 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6} > \sqrt{5-x}+\sqrt{3x+4}$. Відповідь. $\left[-\frac{4}{3};-\frac{1}{2}\right) \cup (1;5]$.

<u>*Третій рівень*</u>

7.32 $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2$. Відповідь. $(-\infty;-2] \cup (0;\ \infty)$.

7.33 $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1$. В-дь. $(-2;-1] \cup \left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

7.34 $\sqrt[3]{x+5}+2 > \sqrt[3]{x-3}$. Відповідь. $(-\infty;\ \infty)$.

7.35 $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} < 2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$. Відповідь. $(0;\ \infty)$.

3. *Розв'язування ірраціональних нерівностей за допомогою заміни змінних*

<u>*Приклад 1*</u>**.** Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1+2x$.

Розв'язання. Покладемо $\sqrt{x+1} = y$, $(y \ge 0)$, тоді $x = y^2 - 1$. Одержимо систему нерівностей

$$\begin{cases} y > 2y^2 - 1, \\ y \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}5 < y < 1, \\ y \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le y < 1.$$

Повертаючись до заміни, дістанемо $0 \le \sqrt{x+1} < 1 \Leftrightarrow 0 \le x+1 < 1 \Leftrightarrow -1 \le x < 0$.

Відповідь. $x \in [-1;0)$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{3-4x} + \sqrt[3]{10+4x} < \sqrt[3]{4}$.

Розв'язання. Відокремимо один з коренів та запишемо нерівність у такому вигляді: $\sqrt[3]{3-4x} < \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10+4x}$. Піднесемо почленно одержану нерівність до третього степеня $\left(\sqrt[3]{3-4x}\right)^3 < \left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10+4x}\right)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-4x < 4 - 3\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{10+4x} + 3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{(10+4x)^2} - 10 - 4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{2(10+4x)}\right)^2 - 6\sqrt[3]{2(10+4x)} - 9 > 0$. Введемо заміну $\sqrt[3]{2(10+4x)} = y$. Одержимо нерівність

$$y^2 - 2y - 3 > 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < -1, \\ y > 3. \end{array}\right.$$

Повернемося до заміни та розв'яжемо одержані нерівності.

1) $\sqrt[3]{2(10+4x)} < -1 \Leftrightarrow 2(10+4x) < -1 \Leftrightarrow x < -2\frac{5}{8}$.

2) $\sqrt[3]{2(10+4x)} > 3 \Leftrightarrow 2(10+4x) > 27 \Leftrightarrow x > \frac{7}{8}$.

Відповідь. $x \in \left(-\infty; -2\frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; \infty\right)$.

<u>**Це важливо!**</u>

Під час розв'язування ірраціональних нерівностей за допомогою заміни змінних слід пам'ятати, що у випадку, якщо новою змінною ми позначаємо корінь парної кратності, то на нову змінну накладається додаткова умова $(y \ge 0)$ (приклад 1).

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

<u>*Перший рівень*</u>

7.35 $\quad x - \sqrt{x} - 2 < 0$. Відповідь. $[0;4)$.

7.36 $\quad x + 1 \ge \sqrt{x+7}$. Відповідь. $[2;\infty)$.

7.37 $x^2+\sqrt{x^2+11}<31.$ Відповідь. $(-5;\ 5)$.

<u>*Другий рівень*</u>

7.38 $x^2+5x+4<5\sqrt{x^2+5x+28}$. Відповідь. $(-9;\ 4)$.

7.39 $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}>0$. Відповідь. $(-\infty;-4)\cup(1;\ \infty)$

7.40 $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2\le 3x+7$. Відповідь. $[-1;\ 4]$.

7.41 $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}\ge\dfrac{7}{12}$. В-дь. $(-\infty;-2)\cup[20{,}5;\infty)$.

7.42 $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$. Відповідь. $\left(-\infty;-4+2\sqrt{5}\right)$.

<u>*Третій рівень*</u>

7.43 $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0$. Відповідь. $(2;\ 8)$.

7.44 $\sqrt[3]{x+5}+2>\sqrt[3]{x-3}$. Відповідь. $(-\infty;\ \infty)$.

4. Використання властивостей функцій до розв'язування ірраціональних нерівностей

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати нерівність

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\sqrt{x}-\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le 0.$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень даної нерівності.

$$\begin{cases}x^2-4x+3\ge 0,\\ 8x-2x^2-6\ge 0,\\ x>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+3\ge 0,\\ -2\left(x^2-4x+3\right)\ge 0,\\ x>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+3\ge 0,\\ x^2-4x+3\le 0,\\ x>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=3,\end{array}\right.\\ x>0.\end{cases}$$

Як бачимо, ОДЗ складається лише з двох точок $x_1=1,\ x_2=3$. Перевіримо, чи є ці числа розв'язками нерівності.

Якщо $x=1$, то $\left(\sqrt{1^2-4+3}+1\right)\sqrt{1}-\frac{1}{1}\left(\sqrt{8-2\cdot 1^2-6}+1\right)=1-1=0$. Отже, $x=1$ є розв'язком нерівності.

Якщо $x=3$, то $\left(\sqrt{3^2-4\cdot 3+3}+1\right)\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{8\cdot 3-2\cdot 3^2-6}+1\right)=\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}>0$.

Тобто нерівність не виконується.

Відповідь. 1.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x}+1>1{,}4$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у першому підкореневому виразі. Нерівність набуде вигляду $\sqrt{(x+1{,}5)^2+1{,}75}+\sqrt{x}+1>1{,}4$. Область допустимих значень даної нерівності - множина невід'ємних дійсних чисел. На ОДЗ нерівності, тобто при $x\ge 0$ функція $f(x)=\sqrt{(x+1{,}5)^2+1{,}75}+\sqrt{x}+1$ зростає, при чому свого найменшого значення вона набуває при $x=0$. А оскільки $f(0)=3>1{,}4$, то розв'язком даної нерівності є множина усіх невід'ємних дійсних чисел.

Відповідь. $[0;\infty)$.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати нерівність $\dfrac{2}{x^2-2x+3}>1+\sqrt{x^2-4x+5}$.

Розв'язання. Оцінимо значення лівої та правої частин нерівності. Так як $x^2-2x+3=x^2-2x+1+2=(x-1)^2+2\ge 2$, то $0<\dfrac{2}{x^2-2x+3}\le 1$. А оскільки $x^2-4x+5=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1\ge 1$, то $1+\sqrt{x^2-4x+5}\ge 2$. Отже, нерівність розв'язків не має.

Відповідь. $\varnothing$.

<u>**Це важливо!**</u>

У деяких випадках використання властивостей функцій (скінченність області визначання (приклад1), обмеженість функції (приклад 2), монотонність та інші дають можливість спростити розв'язування рівнянь і нерівностей, зокрема ірраціональних.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

7.45 $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$. Відповідь. $\varnothing$.

7.46 $\sqrt{17-4x}+\sqrt{x-5}\le\sqrt{13x+1}$. Відповідь. $\varnothing$.

7.47 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\le 1$. Відповідь. $\varnothing$.

7.48 $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}\ge 7$. Відповідь. $[5;\infty)$.

7.49 $\sqrt{17-4x}+\sqrt{x-5}\le\sqrt{13x+1}$. Відповідь. $\varnothing$.

7.50 $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\ge 0$. Відповідь. $\varnothing$.

7.51 $\sqrt{-x^2+2x-1}+\sqrt{x}<\sqrt{2}$. Відповідь. 1.

7.52 $\dfrac{3}{x^2+2x+2}>2{,}1+\sqrt{x^2-6x+10}$ Відповідь. $\varnothing$.

7.53 $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+2\right)\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{10x-2x^2-12}+2\right)\ge 0$. Відповідь. 2; 3.

7.54 $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}>(x-1)^4(x-7)$. Відповідь. $\varnothing$.

7.55 $\sqrt{2x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-4x+5}<1{,}9$. Відповідь. $\varnothing$.

Розв'язати нерівності графічно

7.56 $\dfrac{1}{x}\ge\sqrt{x}$. Відповідь. $(0;1]$.

7.57 $\sqrt{x-1} \geq 2$. Відповідь. $[5;\infty)$.

7.58 $\sqrt{x+2} > x$. Відповідь. $[-2;2)$.

7.59 $\sqrt{x+1} > \sqrt{x-1}$. Відповідь. $[1;\infty)$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

7.60 Розв'язати нерівності (1-10) та встановити відповідність між нерівностями та їхніми розв'язками

1. $\dfrac{\sqrt{17-5x-2x^2}}{x+3} > 0$.	**А)** $\left[2{,}5;\ \dfrac{-5+\sqrt{149}}{2}\right)$.
2. $\sqrt{9x-20} < x$.	**Б)** $(-3;\ 1)$.
3. $\sqrt{x^2-4x} > x-3$.	**В)** $(-1;\ 3]\cup[3{,}5;\ 7{,}5)$.
4. $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} \leq 7$.	**Г)** $\left[\dfrac{20}{9};4\right)\cup(5;\ \infty)$.
5. $\sqrt{x+6} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-5}$.	**Д)** $(2;\ \infty)$.
6. $2x^2 - \sqrt{(x-3)(2x-7)} < 13x+9$.	**Е)** $[-3;5]$.
7. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} < x+1$.	**Є)** $(1;1{,}5)\cup(2;\infty)$.
8. $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{6-x} \geq \sqrt{2}$.	**Ж)** $\left(-\infty;-\dfrac{13}{6}\right]\cup[3;\ \infty)$.
9. $(x-3)\sqrt{x^2-4} \leq x^2-9$.	**З)** $[2;\ 6]$.
10. $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x-1} \geq \sqrt[3]{2x-3}$.	**І)** $(-\infty;\ 0]\cup(4{,}5;\ \infty)$.

Розв'язати нерівності

7.61 $\sqrt{2\sqrt{7}+x} - \sqrt{2\sqrt{7}-x} > \sqrt[4]{28}$.

7.62 $2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \geq 2\sqrt{x-3}$.

7.63 $\sqrt{x+6} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-5}$.

7.64 $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} - 2\sqrt{x} \geq 0$.

7.65 $\sqrt{2\sqrt{7}+x} - \sqrt{2\sqrt{7}-x} > \sqrt[4]{28}$.

7.66 $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2} < x-8$.

7.67 $(1+x^2)\sqrt{x^2+1} > x^2-1$.

7.68 $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$.

7.69 $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

7.70 $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x} > 2$.

7.71 $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}$.

7.72 $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3} > \dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

7.73 $\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x}+1 > 1{,}4$.

7.74 $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1} < 1$.

<u>Вихідний тест</u> для самоперевірки знань та умінь з теми: „Розв'язування ірраціональних нерівностей"

<u>*Перший рівень*</u>

Розв'язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $(2x-6)\sqrt{x+1} < 0$.

А) $(-\infty;3)$; **Б)** $(-\infty;3]$; **В)** $[-1;+\infty)$; **Г)** (-1;3); **Д)** інша відповідь.

2. $(4x-6)\sqrt{x^2+6} \ge 0$.

А) $[1{,}5;\infty)$; **Б)** $\varnothing$; **В)** $(-\infty;\infty)$; **Г)** інша відповідь.

3. $\sqrt{3x^2+10x+7} \ge 2$.

А) $\left[-3;-\dfrac{1}{3}\right]$; **Б)** $(-\infty;-3]\cup\left[-\dfrac{1}{3};\infty\right)$; **В)** $\left(-\infty;-2\dfrac{1}{3}\right]\cup[-1;\infty)$; **Г)** $\left[-2\dfrac{1}{3};-1\right]$.

4. $3x-\sqrt{2x+1} \ge -1$.

А) $[-4/9;0]$; **Б)** $(-\infty;-4/9)\cup(0;+\infty)$; **В)** $[-1/3;\infty)$; **Г)** $[-1/2;-1/3]$; **Д)** $[0;\infty)$.

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \ge \dfrac{1}{3}$.

А) $[9;\infty)$; **Б)** $[0;\infty)$; **В)** $(0;\infty)$; **Г)** $(0;9]$; **Д)** інша відповідь.

<u>*Другий рівень*</u>

Розв'язати нерівності

1. $\dfrac{\sqrt{17-5x-2x^2}}{x+3} > 0$.

2. $\sqrt{9x-20} < x$.

3. $2x^2-\sqrt{(x-3)(2x-7)} < 13x+9$.

4. $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2} < x-8$.

5. $(x-3)\sqrt{x^2-4} \le x^2-9$.

<u>Третій рівень</u>

Розв'язати нерівності

1. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x+5}<0$.

2. $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{2}$.

3. $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}>2$.

4. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

5. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}<2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

Важливі нотатки!

Тема 8. ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

Вхідний тест для самоперевірки залишкових знань з теми

Розв'язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $8^{x+5} \ge 32^{3-x}$.

А) $[2{,}5;\infty)$; **Б)** $[1{,}25;\infty)$; **В)** інша відповідь.

2. $\left(\frac{1}{25}\right)^{x} > \frac{1}{125}$.

А) $(-\infty;1{,}5]$; **Б)** $[1{,}5;\infty)$; **В)** $[3;\infty)$; **Г)** інша відповідь.

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ge 2^{2-x}$.

А) $[-2;1]$; **Б)** $(-\infty;-2]\cup[1;\infty)$; **В)** $[1;2]$; **Г)** $(-\infty;1]\cup[2;\infty)$.

4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x+3}{2x-4}} \ge 1$.

А) (-3; 2); **Б)** $(-\infty;-3]\cup[2;\infty)$; **В)** $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$; **Г)** $[-3;2)$.

5. $4^x - 2\cdot 2^x - 8 > 0$.

А) $(-\infty;-2)\cup(4;\infty)$; **Б)** $(1;2)$; **В)** $(-\infty;1)\cup(2;\infty)$; **Г)** $(2;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

Під час розв'язування показникових нерівностей досить часто використовуються наступні теореми, які випливають з властивостей показникової функції:

Теорема 1. Якщо $a>1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Теорема 2. Якщо $0<a<1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Теорема 3. $(h(x))^{f(x)} > (h(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x)>1, \\ f(x)>g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0<h(x)<1, \\ f(x)<g(x). \end{cases} \end{array}\right.$.

1. Розв'язування показникових нерівностей за допомогою рівносильних перетворень

Приклад 1. Розв'язати нерівність $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

Розв'язання. Ця нерівність рівносильна такій:

$2^{2x-5}\left(2^4+2^2-1\right) > 2^{3-x}\left(2^4+2^2-1\right)$ або $2^{2x-5} > 2^{3-x}$. Звідси

$2x-5>3-x;\ 3x>8;\ x>2\frac{2}{3}.$

Відповідь. $x\in\left(2\frac{2}{3};\infty\right).$

<u>*Приклад 2*</u>**.** Розв'язати нерівність $3\cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}}-27^{2x}>0$.

Розв'язання. Зведемо степені до основи 3. Одержимо $3\cdot 3^{2\cdot\frac{3x^2+2}{x}}>3^{6x}$, $3^{\frac{6x^2+4}{x}+1}>3^{6x}$. Згідно теореми 1 остання нерівність рівносильна такій дробово-раціональній нерівності: $\frac{6x^2+4}{x}+1>6x$; $\frac{6x^2+4+x-6x^2}{x}>0$; $\frac{x+4}{x}>0$. Звідки знаходимо, що $x\in(-\infty;-4)\cup(0;\infty)$.

Відповідь. $x\in(-\infty;-4)\cup(0;\infty)$.

<u>*Приклад 3*</u>**.** Розв'язати нерівність $3^{x^2+2}-5^{x^2-1}>5^{x^2+1}+3^{x^2-1}$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді $3^{x^2+2}-3^{x^2-1}>5^{x^2+1}+5^{x^2-1}$ та винесемо спільні множники в обох частинах нерівності за дужки $3^{x^2-1}(3^3-1)>5^{x^2-1}(5^2+1)$. Одержимо $3^{x^2-1}\cdot 26>5^{x^2-1}\cdot 26$. Поділивши обидві частини нерівності на $5^{x^2-1}\cdot 26$ ($5^{x^2-1}\cdot 26>0$), одержимо $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-1}>1\Leftrightarrow x^2-1<0\Leftrightarrow (x-1)(x+1)<0$. Отже, $x\in(-1;1)$.

Відповідь. $x\in(-1;1)$.

<u>*Приклад 4.*</u> Розв'язати нерівність $2^x\cdot x-2^{x+2}-4x+16\geq 0$.

Розв'язання. Розкладемо на множники ліву частину нерівності $2^x(x-4)-4(x-4)\geq 0$; $(x-4)(2^x-4)\geq 0$. Оскільки добуток двох виразів додатний, якщо обидва множники мають один і той самий знак, то потрібно розглянути два випадки:

1) $\begin{cases}x-4\geq 0,\\ 2^x-4\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4,\\ x\geq 2;\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 4.$

2) $\begin{cases}x-4\leq 0,\\ 2^x-4\leq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 4,\\ x\leq 2;\end{cases}\Leftrightarrow x\leq 2.$

Відповідь. $x\in(-\infty;2]\cup[4;\infty)$.

<u>*Приклад 5.*</u> Розв'язати нерівність $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}<2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}+2x+6$.

Розв'язання. Перенесемо всі доданки в ліву частину нерівності $4x^2+3^{\sqrt{x}+1}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}-2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}-2x-6<0$ та розкладемо вираз у лівій частині нерівності на множники $4x^2-2x-6+3\cdot 3^{\sqrt{x}}+x\cdot 3^{\sqrt{x}}-2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}}<0$; $2(2x^2-x-3)-3^{\sqrt{x}}(2x^2-x-3)<0$; $(2x^2-x-3)(2-3^{\sqrt{x}})<0$. Оскільки добуток двох множників від'ємний, якщо множники мають різні знаки, то потрібно розглянути два можливих випадки:

1) $\begin{cases}2x^2-x-3>0,\\2-3^{\sqrt{x}}<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x+1)(x-1{,}5)>0,\\3^{\sqrt{x}}>2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1,\\x>1{,}5,\end{array}\right.\\\sqrt{x}>\log_3 2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1,\\x>1{,}5,\end{array}\right.\\x>\log_3^2 2;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>1{,}5.$

2) $\begin{cases}2x^2-x-3<0,\\2-3^{\sqrt{x}}>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x+1)(x-1{,}5)<0,\\3^{\sqrt{x}}<2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<1{,}5,\\\sqrt{x}<\log_3 2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1<x<1{,}5,\\x\geq 0,\\x<\log_3^2 2;\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\leq x<\log_3^2 2.$

Об'єднуючи розв'язки, одержимо $x\in\left[0;\log_3^2 2\right)\bigcup\left(1{,}5;\infty\right)$.

Відповідь. $x\in\left[0;\log_3^2 2\right)\bigcup\left(1{,}5;\infty\right)$.

<u>Приклад 6.</u> Розв'язати нерівність $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$.

Розв'язання. Очевидно, що $x=3$ не є розв'язком нерівності. Використовуючи монотонність показникової функції, замінимо дану нерівність рівносильною сукупністю двох систем (теорема 3):

1) $\begin{cases}x-2>1,\\x^2-6x+8>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3,\\(x-2)(x-4)>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3,\\\left[\begin{array}{l}x<2,\\x>4;\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x>4.$

2) $\begin{cases}0<x-2<1,\\x^2-6x+8<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2<x<3,\\(x-2)(x-4)<0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2<x<3,\\2<x<4;\end{cases} \Leftrightarrow 2<x<3.$

Об'єднуючи розв'язки, одержимо $x\in(2;3)\cup(4;\infty)$.

Відповідь. $x\in(2;3)\cup(4;\infty)$.

<u>Це важливо!</u>

Розв'язування показникових нерівностей за допомогою рівносильних перетворень ґрунтується на теоремах 1-3, які випливають з властивостей показникової функції. Оскільки показникова функція з основою більшою за одиницю зростає, тобто більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, то з нерівності $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ за умови $a>1$ випливає, що $f(x)>g(x)$.

Якщо ж основа показникової функції - число з інтервала $(0;1)$, то така функція спадає, тобто більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, тобто, якщо $0<a<1$, то $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

Якщо ж в основа змінна (приклад 5), то слід розглядати два можливих випадки: основа більша за одиницю, основа належить проміжку $(0;1)$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

Перший рівень

8.1 $6^{3-x} < 216$. Відповідь. $(0;\ \infty)$.

8.2 $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2x} < 4^3$. Відповідь. $(-\infty;1)$.

8.3 $3^{\frac{x+1}{x}} > 3$. Відповідь. $(0;\infty)$.

8.4 $8 \cdot 2^{x^2-3x} < (0{,}5)^{-1}$. Відповідь. $(1;2)$.

8.5 $(0{,}25)^{3-0{,}5x^2} \le 8$. Відповідь. $[-3;3]$.

8.6 $\dfrac{2^x - 4}{2x^2+3} > 0$. Відповідь. $(2;\infty)$.

Другий рівень

8.7 $2^x \cdot 5^x > 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$. Відповідь. $(-\infty;\ 1{,}5)$.

8.8 $2^{x^2-6x-2{,}5} > 16\sqrt{2}$. Відповідь. $(-\infty;\ -1) \cup (7;\ \infty)$.

8.9 $0{,}008^x + 5^{1-3x} + 0{,}04^{-\frac{3}{2}(x+1)} < 30{,}04$. Відповідь. $\left(-\frac{1}{3};\ \infty\right)$.

8.10 $\sqrt{27} \cdot 3^{-x^2+5x} < \dfrac{\sqrt{243}}{3^{x+1}}$. Відповідь. $(-\infty;\ 0) \cup (6;\ \infty)$.

8.11 $(3x^2+2x-1)(3-2^x) > 0$. Відповідь. $(-\infty;\ -1) \cup (\frac{1}{3};\ \log_2 3)$.

8.12 $35^{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot 13^{2\sqrt{x^2-1}} > 35^{x-\sqrt{x^2-1}}$. Відповідь. $(-\infty;-1) \cup (1;\ \infty)$.

Третій рівень

8.13 $\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}}\right)^{x-\sqrt{x}} > \left(3-\sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}}$. Відповідь. $(0;\ \infty)$.

8.14 $0{,}3^{2+4+6+...+2x} > 0{,}3^{72}\ \ (x \in N)$. Відповідь. 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

8.15 $(2x-1)^x \ge (2x-1)^{x^2-2}$. Відповідь. $[1;\ 2]$.

2. Розв'язування показникових нерівностей загальним методом

Приклад 1. Розв'язати нерівність $(3^{x-2}-1)\sqrt{x^2-2x-8} \ge 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо нерівність загальним методом. Для цього розглянемо функцію $f(x) = (3^{x-2}-1)\sqrt{x^2-2x-8}$. Її область визначення задається умовою $x^2-2x-8 \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) \ge 0$. Звідки $x \in (-\infty;-2] \cup [4;\infty)$.

Щоб знайти нулі функції, розв'яжемо рівняння $(3^{x-2}-1)\sqrt{x^2-2x-8} = 0$, яке рівносильне наступній системі:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3^{x-2}-1=0, \\ x^2-2x-8=0, \end{array}\right. \\ x^2-2x-8 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2,\ x=4, \end{array}\right. \\ x^2-2x-8 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Розглянемо проміжки $(-\infty;-2)$ та $(4;\infty)$. З'ясуємо знак функції на кожному з них: 1) якщо $x\in(-\infty;-2)$, то $f(-3)=\left(3^{-3-2}-1\right)\sqrt{(-3)^2-2\cdot(-3)-8}<0$, тобто при $x\in(-\infty;-2)$ $f(x)<0$; 2) якщо $x\in(4;\infty)$, то $f(5)=\left(3^{5-2}-1\right)\sqrt{5^2-10-8}>0$, тобто при $x\in(4;\infty)$ $f(x)>0$.

Отже, розв'язками даної нерівності є множина $x\in\{-2\}\cup[4;\infty)$.

Відповідь. $x\in\{-2\}\cup[4;\infty)$.

Це важливо!

Під час розв'язування нерівностей за допомогою загального методу дотримуються наступного алгоритму:

1. Звести нерівність до виду $f(x)>0$ (або $f(x)<0,\ f(x)\ge 0,\ f(x)\le 0$).
2. Знайти ОДЗ нерівності.
3. Розв'язати рівняння $f(x)=0$, тобто знайти нулі функції $f(x)$.
4. Поділити ОДЗ нерівності знайденими коренями рівняння на проміжки знакосталості.
5. Визначити знак функції $f(x)$ на кожному з утворених проміжків.

Розв'язком нерівності буде об'єднання тих проміжків, на яких значення функції додатні (для нерівності $f(x)>0$). Якщо ж нерівність нестрога, то до числа її розв'язків обов'язково входять нулі функції.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

Другий рівень

8.16 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3x}+5^{3(x+1)}-625^{\frac{3}{4}(x-1)}<15\,749$. Відповідь. $(-\infty;1)$.

8.17 $\sqrt{3^{x-54}}-7\sqrt{3^{x-58}}\le 162$. Відповідь. $(-\infty;66]$.

8.18 $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2}{3}(x-2)}>52$. Відповідь. $(3;\infty)$.

8.19 $\dfrac{3^{x+1}-27}{x^2-4x+3}<0$. Відповідь. $(-\infty;1)\cup(2;3)$.

8.20 $\left(3^x-27\right)\sqrt{x^2+4x+3}\ge 0$. Відповідь. $\{-3\}\cup\{-1\}\cup[3;\infty)$.

8.21 $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9$. Відповідь. $(2;\infty)$.

8.22 $25\cdot 2^x-10^x+5^x>25$. Відповідь. $(0;2)$.

Третій рівень

8.23 $(2x+7)\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(2^{3+x}+5\cdot 2^{1+x}-3\cdot 2^x-30\right)<0$. Відповідь. $(-2;1)$.

8.24 $(x+3)^{x^2-5x+4}<1$. Відповідь. $(-3;-2)\cup(1;4)$.

8.25 $\left(x^2-8x+16\right)^{x-6}<1$. Відповідь. $(-\infty;3)\cup(5;6)$.

3. *Розв'язування показникових нерівностей за допомогою заміни змінної*

Приклад 1. Розв'язати нерівність $5\cdot 3^{2x}+15\cdot 5^{2x-1}\le 8\cdot 15^{x}$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у наступному вигляді $5\cdot 3^{2x}+15\cdot 5^{2x}\cdot\dfrac{1}{5}-8\cdot 3^{x}\cdot 5^{x}\le 0$ та поділимо її почленно на 5^{2x}. Оскільки $5^{2x}>0$, то одержимо нерівність $5\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2x}-8\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x}+3\le 0$, рівносильну заданій. Покладемо $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x}=y$, де $y>0$, та перейдемо до системи

$$\begin{cases}5y^2-8y+3\le 0,\\ y>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\left(y-\dfrac{3}{5}\right)(y-1)\le 0,\\ y>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{5}\le y\le 1,\\ y>0;\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{5}\le y\le 1.$$

Повернувшись до заміни, матимемо $\dfrac{3}{5}\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x}\le 1\Leftrightarrow 0\le x\le 1$.

Відповідь. $x\in[0;1]$.

*Приклад 2***.** Розв'язати нерівність $\sqrt{2\cdot 5^{x}-1}>5^{x}-2$.

Розв'язання. Покладемо $5^{x}=y$ ($y>0$), одержимо $\sqrt{2y-1}>y-2$. Отримали ірраціональну нерівність, яка рівносильна сукупності наступних двох систем нерівностей:

$$1)\ \begin{cases}y>0,\\ y-2\ge 0,\\ 2y-1>(y-2)^2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 2,\\ y^2-6y+5<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 2,\\ (y-1)(y-5)<0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 2,\\ 1<y<5;\end{cases}\Leftrightarrow 2\le y<5.$$

$$2)\ \begin{cases}y>0,\\ y-2<0,\\ 2y-1\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<2,\\ y\ge\dfrac{1}{2};\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le y<2.$$

Об'єднавши розв'язки, одержимо $\dfrac{1}{2}\le y<5$, або $\dfrac{1}{2}\le 5^{x}<5\Leftrightarrow\log_5\dfrac{1}{2}\le x<1$.

Відповідь. $x\in\left[\log_5\dfrac{1}{2};1\right)$**.**

Це важливо!

Під час розв'язування показникових нерівностей за допомогою заміни змінних необхідно пам'ятати, що оскільки показникова функція набуває лише додатних значень, то на нову змінну слід накласти обмеження (приклад 1 та приклад 2) та слідкувати за рівносильністю перетворень нерівностей.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

<u>Перший рівень</u>

8.24 $\quad \dfrac{1}{3^x+5} < \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$. Відповідь. $(-1;\,1)$.

8.25 $\quad 5^{2x+1} > 5^x + 4$. Відповідь. $(0;\,\infty)$.

8.26 $\quad 4^{2x+1} + 2^{2x+6} < 4\cdot 8^{x+1}$. Відповідь. Ø.

8.27 $\quad 36^x - 2\cdot 18^x - 8\cdot 9^x > 0$. Відповідь. $(2;\,\infty)$.

<u>Другий рівень</u>

8.28 $\quad 4^{x+1,5} + 6^x < 9^{x+1}$. Відповідь. $(0;\,\infty)$.

8.29 $\quad 2^{2x+2} + 6^x - 2\cdot 3^{2x+2} > 0$. Відповідь. $(-\infty;\,\log_{1,5} 0,5)$.

8.30 $\quad 5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$. Відповідь. $(0;\,1)$.

8.31 $\quad 2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$. Відповідь. $(2;\,\infty)$.

<u>Третій рівень</u>

8.32 $\quad \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} - 3\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-1} - \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-2} + \dfrac{5}{4} > 0$. Відповідь. $(0;\,\infty)$.

8.33 $\quad 7^{3x} + 1 > 7^{x-1}(55\cdot 7^x - 41)$. Відповідь. $(-\infty;\,0)\cup(1;\,\infty)$.

8.34 $\quad 2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+1} - 2 \le 0$. Відповідь. $(-\infty;\,\log_2(1+\sqrt{3}))$.

4. *Використання властивостей функцій до розв'язування показникових нерівностей*

<u>Приклад 1.</u> Розв'язати нерівність $2^x + 3^x + 4^x + 5^x > 54$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + 5^x - 54$. Вона є монотонно зростаючою на множині дійсних чисел. Оскільки $f(2) = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 54 = 0$, то $x = 2$ - єдиний нуль функції $f(x)$, і, отже, $f(x) > 0$, при $x > 2$.

Відповідь. $x \in (2;\infty)$.

<u>Приклад 2.</u> Розв'язати нерівність $3^x + 4^x < 5^x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини нерівності на 5^x, $5^x > 0$. Одержимо нерівність $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x < 1$, рівносильну заданій. Розглянемо функцію $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^x - 1$. Вона є монотонно спадною на множині дійсних чисел, тобто кожного свого значення функція набуває лише в одній точці. Оскільки $f(2) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = 0$, то $x = 2$ - єдиний нуль функції $f(x)$, і, отже, $f(x) < 0$, коли $x > 2$.

Відповідь. $x \in (2;\infty)$.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати нерівність $7^x + 7^{-x} \le 2 - x^2$.

Розв'язання. Оцінимо значення лівої та правої частини нерівності. $7^x + 7^{-x} \ge 2$, як сума додатних обернених величин. Окрім того, $7^x + 7^{-x} = 2$, якщо $7^x = 7^{-x} = 1$, тобто при $x = 0$. Значення лівої частини нерівності $2 - x^2 \le 2$. При чому, $2 - x^2 = 2$ при $x = 0$. Тобто, дана нерівність має єдиний розв'язок $x = 0$.

Відповідь. 0.

<u>*Приклад 4.*</u> Розв'язати нерівність $\dfrac{1-x}{1+x} < 2^x$.

Розв'язання. Область допустимих значень заданої нерівності – множина всіх дійсних чисел, окрім $x = -1$. Розіб'ємо її на проміжки $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup(0;\infty)$ та оцінимо значення лівої та правої частини нерівності на кожному з проміжків.

Якщо $x \in (-\infty;-1)$, то $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} < 0,$ а $g(x) = 2^x > 0$, тобто нерівність виконується при будь-якому значенні x з цього проміжку.

Якщо $x \in (-1;0]$, то $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1+x-2x}{1+x} = \dfrac{1+x}{1+x} - \dfrac{2x}{1+x} = 1 - \dfrac{2x}{1+x} > 1,$ а $g(x) = 2^x < 1$, тобто нерівність не виконується.

Якщо $x \in (0;\infty)$, то $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} = 1 - \dfrac{2x}{1+x} < 1,$ а $g(x) = 2^x > 1$, тобто будь-яке значення x з цього проміжку є розв'язком нерівності.

Відповідь. $x \in (-\infty;-1)\cup(0;\infty)$.

<u>**Це важливо!**</u>

Як бачимо, знання властивостей функцій (зокрема таких як монотонність, обмеженість, скінченність області визначення та ін.) допомагає не лише під час розв'язування рівнянь, а й в процесі розв'язування нерівностей.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

8.37 $2^x + 3^x + 4^x < 99$. Відповідь. $(-\infty;3)$.

8.38 $7^x - 3^x > 40$. Відповідь. $(2;\infty)$.

8.39 $125^x - 35 < 90^x$. Відповідь. $(-\infty;2)$.

8.40 $2^{x-1} \le 2 - x$. Відповідь. $(-\infty;1]$.

8.41 $2^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}} + 4^{\sqrt{x}+2} > 20$. Відповідь. $(0;\infty)$.

8.42 $x \cdot 2^x < 8$. Відповідь. $(-\infty;2)$.

8.43 $4^{x^2-4x+5} < 3$. Відповідь. $\varnothing$.

Розв'язати нерівності графічно

8.44 $2^{|x|} > 4.$ Відповідь. $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.

8.45 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < x+2.$ Відповідь. $(-1;\infty)$.

8.46 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > \sqrt{x+5}.$ Відповідь. $[-5;-1)$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

8.47 Розв'язати нерівності (1-10) та встановити відповідність між нерівностями та їхніми розв'язками

1. $(0,(4))^{x^2-1} > (0,(6))^{x^2+6}$. **А)** $[\log_5 7;\ 2]$.

2. $32^{3\left(x^3-8\right)} \geq 8^{19\left(2x-x^2\right)}$ **Б)** $(-\infty;2)\cup(2;3]$.

3. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$. **В)** $\left[-5;-\frac{4}{5}\right]\cup[2;\infty)$.

4. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} > 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3}$. **Г)** $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)\cup(2;3)$.

5. $\dfrac{3^x - 27}{x^2 - 4x + 4} \leq 0.$ **Д)** $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(1;\ \infty)$.

6. $\left(3^x - 9\right)\cdot\sqrt[4]{x^2 - 2x - 8} \leq 0$. **Е)** $(-\infty;-2]\cup\{4\}$.

7. $8^{x+1} - 8^{2x-1} > 30$. **Є)** $(3;\ \infty)$.

8. $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1.$ **Ж)** $(-\infty;\log_{0,6} 3{,}9)$.

9. $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1.$ **З)** $\left(\frac{2}{3};\ \log_8 60\right)$.

10. $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}$. **І)** $(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

Розв'язати нерівності

8.48 $3^{-x-1}\cdot 4^{-x-1} > 12\cdot(144^{2x-1})^2$.

8.49 $\left(\frac{3}{5}\right)^{13x^2} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+36} < \left(\frac{25}{9}\right)^{-6x^2}$.

8.50 $0{,}02^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}+\ldots} < \sqrt[3]{0{,}02^{3x^2+5x}} < 1$.

8.51 $\sqrt{13^x - 5} \leq \sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x + 5}$.

8.52 $2^{3x} - 8\cdot 2^{-3x} - 6\cdot\left(2^x - 2^{1-x}\right) > 1$.

8.53 $4^{x^{2-3x}}\cdot 3^{\frac{x^2-4x+1}{x+1}} < \frac{1}{48}$.

8.54 $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -3x^2 + 6x - 4$.

8.55 $1 - x^8 < 2^{x^2+1}$.

<u>Вихідний тест</u> для самоперевірки знань та умінь з теми: „Розв'язування показникових нерівностей"

<u>Перший рівень</u>

Розв'язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{x-3}{x+3}} \geq 1$.

А) $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; **Б)** $(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$; **В) (-3; 3)**; **Г)** $(-3;3]$; **Д)** інша відповідь.

2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-4x+3} \geq 4^{1-x}$.

А) $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$; **Б)** $[1;2]$; **В)** $(1;4)$; **Г)** $[1;4]$; **Д)** інша відповідь.

3. $2^x - 3\cdot 2^{x-1} + 2^{x-3} > -48$.

А) $(-\infty;\infty)$; **Б)** $(-\infty;1)$; **В)** $(-\infty;7)$; **Г)** $(7;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

4. $5^{2x+1} - 26\cdot 5^x - 5 < 0$.

А) $\left(-5;\frac{1}{5}\right)$; **Б)** $(-\infty;-5)\cup\left(\frac{1}{5};\infty\right)$; **В)** $(-\infty;-1)$; **Г)** $(-1;1)$; **Д)** інша відповідь.

5. $\frac{3^x - 27}{1-x} \geq 0$.

А) $(1;3]$; **Б)** $[3;\infty)$; **В)** $(-\infty;1)\cup[3;\infty)$; **Г)** $(-\infty;3]$; **Д)** інша відповідь.

<u>Другий рівень</u>

Розв'язати нерівності

1. $6^{\frac{x+5}{x^2-9}} \geq 1$.
2. $4^x + 2^{x+3} > 20$.
3. $25\cdot 0{,}04^{2x} > \left(0{,}2^{3-x}\right)^x$.
4. $\frac{3^x - 27}{x^2 - 4x + 4} \leq 0$.
5. $5\cdot 3^{2x} + 15\cdot 5^{2x-1} > 8\cdot 15^x$.

<u>Третій рівень</u>

Розв'язати нерівності

1. $3\cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}} - 27^{2x} > 0$.
2. $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 3^{x^2-1} + 5^{x^2+1}$.
3. $(x+3)^{x^2-5x+4} < 1$.
4. $2^{4x+1} - 9\cdot 2^{3x} + 7\cdot 2^{2x+1} - 9\cdot 2^x + 2 < 0$.
5. $x^2\cdot 6^{-x} + 6^{\sqrt{x}+2} \geq x^2\cdot 6^{\sqrt{x}} + 6^{2-x}$.

Тема 9. ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Вхідний тест для самоперевірки залишкових знань з теми

Розв'язати нерівності

1. $\log_{\frac{1}{8}}(3x-2) > -2.$

А) $\left(\frac{2}{3};\infty\right)$; **Б)** $(22;\infty)$; **В)** $\left(\frac{2}{3};22\right)$; **Г)** $(-\infty;22)$; **Д)** інша відповідь.

2. $\log_5 5x < 2.$

А) $(0;\infty)$; **Б)** $(5;\infty)$; **В)** $(-\infty;5)$; **Г)** $(0;5)$; **Д)** інша відповідь.

3. $\log_5 \dfrac{3x+9}{2x+4} \le 0.$

А) $[-5;-2)$; **Б)** $(-\infty;-5]\cup(-2;\infty)$; **В)** $[-5;-2]$; **Г) (-5; -3)** ; **Д)** $[-5;-3)$.

4. $\sqrt{x}\cdot\log_7(2-x) > 0.$

А) $(0;\infty)$; **Б)** $(0;2)$; **В)** $(0;1)$; **Г)** $(-\infty;2)$; **Д)** інша відповідь.

5. $\log_5^2 x - \log_5 x - 2 < 0.$

А) $\left(\frac{1}{5};\infty\right)$; **Б)** $\left(\frac{1}{5};25\right)$; **В)** $(-\infty;25)$; **Г)** $(25;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

У процесі розв'язування логарифмічних нерівностей часто використовуються наступні теореми, які випливають із властивостей логарифмічної функції:

Теорема 1. Якщо $a > 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Теорема 2. Якщо $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Теорема 3. $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$

1. *Розв'язування логарифмічних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень*

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати нерівність $\log_{0,5}(x-2) > \log_{0,5}(7-2x)$.

Розв'язання. Скористаємось теоремою 2. Одержимо

$$\log_{0,5}(x-2) > \log_{0,5}(7-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 7-2x, \\ x-2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x > 2; \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Відповідь. $x \in (2;3)$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати нерівність $\log_8(x^2-4x+3) < 1$.

Розв'язання. Згідно з теоремою 1 маємо

$$\log_8(x^2-4x+3) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3 < 8, \\ x^2-4x+3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-5) < 0, \\ (x-1)(x-3) > 0. \end{cases}$$

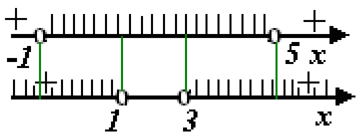

Рис. 1

З рис. 1 видно, що розв'язками останньої системи, а отже і вихідної нерівності є проміжки $x \in (-1;1) \cup (3;5)$.

Відповідь. $x \in (-1;1) \cup (3;5)$.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати нерівність $\log_{0,2}(x^2-x-20) + \log_5(x+4) > 0$.

Розв'язання. Оскільки $0,2 = \dfrac{1}{5} = 5^{-1}$, то

$\log_{0,2}(x^2-x-20) = -\log_5(x^2-x-20)$. Тобто нерівність можна записати у вигляді $\log_5(x+4) - \log_5(x^2-x-20) > 0$. Використавши формулу для логарифма частки та врахувавши область визначення нерівності, одержимо систему нерівностей, рівносильну заданій нерівності.

$$\begin{cases} \log_5 \dfrac{x+4}{x^2-x-20} > 0, \\ x+4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 \dfrac{x+4}{(x+4)(x-5)} > 0 \\ x > -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-5} > 1, \\ x > -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-6}{x-5} < 0, \\ x > 4. \end{cases}$$

З останньої системи знаходимо розв'язки заданої нерівності $x \in (5;6)$.

Відповідь. $x \in (5;6)$.

<u>*Приклад 4.*</u> Розв'язати нерівність $\sqrt{-x^2+7x-10} \cdot \log_2(x-3) \le 0$.

Розв'язання. Оскільки перший множник на області визначення набуває невід'ємних значень та нерівність нестрога, то потрібно розглянути два випадки.

1) $\begin{cases} \log_2(x-3) \le 0, \\ -x^2+7x-10 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-3 \le 1, \\ x^2-7x+10 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \le 4, \\ 2 \le x \le 5; \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \le 4.$

2) $\begin{cases} -x^2+7x-10=0, \\ x-3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=5, \end{array}\right. \Leftrightarrow x=5. \\ x>3; \end{cases}$

Об'єднуючи розв'язки цих систем, одержимо $x \in (3;4] \cup \{5\}$.

Відповідь. $x \in (3;4] \cup \{5\}$.

<u>*Приклад 5.*</u> Розв'язати нерівність $\log_{x-2}\left(x^2-8x+15\right)>0$.

Розв'язання. Згідно з теоремою 3 дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} x-2>1, \\ x^2-8x+15>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x^2-8x+14>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ \left(x-4+\sqrt{2}\right)\left(x-4-\sqrt{2}\right)>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x>4+\sqrt{2}$.

2) $\begin{cases} 0<x-2<1, \\ x^2-8x+15<1 \\ x^2-8x+15>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x<3, \\ \left(x-4+\sqrt{2}\right)\left(x-4-\sqrt{2}\right)<0, \\ (x-3)(x-5)>0; \end{cases} \Leftrightarrow 4-\sqrt{2}<x<3.$

Об'єднавши розв'язки обох систем, одержимо $x \in \left(4-\sqrt{2};3\right) \cup \left(4+\sqrt{2};\infty\right)$.

Відповідь. $x \in \left(4-\sqrt{2};3\right) \cup \left(4+\sqrt{2};\infty\right)$.

<u>Це важливо!</u>

Під час розв'язування логарифмічних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень часто використовуються теореми 1-3, які випливають з властивостей логарифмічної функції. Оскільки логарифмічна функція визначена на множині додатних дійсних чисел та є зростаючою у випадку, якщо основа більша за одиницю, тобто більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, то з нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a>1$, випливає, що $f(x)>g(x)>0$, тобто

якщо $a>1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$

Якщо ж основа логарифмічної функції - число з інтервала $(0;1)$, то така функція спадає на області визначення, тобто більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу. Отже, з нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $0<a<1$, (врахувавши область визначення функції), випливає, що $0<f(x)<g(x)$, тобто

якщо $0<a<1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

Перший рівень

9.1 $\log_2(2-5x)>1$. Відповідь. $(-\infty;0)$.

9.2 $\log_3(3-x)<1$. Відповідь. $(0;3)$.

9.3 $\log_{0,3}\dfrac{x-3}{1-x}<0$. Відповідь. $(1;2)$.

9.4 $\log_{\frac{1}{4}}(2-x)>\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{2}{x+1}$. Відповідь. $(-1;\ 0)\cup(1;\ 2)$.

Другий рівень

9.5 $\log_{\frac{1}{2}}(5+4x-x^2)>-3$. Відповідь. $(-1;\ 1)\cup(3;\ 5)$.

9.6 $\log_{0,1}(x^2+75)-\log_{0,1}(x-4)\le -2$. Відповідь. $(4;\ 5]\cup[95;\ \infty)$.

9.7 $\log_{\frac{1}{5}}(2x+1)<\log_{\frac{1}{5}}(16-x^2)+1$. Відповідь. $(1;\ 4)$.

9.8 $\log_{\pi}(x+27)-\log_{\pi}(16-2x)<\log_{\pi}x$. Відповідь. $(3;\ 4{,}5)$.

9.9 $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1$. Відповідь. $\left(-1;\ \dfrac{91}{9}\right)$.

9.10 $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\dfrac{2}{3}$. Відповідь. $(3;\ 4)\cup(4;\ \infty)$.

9.11 $\dfrac{1}{2}+\log_9 x-\log_3 5x>\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$. Відповідь. $(0;\ \infty)$.

Третій рівень

9.12 $\log_{0,2}^2(x-1)>2$. Відповідь. $(1;\ 1{,}04)\cup(26;\ \infty)$.

9.13 $\log_2((x-3)(x+2))+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}3$. Відповідь. $(3;\ 7)$.

9.14 $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{7-3x}{x+2}-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x+2)>\log_{\frac{1}{2}}4$. Відповідь. $\left(-2;\ \dfrac{13}{6}\right)$.

9.15 $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\le 2{,}5$. Відповідь. $[1;\ 4]$.

9.16 $2{,}25^{\log_2(x^2-3x-10)}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)}$. Відповідь. $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ \infty)$.

9.17 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)}<1$. Відповідь. $\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\ 3\right)$.

9.18 $\log_x(x-1)\ge 2$. Відповідь. Ø.

9.19 $\log_x\sqrt{21-4x}>1$. Відповідь. $(1;\ 3)$.

9.20 $\log_x\dfrac{x+3}{x-1}>1$. Відповідь. $(1;\ 3)$.

9.21 $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x>2$. Відповідь. $(2;\infty)$.

2. Розв'язування логарифмічних нерівностей загальним методом

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'яжіть нерівність $\log_{x+2}\left(3x^2+x+4\right)>2$.

Розв'язання. Запишемо нерівність у вигляді $\log_{x+2}\left(3x^2+x+4\right)-2>0$ і розглянемо функцію $f(x)=\log_{x+2}\left(3x^2+x+4\right)-2$.

1. Знайдемо область визначення нерівності із системи $\begin{cases}3x^2+x+4>0,\\ x+2>0,\\ x+2\neq 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in R,\\ x>-2,\\ x\neq -1,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<-1,\\ x>-1.\end{array}\right.$
2. Знайдемо нулі функції *f(x),* розв'язавши рівняння *f(x)*=0, тобто $\log_{x+2}\left(3x^2+x+4\right)=2$. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}3x^2+x+4=(x+2)^2,\\ x+2>0,\\ x+2\neq 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x=0,\\ x>-2,\\ x\neq -1,\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=1{,}5.\end{array}\right.$
3. Нулі функції розбили область визначення функції на проміжки $(-2;-1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1{,}5)$, $(1{,}5;\ \infty)$, на кожному з яких функція f неперервна, не має нулів та зберігає сталий знак.
4. Визначаємо знаки функції на кожному з проміжків:

$f(-1{,}5)=\log_{0{,}5}9{,}25-2<0$, отже, при $x\in(-2;-1)$ $f(x)<0$.

$f(-0{,}5)=\log_{1{,}5}4{,}25-2>0$, отже, при $x\in(-1;\ 0)$ $f(x)>0$.

$f(1)=\log_3 8-2<0$, отже, при $x\in(0;\ 1{,}5)$ $f(x)<0$.

$f(2)=\log_4 18-2>0$, отже, при $x\in(1{,}5;\ \infty)$ $f(x)>0$.

Відповідь. $x\in(-1;\ 0)\cup(1{,}5;\ \infty)$.

<u>**Це важливо!**</u>

Під час розв'язування логарифмічних нерівностей за допомогою загального методу дотримуються алгоритму, який було розглянуто в попередніх параграфах, а саме, потрібно

1. Звести нерівність до виду $f(x)>0$ (або $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$).
2. Знайти ОДЗ нерівності.
3. Розв'язати рівняння $f(x)=0$, тобто знайти нулі функції $f(x)$.
4. Поділити ОДЗ нерівності знайденими коренями рівняння на проміжки знакосталості.
5. Визначити знак функції $f(x)$ на кожному з утворених проміжків.

Розв'язком нерівності буде об'єднання тих проміжків, на яких значення функції додатні (для нерівності $f(x)>0$). Якщо ж нерівність нестрога, то до числа її розв'язків обов'язково входять нулі функції.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

Перший рівень

9.22 $\log_3 \frac{3}{x-1} > \log_3(5-x)$. Відповідь. $(1;\ 2)\cup(4;\ 5)$.

9.23 $\log_x(16-6x-x^2)\le 1$. Відповідь. $(0;1)\cup\left[\frac{-7+\sqrt{113}}{2};\ 2\right)$.

9.24 $\log_{x^2-3} 729 > 3$. Відповідь. $(-2\sqrt{3};-2)\cup(2;\ 2\sqrt{3})$.

9.25 $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0{,}3 > 0$. Відповідь. $(1;\ \infty)$.

Другий рівень

9.26 $2^{\log_8(x^2-6x+9)} \le 3^{2\log_x \sqrt{x}-1}$. Відповідь. $[2;\ 3)\cup(3;\ 4]$.

9.27 $\log_5 \sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5 > 1$. Відповідь. $(1;\ 4)$.

9.28 $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$. Відповідь. $(0;1)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right)$.

Третій рівень

9.29 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} \le 1$. Відповідь. $\left[-1;-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\ 1\right]$.

9.30 $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1) < 1$. Відповідь. $(2^{-28};\ 1)$.

9.31 $\log_5\log_3\log_2(2^{2x}-3\cdot 2^x+10) > 0$. Відповідь. $(-\infty;0)\cup(1;\ \infty)$.

9.32 $\log_2(1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x) < 1$. Відповідь. $\left(\frac{1}{3};\ 3\right)$.

3. Розв'язування логарифмічних нерівностей за допомогою заміни змінних

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\log_3(2x^2-x)-1\le\log_3(6x-3)-\log_3^2 x$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді $\log_3^2 x+\log_3(2x^2-x)-\log_3 3-\log_3(6x-3)\le 0$ та скористаємося формулою логарифма частки, врахувавши область визначення нерівності. Одержимо

$$\begin{cases} \log_3^2 x + \log_3 \dfrac{2x^2 - x}{3(6x-3)} \le 0, \\ 2x^2 - x > 0, \\ x > 0, \\ 6x - 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^2 x + \log_3 \dfrac{(2x-1)x}{9(2x-1)} \le 0, \\ x > 0{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3^2 x + \log_3 x - 2 \le 0, \\ x > 0{,}5. \end{cases}$$

Щоб розв'язати першу нерівність системи, введемо заміну $\log_3 x = y$. Одержимо нерівність $y^2 + y - 2 \le 0$; $(y+2)(y-1) \le 0$. Її розв'язком є $-2 \le y \le 1$. Повернувшись до заміни, матимемо $-2 \le \log_3 x \le 1$, або $\frac{1}{9} \le x \le 3$. Враховуючи, що $x > 0{,}5$, остаточно знайдемо $x \in (0{,}5;3]$.

Відповідь. $x \in (0{,}5;3]$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати нерівність $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \ge 162$.

Розв'язання. Оскільки $3^{\log_3^2 x} = 3^{\log_3 x \cdot \log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$, то дана нерівність набуде вигляду $2x^{\log_3 x} \ge 162$, $x^{\log_3 x} \ge 81$. Прологарифмуємо обидві частини останньої нерівності за основою 3. Одержимо $\log_3^2 x \ge 4$, або $(\log_3 x + 2)(\log_3 x - 2) \ge 0$. Розв'язком останньої нерівності є об'єднання двох проміжків

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x \le -2, \\ \log_3 x \ge 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le \dfrac{1}{9}, \\ x > 0, \end{cases} \\ x \ge 9; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \dfrac{1}{9}, \\ x \ge 9. \end{array}\right.$$

Відповідь. $x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; \infty)$.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати нерівність $\log_{3x^2}(27x) \cdot \log_{3x} 9x \le 2$.

Розв'язання. Область визначення нерівності визначається умовами

$$\begin{cases} x > 0, \\ 3x \ne 1, \\ 3x^2 \ne 1. \end{cases}$$

Перейдемо в логарифмах до основи 3, використавши формулу переходу до нової основи. Одержимо нерівність, рівносильну заданій на ОДЗ $\frac{\log_3 27x}{\log_3 3x^2} \cdot \frac{\log_3 9x}{\log_3 3x} \le 2$; $\frac{3 + \log_3 x}{1 + 2\log_3 x} \cdot \frac{2 + \log_3 x}{1 + \log_3 x} \le 2$. Введемо заміну $\log_3 x = y$. Матимемо

$$\frac{y+3}{2y+1} \cdot \frac{y+2}{y+1} - 2 \le 0 \Leftrightarrow \frac{3y^2 + y - 4}{(2y+1)(y+1)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)\left(y + \frac{4}{3}\right)}{\left(y + \frac{1}{2}\right)(y+1)} \ge 0.$$

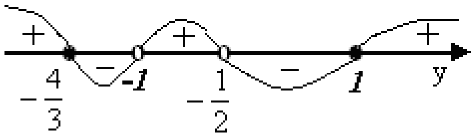

Рис. 2

З рис. 2 видно, що розв'язками останньої нерівності є об'єднання трьох проміжків, а саме

$$\left[\begin{array}{l} y \le -\dfrac{4}{3}, \\ -1 < y < -\dfrac{1}{2}, \\ y \ge 1. \end{array}\right. \text{ Повертаючись до заміни } \left[\begin{array}{l} \log_3 x \le -\dfrac{4}{3}, \\ -1 < \log_3 x < -\dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x \ge 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}, \\ \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$

Відповідь. $x \in \left(0; \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right] \cup \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup [3; \infty)$.

Це важливо!

Оскільки дуже часто під час розв'язування логарифмічних нерівностей ввести заміну вдається лише після деяких перетворень даної нерівності, то необхідно слідкувати за рівносильністю перетворень на кожному кроці.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

Перший рівень

9.33 $\lg^2 x + 6 < 5\lg x$. Відповідь. $(100;\ 1000)$.

9.34 $\lg^2 x + \lg x > 2$. Відповідь. $(0; 0{,}01) \cup (10;\ \infty)$.

9.35 $\dfrac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \le \dfrac{1}{2}$. Відповідь. $(0;\ 0{,}5) \bigcup [\sqrt{2};\ \infty)$.

Другий рівень

9.36 $\log_2 x - 2\log_x 2 + 1 \ge 0$. Відповідь. $[0{,}25; 1) \cup [2; \infty)$.

9.37 $\lg x + 6\log_x 10 \le 5$. Відповідь. $(0;\ 1) \bigcup [100; 1000]$.

9.38 $\log_x 5\sqrt{5} - 1{,}25 > (\log_x \sqrt{5})^2$. Відповідь. $(\sqrt[5]{5};\ 5)$.

9.39 $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1) \cdot \log_{\sqrt{2}} \dfrac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$. В-дь. $(\log_5(\sqrt{2} + 1);\ \log_5 3)$.

9.40 $\log_2 (x+1)^2 + \log_2 \sqrt{x^2 + 2x + 1} > 6$. Відповідь. $(-\infty; -5) \bigcup (3;\ \infty)$.

Третій рівень

9.41 $(\log_2 x)^4 - \left(\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^3}{8}\right)^2 + 9\log_2 \dfrac{32}{x^2} < 4\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2$. В-дь. $\left[\dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{4}\right) \bigcup (4;\ 8)$.

9.42 $0{,}4^{\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_3 3x} > 6{,}25^{\log_3 x^2 + 2}$. Відповідь. $\left(0;\ \frac{1}{3}\right) \cup (243;\ \infty)$.

9.43 $2^{\log_{0,5}^2 x} + x^{\log_{0,5} x} > 2{,}5$. Відповідь. $(0;\ 0{,}5) \cup (2;\ \infty)$.

9.44 $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$. Відповідь. $(0{,}01;\ \infty)$.

9.45 $9^{\log_2(x-1)-1} - 8 \cdot 5^{\log_2(x-1)-2} > 9^{\log_2(x-1)} - 16 \cdot 5^{\log_2(x-1)-1}$. Відповідь. $(1; 5)$.

9.46 $x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} < 17$. Відповідь. $(0{,}25;\ 1) \cup (1;\ 4)$.

9.47 $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0$. Відповідь. $(3;\ \infty)$.

9.48 $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$. Відповідь. $(0;\ 2) \cup (4;\ \infty)$.

9.49 $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$. Відповідь. $\left(2^{-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2^{\sqrt{2}})$.

4. Використання властивостей функцій до розв'язування логарифмічних нерівностей

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати нерівність $\log_3 x < \sqrt{1 - x^4}$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності задається наступними умовами:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x^4 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -1 \le x \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le 1.$$

Очевидно, що $x = 1$ не є розв'язком нерівності. Якщо ж $x \in (0;1)$, то $\log_3 x < 0$, а $\sqrt{1 - x^4} > 0$, тобто нерівність виконується при будь якому значенні x з цього проміжку.

Відповідь. $x \in (0;1)$.

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати нерівність

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}\left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \le 0.$$

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ нерівності.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \ge 0, \\ 8x - 2x^2 - 6 \ge 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) \ge 0, \\ (x-1)(x-3) \le 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array} \right.$$

Як бачимо ОДЗ нерівності складається лише з двох значень $x = 1$ та $x = 3$. Підставимо ці значення у нерівність, одержимо:

1) якщо $x = 1$, то $0 \le 0$, тобто правильну нерівність;
2) якщо $x = 3$, $\log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \log_5 3 - 1 + \frac{1}{3} = \log_5 3 - \frac{2}{3}$.

Визначимо знак числа $\log_5 3-\frac{2}{3}$. Нехай $\log_5 3-\frac{2}{3}>0$, тоді $3\log_5 3-2>0$, або $\log_5 27-2>0$. Отримали правильну нерівність, отже $\log_5 3-\frac{2}{3}>0$, тобто при $x=3$ нерівність не виконується. Отже, нерівність має один розв'язок $x=1$.

Відповідь. $x=1$.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв'язати нерівність $x\log_5 x<50$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності – множина додатних дійсних чисел. На цій множині функція $f(x)=x\log_5 x$ є неперервною та зростаючою, як добуток неперервних, зростаючих функцій. Легко помітити, що в нуль дана функція перетворюється при $x=25$. Якщо ж $x\in(0;25)$, то $x\log_5 x<50$, тобто будь-яке значення x з цього проміжку задовольняє нерівність. Якщо ж $x\in(25;\infty)$, то $x\log_5 x>50$, тобто нерівність не виконується.

Відповідь. $x\in(0;25)$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

9.50 $\log_2 x-1<\sqrt{4-x^2}$. Відповідь. $(0;\ 2)$.

9.51 $1-\sqrt{x^4-16}\ge\log_2 x$. Відповідь. 2.

9.52 $\log_2(x+3)+\log_4\frac{x-5}{x+3}-2\log_{\frac{1}{2}}(5-x)\ge 3.$ Відповідь. $\varnothing$.

9.53 $\left(\sqrt{14x-2x^2-24}+2\right)\log_x\frac{2}{x}\ge\left(\frac{2}{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-7x+12}+2\right)\le 0$. Відповідь. 4.

9.54 $\log_3\sqrt{x^2+3}>2x-x^2.$ Відповідь. $\mathbb{R}$.

9.55 $\log_5\left(25-x^2\right)<3^x+3^{-x}.$ Відповідь. $(-5;\ 5)$.

Розв'язати нерівності графічно

9.56 $\left|\log_2 x\right|\ge 2.$ Відповідь. $(0;\ 0{,}25)\cup(4;\ \infty)$.

9.57 $x^2-2x+1>\log_{\frac{1}{2}} x.$ Відповідь. $(1;\ \infty)$.

9.58 $\log_2 x>\sqrt{3-x}.$ Відповідь. $(2;3]$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

9.59 Розв'язати нерівності (1-10) та встановити відповідність між нерівностями та їхніми коренями

1. $\log_2\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)<1$. **А)** $(-\infty;\ \log_4(-1+\sqrt{3}))\cup(1{,}5;\ \infty)$.

2. $\log_{0,5}^2 x+\log_{0,5} x-2\le 0$. **Б)** $[0{,}5;\ 4]$.

3. $\log_3(4^x+1)+\log_{4^x+1} 3>2{,}5$. **В)** $[0{,}2;\ 5]$.

4. $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}2,5x}>1$.

5. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x>1$.

6. $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$.

7. $\dfrac{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}{\lg 8-\lg(x-5)}<-1$.

8. $\log_5(x+3)\ge\log_{x+3}625$.

9. $25^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}\le 30$.

10. $\dfrac{1-\log_2(2^{1-x}+15)}{\sqrt{x}-2}>\sqrt{x}+2$.

Г) $\left(2^{-\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(1;2^{\sqrt{2}})$.

Д) $(1;\ 4)$.

Е) $(0;\ 0,4)\cup(1;\ \infty)$.

Є) $(13;\ 29)$.

Ж) $[22;\ \infty)\cup(-2,96;\ -2)$.

З) $(-\sqrt{3};-1,5)\cup(1,5;\ \sqrt{3})$.

І) $(0;\ 4)$.

Розв’язати нерівності

9.60 $0,2^{6-\frac{3}{\log_4 x}}>\sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x-1}}$.

9.61 $\log_3(3^x-1)\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9)<-3$.

9.62 $x+\lg(1+2^x)>x\lg 5+\lg 6$.

9.63 $\log_2(9^x+3^{2x-1}-2^{x+\frac{1}{2}})<x+3,5$.

9.64 $\log_{\frac{1}{5}}x+\log_4 x>1$.

9.65 $\sqrt{1-9\log_{\frac{1}{8}}^2 x}>1-4\log_{\frac{1}{8}}x$.

9.66 $0,3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$.

9.67 $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0$.

9.68 $\log_x\log_2(4^x-12)\le 1$.

9.69 $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(2^{x+2}-4^x)\ge -2$.

9.70 $\dfrac{\lg 7-\lg(8-x^2)}{\lg(x+3)}>0$.

9.71 $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)}>\dfrac{1}{2}$.

9.72 $\dfrac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)}<\dfrac{1}{2}$.

9.73 $\dfrac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}<3$.

9.74 $\log_2 x\cdot\log_3 2x+\log_3 x\cdot\log_2 3x\ge 0$.

9.75 $\log_{0,5}(x+2)\log_2(x+1)+\log_{x+1}(x+2)>0$.

9.76 $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$.

9.77 $\dfrac{1}{\log_{0,5}\sqrt{x+3}}\le\dfrac{1}{\log_{0,5}(x+1)}$.

9.78 $\dfrac{1}{\log_2 x}\le\dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$.

9.79 $\dfrac{3-\log_2(8+4^x)}{1-\sqrt{x}}>2+2\sqrt{x}$.

9.80 $\dfrac{x+1}{\log_2(1+2^x)-1}\le 1$.

<u>Вихідний тест</u> для самоперевірки знань та умінь
з теми: „Розв'язування логарифмічних нерівностей"

<u>Перший рівень</u>

Розв'язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $\log_4(3-x)<2$.

А) $(-\infty;3)$; **Б)** $(-13;\infty)$; **В)** $(-13;3)$; **Г)** $(-\infty;-13)$; **Д)** інша відповідь.

2. $\log_{\frac{1}{5}}(2x-1)>-2$.

А) $(0,5;13)$; **Б)** $(-\infty;13)$; **В)** $(13;\infty)$; **Г)** $(0,5;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

3. $\log_5\dfrac{5x}{3x+4}\ge 1$.

А) $[-2;-4/3)$; **Б)** $(-\infty;-2]\cup(-4/3;\infty)$; **В)** $(-\infty;-2]\cup(0;\infty)$; **Г)** інша відповідь.

4. $\log_{0,7}(2x-5)>\log_{0,7}(x+1)$.

А) $(2,5;\infty)$; **Б)** $(2,5;6)$; **В)** $(-1;6)$; **Г)** $(-\infty;6)$; **Д)** інша відповідь.

5. $\log_3 x+\log_3(x-8)\ge 2$.

А) $(-\infty;-1]\cup[9;\infty)$; **Б)** $(-1;9)$; **В)** $(-\infty;8)$; **Г)** $[9;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

<u>Другий рівень</u>

Розв'язати нерівності

1. $\log^2_{0,2} x-\log_{0,2} x-2<0$.
2. $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0$.
3. $\log_3 x+\log_3(x-1)-1\le\log_3 2$.
4. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\ge -2$.
5. $\log_2(\log_3(2-\log_4 x))<1$.

<u>Третій рівень</u>

Розв’язати нерівності

1. $\log_{x+}(2x+3)<2$.
2. $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{x-1}9>0$.
3. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2$.
4. $\log_{\frac{1}{2}}x+\sqrt{1-4\log_{\frac{1}{2}}^2 x}<1$.
5. $\dfrac{\sqrt{\log_{0,5}^2 x-81}+2}{\log_{0,5}x-1}<1$.

Важливі нотатки!

Тема 10. НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЕМ

***Вхідний тест** для самоперевірки залишкових знань з теми*

Розв'язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $|x-3|<2.$

А) (1:5); **Б)** $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$; **В)** $(-\infty;5)$; **Г)** інша відповідь.

2. $|x+2|>3.$

А) (-5;1); **Б)** $[-5;1]$; **В)** $(-\infty;-5)\cup[1;\infty)$; **Г)** $(-\infty;-5)\cup(1;\infty)$.

3. $|2x+5|>|3x-6|.$

А) $(-\infty;0,2)\cup(11;\infty)$; **Б)** $(0,2;11)$; **В)** $(11;\infty)$; **Г)** $(0,2;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

4. $\left|\dfrac{1}{x}\right|\geq 1.$

А) $[-1;1]$; **Б)** $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$; **В)** $(0;\infty)$; **Г)** $[-1;0)\cup(0;1]$; **Д)** інша відповідь.

5. $|2x-5|>x+4.$

А) $(-\infty;-4)$; **Б)** $\left(\dfrac{1}{3};9\right)$; **В)** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(9;\infty)$; **Г)** $(2,5;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

Основні теоретичні відомості

Під час розв'язування нерівностей, які містять змінну під знаком модуля, можна використовувати наступні твердження:

Теорема 1. $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>-g(x),\\ f(x)<g(x).\end{cases}$

Теорема 2. $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)<-g(x),\\ f(x)>g(x).\end{array}\right.$

Теорема 3. $|f(x)|<|g(x)|\Leftrightarrow(f(x))^2<(g(x))^2.$

Теореми 1 і 2 випливають із геометричного змісту модуля.

1. Розв'язування найпростіших нерівностей з модулем

Приклад 1. Розв'язати нерівність $|x-3|<2$.

Розв'язання. 1й спосіб. Оскільки за означенням модуля числа

$$|x-3|=\begin{cases}x-3, & x-3\geq 0,\\ -(x-3), & x-3<0,\end{cases}$$

то задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0,\\ x-3<2;\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0,\\ -(x-3)<2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3,\\ x<5;\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ x>1.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3\le x<5,\\ 1<x<3.\end{array}\right. \Leftrightarrow 1<x<5.$$

<u>*2й спосіб.*</u> Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні при будь-якому x та $\left(|x-3|\right)^2=(x-3)^2$, то після піднесення обох частин нерівності до квадрата, одержимо нерівність $(x-3)^2<4$, рівносильну даній. Далі маємо $(x-3)^2<4 \Leftrightarrow (x-3-2)(x-3+2)<0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$.

<u>*3й спосіб*</u>. Згідно теореми 1 вихідна нерівність рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases}x-3>-2,\\ x-3<2;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>1,\\ x<5;\end{cases} \Leftrightarrow 1<x<5.\ \textit{Відповідь.}\ x\in(1;5).$$

<u>*Приклад 2.*</u> Розв'язати нерівність $\left|\dfrac{4x-3}{x+2}\right|>2$.

Розв'язання. $$\left|\frac{4x-3}{x+2}\right|>2 \Leftrightarrow \left(\frac{4x-3}{x+2}\right)^2>2^2 \Leftrightarrow \left(\frac{4x-3}{x+2}-2\right)\left(\frac{4x-3}{x+2}+2\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{x+2}\cdot\frac{6x+1}{x+2}>0 \Leftrightarrow (2x-7)(6x+1)(x+2)^2>0.$$

Зобразимо лінію знаків для останньої нерівності та запишемо її розв'язки.

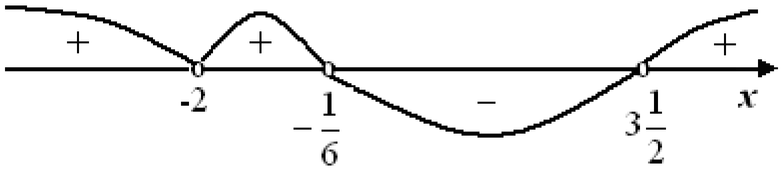

Рис. 1

Отже, $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\dfrac{1}{6}\right)\cup\left(3\dfrac{1}{2};\infty\right)$.

Відповідь. $x\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\dfrac{1}{6}\right)\cup\left(3\dfrac{1}{2};\infty\right)$.

<u>**Це важливо !**</u>

Розв'язувати найпростіші нерівності з модулями можна одним із наступних способів: за означенням модуля, виходячи з геометричного змісту модуля (теореми 1 та 2), використовуючи спеціальні співвідношення (теорема 3) та за загальною схемою, яку розглянемо в наступному пункті.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

<u>*Перший рівень*</u>

10.1 $a)\ |x+5|>11;\quad б)\ |2x-5|<3.$ Відповідь. $a)\ (-\infty;-16)\cup(6;\infty);\ б)\ (1;4)$.

10.2 $а)\ |3x-1|\ge 5;$ $б)\ |2x-4|\le 1.$ Відповідь. $а)\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right]\cup[2;\infty);$ $б)\ [1{,}5;2{,}5]$

10.3 $а)\ |2x-1|<|4x+1|;$ $б)\ |1-3x|\ge|2x+3|.$

Відповідь. $а)\ (-\infty;-1)\cup(0;\infty);$ $б)\ (-\infty;-0{,}4]\cup[4;\infty).$

10.4 $а)\ \left|-\frac{5}{x+2}\right|<\left|\frac{10}{x-1}\right|;$ $б)\ \left|\frac{3}{2x-7}\right|<\left|-\frac{6}{x+4}\right|.$

Відповідь. $а)\ (-\infty;-5)\cup(-1;1)\cup(1;\infty);$ $б)\ (-\infty;-4)\cup(-4;2)\cup(6;\infty)$.

<u>*Другий рівень*</u>

10.5 $\left|5x^2-2x+1\right|<1.$ Відповідь. $(0;0{,}4)$

10.6 $\left|6x^2-2x+1\right|\le 1.$ Відповідь. $\left[0;\frac{1}{3}\right].$

10.7 $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|<3.$ Відповідь. $(-\infty;1)\cup(2{,}2;\infty).$

10.8 $\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right|\ge 2.$ Відповідь. $\left[\frac{-1-\sqrt{11}}{2};-1\right)\cup(-1;1)\cup\left(1;\frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right].$

10.9 $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|>1.$ Відповідь. $(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0).$

10.10 $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|\le 3.$ Відповідь. $(-\infty;-2]\cup[-1;\infty).$

10.11 $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\ge 1.$ Відповідь. $(-\infty;-2)\cup(-2;0]\cup[1{,}6;2)\cup(2;2{,}5].$

2. Розв'язування нерівностей з модулем за загальною схемою

<u>*Приклад 1.*</u> Розв'язати нерівність $|x-1|+|2-x|>3+x$.

Розв'язання. При $x=1$ і $x=2$ вирази, що стоять під знаком модуля, перетворюються в нуль. Ці точки розбивають всю числову пряму на три проміжки. Розглядаючи задану нерівність на кожному з цих проміжків, одержимо сукупність трьох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\1-x+2-x>3+x,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\x-1+2-x>3+x,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\x-1+x-2>3+x;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\x<0,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\x<-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\x>6;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0,\\x\in\varnothing,\\x>6;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0,\\x>6.\end{array}\right.$$

Відповідь. $x\in(-\infty;0)\cup(6;\infty).$

<u>*Приклад 2.*</u> Розв’язати нерівність $\dfrac{2x^2-|x-3|+2}{|x+1|}\le 2$.

Розв’язання. ОДЗ заданої нерівності – це множина всіх дійсних чисел, окрім $x=-1$. Нулі підмодульних виразів – це точки $x=-1$ і $x=3$. Вони розбивають числову пряму на три проміжки. Розглянемо дану нерівність на кожному з цих проміжків. Одержимо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ \dfrac{2x^2+x-3+2}{-x-1}\le 2,\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<3,\\ \dfrac{2x^2+x-3+2}{x+1}\le 2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ \dfrac{2x^2-x+3+2}{x+1}\le 2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ \dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<3,\\ \dfrac{2x^2-x-3}{x+1}\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ \dfrac{2x^2-3x+3}{x+1}\le 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ 2x^2+3x+1\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<3,\\ 2x^2-x-3\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3\\ 2x^2-3x+3\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ -1\le x\ge -0{,}5,\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<3,\\ -1\le x\le 1{,}5,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ x\in\varnothing;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ -1<x\le 1{,}5,\\ x\in\varnothing;\end{array}\right. \Leftrightarrow -1<x\le 1{,}5.$$

Відповідь. $x\in(-1;1{,}5]$.

<u>*Приклад 3.*</u> Розв’язати нерівність $3\sqrt{x+2}\le 6-|2-x|$.

Розв’язання. ОДЗ нерівності – проміжок $[-2;\infty)$. При $x=2$ вираз, що стоїть під знаком модуля, перетворюється в нуль. Ця точка розбиває ОДЗ на два проміжки. Розглядаючи задану нерівність на кожному з цих проміжків, одержимо сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2\le x<2,\\ 3\sqrt{x+2}\le 6+x-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ 3\sqrt{x+2}\le 6-x+2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2\le x<2,\\ 9(x+2)\le x^2+8x+16,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ 8-x\ge 0,\\ 9(x+2)\le x^2-16x+64;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2\le x<2,\\ (x-2)(x+1)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 8,\\ (x-2)(x-23)\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x\le -1,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Відповідь. $x\in[-2;-1]\cup\{2\}$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{3x+9-4\sqrt{3x+5}}+\sqrt{3x+14-6\sqrt{3x+5}}\le 1.$$

Розв'язання. Спробуємо виділити повні квадрати в підкореневих виразах $\sqrt{3x+5-4\sqrt{3x+5}+4}+\sqrt{3x+5-6\sqrt{3x+5}+9}\le 1$. Одержимо $\sqrt{\left(\sqrt{3x+5}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3x+5}-3\right)^2}\le 1$. Або скориставшись тотожністю $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|,\ n\in N$, дістанемо $\left|\sqrt{3x+5}-2\right|+\left|\sqrt{3x+5}-3\right|\le 1$. Введемо заміну $\sqrt{3x+5}=y$, де $y\ge 0$, та одержимо нерівність $|y-2|+|y-3|\le 1$. Нулі підмодульних виразів $y=2$ та $y=3$. Розкриємо знак модуля на кожному з отриманих проміжків.

1) $\begin{cases}0\le y<2,\\ -y+2-y+3\le 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le y<2,\\ y\ge 2;\end{cases}\Leftrightarrow y\in\varnothing.$

2) $\begin{cases}2\le y<3,\\ y-2-y+3\le 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le y<3,\\ 0\cdot y\le 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le y<3,\\ y\in R;\end{cases}\Leftrightarrow 2\le y<3.$

3) $\begin{cases}y\ge 3,\\ y-2+y-3\le 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 3,\\ y\le 3;\end{cases}\Leftrightarrow y=3.$

Об'єднуючи розв'язки, одержимо $2\le y\le 3$, або $2\le\sqrt{3x+5}\le 3$. Звідки знаходимо $4\le 3x+5\le 9\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{4}{3}$.

Відповідь. $x\in\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right]$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\left|3^x-4\right|+\left|x^2-4x+3\right|\le 3^x+4x-x^2-7.$

Розв'язання. ОДЗ нерівності – множина всіх дійсних чисел. Нулі підмодульних виразів - $x=1$, $x=3$, $x=\log_3 4$. Ці точки розбивають числову пряму на чотири проміжки. Розглянемо задану нерівність на кожному з цих проміжків:

1) $\begin{cases}x<1,\\ -3^x+4+x^2-4x+3-3^x-4x+x^2+7\le 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1,\\ 3^x\ge x^2-4x+7.\end{cases}$

Для того, щоб розв'язати отриману нерівність, оцінимо значення виразів, які стоять у лівій та правій частинах нерівності. При $x<1$ $3^x<3$, а $x^2-4x+7=\left(x-2\right)^2+3\ge 3$. Отже, нерівність не має розв'язків на даному проміжку.

2) $\begin{cases}1\le x<\log_3 4,\\ -3^x+4-x^2+4x-3-3^x-4x+x^2+7\le 0;\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x < \log_3 4, \\ 2 \cdot 3^x - 8 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x < \log_3 4, \\ x \ge \log_3 4; \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

3) $\begin{cases} \log_3 4 \le x < 3, \\ 3^x - 4 - x^2 + 4x - 3 - 3^x - 4x + x^2 + 7 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 4 \le x < 3, \\ 0 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \log_3 4 \le x < 3.$

4) $\begin{cases} x \ge 3, \\ 3^x - 4 + x^2 - 4x + 3 - 3^x - 4x + x^2 + 7 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x^2 - 4x + 3 \le 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ 1 \le x \le 3; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Об'єднуючи розв'язки, одержимо розв'язок нерівності $x \in [\log_3 4; 3]$.

Відповідь. $x \in [\log_3 4; 3]$.

<u>Це важливо !</u>

Для розв'язування нерівностей виду $|f_1(x)| + |f_2(x)| + ... + |f_n(x)| > g(x)$ використовується загальна схема розв'язування, яка є видозміненим методом інтервалів. Послідовність дій при розв'язуванні нерівностей за цією схемою наступна:

1. Знайти ОДЗ нерівності.
2. Знайти нулі усіх підмодульних виразів.
3. На ОДЗ нерівності позначити нулі підмодульних виразів і розбити ОДЗ на проміжки.
4. Знайти знаки підмодульних виразів на кожному проміжку, розкрити знаки модулів і знайти розв'язки нерівностей на кожному з цих проміжків.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати нерівності

<u>*Перший рівень*</u>

10.13 $a)|4 - 3x| \ge 2 - x;$ $\quad б)|2x - 3| \ge x + 4.$

Відповідь. $a) (-\infty; 1] \cup [1{,}5; \infty);$ $б) \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [7; \infty).$

10.14 $x^2 + 2|x| - 3 \le 0$. Відповідь. $[-1; 1]$.

10.15 $x^2 + 5|x| - 24 > 0$. Відповідь. $(-\infty; -3) \cup (3; \infty)$.

10.16 $|x| + |x - 1| < 5$. Відповідь. $(-2; 3)$.

10.17 $|x + 1| + |x + 2| > 5$. Відповідь. $(-\infty; -4) \cup (1; \infty)$.

10.18 $|x - 2| - |2x + 1| < 3$. Відповідь. $(-\infty; \infty)$.

<u>*Другий рівень*</u>

10.19 $\left|2x^2 + x + 11\right| \ge x^2 - 5x + 6$. Відповідь. $(-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$.

10.20 $|x - 6| > \left|x^2 - 5x + 9\right|$. Відповідь. $(1; 3)$.

10.21 $|3x - 1| + |2x - 3| - |x + 5| < 2$. Відповідь: $(-0{,}5; 2{,}75)$.

10.22 $\frac{|x+1|}{|x-2|-2}<1$. Відповідь. $(-\infty;-0{,}5)\cup(0;4)$.

10.23 $\frac{x^2-|2x-3|}{x^2-|2-x|}\le 1$. Відповідь. $(-\infty;-2)\cup\left[\frac{5}{3};\infty\right)$.

10.24 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-|x+2|}\ge 81$. Відповідь. $(-\infty;\,-6]\cup[2;\,\infty)$.

10.25 $\log_2|x-5|<3$. Відповідь. $(-3;5)\cup(5;13)$.

10.26 $2^{-x^2}>2^{-|x|}$. Відповідь. $(-1;0)\cup(0;1)$.

10.27 $\log_{|x-1|}\frac{1}{2}\ge 1$. Відповідь. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[1\frac{1}{2};2\right]$.

10.28 $\left|\log_{\sqrt{5}}x-3\right|+\left|\log_5 x-3\right|\ge 3$. Відповідь. $(0;\,5]\cup[125;\,\infty)$.

Третій рівень

10.29 $\left||x-1|+x\right|<3$. Відповідь. $(-\infty;2)$.

10.30 $\left||x-2|-x+3\right|<5$. Відповідь. $(0;\,\infty)$.

10.31 $\left|2x-|x+3|+1\right|>2$. Відповідь. $(-\infty;\,0)\cup(4;\,\infty)$.

10.32 $\left|\sqrt{x^2-2}-1\right|<1$. Відповідь. $\left(-\sqrt{6};-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\sqrt{6}\right)$.

10.33 $\left|\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right|\le 1$. Відповідь. $[1;\infty)$.

10.34 $2-x^2<\sqrt{|x|-3}$. Відповідь. $(-\infty;\,-3]\cup[3;\,\infty)$.

10.35 $\sqrt{2}^{\left||x-3|+1\right|}<64$. Відповідь. $(-8;\;14)$.

10.36 $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}}\le 2$. Відповідь. $[2;\,5{,}2]$.

Розв’язати нерівності графічно

10.37 $|x|+3>|x+3|$. Відповідь. $(-\infty;0)$.

10.38 $|x^3+1|\ge x+1$. Відповідь. $(-\infty;0]\cup[1;\infty)$.

10.39 $\frac{2}{|x|}\ge|x|+1$. Відповідь. $[-1;0)\cup(0;1]$.

Додаткові вправи для систематизації знань у процесі самостійної роботи

10.40 Розв’язати нерівності (1-8) та встановити відповідність між нерівностями та їхніми коренями

1. $\left|x^2-3x-15\right|<2x^2-x$. **А)**. $(-\infty;\,-3)$.

2. $\left|x^2+x+10\right| \le 3x^2+7x+2$. **Б)** $(-\infty;2]\cup[4;\infty)$.

3. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$. **В)** $(-\infty;-4]\cup[1;\infty)$.

4. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\ge 2x$. **Г)** $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right)\cup(3;\infty)$.

5. $\left||2x+1|-5\right|>2$. **Д)** $(-5;-2)\cup(2;3)\cup(3;5)$.

6. $\left|\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-2}\right|\le 1$. **Е)** $(-\infty;0)\cup(5;\infty)$..

7. $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1$. **Є)** $\left[9-4\sqrt{3};9+4\sqrt{3}\right]$

8. $|x-3|^{2x^2-7x}>1$. **Ж)** $(-\infty;0)\cup(2;3)\cup(3;3{,}5)\cup(4;\infty)$.

Розв'язати нерівності

10.41 $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right|+\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-12<0$.

10.42 $1-|x|<\sqrt{x^2-2}$.

10.43 $\sqrt{\dfrac{x}{|x|}-x}>x$.

10.44 $1<3^{\left|x^2-x\right|}<9$.

10.45 $\left|3x^2-2\right|^{\sqrt{1+x}}>\left|3x^2-2\right|^{1+\sqrt{x}}$.

10.46 $\log_2\left|4^x-2^x-2\right|<1$.

10.47 $\log_{0,1}\dfrac{\left|x^2+3x\right|+1}{x^2+|x+2|}\le 0$.

10.48 $\log_{|x+6|}2\cdot\log_2(x^2-x-2)\ge 1$.

10.49 $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$.

10.50 $\log_{x-1}\left|x^2+2x-3\right|>2$.

10.51 $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right)\ge 1$.

10.52 $|x-1|^{\log_2(4-x)}>|x-1|^{\log_2(1+x)}$.

10.53 $\log_{x^2+2x-2}\dfrac{|x+4|-|x|}{x-1}>0$.

<u>Вихідний тест</u> для самоперевірки знань та умінь
з теми: „Розв'язування нерівностей з модулем"

Перший рівень

Розв'язати нерівності та вказати варіант відповіді

1. $|2x-5| > x+4$.

А) $(-\infty;-4)$; **Б)** $\left(\frac{1}{3};9\right)$; **В)** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(9;\infty)$; **Г)** $(2{,}5;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

2. $\left|\sqrt{x}-2\right| < 3$.

А) $[0;\infty)$; **Б)** $(25;\infty)$; **В)** $[0;25]$; **Г)** $[0;25)$; **Д)** інша відповідь.

3. $2^{|x|-1} \le 8$.

А) $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$; **Б)** $(0;4]$; **В)** $[-4;4]$; **Г)** інша відповідь.

4. $\log_2|x-3| > 5$.

А) $(-\infty;-29)\cup(35;\infty)$; **Б)** $(-29;35)$; **В)** $(32;\infty)$; **Г)** $(-29;\infty)$; **Д)** інша відповідь.

5. $|\log_2 x-4| < \log_2 x$.

А) $[0;4]$; **Б)** $(0;16)$; **В)** $(4;\infty)$; **Г)** $(4;16)$; **Д)** інша відповідь.

Другий рівень

Розв'язати нерівності

1. $\left|4x^2-9x+6\right| > -x^2+x-3$.

2. $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \ge 2$.

3. $|x-1|+|2-x| > 3+x$.

4. $\log_{|x-1|}\frac{1}{2} \ge 1$.

5. $1-|x| < \sqrt{x^2-2}$.

Третій рівень

Розв'язати нерівності

1. $|2x-|3-x|-2| \le 4$.

2. $\log_{\frac{1}{2}}|x| \le |x|-1$.

3. $\log_{|x+6|}2\cdot\log_2(x^2-x-2) \ge 1$.

4. $|x-1|^{\log_2(4-x)} > |x-1|^{\log_2(1+x)}$.

5. $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}} \le 2$.

ВІДПОВІДІ ДО ТЕСТІВ

Тема 1. ***Ірраціональні рівняння***

Вхідний тест

1. (1;Г), (2;А), (3;В), (4;Б); **2**.Д; **3**. Г; **4.** Д; **5.** В.

Вихідний тест

Перший рівень. **1.** Б; **2**. В; **3.** А; **4**. Б; **5.** Б, **6**. А; **7.** А; **8**. В; **9**. Г; **10**. Б.

Другий рівень. **1**. 5; **2**. -0,5, 2; **3.** 3; **4.** $\frac{9+\sqrt{73}}{4}$; **5.** 1, 2.

Третій рівень. **1.** 0,25; **2.** 4; **3.** 3; **4.** $\varnothing$; **5.** $[5;8]$.

Тема 2. ***Системи ірраціональних рівнянь***

Вхідний тест

1. Б; **2**. Б; **3.** В; **4.** Б; **5.** Д.

Вихідний тест

Перший рівень. **1.** $(1{,}2;\ 0{,}2)$; **2.** $(6;1)$, $(-1;-6)$; **3.** $(8;0)$; **4.** $(65;3)$.

Другий рівень. **1.** $(0;1)$; **2.** $(3;2),(\frac{17}{27};-\frac{14}{19})$; **3.** $(4;1),(1;4)$.

Третій рівень. **1.** $(1;7),(7;-8),(\frac{49}{64};\frac{41}{8})$. **2.** $(2;3),(\frac{13}{3};-\frac{5}{3})$. **3.** $(\frac{9}{58};-\frac{6}{29};\frac{33}{29})$.

Тема 3. ***Показникові рівняння***

Вхідний тест

1. (1;В), (2;А), (3;Б), (4;Д), (5;Г); **2.** В; **3.** Г; **4.** А; **5.** Г.

Вихідний тест

Перший рівень. .**1.** Б; **2**. Б; **3.** А; **4**. В; **5.** Г; **6**. Г; **7.** А; **8**. Б; **9**. В; **10**. Б.

Другий рівень. **1**. 0; $2\log_3 5$; **2**. $-1;1$; **3.** 3; **4.** 2; **5.** $-3;1;2;3;4$.

Третій рівень. **1.** 1, 3; **2.** 1; 3; **3.** 1, $\log_{3+\sqrt{2}}\left(3-\sqrt{2}\right)$; **4.** $-(1+\log_5 2)$; **5.** 0, 2.

Тема 4. ***Логарифмічні рівняння***

Вхідний тест

1. (1;А), (2;В), (3;Г), (4;Б), (5;Д); **2.** Б; **3.** Б; **4.** В; **5.** В.

Вихідний тест

Перший рівень. .**1.** Б; **2**. В; **3.** Б; **4**. Г; **5.** $\text{В}(\varnothing)$, **6**. А, **7.** А; **8**. В; **9**. В; **10**. В.

Другий рівень. .**1.** 4; **2**. 6; **3.** 2; **4**. $(\varnothing)$; **5.** $\sqrt[5]{5};\ 5$.

Третій рівень. .**1.** 10; **2**. 0,5; 1; **3.** $2^{-1};1;16$; **4**. 0,75; **5.** $\frac{1}{81};3$.

Тема 5. ***Системи показникових та логарифмічних рівнянь***

Вхідний тест

1. Д (1;1); **2**. А; **3.** Б; **4.** Г; **5.** А.

Вихідний тест

Перший рівень. **1.** (3; 2), (2; 3); **2**. (4; 1); **3.** (15; 5), (5; 15).
Другий рівень. **1.** (7; 3); **2.** (3; 2); **3.** (2; 32), (32; 2).
Третій рівень. **1.** (0; 0); **2.** (1; 1), (2; 4), (–2; 4); **3.** (3; 27), (27; 3).

Тема 6. ***Раціональні нерівності***

Вхідний тест

1. Г; **2**. А; **3.** Г; **4.** В; **5.** В.

Вихідний тест

Перший рівень. **1.** Б; **2**. В; **3.** Г; **4.** Г $[-3;-2]\cup(2;3)$;
5. Д $(-3;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.

Другий рівень. **1.** $(-\infty;-6]\cup[-2;\infty)$; **2.** $\left(-\dfrac{5}{3};\,0\right]\cup\left(\dfrac{5}{3};\,\infty\right)$;
3. $[-9;-3)\cup[-2;0)\cup(3;\infty)$; **4.** $\left(-5;-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};1\right)$; **5.** $(-\infty;1)\cup(1;\,2)\cup(2;\,\infty)$

Третій рівень. **1.** $\left[-3;\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}\right]\cup\left[0;\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}\right]\cup\{3\}$; **2.** $[-1;0)\cup(3;6]$;
3. $(-\infty;-2)\cup(-2;3)\cup(3;\infty)$; **4.** $\left[\dfrac{37}{7};6\right)\cup(6;\,7]$; **5.** $(0;\,1)\cup(2;\,3)\cup(5;6)\cup(6;\,7)$.

Тема 7. ***Ірраціональні нерівності***

Вхідний тест

1. Г; **2**. Б; **3.** Г; **4.** В; **5.** Г.

Вихідний тест

Перший рівень. **1.** Г; **2.** А; **3.** Б; **4.** Д; **5.** Г.

Другий рівень. **1.** $(-3;\,1)$; **2.** $\left[\dfrac{20}{9};4\right)\cup(5;\,\infty)$; **3.** $(-1;\,3]\cup[3{,}5;\,7{,}5)$;
4. $(9;\,\infty)$; **5.** $\left(-\infty;-\dfrac{13}{6}\right]\cup[3;\,\infty)$.

Третій рівень. **1.** $[4;5)$; **2.** $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};\,\infty\right)$; **3.** $[-4;16]$; **4.** $(5;\,\infty)$; **5.** $(0;\,\infty)$.

Тема 8. ***Показникові нерівності***

Вхідний тест

1. В $[0;\infty)$; **2**. Г $(-\infty;1{,}5)$; **3.** В; **4.** Г; **5.** Г.

Вихідний тест

Перший рівень. **1.** Г; **2.** Г; **3.** В; **4.** Г; **5.** А.
Другий рівень. **1.** $[-5;-3)\cup(3;\infty)$; **2.** $(1;\infty)$; **3.** $(-2;1)$;
4. $(-\infty;2)\cup(2;3]$; **5.** $(-\infty;0)$.
Третій рівень. **1.** $(-\infty;-4)\cup(0;\infty)$; **2.** $(-1;1)$; **3.** $(-3;-2)\cup(1;4)$;
4. $(-\infty;-1)$; **5.** $[0;6]$.

Тема 9. ***Логарифмічні нерівності***

Вхідний тест

1. В; **2**. Г; **3**. Д; **4**. В; **5.** Б.

Вихідний тест

Перший рівень. **1.** В; **2.** А; **3.** А; **4.** Б; **5.** Г.

Другий рівень. **1.** $(0{,}04;5)$; **2.** $\left(-\infty;\ \frac{7}{3}\right)\cup(3;\ \infty)$; **3.** $(1;3]$;

4. $(-\infty;0]\cup[\log_6 5;\ 1)$; **5.** $(4^{-7};\ 4)$.

Третій рівень. **1.** $(0;\ 1)\cup(3;\ \infty)$; **2.** $(4;\ 10)$; **3.** $(0;\ 0{,}25)\cup(4;\ \infty)$;

4. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\right)\cup(1;\ \sqrt{2}]$; **5.** $\left(2^{-15};\ 2^{-9}\right]\cup\left[2^{9};\ \infty\right)$.

Тема 10. ***Нерівності з модулем***

Вхідний тест

1. А; **2.** В; **3.** Б; **4.** Г; **5.** В.

Вихідний тест

Перший рівень. **1.** В; **2.** Г; **3.** В; **4.** А; **5.** В.

Другий рівень. **1.** $(-\infty;\ \infty)$; **2.** $[1{,}5;\ 2)$; **3.** $(-\infty;0)\cup(6;\infty)$;

4. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[1\frac{1}{2};2\right]$; **5.** $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};\ \infty\right)$.

Третій рівень. **1.** $\left[\frac{1}{3};\ 3\right]$; **2.** $(-\infty;-1]\cup[1;\infty)$; **3.** $(-\infty;\ -7)\cup(-5;\ -2]\cup[4;\ \infty)$;

4. $(-1;\ 0)\cup(1{,}5;\ 2)$; **5.** $[2;\ 5{,}2]$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Алексєєв В. М. Математика. Довідковий повторювальний курс. – К.: Вища шк., 1992. – 495 с.

2. Арендар Т.Б. Ще раз про раціональні рівняння та нерівності // Математика в школах України. – 2007. - № 10 (166).

3. Біла Н.С. Розв'язування логарифмічних рівнянь. Система завдань для самостійного розв'язування // Математика в школах України. – 2006. - №4 (124). – С. 22-26.

4. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 432 с.

5. Варущик Н., Малюгіна К. Реалізація принципів розвивального навчання під час розв'язування показникових та степенево-показникових рівнянь та нерівностей // Математика в школі. – 2005. - № 9. – С. 26-29.

6. Вересова Е. Е. и др. Практикум по решению математических задач. – М.: Просвещение, 1979. - 240 с.

7. Вукулова Т.М., Потапов М.К., Шевкин А.В. Об уравнениях вида $f(x)^{\varphi(x)} = g(x)$ // Математика в школе. – 2008. - №7. – С. 37-40.

8. Горнштейн П.І., Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Екзамен з математики та його підводні рифи. К.: Факт, 1997.

9. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Математика для поступающих в вузы. – 4-е издание. – М.: Дрофа, 2001.

10. Єрмакова О.О. Способи розв'язування показникових рівнянь // Математика в школах України. – 2006. - №3 (123). – С. 24-29.

11. Крючковський В., Хомченко А., Сокуренко Є. Рівняння та нерівності з невідомим під знаком абсолютної величини // Математика в школі. – 2003. - № 6. – С. 34-43.

12. Кучевський М.І. Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять кубічні радикали // Математика в школах України. – 2007. - №12 (168). – С. 17-22.

13. Лапшин А., Контурко В. Сторонні корені у рівняннях, що містять кубічні радикали // Математика в школі. – 2003. - №9. – С. 31-33.

14. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1991.

15. Лось В.М. Взаємно обернені функції і розв'язність рівнянь типу $f(x) = f^{-1}(x)$ // Математика в школі. – 2005. - №1. – С. 42-47.

16. Лось В.М. Нестандартні рівняння: міркуємо разом // Математика в школі. – 2003. - №5. – С. 22-24.

17. Лось В.М., Тихієнко В.П. Математика: Навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач. Навч. посібн. – К.: Кондор, 2004.

18. Мілаєнко О.В. Тригонометрична підстановка в алгебраїчних рівняннях, нерівностях, системах // Математика в школах України. – 2005. - №19-21 (103-105). – С. 68-71.

19. Мілаєнко О.В. Функціональні методи розв'язування рівнянь і нерівностей // Математика в школах України. – 2005. - № 19-21 (103-105). – С. 33-38.

20. Нелін Є.П. Системи рівнянь та нерівностей // Математика в школах України. – 2003. - № 3(15). – С. 5-8.

21. Нелін Є.П. Логарифмічні рівняння // Математика в школах України. – 2003. - № 5(17). – С. 6-10.

22. Нелін Є.П. Логарифмічні нерівності // Математика в школах України. – 2003. - № 6(18). – С. 3-5.

23. Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. – М.: Изд. МГУ, 1991.-144 с.

24. Перехейда О.М., Ушаков Р.П. Розв'язування нерівностей. – Х.: Вид. група «Основа», 2003. – 112 с.

25. Попова С. Розв'язування показникових та логарифмічних нерівностей зі змінною основою // Математика в школах України. – 2004. - № 15 (63). – С. 6-9.

26. Практикум з розв'язування задач з математики / Михайловський В.І., Тарасюк В.Є., Чеканал Є.О. та ін. - 3-тє вид., перероб. і доп. - К.: Вища шк. Головне вид-во, 1989. – 425 с.

27. Резніченко Р. Тригонометричні підстановки // Математика в школі. – 2005. - №1. – С. 36-38.

28. Рекрутняк Т.М. Розв'язання логарифмічних нерівностей, які містять змінну в основі логарифма // Математика в школах України. – 2003. - № 11 (23). – С. 8-11.

29. Репета В. Показникові рівняння // Математика в школі. – 2007. - №8. – С. 42-48.

30. Сафонова І.Я. Розвиток нестандартного мислення учнів у процесі розв'язування рівнянь // Математика в школах України. – 2004. - №35(83). – С. 2-5.

31. Сільвестрова І.А., Фурман М.С. Навчаємось розв'язувати рівняння та нерівності. – Х.: Вид. Группа «Основа», 2004.

32. Ушаков Р.П. Повторювальний курс математики: Посібник для учнів серед. закладів освіти /За ред. М.Й. Ядренка. – 2-ге вид., випр. і доп. – К.: Техніка, 2003. – 591 с.

33. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. - 416 с.

34. Чучаев И.И., Осипова М.Н. Уравнение вида $h(x)+cx+d=\sqrt[n]{ax+b}$ // Математика в школе. – 2008. - №9. – С. 17-23.