Вінницький державний педагогічний університет
ім. Михайла Коцюбинського

Л. А. Вотякова, Ю. С. Твердохліб

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Вінниця – 2007

Рецензенти: доктор педагогічних наук, професор Клочко В. І. (Вінницький національний технічний університет), кандидат фізико-математичних наук, професор Трохименко В. С. (Вінницький педагогічний університет).

Відповідальний за випуск: кандидат фізико-математичних наук, професор Томусяк А. А. (Вінницький педагогічний університет).

Посібник призначається для студентів математичних спеціальностей.

Його основна мета — допомогти набути необхідних вмінь та навичок при розв'язувані задач теорії ймовірності, надати студентам інструментарій у вигляді робочих формул, означень, теорем, який вони застосують для конкретних задач. Це особливо актуально зараз, коли основи теорії ймовірності вивчаються в курсі математики старших класів загальноосвітньої школи.

В кожному параграфі посібника надаються основні теоретичні відомості і формули. Далі розглядаються приклади розв'язування класичних задач теорії ймовірностей. Після чого студент має змогу виконати певні завдання до кожного параграфу, перевіривши свої знання. І на завершення — завдання двох контрольних робіт, які дають уявлення про засвоєння базового матеріалу теорії ймовірностей.

Зміст

Теорія ймовірностей та математична статистика — одна з математичних дисциплін, що забезпечує професійну та практичну підготовку фахівця освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр зі спеціальності "Педагогіка і методика середньої освіти. Математика", зміст якої визначається освітньо-професійною програмою[1] через систему таких змістовних модулів.

1. Випадкові події та операції над ними

1.1. Стохастичний експеримент

1.2. Простір елементарних подій

1.3. Поняття випадкової події

1.4. Операції над подіями

1.5. Простір подій

1.6. Уточнення поняття події

2. Статистичні ймовірності, їх властивості та розподіли

2.1. Розподіли статистичних ймовірностей, їх типи

2.2. Числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей

2.3. Обчислення статистичних ймовірностей

2.4. Умовні статистичні ймовірності

2.5. Формула повної статистичної ймовірності

2.6. Формули Байєса для статистичних ймовірностей

3. Аксіоматична побудова теорії ймовірностей. Імовірностні міри та їх розподіли

3.1. Поняття ймовірності події

3.2. Ймовірнісний простір

3.3. Уточнення поняття події

3.4. Ймовірнісні міри, їх типи та засоби описування

3.5. Властивості ймовірностей

3.6. Умовні ймовірності

[1] МОНУ Галузеві стандарти вищої освіти. Математика. І. Освітньо-кваліфікаційна характеристика бакалавра. ІІ. Освітньо-професійна програма підготовки бакалавра. – Київ. – 2003.

3.7. Залежні і незалежні події

3.8. Формула повної ймовірності

3.9. Формула Байєса

3.10. Повторні незалежні випробування

3.11. Формули Бернуллі

4. Випадкові величини та розподіли їхніх ймовірностей. Випадкові вектори

4.1. Поняття випадкової величини

4.2. Розподіли ймовірностей випадкових величин

4.3. Випадкові вектори

4.4. Розподіли ймовірностей випадкових векторів

4.5. Математичне сподівання випадкової величини

4.6. Моменти випадкових величин

4.7. Умовні розподіли ймовірностей та їх числові характеристики

4.8. Нормальний розподіл ймовірностей

4.9. Поняття про випадкові процеси

5. Закон великих чисел

5.1. Теорема Чебишова

5.2. Теорема Бернуллі

5.3. Центральна гранична теорема

5.4. Асимптотичні теореми Муавра-Лапласа

6. Елементи математичної статистики. Поняття про метод Монте-Карло

6.1. Основні задачі математичної статистики

6.2. Статистичні оцінки параметрів розподілу

6.3. Надійна ймовірність

6.4. Надійні інтервали

6.5. Статистична перевірка гіпотез

6.6. Поняття про метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло)

Засвоєння цього змісту забезпечує оволодіння на рівні уміння понятійним апаратом теорії ймовірностей і математичної статистики, методами, прийомами, способами і засобами розв'язування основних задач стохастики, статистичного опрацювання експериментальних даних, технікою генерування випадкових чисел і методами їх використання для моделювання стохастичних експериментів. Якраз вказані уміння забезпечують здатність виконувати одне із завдань професійної діяльності (викладати відповідний розділ шкільного курсу математики).

1 Випадкові події та їх ймовірності

1.1 Основні поняття теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей *є математична наука, яка вивчає закономірності, що проявляються у масових випадкових явищах.*

Методи теорії ймовірностей, які називають ймовірнісними або статистичними, дають можливість на підставі певних розрахунків зробити висновки стосовно масових випадкових явищ. Як і будь-яка прикладна наука, теорія ймовірностей потребує вихідних експериментальних даних для розрахунків. Цим займається **математична статистика** — розділ теорії ймовірностей, який вивчає методи збирання та обробки результатів досліду (статистичних даних) для отримання наукових і практичних висновків.

Як приклад, проаналізуємо результати опитування студенток третього курсу (вік 19—21 рік). Забір інформації стосувався двох антропологічних характеристик (зріст, довжина ступні) і улюбленого кольору. Результати опитування подані у таб.1, де h — зріст (см), f — довжина ступні (тобто розмір взуття), c — улюблений колір.

Аналіз даних показує, що розподіл значень характеристик аж ніяк не можна вважати однорідним. У цьому ми переконаємося, якщо результати опитування по кожній з характеристик подамо у вигляді таблиць (варіаційних рядів), в яких вказано значення характеристик і відповідна кількість респондентів (таб. 2, 3, 4).

	h	f	c		h	f	c
1	160	36	зелений	31	176	39	синій
2	168	39	рожевий	32	170	37	червоний
3	170	39	блакитний	33	165	38	зелений
4	169	38	блакитний	34	162	39	блакитний
5	166	38	зелений	35	170	40	червоний
6	165	38	чорний	36	170	37	зелений
7	165	37	рожевий	37	167	37	чорний
8	160	37	синій	38	165	37	зелений
9	165	37	жовтий	39	162	38	сірий
10	165	38	блакитний	40	165	37	червоний
11	164	37	зелений	41	176	39	синій
12	165	38	чорний	42	165	37	червоний
13	158	36	сірий	43	175	39	синій
14	160	37	чорний	44	153	36	чорний
15	171	39	синій	45	155	36	чорний
16	170	38	синій	46	172	38	фіолетовий
17	164	38	зелений	47	159	37	чорний
18	169	38	зелений	48	155	37	блакитний
19	168	38	фіолетовий	49	165	37	червоний
20	164	37	коричневий	50	148	37	синій
21	165	37	жовтий	51	173	39	чорний
22	164	38	блакитний	52	165	38	чорний
23	164	37	блакитний	53	174	39	чорний
24	164	36	блакитний	54	165	38	білий
25	168	37	білий	55	179	40	чорний
26	170	37	зелений	56	175	39	синій
27	167	37	білий	57	175	38	чорний
28	160	36	синій	58	166	39	чорний
29	162	36	блакитний	59	167	38	синій
30	167	38	жовтий	60	154	36	чорний

Таб.1

h	148	153	154	155	158	159	160	162	164	165	166
n_h	1	1	1	2	1	1	4	3	6	13	2
p_h^*	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{1}{30}$
h	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	179
n_h	4	3	2	6	1	1	1	1	3	2	1
p_h^*	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$

Таб.2

f	36	37	38	39	40
n_f	8	21	18	11	2
p_f^*	$\frac{8}{60}$	$\frac{21}{60}$	$\frac{18}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{2}{60}$

Таб.3

c	зелений	рожевий	блакитний	чорний	сірий	синій
n_c	9	2	9	14	2	10
p_c^*	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
c	жовтий	фіолетовий	коричневий	червоний	білий	
n_c	3	2	1	5	3	
p_c^*	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	

Таб.4

Цю інформацію може використати виробник взуття або одягу, оцінивши, скільки потрібно випускати продукції того чи іншого кольору кожного розміру, що користується попитом.

Якраз питання „як часто має місце певний факт?“ не тільки стимулювало розвиток теорії ймовірностей як науки, але й залишається основним тестовим питанням, відповідь на яке дає можливість визначити рівень адекватності математичної моделі, що описує масові випадкові явища, самим цим явищам.

Таким чином, об'єктом вивчення теорії ймовірностей є *випадкові явища* (явища, спостереження за якими дають різні результати) або стохастичні досліди, які можна спостерігати, скільки завгодно разів, причому комплекс умов, за яких проводиться дослід, залишається незмінним. А перехід від реальних явищ до математичних моделей здійснюється за наступною схемою.

Реальність	**Інструмент для її описання**
1. *Стохастичний дослід.*	1'. *Простір елементарних подій* — множина всіх можливих результатів досліду, елементи якої називають *елементарними подіями.*
2. *Факт*, пов'язаний з даним дослідом, який може відбутися або не відбутися.	2'. *Подія* —підмножина простору елементарних подій, що складається з тих результатів досліду, за яких цей факт має місце.
3. *Відносна частота* появи події — відношення числа появ події у серії дослідів до числа всіх проведених дослідів.	3'. *Імовірність події* — число, біля якого стабілізується відносна частота появи події при зростанні числа проведених дослідів.

Приклади оцінки шансів на те, що деяка подія A, пов'язана із заданим стохастичним дослідом, при одному проведенні досліду (випробуванні) відбудеться можна знайти, наприклад, в [3].

Серед випадкових дослідів можна виділити такі, природа яких дозволяє знаходити ймовірності подій, пов'язаних з ними, безпосередньо, не проводячи випробувань. Зрозуміло, що у цьому випадку необхідно дати теоретичний опис досліду, тобто побудувати простір елементарних подій Ω. Якщо така модель побудована, то пов'язані з ним події описуються певними підмножинами множини всіх можливих результатів.

Припустимо, що дослід має n можливих результатів, причому немає жодних підстав вважати, що при необмеженому повторенні якийсь із результатів може трапитися частіше, ніж будь-який інший. Наприклад, це буде забезпечено при виборі наугад (навмання, випадковим чином) одного з n об'єктів. У таких випадках кажуть, що всі елементарні події рівноможливі. Якщо з n можливих результатів досліду m результатів сприяють появі події A, то ймовірність означається так.

Класичне означення ймовірності. *Ймовірністю події A, пов'язаної з певним дослідом, називають відношення числа результатів цього досліду, які сприяють появі події A, до числа всіх можливих рівноможливих результатів, тобто*

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1.1}$$

Таким чином, щоб знайти ймовірність події A, пов'язаної з дослідом, всі результати якого рівноможливі, необхідно підрахувати всі можливі результати і ті з них, які викликають подію A, і записати

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{число результатів, які сприяють події } A}{\text{число всіх можливих результатів}}.$$

Приклад 1. З 20 перших натуральних чисел наугад взято число. Знайти ймовірність того, що взяте число не ділиться на 4.

Розв'язання. Оскільки число береться наугад, то немає підстав вважати, що якесь із чисел буде вибиратись частіше, ніж будь-яке інше, тобто слід вважати, що всі 20 можливих результатів рівноможливі. Якщо зазначити через A подію, яка полягає у тому, що вибране число не ділиться на 4, то, врахувавши, що з перших 20-ти натуральних чисел діляться на 4 тільки 4, 8, 12, 16, 20, знайдемо $N(A) = 20 - 5 = 15$. Простором елементарних подій тут є перші 20 натуральних чисел, отже $N(\Omega) = 20$. За формулою (1.1.1) отримаємо

$P(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. $\square$

В отриманому числі закладена така інформація: шанси на те, що при одному виборі числа трапиться подія A, оцінюються у відношенні $3 : 1$. Це проявляється у тому, що коли даний дослід провести велике число разів, то відношення числа випробувань, при яких подія A трапилась, до числа всіх проведених випробувань буде близькою до $0,75$. Цей факт можна перевірити експериментально, організувавши вибір наугад однієї з 20 карток з числами від 1 до 20, або же скориставшись генератором випадкових чисел, провівши, наприклад, 200 випробувань за допомогою калькулятора. Вважаючи, що подія A відбудеться, якщо випадкове число не ділиться на 4, ми дістали такі результати.

№ випробування	$+$ A відбулась $-$ A не відбулась	Число випробувань, при яких A відбулась	Відносна частота появи події A
1	$-$	0	0
2	$+$	1	0,5
3	$+$	2	0,67
4	$+$	3	0,75
5	$+$	4	0,80
6	$+$	5	0,83
7	$-$	5	0,71
8	$-$	5	0,63
9	$+$	6	0,66
10	$+$	7	0,70
11–15	$+4, \ -1$	11	0,73
16–20	$+3, \ -2$	14	0,70
21–25	$+4, \ -1$	18	0,72
26–30	$+4, \ -1$	22	0,73

31−40	+7, −3	29	0,73
41−50	+5, −5	34	0,68
51−60	+7, −3	41	0,68
61−80	+6, −14	47	0,59
81−100	+8, −12	55	0,55
101−110	+8, −2	63	0,57
111−130	+15, −5	78	0,6
131−150	+18, −2	96	0,64
151−200	+40, −10	136	0,7

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що при киданні двох правильних гральних кубиків (при киданні одного кубика двічі): а) випаде однакове число очок; б) число очок, яке випаде на першому кубикові менше, ніж число очок на другому; в) сума очок на обох гральних кубиках більша 9; г) рівняння $x^2 + px + q = 0$, де p і q — число очок на 1-ому і 2-ому кубиках відповідно, має дійсні корені.

Розв'язання. Оскільки результат досліду визначається парою чисел $(i,\ j)$, де i — число очок, яке випадає при киданні першого кубика, j — число очок, яке випадає при киданні другого кубика, то множиною всіх можливих результатів (простором елементарних подій) є множина

$$\Omega = \{(i,\ j) \mid i, j = \overline{1,6}\}.$$

Подамо цю множину у вигляді таблиці з двома входами.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

А оскільки кубики правильні у тому розумінні, що вони виготовлені з однорідного матеріалу так, що центр ваги кожного з них збігається з центром симетрії, що немає підстав вважати, що якийсь з результатів буде мати місце частіше, ніж будь-який інший з 36 можливих. Тому всі 36 результатів слід вважати рівноможливими.

Якщо A_1 — подія, яка полягає в тому, що на обох кубиках випаде однакове число очок, то вона матиме місце тоді і тільки тоді, коли $i = j$, тобто події A_1 сприяють результати $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$. Отже подія $A_1 \subset \Omega$ і $A_1 = \{(i,\ j) \mid i = j,\ i,j = \overline{1,6}\}$. Тоді

$$P(A_1) = \frac{N(A_1)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Якщо подія A_2 полягає в тому, що число очок на 1-ому кубикові менше за число очок на 2-ому, то A_2 подається такою підмножиною множини Ω:

$$A_2 = \{(i,\ j) \mid i < j,\ i,j = \overline{1,6}\}.$$

Число елементів множини A_2 дорівнює 15 (див. табл.), а тому

$$P(A_2) = \frac{N(A_2)}{N(\Omega)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Якщо A_3 — подія, яка полягає в тому, що сума числа очок, які випадають на обох гральних кубиках, більша 9, то A_3 подається

$$A_3 = \{(i,\ j) \mid i,j = \overline{1,6},\ i + j > 9\}.$$

Число елементів множини A_3 дорівнює 6, а тому

$$P(A_3) = \frac{N(A_3)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Якщо A_4 — подія, яка полягає в тому, що число очок p на 1-ому і число q очок на 2-ому кубикові забезпечують існування дійсних коренів квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то вона відбудеться тоді і тільки тоді, коли результатом досліду буде одна із пар $(i,\ j) \in \Omega$ така, що виконується рівність $i^2 - 4j \geqslant 0$. Множина A_4 подається
$A_4 = \{(i,\ j) \mid i, j = \overline{1, 6},\ i^2 - 4j \geqslant 0\} = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$.
І тому

$$P(A_4) = \frac{19}{36}. \qquad \square$$

Ще один підхід до обчислення ймовірностей подій, пов'язаний з нескінченними множинами можливих результатів, дає *геометричне означення ймовірності*, яке ґрунтується на „рівноможливості" можливих результатів, а операція підрахунку числа результатів замінюється вимірюванням певних областей.

Задачі, при розв'язуванні яких можна використати такий підхід, можна сформулювати у такий спосіб. З області G, міру якої можна знайти, наугад обирається точка, причому вираз „обирається наугад" розуміють так, що ймовірність обрати точку у будь-якій частині області G пропорційна мірі цієї частини і не залежить ні від її розташування, ні від форми. Тоді ймовірність того, що точка буде взята з підобласті g області G рівняється

$$\frac{m(g)}{m(G)}.$$

Зокрема, якщо маємо справу з плоскою областю, то ймовірність події A, яка полягає у тому, що точка буде взята з підобласті g, обчислюється так

$$P(A) = \frac{\text{площа підобласті}}{\text{площа області}}. \tag{1.1.2}$$

Приклад 3. Дві особи домовились зустрітися між 12 і 13 годинами. Та особа, яка приходить на місце зустрічі першою чекає на другу не більше 20 хвилин, після чого покидає місце зустрічі. Знайдіть ймовірність того, що особи зустрінуться, якщо кожна з них може прийти на місце зустрічі у будь-який момент заданого проміжку часу.

Розв'язання. Очевидно, що можливий результат досліду характеризується парою чисел: x — момент приходу, y — момент приходу другої особи. На координатній площині ця пара визначає точку. А оскільки за умовою

$$0 \leqslant x \leqslant 60 \text{ (хв)}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 60 \text{ (хв)},$$

то результат досліду можна мислити як вибір точки з квадрата (рис.1).

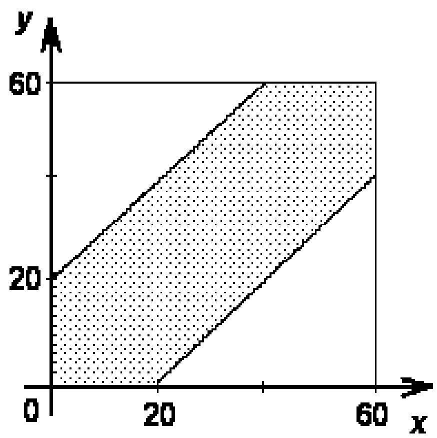


Рис. 1

Якщо A — подія, яка полягає у тому, що особи зустрінуться, то вона може відбутися тоді, коли різниця між моментами їх приходу не буде перевищувати 20 хв, тобто коли буде виконуватись умова $|x - y| \leqslant 20$. Тому на мові вибору задану ситуацію можна розглядати як випадковий вибір точки з квадрата, а факт зустрічі, що точка буде вибрана із заштрихованого шестикутника. За формулою (1.1.2) маємо:

$$P(A) = \frac{S_{\text{шест.}}}{S_{\text{кв.}}} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

Число $\dfrac{5}{9}$ показує, що у таких ситуаціях шанси на зустріч трохи більші проти того, що особи не зустрінуться. □

Приклад 4 (задача Бюффона). Лист паперу достатньо великого розміру розграфлено паралельними прямими, відстань між якими дорівнює $2a$. На цей лист кидається голка довжини $2l$ $(a > l)$. Знайдіть ймовірність того, що голка перетне якусь із ліній.

Розв'язання. Оскільки нас цікавить тільки факт перетину голки з прямою, то результат досліду має характеризувати положення голки відносно найближчої прямої. Отже, якщо позначити через x відстань середини голки до найближчої прямої, а через α — кут, який утворює голка з прямими, то пара чисел (α, x) повністю характеризує положення голки відносно прямої (рис.2).

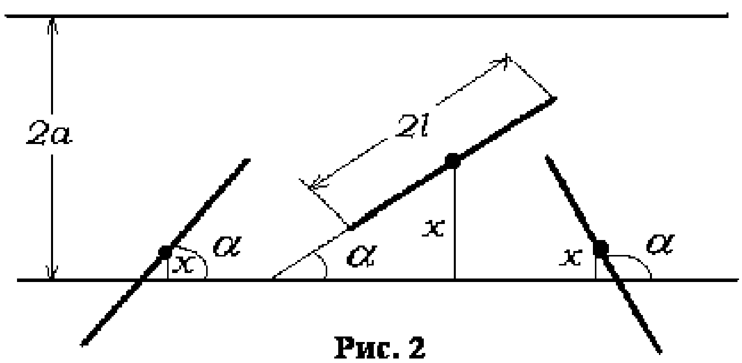


Рис. 2

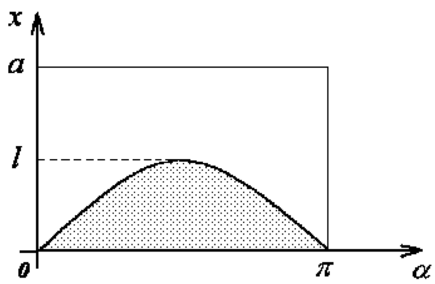


Рис. 3

Врахувавши, що відстань від середини голки до найближчої прямої задовольняє умову $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, а кут нахилу прямої — умову $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, маємо, що результат досліду можна мислити як вибір точки з прямокутника (рис.3).

Якщо A — подія, яка полягає у тому, що голка перетне пряму, то вона може відбутися тоді, коли буде виконуватись умова $x \leqslant l \sin\alpha$. Отже, на мові вибору задану ситуацію можна розглядати як випадковий вибір точки з прямокутника, а факт перетину голки з прямою, що точка буде вибрана із заштрихованої області. Оскільки

$$S_{\text{пр.}} = \pi \cdot a,$$

а площа фігури, обмеженої віссю Ox і дугою синусоїди $x = l \sin \alpha$, рівняється

$$S_{\text{фіг.}} = \int\limits_0^{\pi} l \sin\alpha \, d\alpha = 2l,$$

то шукана ймовірність рівняється

$$P(A) = \frac{2l}{\pi a}. \qquad \square$$

! Якщо провести серію кидань і знайти відносну частоту появи події A

$$P^*(A) = \frac{\text{число перетинів голки з прямою}}{\text{число проведених кидань}},$$

то згідно з основною гіпотезою „відносна частота наближається із збільшенням числа випробувань до ймовірності“ маємо:

$$P^*(A) \approx P(A).$$

Звідси $$P^*(A) \approx \frac{2l}{a\pi} \quad \text{або} \quad \pi \approx \frac{2l}{aP^*(A)}.$$

Отож, знаючи довжину голки, відстань між паралельними прямими і відносну частоту перетину голки з прямою, можна знайти наближене значення числа π і порівняти з його наближенням $\pi \approx 3,14159265$ з точністю 10^{-8}. Такого типу експерименти проводились неодноразово. Ось результати, взяті із книги М.Кендалла і П.Морана „Геометричні ймовірності“ (М.: Наука, 1972, с.83) (таб.5).

Експериментатор, рік проведення досліду	Відношення довжини голки до відстані між прямими	Число кидань	Число перетинів	Наближене значення π
Вольф, 1850	0,8	5000	2532	3,1596
Сміт, 1855	0,6	3204	1218	3,1553
Де Морган, 1860	1,0	600	382	3,137
Фокс, 1884	0,75	1030	489	3,1595
Лаззеріні, 1901	0,83	3408	1908	3,1415
Рейна, 1925	0,519	2520	859	3,1795
Гріджеман, 1960	0,7857	2	1	3,143

Таб. 5

Подана тут інформація напевно зміцнить вашу віру у те, що ймовірності, знайдені теоретично, є надійною характеристикою фактів, пов'язаних з реальними дослідами.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Кидається два правильних кубики. Якою буде найбільша імовірна сума числа очок, що випадають? (7)

2. З повного набору каменів доміно навгад взято один. Знайдіть ймовірність того, що сума очок на ньому дорівнює: а) двом; б) шести; в) дванадцяти; г) тринадцяти; д) більша шести; е) не більша шести.
(а) $\frac{1}{14}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{28}$; г) 0; д) $\frac{3}{7}$; е) $\frac{4}{7}$)

3. У кишені маємо декілька монет вартістю 1 і 10 коп. (за розміром вони однакові). Відомо, що 10 коп. монет вдвоє більше ніж однокопієчних. Навгад взято одну монету. Знайдіть імовірність того, що вона десятикопієчна. ($\frac{2}{3}$)

4. Навгад взято двозначне число. Знайдіть імовірність того, що це число: а) парне; б) ділиться на 3; в) ділиться або на 2 або на 3; г) просте; д) складене.
(а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{7}{30}$; д) $\frac{23}{30}$)

5. З чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ навгад обирається число. Знайдіть імовірність того, що це число: а) ділиться на фіксоване натуральне число k; б) не ділиться ні на k_1, ні на k_2, де k_1, k_2 — фіксовані натуральні взаємно прості числа.
(а) $P_N = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{k}\right] \to \frac{1}{k}$;
б) $P_N = 1 - \frac{1}{N}\left(\left[\frac{N}{k_1}\right] + \left[\frac{N}{k_2}\right] - \left[\frac{N}{k_1 k_2}\right]\right) \to \left(1 - \frac{1}{k_1}\right)\left(1 - \frac{1}{k_2}\right)$)

6. У крузі радіуса R проводяться хорди паралельно заданому напрямку. Знайдіть ймовірність того, що довжина навгад взятої хорди не більша R, якщо точка перетину хорди з діаметром, який перпендикулярний до заданого напрямку, обирається навгад. ($P \approx 0,134$)

7. Дротину довжиною 20 см зігнуто в навгад обраній точці. Після цього перегнули дротину ще у двох місцях і зробили прямокутну рамку. Знайдіть імовірність того, що площина рамки не перевищує 21 см^2. ($P = 0,6$. *Вказівка.* Нехай x — відстань точки першого згину до ближчого кінця. Тоді площа рамки, яку можна побудувати, рівняється $S = x\ (10 - x)$. З умови, що $S \leqslant 21$, знаходимо $x \in (0,3)$, або $x \in (7,10)$.)

8. В круг кидається точка. Знайдіть ймовірність того, що вона попаде у правильний трикутник, вписаний у цей круг. ($P \approx 0,4135$)

9. В одиничному квадраті наугад обирається точка. Знайдіть імовірності таких подій: а) відстань від точки до фіксованої сторони квадрата не перевищує x; б) відстань від точки до найближчої сторони квадрата не перевищує x; в) відстань від точки до центра квадрата не перевищує x; г) відстань від точки до фіксованої вершини квадрата не перевищує x. (а) $\min(x,1)$ $(x \geqslant 0)$; б) $4x\,(1-x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2})$, 1 $(x \geqslant \frac{1}{2})$; в) πx^2 $(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2})$, $x^2(\pi - 4\arccos\frac{1}{2x})$ $(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}})$, 1 $(x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}})$; г) $\frac{1}{4}\pi x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $x^2(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x}) + \sqrt{x^2-1}$ $(1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2})$, 1 $(x \geqslant \sqrt{2})$.)

10. Знайдіть ймовірність того, що з трьох навгад взятих відрізків, довжини яких не перевищують a, можна скласти трикутник. ($P = 0,5$. *Вказівка.* Нехай x, y, z — довжини обраних відрізків; $x \leqslant a$, $y \leqslant a$, $z \leqslant a$, і нехай $x \leqslant y \leqslant z$. З таких відрізків можна побудувати трикутник, якщо виконується умова $x + y > z$. На мові вибору задану ситуацію можна розглядати як випадковий вибір точки з куба з стороною a, а факт можливості побудови трикутника за умови $x \leqslant y \leqslant z$, що точка буде обрана з піраміди з вершинами $O(0,0,0)$, $A(0,0,a)$, $B(0,a,a)$, $C(\frac{a}{2},\frac{a}{2},a)$.)

1.2 Елементи комбінаторики та застосування комбінаторного інструментарію при обчисленні ймовірностей

Обчислення ймовірностей подій за класичним означенням можливе лише у тому випадку, коли ми спроможні описати можливі результати досліду, розпізнати серед них ті, при яких подія відбувається, і підрахувати число як перших так і других.

У багатьох випадках випробування (проведення досліду) можна тлумачити як вибір елементів з певної множини, а можливий його результат як вибірку певного класу. У зв'язку з цим кожну елементарну подію можна розглядати як результат випадкового вибору k $(k \geqslant 1)$ елементів з n-елементної множини, тобто як послідовне виконання k дій, результатом яких є вибірка об'єму k з n елементів.

Класифікація таких вибірок і підрахунок їх числа це задачі **комбінаторики** — розділу математики, *предметом вивчення якого є комбінаторні конфігурації* — скінченні множини, елементи яких вибрані з певної скінченної множини і розташовані за певним правилом. При підрахунку числа комбінаторних конфігурацій у тій чи іншій формі використовуються такі правила комбінаторики.

Правило суми. *Якщо в результаті першої дії можна дістати m комбінаторних конфігурацій, а в результаті другої дії — n комбінаторних конфігурацій, то в результаті першої або другої дії („або“ виключаюче) можна дістати $m + n$ комбінаторних конфігурацій.*

Правило добутку. *Якщо першу дію можна виконати m способами, а після виконання першої другу дію можна виконати n способами, то число комбінаторних конфігурацій, побудова-*

них в результаті послідовного виконання двох дій рівняється mn.

Правило опосередкованого підрахунку числа комбінаторних конфігурацій. *Якщо число комбінаторних конфігурацій першого класу рівняється n, а число комбінаторних конфігурацій другого класу невідоме, однак між цими класами можна встановити взаємно однозначну відповідність, то число комбінаторних конфігурацій другого класу теж рівняється n.*

Якщо $N(X)$ — число елементів скінченної множини, то основні правила комбінаторики можна перефразувати так.

Правило суми. *Якщо $N(X) = m$, $N(Y) = n$ і $X \cap Y = \varnothing$, то $N(X \cup Y) = m + n$.*

Правило добутку. *Якщо $N(X) = m$, $N(Y) = n$, то $N(X \times Y) = m \cdot n$.*

Правило опосередкованого підрахунку числа комбінаторних конфігурацій. *Якщо $N(X) = n$ і $X \sim Y$, то $N(Y) = n$.*

В очевидний спосіб правила суми і добутку поширюються на скінченне сімейство скінченних множин.

Приклад 1. Підрахувати, скільки тризначних чисел можна записати за допомогою цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Скільки таких чисел можна записати, якщо:
а) всі цифри у них мають бути різними;
б) числа мають бути парними;
в) числа мають ділитися на 4;
г) числа мають ділитися на 3?

Розв'язання. Комбінаторна конфігурація „тризначне число“ отримується в результаті вибору трьох цифр і запису їх у порядку виходу, наприклад, зліва направо. Оскільки число має бути тризначним, то вибір першої цифри (першу дію) можна виконати п'ятьма способами (нуль не може бути першою цифрою тризначного числа), вибір другої цифри (другу дію) можна виконати шістьма способами (на другому місці у тризначному числі може стояти будь-яка цифра з шести), і, нарешті, вибір третьої цифри (третю дію) можна виконати знову шістьма способами. Отож за правилом добутку число комбінаторних конфігурацій (тризначних чисел), які отримуються в результаті виконання трьох таких дій, рівняється $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$.

У другій частині задачі необхідно підрахувати число тризначних чисел, що задовольняють певну умову.

а) Комбінаторна конфігурація — „тризначне число" має складатися з різних цифр. Тоді вибір першої цифри можна виконати 5 способами, вибір другої можна виконати 5 способами (на другому місці не можна записати цифру, яка вже записана на першому), вибір третьої цифри можна здійснити 4 способами (на третьому місці не можна записати цифри, які вже записані на перших двох місцях). Отож за правилом добутку число тризначних чисел з різними цифрами, які можна записати за допомогою цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$ рівняється $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

б) Комбінаторна конфігурація — „тризначне число" має бути парним. Тоді вибір першої цифри можна здійснити 5 способами, другої — 6 способами, третьої — 3 способами. За правилом добутку кількість парних тризначних чисел рівняється $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$.

в) Комбінаторна конфігурація — „тризначне число" ділиться на 4. Оскільки тризначне число ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли на 4 ділиться число, записане останніми двома цифрами, то у нашому випадку такі числа закінчується однією з дев'яти пар цифр $00, 04, 12, 20, 24, 32, 40, 44, 52$. А оскільки перед кожною з таких пар цифр можна поставити будь-яку з цифр $1, 2, 3, 4, 5$, то згідно з правилом добутку маємо, що число таких чисел рівняється $5 \cdot 9 = 45$.

г) Комбінаторна конфігурація — „тризначне число“ ділиться на 3. В залежності від того, якою буде перша цифра, розіб'ємо всі такі числа на п'ять класів. Кожен такий клас складатиметься з 12 чисел. Наприклад, якщо перша цифра одиниця, то останні дві мають бути $02, 05, 11, 14, 20, 23, 32, 35, 41, 44, 50, 53$. За правилом добутку шукане число рівняється $12 \cdot 5 = 60$. $\square$

Приклад 2. Знайти число всіх підмножин n-елементної множини.

Розв'язання. Нехай $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — довільна множина, елементи якої занумеровані, і нехай 2^X — множина всіх можливих підмножин множини X. Розглянемо множину

$$Y = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \mid e_k = 0, 1 \text{ для } k = \overline{1, n}\},$$

тобто множину, елементами якої є впорядковані набори, складені з нуликів і одиничок. Кожний такий набір є комбінаторна конфігурація, яка отримується в результаті послідовного виконання n дій, причому кожна дія полягає у виборі 0 або 1. Згідно з правилом добутку число таких конфігурацій рівняється $\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{n \text{ разів}} = 2^n$. А тому $N(Y) = 2^n$.

Побудуємо відповідність

$$f \ : \ 2^X \ \longrightarrow \ Y$$

за таким правилом: кожній підмножині A множини X відносимо елемент $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ множини Y такий, що

$$e_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x_k \overline{\in} A, \\ 1, & \text{якщо} \quad x_k \in A. \end{cases}$$

Наприклад, $\varnothing \ \longmapsto \ (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $\{x_1\} \ \longmapsto \ (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $X \ \longmapsto \ (1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$. Така відповідність є взаємно однозначною. А тому за правилом опосередкованого підрахунку числа елементів скінченої множини маємо, що якщо $N(X) = n$, то

$$N(2^X) = 2^n. \qquad \square$$

Приклад 3. Скільки серед пар чисел $1, 2, \ldots, 10^n$ таких, запис яких не містить двох однакових цифр, що стоять поруч?

Розв'язання. Нехай X — множина всіх комбінаторних конфігурацій „чисел, у записі яких не міститься двох однакових цифр, що стоять поруч", а X_k — множина всіх k-значних чисел такого типу. Тоді очевидно, що

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n,$$

причому $X_i \cap X_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$. Очевидно, що $X_1 = \{1, 2, \ldots, 9\}$ і $N(X_1) = 9$. $X_2 = \{10, 12, 13, \ldots, 98\}$, причому кожна така комбінаторна конфігурація є результатом послідовного виконання двох дій: на перше місце ставиться будь-яка з цифр $1, 2, \ldots, 9$, тобто перша дія може бути виконана 9-ма способами, після цього на друге місце ставиться будь-яка цифра, відмінна від тієї, що була поставлена на першому місці, тобто друга дія може бути виконана теж 9-ма способами. За правилом добутку число таких комбінаторних конфігурацій рівняється 9^2, тобто $N(X_2) = 9^2$. У загальному випадку кожен елемент множини X_k є k-значним натуральним числом (найменше з них $1010\ldots$, а найбільше $9898\ldots$), у якого на першому місці може стати будь-яка з цифр $1, 2, \ldots, 9$, на другому — будь-яка з дев'яти цифр, відмінних від тієї, що стоїть на першому місці; на третьому — будь-яка з дев'яти цифр, відмінних від тієї, що стоїть на другому місці і т.д. Таким чином, кожна комбінаторна конфігурація „k-значне число, у записі якого не міститься двох однакових цифр, що стоять поруч" є результатом послідовного виконання k дій, кожну з яких можна виконати 9-ма способами. За правилом добутку число комбінаторних конфігурацій, побудованих в результаті виконанні k послідовних дій рівняється 9^k, тобто для кожного $k = 1, 2, \ldots, n$ маємо $N(X_k) = 9^k$. Отже,

$$N(X) = \sum_{k=1}^{n} 9^k = \frac{9}{8}\,(9^n - 1). \quad \square$$

Виділимо 5 класів комбінаторних конфігурацій, які, враховуючи спосіб їх побудови, природно називати **вибірками**.

Нехай маємо скінчену множину X $(N(X) = n)$. Основною дією буде вибір елемента з множини X. В результаті виконання k таких дій дістаємо комбінаторну конфігурацію, яку називатимемо *вибіркою*. В залежності від характеру вибору (вибір з повторенням або вибір без повторення) і подання вибірка (порядок, у якому розташовані вибрані елементи, береться до уваги чи ні) виділяють такі класи вибірок.

Означення 1.2.1 *Вибірка об'єму k з n-елементної множини (з n елементів) без повторення і упорядкована називаеться* **розміщенням з n елементів по k елементів**. *Зокрема розміщення з n елементів по n елементів називають* **перестановкою n елементів**.

Означення 1.2.2 *Вибірка об'єму k з n-елементної множини без повторення і невпорядкована називається* **комбінацією з n елементів по k елементів**.

Означення 1.2.3 *Вибірка об'єму k з n-елементної множини з повторенням і упорядкована називається* **розміщенням з n елементів по k елементів з повторенням**.

Означення 1.2.4 *Вибірка об'єму k з n-елементної множини з повторенням і невпорядкована називається* **комбінацією з n елементів по k елементів з повторенням**.

Означення 1.2.5 Перестановкою з повторенням *називають будь-яке упорядкування n-елементної множини, серед елементів якої є однотипні.*

$$A_n^k = n\ (n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.2.1}$$

для числа розміщень з n елементів по k;

$$P_n := A_n^n = n! \tag{1.2.2}$$

для числа перестановок n елементів;

$$C_n^k = \frac{n\ (n-1)\dots(n-k+1)}{k\ (k-1)\dots 2\cdot 1} = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!} \tag{1.2.3}$$

для числа комбінацій з n елементів по k;

$$A_{(n)}^k = n^k \tag{1.2.4}$$

для числа розміщень з n елементів по k з повторенням;

$$C_{(n)}^k = C_{n+k-1}^k \tag{1.2.5}$$

для числа комбінацій з n елементів по k з повторенням;

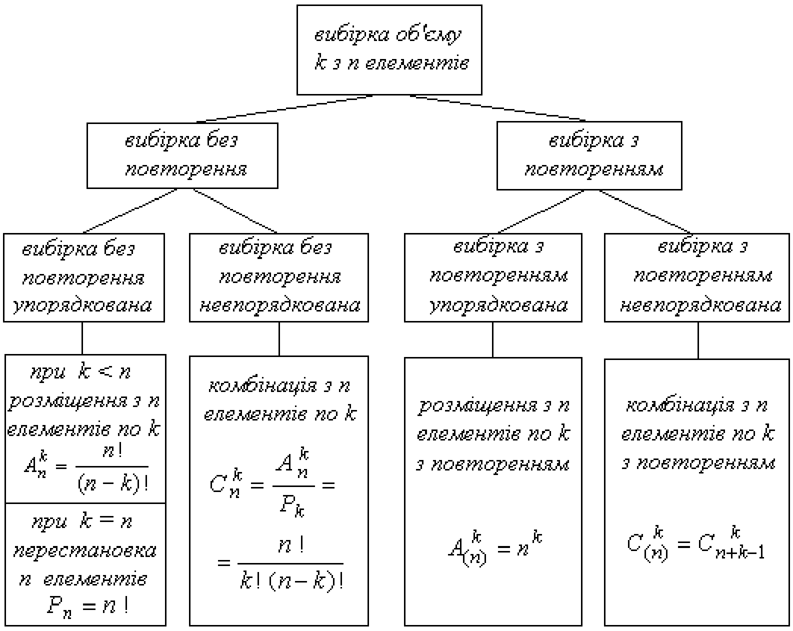
$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \tag{1.2.6}$$

для числа перестановок з повторенням в разі, коли серед елементів множини X є n_1 елементів 1-го типу, n_2 елементів 2-го типу, $\dots$, n_k елементів k-го типу. За цією ж формулою обчислюється число можливих розбіттів n-елементної множини X на непорожні попарно неперекривні підмножини $X_1, X_2, \dots, X_k$ такі, що $N(X_1) = n_1$, $N(X_2) = n_2$, $\dots$, $N(X_k) = n_k$ $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$.

Приведена тут інформація стає зручною для використання, якщо її подати у вигляді такої блок-схеми.

Блок-схема

для визначення числа всіх можливих вибірок певного класу



Приклад 4. У класі вивчаються 10 предметів. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок, якщо у цей день планується п'ять уроків з різних предметів?

Розв'язання. Комбінаторна конфігурація „розклад уроків" є результатом вибору 5 предметів з 10, причому вибір без повторення (всі предмети у цей день мають бути різними) і упорядкована (розклад якраз визначається тим, який урок відведений тому чи іншому предмету), тобто кожен можливий розклад на понеділок (дивись самий лівий шлях блок-схеми) є розміщення з 10 елементів по 5. Число таких розміщень, тобто число способів, якими можна скласти розклад на визначений день, рівняється

$$A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240. \quad \square$$

Приклад 5. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого десятикутника, якщо ніякі три з них не перетинаються в одній точці?

Розв'язання. Кожній точці перетину двох діагоналей відповідає чотири вершини 10-кутника, а кожним чотирьом вершинам 10-кутника відповідає одна точка перетину діагоналей. Тому кожну точку перетину діагоналей визначає вибір 4 вершин з 10 без повторення і невпорядкований (порядок, у якому будуть обрані вершини, неістотний), інакше кожну точку перетину діагоналей визначає (дивись перший лівий шлях (від середини) на блок-схемі) комбінація з 10 елементів по 4. Число таких комбінацій, тобто число точок перетину діагоналей, рівняється

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,6!} = 210. \quad \square$$

Приклад 6. Скільки існує n-значних натуральних чисел, у записі яких кожна попередня цифра не перевищує наступну?

Розв'язання. Оскільки в n-значному числі перша цифра не нуль, то у записі чисел із зазначеною в умові характеристичною властивістю нуль взагалі не фігурує, тобто таке число записується певною кількістю одиниць, двійок, ..., дев'яток. Навпаки, задавши кількість одиниць, двійок, ..., дев'яток, які мають увійти до складу числа, дістанемо єдине число з неспадною послідовністю цифр. Наприклад, 10-значним числом, у якого 5 одиниць, одна трійка, одна п'ятірка і 3 сімки, записані у неспадному порядку, буде 1111135777. Отже, кожне таке число повністю визначається вибіркою об'єму n з 9 елементів з повторенням, невпорядкованою (дивись самий правий шлях

на блок-схемі), тобто комбінацією з 9 елементів по n з повторенням. Число таких комбінацій, тобто число n-значних чисел, у записі яких кожна попередня цифра не перевищує наступну, рівняється $\quad C^n_{(9)} = C^n_{9+n-1}$.
Зокрема, число 10-значних чисел такого типу рівняється

$$C^{10}_{(9)} = C^{10}_{9+10-1} = C^{10}_{18} = 43758. \quad \square$$

Приклад 7. Скільки десятизначних чисел можна скласти з цифр числа 1121231234?

Розв'язання. Очевидно, що кожне 10-значне число, складене з цифр заданого числа, є перестановкою з повторенням елементів множини, у якій є однотипні (4 одинички, 3 двійки, 2 трійки і одна четвірка). А число таких перестановок рівняється

$$P_{10}\ (4,3,2,1) = \frac{10!}{4!\ 3!\ 2!\ 1!} = 20200. \quad \square$$

Якщо можливі результати досліду можна інтерпретувати як вибірки, то приведені комбінаторні результати можуть бути використаними при обчисленні ймовірностей подій за класичним означенням.

Якщо результат досліду можна розглядати як послідовний вибір з поверненням k елементів з n елементів, причому m таких вибірок сприяє появі події A, то

$$P(A) = \frac{m}{n^k}. \qquad (1.2.7)$$

Якщо результат досліду можна розглядати як послідовний вибір без повернення k елементів з n елементів, причому m таких вибірок сприяє появі події A, то

$$P(A) = \frac{m}{A^k_n}. \qquad (1.2.8)$$

Якщо результат досліду можна розглядати як вибір без повернення групи k елементів з n елементів, причому m таких вибірок сприяє появі події A, то

$$P(A) = \frac{m}{C_n^k}. \tag{1.2.9}$$

Приклад 8. Правильний гральний кубик кидається три рази. Що більш імовірно: сума очок на трьох кубиках дорівнює 12, чи ця сума дорівнює 11?

Розв'язання. Кожне кидання правильного грального кубика можна розглядати як вибір навгад одного з перших шести натуральних чисел. Тому результат чотирьох кидань є вибіркою об'єму 3 з 6 елементів з повторенням і упорядкована (останнє забезпечує рівноможливість результатів), тобто результат досліду (дивись перший правий шлях на блок-схемі) є розміщення з шести елементів по 3 з повторенням. А число можливих результатів рівняється $N(\Omega) = A^3_{(6)} = 6^3$.

Нехай A_1 — подія, яка полягає у тому, що сума очок рівняється 12, а A_2 — подія, яка полягає у тому, що сума очок рівняється 11. Сума очок буде рівнятися 12 у випадку, коли

$$\begin{array}{lcl} 6+5+1 & - & 6 \text{ можливих результатів}, \\ 6+4+2 & - & 6 \text{ можливих результатів}, \\ 6+3+3 & - & 3 \text{ можливих результати}, \\ 5+5+2 & - & 3 \text{ можливих результати}, \\ 5+4+3 & - & 6 \text{ можливих результатів}, \\ 4+4+4 & - & 1 \text{ можливий результат}, \end{array}$$

тобто подія A_1 відбувається при 25 можливих результатах. Сума очок буде рівнятися 11 у випадку, коли

$$\begin{array}{lcl} 6+4+1 & - & 6 \text{ можливих результатів}, \\ 6+3+2 & - & 6 \text{ можливих результатів}, \\ 5+4+2 & - & 6 \text{ можливих результатів}, \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
5+5+1 &\quad - \quad 3 \text{ можливих результати,}\\
5+3+3 &\quad - \quad 3 \text{ можливих результати,}\\
4+4+3 &\quad - \quad 3 \text{ можливих результати,}
\end{aligned}
$$

тобто подія A_2 відбувається при 27 можливих результатах. Таким чином

$$P(A_1) = \frac{25}{216}, \qquad P(A_2) = \frac{27}{216},$$

а тому сума очок рівна 11 більш імовірна, ніж сума очок рівна 12.

Приклад 9. З урни, у якій 6 білих і 4 чорні кулі, наугад взято 3 кулі. Який склад куль серед вибраних трьох має найбільшу ймовірність?

Розв'язання. Результатом досліду є вибірка об'єму 3 з 10 елементів без повторення і невпорядкована, тобто комбінація з 10 по 3. Число всіх можливих (вибір наугад) результатів $N(\Omega) = C_{10}^3$.

Нехай A_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ — подія, яка полягає у тому, що серед вибраних трьох куль i білих, а отже, $3 - i$ чорних. Оскільки i з шести білих куль можна взяти C_6^i способами $(C_n^0 := 1)$, а $3 - i$ з 4 чорних куль можна взяти C_4^{3-i} способами, то за правилом добутку число результатів досліду, які сприяють появі події A_i, рівняється

$$m_i = N(A_i) = C_6^i \; C_4^{3-i}.$$

Тоді

$$P(A_0) = \frac{C_6^0 \; C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$

$$P(A_1) = \frac{C_6^1 \; C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(A_2) = \frac{C_6^2 \; C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_3) = \frac{C_6^3\ C_4^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}.$$

Отже, найбільш ймовірним буде вибір двох білих і однієї чорної кулі. $\square$

Вправи для самостійного розв'язування

1. Номер для автомобіля складається із трьох літер і чотирьох цифр. Знайдіть число можливих номерів, якщо перші дві літери фіксовані, наприклад, ВІ, а третьою може бути будь-яка літера українського алфавіту, яка має латинське написання. ($12 \cdot 10^4$. *Вказівка.* Третьою може бути одна із літер А, В, Е, І, К, М, Н, О, Р, С, Т.)

2. Скількома способами можна посадити за стіл n чоловіків і nжінок так, щоб ніякі дві особи однієї статі не сиділи поруч? ($2\ (n!)^2$)

3. Скількома способами можна розселити 10 студентів у дві тримісні та одну чотиримісну кімнату? (4200)

4. Скількома способами четверо юнаків можуть запросити до танцю чотири із шести дівчат? (360)

5. Скількома способами n різних куль можна розкласти в m різних урн? (m^n)

6. Абонент забув дві останні цифри телефонного номера і набирає їх навгад. Знайдіть імовірність того, що номер буде набрано правильно, якщо він пам'ятає, що цифри непарні і різні. ($0,05$)

7. У ліфт дев'ятиповерхового будинку входять троє людей. Знайдіть імовірності подій:
   а) всі троє зійдуть на четвертому поверсі;
   б) всі троє зійдуть на одному поверсі;
   в) всі троє зійдуть на різних поверхах,
   якщо кожен з них обирає поверх, де він має зійти, починаючи з другого, навгад. (8^{-3}, 8^{-2}, $\frac{21}{32}$)

8. З колоди гральних карт (32 карти) навгад беруть чотири карти. Знайдіть імовірність того, що
а) серед них 3 однієї масті;
б) серед них виявиться хоча би один туз.
$(0,149;\ 0,43)$

9. У шаховому турнірі беруть участь 20 осіб, які шляхом жеребкування розподіляються на дві групи по 10 осіб. Знайдіть імовірність того, що
а) двоє найсильніших гравців попадуть в різні групи;
б) четверо найсильніших гравців попадуть по два в різні групи.
$(0,526;\ 0,428)$

10. Скільки разів треба кинути правильний гральний кубик, щоб поява шестірки мала ймовірність: а) більшу $0,5$; б) більшу $0,8$; в) більшу $0,9$; г) більшу $0,99$?
(а) $n \geqslant 4$; б) $n \geqslant 9$; в) $n \geqslant 13$; г) $n \geqslant 26$)

1.3 Основні теореми теорії ймовірностей

Сучасна теорія ймовірностей будується на аксіоматичній основі. Точніше на аксіоматиці А.М.Колмогорова [5,с.78–96], яка фактично слугує дескриптивним означенням її основних понять (простору елементарних подій, події, ймовірності події). У зв'язку з цим можна сказати, що предметом вивчення теорії ймовірностей є ймовірносні простори, а її основною задачею — знаходження ймовірностей подій, які виражаються через інші події, причому ймовірності останніх задаються або можуть бути визначені.

Зв'язок між подіями виражається через відношення і операції над ними, які мають теоретико-множинний характер, бо кожна подія подається як підмножина простору елементарних подій. Якщо A і B дві події, то казатимемо, що *подія A викликає подію B, якщо подія B відбувається, як тільки відбувається подія A*, і позначатимемо $A \subset B$ (A є підмножиною множини B). Казатимемо, що події *A і B несумісні*, якщо поява однієї події виключає появу іншої. У противному випадку їх називають *сумісними*.

Означення 1.3.1 **Сумою подій** *A і B називають подію, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається хоча б одна з цих подій.*

Означення 1.3.2 **Добутком подій** *A і B називають подію, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається і подія A, і подія B.*

З теоретико-множинної точки зору сума подій A і B є об'єднанням множин, а добуток цих подій — перерізом множин. Однак, як правило, користуються не позначеннями $\cup$ і $\cap$, а пишуть $A + B$ для суми і $A\,B$ для добутку подій.

Подія, яка не може відбутися, називається *неможливою*. Позначається — $\emptyset$. А подія, яка відбувається завжди, називається *достовірною (вірогідною)* і позначається через Ω.

Для ймовірностей подій мають місце такі співвідношення

$$P(\emptyset) = 0, \qquad P(\Omega) = 1$$

і для будь-якої події A

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Якщо $A \subset B$ (A викликає подію B), то $P(A) \leqslant P(B)$.
Якщо A і B несумісні, тобто $A\,B = \emptyset$, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B), \tag{1.3.1}$$

а для довільних подій A і B

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A\,B), \tag{1.3.2}$$

(1.3.2) і (1.3.2) називають *теоремами додавання ймовірностей*. У випадку, коли події A і B несумісні і у сумі складають достовірну подію ($A + B = \Omega$), то їх називають *протилежними*. Подію, протилежну до події A, позначають $\bar{A}$ ($\bar{A} = \Omega \setminus A$). Очевидно, що

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \text{і} \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}). \tag{1.3.3}$$

Одним із основних робочих інструментів теорії ймовірностей є поняття *умовної ймовірності*, тобто ймовірності події за умови, що мала місце деяка інша подія (інколи її називають *гіпотезою*).

Означення 1.3.3 *Якщо $P(B) > 0$, то умовною ймовірністю події A за умови, що подія B мала місце, називається число*

$$P(A/B) := \frac{P(A\,B)}{P(B)}. \tag{1.3.4}$$

Приклад 1. З колоди, у якій 36 гральних карт, послідовно витягають дві карти. Знайдіть ймовірність того, що друга карта — туз; і умовну ймовірність того, що друга карта — туз за умови, що перша витягнута карта — туз.

Розв'язання. Очевидно, що результатом досліду є вибірка об'єму 2 з 36 елементів. Вона без повторень і впорядкована. Тоді число можливих результатів дорівнює $N(\Omega) = A_{36}^2 = 36 \cdot 35$, причому всі вони рівноможливі.

Позначимо через A_1 подію, яка полягає у появі туза на першому місці, а через A_2 — подію, яка полягає у появі туза на другому місці.

Подія A_2 відбувається, якщо перша витягнута карта — не туз (таких карт 32), а друга — туз (таких карт 4), або і перша, і друга витягнуті карти — тузи. Скориставшись правилом добутку і суми, маємо:

$$N(A_2) = 32 \cdot 4 + 4 \cdot 3.$$

А отже, безумовна ймовірність події A_2 дорівнює

$$P(A_2) = \frac{32 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{36 \cdot 35} = \frac{1}{9}.$$

Якщо ж врахувати, що перша витягнута карта — туз, і що $N(A_1) = 4 \cdot 35$, $N(A_1\, A_2) = 4 \cdot 3$, то згідно (1.3.4), маємо умовну ймовірність події A_2 за умови, що подія A_1 відбулася

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_1\, A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{4\cdot 3}{36\cdot 35}}{\frac{4\cdot 35}{36\cdot 35}} = \frac{3}{35}.$$

Зрозуміло, що цей результат можна отримати і не користуючись формулою (1.3.4). Справді, якщо перша карта — туз, то друга карта витягується з 35 карт, серед яких 3 тузи, і за класичним означенням отримаємо ймовірність $\frac{3}{35}$. $\square$

Формулу (1.3.4) можна переписати у вигляді

$$P(A\,B) = P(B) \cdot P(A/B), \tag{1.3.5}$$

що являє собою запис *теореми множення ймовірностей.*

Якраз формулою (1.3.5) або формулою

$$P(A\,B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

користуються для обчислення ймовірностей добутку подій, за умови, що ми знаємо умовну ймовірність або можемо її знайти.

Задача знаходження умовної ймовірності, коли застосовне класичне означення ймовірності, розв'язується у такий спосіб. Якщо з n можливих рівноможливих результатів досліду події A сприяють m результатів, події B — k результатів, а події $A\,B$ — r результатів ($r \leqslant m$, $r \leqslant k$), то у тому разі, коли подія B відбулася, тобто мав місце один з k результатів, які сприяють появі події B, маємо тільки r результатів, які сприяють появі події A. А тому

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(A\,B)}{P(B)}.$$

Зрозуміло, що формулу (1.3.5) можна узагальнити для будь-якого скінченого числа подій. Наприклад, для трьох подій A_1, A_2, A_3 вона має вигляд

$$P(A_1\,A_2\,A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\,A_2). \tag{1.3.6}$$

Приклад 2. З колоди 36 карт навгад витягуються три карти. Знайдіть ймовірність того, що всі три карти — тузи.

Розв'язання. Нехай A_i $(i = 1, 2, 3)$ — подія, яка полягає в тому, що витягнута i-та карта є туз. Тоді подія, яка полягає в тому, що всі три карти — тузи, запишеться у вигляді

$$A = A_1\,A_2\,A_3.$$

Тоді $\qquad P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\,A_2).$

Оскільки у колоді чотири тузи, то

$$P(A_1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Якщо подія A_1 відбулася, тобто за першим разом витягнули туз, то в колоді залишилося 35 карт і серед них три тузи, а тому

$$P(A_2/A_1) = \frac{3}{35}.$$

Якщо ж відбулися події A_1 і A_2, тобто було витягнуто два тузи, то у колоді залишилося 34 карти і серед них ще два тузи, а тому

$$P(A_3/A_1\,A_2) = \frac{2}{34} = \frac{1}{17}.$$

Звідси дістаємо, що

$$P(A) = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{1}{17} \approx 0,00056.$$

Зрозуміло, що цей результат можна було отримати за допомогою комбінаторних формул за класичним означенням. Результат досліду — вибірка об'єму 3 з 36 без повторень невпорядкована. І тому $N(\Omega) = C_{36}^3$, а $N(A) = C_4^3$. Звідси

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{36}^3} = \frac{4!}{36 \cdot 35 \cdot 34} = \frac{1}{3 \cdot 35 \cdot 17}. \qquad \square$$

Теореми додавання і множення ймовірностей значно полегшують розв'язання задач, до яких застосовне класичне означення ймовірності, однак описання простору елементарних подій затруднене через складену техніку досліду.

Приклад 3. В урнах містяться білі і чорні кулі. У першій — 2 білі і 3 чорні кулі, в другій — 2 білі і 2 чорні, у третій — 3 білі і одна чорна куля. З першої урни одну кулю перекладають в другу, з другої після цього — у третю, і, нарешті, з третьої — в першу. Знайдіть найбільш ймовірний розподіл куль у першій урні та його ймовірність.

Розв'язання. Нехай A_i — подія, яка полягає у тому, що з i-ої ($i = 1, 2, 3$) урни взято білу кулю. Зрозуміло, що тоді $\bar{A}_i$ — подія, яка полягає у тому, що з i-ої урни взято чорну кулю. Нехай B_i — подія, яка полягає у тому, що після перекладання у першій урні стане i ($i = 1, 2, 3$) білих куль. Зокрема, коли відбудеться B_2, то склад першої урни не змінюється. Подія B_1 відбудеться, коли з першої урни буде взято білу кулю, а з третьої — чорну. З другої урни може бути взято як білу так і чорну кулю. А тому подію B_1 можна подати у вигляді

$$B_1 = A_1\, A_2\, \bar{A}_3 + A_1\, \bar{A}_2\, \bar{A}_3.$$

Очевидно, що події $A_1\, A_2\, \bar{A}_3$ і $A_1\, \bar{A}_2\, \bar{A}_3$ — несумісні (з другої урни не можна витягнути кулю, яка є одночасно і білою і чорною). Тоді за теоремою додавання ймовірностей для несумісних подій маємо:

$$P(B_1) = P(A_1\, A_2\, \bar{A}_3) + P(A_1\, \bar{A}_2\, \bar{A}_3).$$

Далі скористаємося теоремою множення ймовірностей

$$P(B_1) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(\bar{A}_3/A_1\, A_2)+$$

$$+P(A_1)P(\bar{A}_2/A_1)P(\bar{A}_3/A_1\, \bar{A}_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{14}{125}.$$

Подію B_2 можна подати у вигляді

$$B_2 = A_1\, A_2\, A_3 + A_1\, \bar{A}_2\, A_3 + \bar{A}_1\, A_2\, \bar{A}_3 + \bar{A}_1\, \bar{A}_2\, \bar{A}_3,$$

тобто у вигляді суми попарно несумісних подій. Тоді

$$P(B_2) = P(A_1\, A_2\, A_3)+P(A_1\, \bar{A}_2\, A_3)+P(\bar{A}_1\, A_2\, \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\, \bar{A}_2\, \bar{A}_3) =$$

$= P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\,A_2) + P(A_1)P(\bar{A}_2/A_1)P(A_3/A_1\,\bar{A}_2) +$
$+P(\bar{A}_1)P(A_2/\bar{A}_1)P(\bar{A}_3/\bar{A}_1\,A_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)P(A_3/\bar{A}_1\,\bar{A}_2) =$
$= \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{12}{25}.$

І, нарешті, подію B_3 подамо у вигляді

$$B_3 = \bar{A}_1\,A_2\,A_3 + \bar{A}_1\,\bar{A}_2\,A_3.$$

Тоді

$P(B_3) = P(\bar{A}_1\,A_2\,A_3) + P(\bar{A}_1\,\bar{A}_2\,A_3) =$

$= P(\bar{A}_1)P(A_2/\bar{A}_1)P(A_3/\bar{A}_1\,A_2) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2/\bar{A}_1)P(A_3/\bar{A}_1\,\bar{A}_2) =$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{51}{125}.$$

Тестова перевірка.

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{14}{125} + \frac{60}{125} + \frac{51}{125} = 1.$$

Таким чином, маємо, що з трьох чисел $P(B_1) = 0,112$, $P(B_2) = 0,480$, $P(B_3) = 0,408$ найбільшим є $P(B_2)$. На підставі цього робимо висновок, що найбільш ймовірним є те, що склад першої урни не зміниться. $\square$

Казатимемо, що події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу подій, якщо вони попарно несумісні ($H_i \cdot H_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$) і в сумі складають достовірну подію, тобто

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{n} P(H_k) = 1.$$

Якщо для $k = \overline{1,\,n}$ $\;P(H_k) > 0$, то для будь-якої події A має місце подання

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k). \qquad (1.3.7)$$

Формула (1.3.7) носить назву *формули повної ймовірності* і широко використовується як при побудові теорії так і при розв'язуванні задач.

Приклад 4. Студент підготував 25 з 30 питань, винесених на екзамен. Знайти ймовірність того, що студент складе екзамен, якщо для цього необхідно відповісти або на два питання, запропонованих викладачем, або на одне з двох запропонованих і на одне додаткове, або на два додаткових.

Розв'язання. Нехай A — подія, яка полягає у тому, що студент складе екзамен. Очевидно, що викладач може дати студенту або два питання, які він знає, або два питання, з яких він знає лише одне або два питання, яких він не знає. Тоді події: H_1 — студент отримав два питання, які він знає, H_2 — з двох отриманих питань знає лише одне, H_3 — він отримав два питання, яких не знає. Неважко переконатися, що

$$P(H_1) = \frac{C_{25}^2}{C_{30}^2} = \frac{20}{29},\ P(H_2) = \frac{C_{25}^1 C_5^1}{C_{30}^2} = \frac{25}{87},\ P(H_3) = \frac{C_5^2}{C_{30}^2} = \frac{2}{87}.$$

Крім того,

$$P(A/H_1) = 1,\ P(A/H_2) = \frac{24}{28} = \frac{6}{7},\ P(A/H_3) = \frac{C_{25}^2}{C_{28}^2} = \frac{50}{63}.$$

Тоді, згідно з формулою (1.3.7) маємо:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= \frac{20}{29} \cdot 1 + \frac{25}{87} \cdot \frac{6}{7} + \frac{2}{87} \cdot \frac{50}{63} \approx 0,95.$$

Зауважимо, що коли студент підготує тільки 5 питань з 30, то ймовірність того, що він складе екзамен дорівнює $0,46$ з точністю до $0,001$. $\square$

Скориставшись теоремою множення ймовірностей для подій A і H_k ($k = \overline{1,\, n}$), приходимо до рівності

$$P(A\,H_k) = P(A)P(H_k/A) = P(H_k)P(A/H_k).$$

І якщо $P(A) > 0$, то

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} \quad (k = \overline{1,\, n}), \tag{1.3.8}$$

де $P(A)$ обчислюється за формулою (1.3.7). Формули (1.3.8) називають *формулами Байєса.* Застосовуються ці формули при розв'язуванні за такою схемою. Нехай подія A може відбуватись в різних умовах, стосовно яких зроблено n припущень: $H_1, H_2, \ldots, H_n$. З певних причин нам відомі умовні ймовірності $P(A/H_k)$. Проведено дослід і подія A відбулась. Це є підставою для переоцінки прийнятих попередньо ймовірностей припущень. Якраз формули (1.3.8) кількісно вирішують це питання.

Приклад 5. В урні було 10 куль, з них 6 чорних і 4 білі. Дві кулі, невідомо які, були загублені. Після цього з урни витягнули дві кулі, які виявились білими. Які кулі найімовірніше були загублені?

Розв'язання. Оскільки нам невідомо, які кулі були загублені, то природно висунути припущення, що були загублені або дві білі, або одна біла і одна чорна, або обидві чорні кулі. Якщо позначити їх відповідно H_1, H_2, H_3, то очевидно, що імовірності цих подій можна обчислювати як імовірності подій, які полягають у тому, що витягнуті навгад з урни дві кулі будуть, відповідно, або обидві білі, або біла і чорна, або обидві чорні. Тому

$$P(H_1) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{15},\ P(H_2) = \frac{6 \cdot 4}{C_{10}^2} = \frac{8}{15},\ P(H_3) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}.$$

Нехай A — подія, яка полягає у тому, що взяті навгад дві кулі з восьми, що залишились, виявились білими. Якщо були загублені дві білі кулі, то в урні залишилось 6 чорних і дві білі кулі, і тому ймовірність того, що з такого складу навгад витягнуто дві білі дорівнює

$$P(A/H_1) = \frac{1}{C_8^2} = \frac{1}{28}.$$

Аналогічно,

$$P(A/H_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28},$$

$$P(A/H_3) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28}.$$

Скориставшись формулою повної ймовірності, дістанемо

$$P(A) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{28} + \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{28} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{28} = \frac{2}{15}.$$

І, нарешті, скориставшись формулами (1.3.8), дістаємо

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{28}}{\frac{2}{15}} = \frac{1}{28},$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{15}} = \frac{12}{28},$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{28}}{\frac{2}{15}} = \frac{15}{28}.$$

Звертаємо вашу увагу, що найбільшу ймовірність до проведення досліду мало припущення, що загублено білу і чорну кулі. Інформація, яку дав проведений дослід, змушує переоцінити ймовірності припущень, і найбільшу ймовірність має припущення, що загублено дві чорні кулі. $\square$

Приклад 6. Відомо, що 96% виробів даного підприємства задовольняє стандарту. Спрощена схема контролю визнає стандартний виріб придатним для реалізації з імовірністю $0,98$, а бракований виріб — з імовірністю $0,05$ Знайдіть імовірність того, що виріб, який визнаний придатним для реалізації, є стандартним.

Розв'язання. Нехай H_1 — подія, яка полягає у тому, що на контроль надійшов стандартний виріб, а H_2 — подія, яка полягає у тому, що на контроль надійшов бракований виріб. Нехай A — подія, яка полягає у тому, що виріб пройшов спрощений контроль. Тоді згідно з умовою

$$P(H_1) = 0,96, \qquad P(H_2) = 0,04,$$

а умовні ймовірності

$$P(A/H_1) = 0,98, \qquad P(A/H_2) = 0,05.$$

А тому

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$$

$$= 0,96 \cdot 0,98 + 0,04 \cdot 0,05 = 0,9428.$$

Шукана ймовірність рівняється

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} \approx 0,998. \quad \square$$

Як ми могли переконатися не один раз, умовна ймовірність події, взагалі кажучи, не рівняється безумовній імовірності цієї події. Однак можна привести приклади таких подій, що умовна ймовірність однієї з них за умови, що друга мала місце, дорівнює безумовній ймовірності цієї події. Для прикладу, якщо подія A полягає у тому, що при киданні правильного грального кубика випаде парне число очок, а подія B полягає у тому, що при киданні цього ж кубика випаде число очок, менше 3, то

$$P(A/B) = \frac{P(A\,B)}{P(B)} = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{і} \quad P(A) = \frac{1}{2},$$

тобто поява події B не змінює ймовірності появи події A. А тому природно вважати, що у цьому випадку подія A не залежить від події B.

Означення 1.3.4 *Казатимемо, що подія A не залежить від події B, якщо*

$$P(A/B) = P(A). \tag{1.3.9}$$

Якщо згадати, що

$$P(A/B) = \frac{P(A\,B)}{P(B)}$$

і врахувати (1.3.9), то коли A не залежить від B, маємо, що

$$P(A\,B) = P(A)P(B). \tag{1.3.10}$$

Якраз останню рівність і приймають за означення фундаментального поняття теорії ймовірностей — незалежності подій.

Означення 1.3.5 *Події A і B називаються* **незалежними**, *якщо ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей.*

У випадку, коли маємо більше двох подій, природно вважати їх незалежними, якщо кожна з них не залежить від будь-якої іншої і від всіх можливих її добутків. Точніше, події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються *незалежними*, якщо для будь-якого набору цих подій $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}). \tag{1.3.11}$$

На практиці незалежність, як правило, не перевіряється з допомогою рівностей (1.3.9)—(1.3.11). У теоретичних дослідженнях вона постулюється, а при розв'язанні практичних задач події вважаються незалежними, якщо вони фізично незалежні. Якщо кидається два гральних кубики (або один кубик двічі), то цілком природно вважати, що результат кидання першого кубика (за першим разом одного кубика) ніяк не вплине на можливість появи першої події при киданні другого кубика (при киданні кубика другий раз). Якраз поняття незалежності дозволяє дати аналітичне описання дослідів, які повторюються за незмінних умов.

Приклад 7. Спрощена система контролю виробів складається з двох незалежних перевірок. Кожна з перевірок може забракувати виріб, що задовольняє стандарту з ймовірністю α_k $(k = 1, 2)$ і прийняти бракований виріб з ймовірністю β_k $(k = 1, 2)$. Виріб приймається, якщо він проходить обидві перевірки. Знайдіть імовірності подій:
а) прийнято бракований виріб;
б) виріб, що задовольняє стандарту забраковано.

Розв'язання. Оскільки перевірки незалежні, а ймовірності прийняти бракований виріб, відповідно, дорівнюють β_1 і β_2, то ймовірність події A, яка полягає у тому, що бракований виріб буде прийнято, за теоремою множення ймовірностей незалежних подій дорівнює

$$P(A) = \beta_1\beta_2.$$

Нехай B — подія, яка полягає у тому, що буде забраковано виріб, що задовольняє стандарту, а B_1, B_2 — події, які полягають у тому, що бракує стандартний виріб, відповідно, перший і другий контроль. Тоді очевидно, що $B = B_1 + B_2$, і в силу (1.3.2)

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1B_2).$$

Врахувавши, що події B_1 і B_2 незалежні (згідно з умовою перевірки незалежні), а їх ймовірності, відповідно, дорівнюють $P(B_1) = \alpha_1$, $P(B_2) = \alpha_2$, маємо:

$$P(B) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2.$$

Звичайно можна було б перейти до протилежної події B, яка полягає у тому, що стандартний виріб пройде перевірку. Тоді

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2) = 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2). \quad \square$$

Досить часто постулюється незалежність виходу з ладу окремих вузлів при оцінці надійності технічних систем.

Приклад 8. Електричний ланцюг складений з елементів A_k $(k = \overline{1, 5})$ за схемою (Рис.5). При виході з ладу будь-якого елемента ланцюг розривається на місці його підключення. Імовірність виходу з ладу за даний період часу елемента A_k рівняється p_k $(k = \overline{1, 5})$. Припустимо, що елементи виходять або не виходять з ладу незалежно один від одного. Знайдіть ймовірність того, що за заданий період ланцюг пропускає струм.

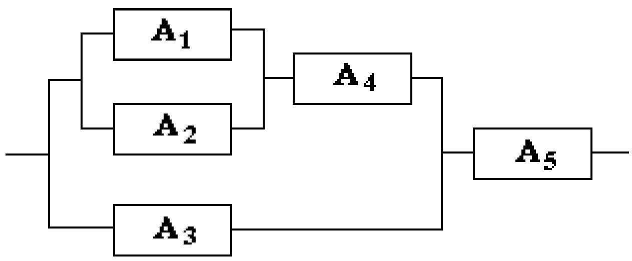


Рис. 5

Розв'язання. Нехай A — подія, яка полягає у тому, що за заданий період ланцюг, зображений на малюнку, пропускає струм. Крім того будемо вважати, що позначення елемента є одночасно і позначенням відповідної події, яка полягає у тому, що цей елемент пропускає струм, якщо або відмовить елемент A_5, або елемент A_5 не відмовить, однак відмовлять елементи A_4 і A_5, або елементи A_4 і A_5 не відмовлять, однак відмовлять елементи A_1, A_2, A_3. Тоді подія $\bar{A}$ — ланцюг не пропускає струму подається у вигляді

$$\bar{A} = \bar{A}_5 + A_5\bar{A}_3\bar{A}_4 + A_5A_4\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3.$$

В силу несумісності доданків у сумі і незалежності виходу з ладу кожного елемента маємо:

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_5) + P(A_5)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) + P(A_5)P(A_4)P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\times$$

$$\times P(\bar{A}_3) = p_5 + (1-p_5)\,p_3\,p_4 + (1-p_5)(1-p_4)\,p_1\,p_2\,p_3.$$

Тоді шукана ймовірність

$$P(A) = (1-p_5)\,(1-p_3\,p_4-(1-p_4)\,p_1\,p_2\,p_3)\,.$$

Останнє число і приймають за оцінку надійності нормального функціонування системи. $\square$

Вправи для самостійного розв'язування

1. Нехай A, B, C — три події. Як подаються через них події:
   а) відбулась тільки подія A;
   б) відбулись події A і B, але не відбулась подія C;
   в) відбулись всі три події;
   г) відбулась хоча би одна з цих подій;
   д) відбулись хоча би дві з цих подій;
   е) відбулась тільки одна з цих подій;
   є) відбулись тільки дві з цих подій;
   ж) не відбулась жодна подія;
   з) відбулось не більше двох подій;
   и) відбулось не більше трьох подій.

2. Знайдіть імовірності події:
   а) AB, якщо відомі ймовірності подій A, B, $\bar{A}\bar{B}$;
   б) $A+B$, якщо відомі ймовірності подій A, B, $\bar{A}+\bar{B}$;
   в) $\bar{A}\bar{B}$, якщо відомі ймовірності подій A, B, AB;
   г) $\bar{A}+\bar{B}$, якщо відомі ймовірності подій A, B, $A+B$.
   (а)$P(A)+P(B)+P(\bar{A}\bar{B})-1$; б)$P(A)+P(B)+P(\bar{A}+\bar{B})-1$.)

3. Два гравці по черзі дістають кулі (без повернення) з урни, у якій 4 білі і 6 чорних куль. Виграє той, хто перший дістане білу кулю. Знайдіть ймовірність виграшу для кожного гравця. (для першого $p \approx 0,619$. *Вказівка.* Якщо A_i — подія, яка полягає у тому, що біла куля буде витягнута при i-ому витягуванні, а A — подія, яка полягає у тому, що перший гравець виграє, то $A = A_1 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4\bar{A}_5\bar{A}_6$.)

4. В урні a білих, b чорних, c червоних куль. З урни одну за другою витягують і, зазначивши їх колір, відкладають на сторону. Знайдіть імовірність того, що біла куля з'явиться раніше чорної. ($p = \frac{a}{a+b}$. *Вказівка.* Перевірити, що

такий результат ми дістанемо при $c = 1$. Далі скористуватись методом математичної індукції.)

5. В двох урнах знаходяться чорні і білі кулі: у першій — 3 білі і 4 чорні, в другій — 5 білих і 3 чорні кулі. З першої урни беруть навгад дві кулі, а з другої — одну кулю. Ці три кулі кладуть у третю порожню урну (колір невідомий). Після цього з третьої урни витягують одну кулю. Знайдіть ймовірність того, що ця куля біла. $(0,435)$

6. У ящику знаходиться k нових тенісних м'ячів і l м'ячів, якими вже грали. З ящика навгад беруть два м'ячі і ними грають. Після гри їх повертають до ящика. Для наступної гри знову навгад беруть два м'ячі. Знайдіть імовірність того, що вони будуть нові ($k \geqslant 2$, $l \geqslant 2$).
$$\left(\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)+l(l-1)k(k-1)+2kl(k-1)(k-2)}{(k+l)^2(k+l-1)^2}\right)$$

7. У групі 10 студентів, які прийшли на екзамен, 3 підготувалися відмінно, 4 — добре, 2 — задовільно, 1 — погано. На екзамен винесено 20 питань. Відмінно підготовлений студент може відповідати на всі питання, добре підготовлений — на 16, задовільно — на 10, погано — на 5. Викликаний навгад студент відповів на всі три питання, які були обрані викладачем навгад. Знайдіть ймовірність, що цей студент підготовлений: а) відмінно; б) погано. (а) $\approx 0,58$; б) $\approx 0,002$.)

8. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по одній мішені. Імовірності попадання для кожного з них дорівнюють відповідно $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$. При одночасному пострілі було два попадання. Знайдіть імовірність того, що не влучив третій стрілець. $(\frac{6}{13})$

9. Два гравці по черзі підкидають правильну монету. Виграє той, у кого вперше з'явиться герб. Знайдіть імовірності виграшу для кожного гравця. $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

10. Для підвищення надійності приладу він дублюється $n-1$ іншими такими приладами; надійність кожного приладу дорівнює p. а) Знайдіть надійність цієї системи приладів (ймовірність того, що система буде в робочому стані). Скільки приладів треба взяти, щоб надійність системи була не менша ніж P? б) Знайдіть надійність системи приладів, якщо пристрій, що включає дублюючий прилад, має надійність p_1 (імовірність того, що дублюючий пристрій буде включено). Скільки треба взяти приладів, щоб надійність цієї системи була не меншою ніж P?
(а) $1-(1-p)^n,\ n \geqslant \dfrac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)}$, б) $1-(1-p)(1-p_1p)^{n-1}$, $n \geqslant 1+\ln\dfrac{1-P}{1-p} : \ln(1-p_1p)$.)

1.4 Послідовності незалежних випробувань

В науковій і практичній діяльності повсякчас доводиться багаторазово проводити випробування у схожих умовах, при цьому результати попередніх випробувань ніяк не позначаються на наступних. Якраз поняття незалежності спроможне дати аналітичне описання послідовності такого типу випробувань (дослідів).

Найпростіший тип таких випробувань маємо у тому випадку, коли у кожному з них деяка подія A може відбутися з ймовірністю, яка залишається однаковою, незалежно від попередніх або наступних випробувань (має місце незалежність нинішнього від попереднього і наступного). До такого типу послідовностей випробувань належать: кидання правильної монети (ймовірність випадання герба рівняється $\frac{1}{2}$), кидання правильного грального кубика (ймовірність випадання шістки рівняється $\frac{1}{6}$), витягування з поверненням з колоди у 36 карт однієї карти (ймовірність витягнути туза рівняється $\frac{1}{9}$), стабільне масове виробництво певних виробів (ймовірність того, що деталь бракована, є сталою характеристикою).

Математичну модель, яка описує послідовність випробувань такого типу, можна подати у наступному вигляді. Нехай маємо двохелементну множину $X = \{0, 1\}$, і нехай Ω — множина всіх вибірок об'єму n з повторенням і упорядкованих (дивись правий шлях на блок-схемі), тобто елементами ω множини Ω є розміщення з повторенням з двох елементів по n. Інакше кажучи, $\omega = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, де $e_i = 1$, якщо i-ому випробуванні подія A мала місце, і $e_i = 0$ — у противному випадку. Очевидно, що $N(\Omega) = 2^n$. Нехай p — число з інтервалу $(0; 1)$, яке будемо вважати ймовірністю події A у кожному випробуванні. Центральна задача — знаходження ймовірності того, що при n незалежних випробуваннях подія A матиме місце k разів.

Для прикладу, знайдемо ймовірність того, що при чотирьох киданнях правильного грального кубика „шістка" випаде два рази. Всі можливі результати досліду можна подати як множину Ω, елементами якої є набори $\omega = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, де $e_i = 1$, якщо при k-ому киданні „шістка" випала, і $e_i = 0$ — у протилежному випадку. Очевидно, що число їх рівняється 16.

Якщо позначити через A_i подію, яка полягає у тому, що при i-ому киданні випаде „шістка", то елементи $\omega \in \Omega$ дістають таке тлумачення: $\omega_1 = (1, 1, 1, 1)$ виражає той факт, що відбулась подія $A_1A_2A_3A_4$, $\omega_2 = (1, 1, 1, 0)$ — факт, що відбулась подія $A_1A_2A_3\bar{A}_4, \ldots, \omega_{16}$ — факт, що відбулась подія $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$. Врахувавши, що у кожному випробуванні $P(A_i) = \frac{1}{6}$, $P(\bar{A}_i) = \frac{5}{6}$, і що маємо справу з послідовністю незалежних випробувань, для кожного ω можна визначити ймовірність:

$$\begin{aligned}
&\omega_1 \longmapsto P(A_1A_2A_3A_4) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^4, \\
&\omega_2 \longmapsto P(A_1A_2A_3\bar{A}_4) = \tfrac{5}{6}\left(\tfrac{1}{6}\right)^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\omega_{16} \longmapsto P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^4.
\end{aligned}$$

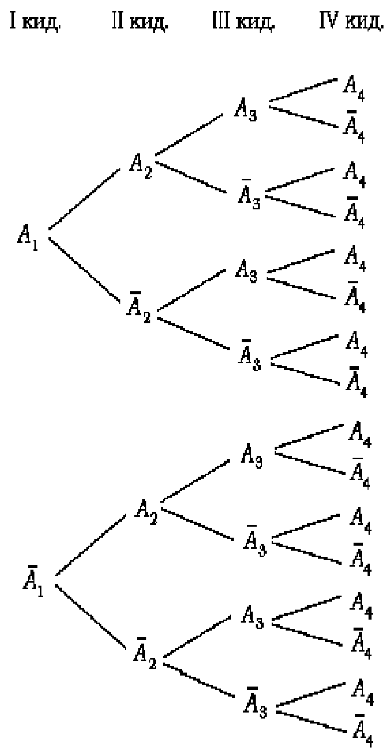
Взагалі, якщо ω складається з k одиничок і $4 - k$ нуликів, то незалежно від порядку, у якому вони розташовані, йому відповідає ймовірність

$$\omega \longmapsto \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}.$$

Приведені міркування можна подати у такому вигляді (рис.6). Очевидно, що подія „при чотирьох киданнях правильного кубика „шістка" випаде два рази" відбувається тоді і тільки тоді, коли результатом чотирьох кидань є один з елементів множини $\{\omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13}\}$, а її ймовірність рівняється $6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

У загальному випадку, коли $\omega = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ містить k одиничок і $n - k$ нуликів, його ймовірність $P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$

незалежно від розташування одиничок, тобто результат досліду (проведено n випробувань, при яких подія A відбудеться k разів) має ймовірність $p^k(1-p)^{n-k}$. А оскільки k одиничок можна розташувати на n місцях (останні $n-k$ місць займуть нулики) C_n^k способами, то ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях подія A відбудеться k разів рівняється $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.



$$
\begin{aligned}
P(\omega_1) &= P(A_1A_2A_3A_4) = \left(\tfrac{1}{6}\right)^4\\
P(\omega_2) &= P(A_1A_2A_3\bar{A}_4) = \tfrac{5}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\\
P(\omega_3) &= P(A_1A_2\bar{A}_3A_4) = \tfrac{5}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\\
P(\omega_4) &= P(A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\\
P(\omega_5) &= P(A_1\bar{A}_2A_3A_4) = \tfrac{5}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\\
P(\omega_6) &= P(A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\\
P(\omega_7) &= P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\\
P(\omega_8) &= P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3\cdot\tfrac{1}{6}\\
P(\omega_9) &= P(\bar{A}_1A_2A_3A_4) = \tfrac{5}{6}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\right)^3\\
P(\omega_{10}) &= P(\bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\\
P(\omega_{11}) &= P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\\
P(\omega_{12}) &= P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3\cdot\tfrac{1}{6}\\
P(\omega_{13}) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\\
P(\omega_{14}) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3\cdot\tfrac{1}{6}\\
P(\omega_{15}) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^3\cdot\tfrac{1}{6}\\
P(\omega_{16}) &= P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4) = \left(\tfrac{5}{6}\right)^4
\end{aligned}
$$

Рис. 6

Якщо скористатись позначенням

$$p_n(k) := C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{1.4.1}$$

де $q = 1-p$, то (1.4.1) носить назву *формули Бернуллі*, а послідовність $(p_n(k))$ $k = 0, 1, \ldots, n$ — *біномного розподілу*. Крім того формули

$$p_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} p_n(k), \tag{1.4.2}$$

$$p_n(k \geqslant 1) = \sum_{k=1}^{n} p_n(k) = 1 - 2^n \tag{1.4.3}$$

слугують для визначення ймовірності того, що при n незалежних випробуваннях подія A відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 разів (1.4.2), та ймовірності того, що при n незалежних випробуваннях подія A відбудеться не менше одного разу (хоча б один раз) (1.4.3). Крім того, у біномному розподілі ймовірності $p_n(k)$ спочатку зростають, а потім спадають. Максимальне значення досягається у точці $k_0 = [np+p]$, якщо $np+p$ — дробове число, і у точках $k_0 = np+p$, k_0-1, якщо $np+p$ — ціле число. Отож, коли $np + p$ — дробове число, то $k_0 = [np + p]$ є *найімовірніше число* появ події A при n незалежних випробуваннях, за умови, що у кожному випробуванні ймовірність появи події A рівняється p, а $p_n(k_0)$ — його ймовірність. Зрозуміло, що для всіх $k \neq k_0$ $p_n(k) < p_n(k_0)$. Коли ж $np + p$ — ціле число, то маємо два найімовірніші числа появ події $p_n(k_0) = p_n(k_0 - 1)$, де $k_0 = np + p$.

Приклад 1. Правильний гральний кубик кидається 5 разів. Знайдіть імовірність того, що двічі випаде число, кратне 3.

Розв'язання. Нехай A — подія, яка полягає у тому, що при киданні кубика випаде число, кратне трьом, тобто 3 або 6. Тоді $p = P(A) = \frac{1}{3}$. Оскільки кубик кидається 5 разів ($n = 5$), то ймовірність того, що при п'яти киданнях число очок, кратне 3, випаде 2 рази рівняється (див. (1.4.1))

$$p_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}. \qquad \square$$

Приклад 2. Що ймовірніше, при киданні правильної монети герб випаде:
а) 3 рази з чотирьох чи 5 разів з восьми;
б) не менше трьох разів з чотирьох чи не менше п'яти разів з восьми?

Розв'язання. Оскільки мова йде про правильну монету, то ймовірність випадання герба при одному киданні рівняється $\frac{1}{2}$.
а) Скориставшись формулою (1.4.1), маємо:

$$p_4(3) = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}, \qquad p_8(5) = C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32},$$

тобто ймовірніше, що при чотирьох киданнях герб випаде 3 рази.
б) Скориставшись формулами (1.4.1) і (1.4.2), маємо:

$$p_4(k \geqslant 3) = p_4(3) + p_4(4) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16},$$
$$p_8(k \geqslant 5) = p_8(5) + p_8(6) + p_8(7) + p_8(8) =$$
$$= C_8^5\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^8 C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{93}{256},$$

тобто $\frac{5}{16} < \frac{93}{256}$. Отже, ймовірніше, що при восьми киданнях герб випаде не менше п'яти разів. □

Приклад 3. При роздачі колоди у 52 карти чотирьом гравцям: а) один із них тричі підряд не отримав жодного туза, б) другий чотири рази отримав три тузи. Чи є підстава у першому випадку жалітися на „невезіння", а у другому запідозрити гравця у шахрайстві?

Розв'язання. а) Результатом досліду у даному випадку є вибірка об'єму 13 з 52 елементів без повторення і невпорядкована (див. лівий від середини шлях на блок-схемі). Отже, ймовірність того, що при роздачі карт конкретний гравець не отримає жодного туза рівняється

$$p_1 = \frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}} \approx 0,3038.$$

Тоді ймовірність того, що при трьох роздачах карт він не отримає жодного туза рівняється

$$p_3(3) = C_3^3 \cdot p_1^3(1-p_1)^0 \approx (0,3038)^3 \approx 0,028.$$

Очевидно, що подія мало ймовірна і є підстава жалітися на „невезіння“.
б) Імовірність того, що при роздачі карт конкретний гравець отримає три тузи рівняється

$$p_2 = \frac{C_4^3 \cdot C_{48}^{10}}{C_{52}^3} \approx 0,0412.$$

Тоді ймовірність того, що при чотирьох роздачах карт він кожного разу отримає три тузи рівняється

$$p_4(4) = C_4^4 \cdot p_2^4(1-p_2)^0 \approx (0,0412)^4 \approx 2,88 \cdot 10^{-6}.$$

Отже є підстави запідозрити гравця у шахрайстві. □

Приклад 4. Цех виготовляє деталі, кожна з яких з ймовірністю $0,01$ має дефект. Скільки деталей має бути у партії, щоб: а) найбільш імовірне число нестандартних деталей у ній дорівнювало 10; б) імовірність того, що серед них є хоч одна нестандартна деталь була не меншою $0,95$?

Розв'язання. Формування партії з n деталей можна мислити як послідовність n незалежних випробувань (вважаємо, що або проводиться випадковий вибір з повереренням із скінченої генеральної сукупності, у якій 1% нестандартних деталей, або проводиться вибір без повернення з нескінченої генеральної сукупності), у кожному з яких імовірність появи події A

(вибрана нестандартна деталь) дорівнює $p = 0,01$.
а) Для визначення невідомого n складемо рівняння

$$[n \cdot 0,01 + 0,01] = 10,$$

яке еквівалентне нерівності

$$10 \leqslant n \cdot 0,01 + 0,01 < 11$$

або

$$999 \leqslant n < 1099.$$

З останньої нерівності маємо, що найімовірніше число нестандартних деталей буде дорівнювати 10, якщо у партії або 999, або 1000, ..., або 1098 деталей.
б) Скориставшись формулою (1.4.3), складемо нерівність для визначення невідомого n

$$p_n(k \geqslant 1) \geqslant 0,95 \quad \text{або} \quad 1 - (1-p)^n \geqslant 0,95.$$

Оскільки за умовою $p = 0,01$, то остання нерівність запишеться у вигляді

$$1 - (0,99)^n \geqslant 0,95$$

або

$$n \geqslant \frac{\ln 0,05}{\ln 0,99} \quad \text{і} \quad n > 298.$$

Отже, у випадково відібраній партії, об'єм якої складає більше, ніж 298 деталей, з ймовірністю не меншою $0,95$ є хоч одна нестандартна деталь. $\square$

Формула Бернуллі узагальнюється на той випадок, коли з кожним випробуванням пов'язано декілька подій, а саме у кожному випробуванні може відбутися одна і тільки одна з подій $A_1, A_2, \ldots, A_k$, причому у кожному випробуванні ймовірності цих подій рівняються відповідно $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях подія A_1 відбудеться $m_1, A_2 - m_2, \ldots, A_k - m_k$ разів обчислюється за формулою

$$p_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}. \qquad (1.4.4)$$

Приклад 5. Всередину кола навгад кинуто 13 точок.
а) Знайдіть ймовірність того, що чотири з них попаде у пра-

вильний трикутник, вписаний у це коло.
б) Знайдіть ймовірність того, що у кожен сегмент попаде по три точки, а у трикутник чотири точки.

Розв'язання. а) Якщо A — подія, яка полягає у тому, що кинута навгад всередину кола радіуса R точка попаде у правильний трикутник, вписаний у нього, то згідно з геометричним означенням ймовірність цієї події рівняється

$$P(A) = \frac{S_\Delta}{S_{\text{кола}}} = \frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

Кожне кидання точки всередину кола можна розглядати як випробування, причому вони незалежні. Отже, згідно з умовою проводиться 13 незалежних випробувань. Нас цікавить імовірність того, що при чотирьох випробуваннях матиме місце подія A. Тоді, скориставшись формулою Бернуллі, маємо:

$$p_{13}(4) = C_{13}^4 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4 \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^9 \approx 0,4135.$$

б) З кожним випробуванням (киданням точки всередину кола) пов'язуємо чотири події: A_0 — точка попаде у правильний трикутник, вписаний у це коло, A_1, A_2, A_3 — точка попаде відповідно у перший, другий і третій сектори. Очевидно, що

$$P(A_0) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi},\ P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right).$$

Тоді, скориставшись формулою (1.4.4), маємо:

$$p_{13}(4,3,3,3) = \frac{13!}{4!\ 3!\ 3!\ 3!}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)\right)^9 \approx 0,0147. \quad \square$$

Теорема Пуассона, локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа (див., наприклад, [5] с.115–122) дають можливість при обчисленні ймовірностей $p_n(k)$, $p_n(k_1, k_2)$ користуватись такими апроксімаційними (асимптотичними) формулами.

Якщо $n \geqslant 100$ і $0 < np < 10$, то

$$p_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k!}\, e^{-np} \quad \textit{(формула Пуассона).} \tag{1.4.5}$$

Якщо ж $np \geqslant 10$, то

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi(x_k) \quad \textit{(формула Лапласа)}, \tag{1.4.6}$$

де $\quad q = 1 - p, \quad \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}},$

$$p_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{1.4.7}$$

де
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

табульована функція (див. додаток),

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Приклад 6. Імовірність того, що виріб, який сходиться з конвеєра, першого сорту, рівняється $0,9$. Знайдіть імовірність того, що з 600 взятих на перевірку виробів:
а) 530 будуть першого сорту;
б) не менше 520 і не більше 535 виробів будуть першого сорту.

Розв'язання. а) Відбір 600 виробів можна розглядати як 600 незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події

A (перевірка засвідчила, що виріб першого сорту) дорівнює $0,9$. Тоді за формулою Бернуллі

$$p_{600}(530) = C_{600}^{530}\ (0,9)^{530}\ (0,1)^{70}.$$

Оскільки в даному випадку $np = 540$, то для обчислення цієї ймовірності скористаємось формулою (1.4.6). Маємо:

$$p_{600}(530) \approx \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}}\ \varphi(x^*),$$

де $$x^* = \frac{530 - 540}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,36.$$

Таким чином,

$$p_{600}(530) \approx 0,136 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(-1,36)^2}{2}} \approx 0,021.$$

б) Імовірність того, що з 600 взятих на перевірку виробів не менше 520 і не більше 535 виробів будуть першого сорту, рівняється

$$p_{600}(520, 535) = \sum_{k=520}^{535} C_{600}^{k}\ (0,9)^{k}\ (0,1)^{600-k}.$$

Для обчислення цієї ймовірності скористаємось формулою (1.4.7). Маємо:

$$p_{600}(520, 535) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \dfrac{520 - 540}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -2,72, x_2 = \dfrac{535 - 540}{\sqrt{600 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -0,68$.

Згідно з таблицею значень функції $\Phi(x)$

$$\Phi(-2,72) \approx -0,4967,\ \ \Phi(-0,68) \approx -0,2517.$$

Отже, $$p_{600}(520, 535) \approx -0,2517 + 0,4967 = 0,2450. \qquad \Box$$

Особливу роль при розв'язуванні задач з практичним змістом відіграє *інтегральна гранична теорема Муавра-Лапласа.*

Якщо у кожному з n незалежних випробувань імовірність події A дорівнює p $(0 < p < 1)$, а ν_n — число появ цієї події, то для будь-яких a і b $(a < b)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leqslant \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \qquad (1.4.8)$$

На підставі цієї теореми можна оцінити ймовірність нерівності

$$\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| < \varepsilon,$$

тобто ймовірність того, що *відносна частота появи події A* при n незалежних випробуваннях відхиляється від ймовірності цієї події менше, ніж на ε. Справді,

$$P\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon < \frac{\nu_n - np}{n} < \varepsilon\right) =$$
$$= P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{\nu_n - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (1.4.9)$$

Друга задача, яка може бути розв'язаною на підставі (1.4.8), відшукання найменшого числа випробувань, які необхідно виконати для того, щоб з імовірністю, не меншою γ, відносна частота $\frac{\nu_n}{n}$ появи події при n незалежних випробуваннях відхилялась від імовірності події менше, ніж на ε. Задача зводиться до відшукання n з нерівності

$$P\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geqslant \gamma$$

або ж з нерівності

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geqslant \gamma. \qquad (1.4.10)$$

І, нарешті, ще одна задача зводиться до розв'язування нерівності (1.4.10), а саме за заданою ймовірністю γ і числом випробувань n необхідно визначити межу відхилення очікуваної відносної частоти від заданої ймовірності.

Приклад 7. Імовірність події A у кожному з 1200 випробувань рівняється $\dfrac{2}{3}$.
а) Знайдіть межу відхилення очікуваної відносної частоти появи події A від її ймовірності, яка гарантована з ймовірністю $0,985$.
б) Знайдіть, у які межі укладається за цих умов число появ події A.

Розв'язання. а) Згідно з умовою

$$P\left(\left|\frac{\nu}{1200}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon\right)=0,985.$$

А оскільки (див. (1.4.9))

$$P\left(\left|\frac{\nu}{1200}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{1200}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}}\right)\approx 2\Phi\left(73,5\varepsilon\right),$$

то з рівняння

$$2\Phi(73,5\varepsilon)=0,985,$$

скориставшись таблицею (див. додаток), дістанемо $73,5\varepsilon\approx 2,4$ і $\varepsilon=0,03$. Отже, межа відхилення очікуваної відносної частоти появи події A від її ймовірності рівняється $0,03$.
б) Від нерівності

$$\left|\frac{\nu}{1200}-\frac{2}{3}\right|<0,03$$

перейдемо до нерівності

$$-0,03<\frac{\nu-800}{1200}<0,03.$$

Звідки дістаємо межі, у які укладається число появ події A, з ймовірністю $0,985$

$$764 < \nu < 836. \qquad \square$$

Приклад 8. Скільки необхідно виконати випробувань, щоб з ймовірністю $0,995$ відхилення відносної частоти появи події A від її ймовірності $p = \dfrac{3}{8}$ була меншою $0,01$?

Розв'язання. Оскільки, згідно з (1.4.9),

$$P\left(\left|\frac{\nu_n}{n} - \frac{3}{8}\right| < 0,01\right) = 2\Phi\left(0,08\sqrt{\frac{n}{15}}\right),$$

то з рівняння

$$2\Phi\left(0,08\sqrt{\frac{n}{15}}\right) \approx 0,995$$

отримуємо

$$0,08\sqrt{\frac{n}{15}} \approx 2,81.$$

Звідси $n = 18506$. Отже, як тільки число випробувань $n \geqslant 18506$, то відносна частота появи події відхиляється від її ймовірності менше, ніж на $0,01$. $\square$

Вправи для самостійного розв'язування

1. Побудувати біномний розподіл для числа гербів, яке випадає при п'яти киданнях правильної монети. Побудуйте його графік.

2. Виконується 10 незалежних пострілів в мішень. Імовірність попадання в мішень при кожному пострілу рівняється $0,2$. Знайдіть:
   а) найбільш імовірне число попадань та його ймовірність;
   б) імовірність того, що число попадань буде не меншим 2 і не більше 4. (а) $k_0 = 2$; б) $\approx 0,751$.)

3. Знайдіть імовірність:
   а) появи хоча би однієї „шістки" при підкиданні 6 правильних гральних кубиків;
   б) появи принаймні двох „шісток" при підкиданні 12 правильних гральних кубиків.
   в) появи принаймні трьох „шісток" при підкиданні 18 правильних гральних кубиків.
   (а) 0,665; б) 0,618; в) 0,597.)

4. Два гравці кидають правильні монети n разів кожен. Знайдіть імовірність того, що в них випаде однакова кількість гербів.
   ($C_{2n}^n \dfrac{1}{2^n}$. *Вказівка.* Знайдіть коефіцієнти при x^n в лівій і правій частині рівності $(x+1)^n(x+1)^n{=}(x+1)^{2n}$.)

5. Контрольна робота складається з шести задач, причому вважається, що вона виконана, якщо розв'язано хоча би чотири задачі. Якщо студент буде розв'язувати протягом пари лише чотири задачі, то ймовірність розв'язати будь-яку з них рівняється $0,8$. Якщо він буде розв'язувати п'ять задач, то ймовірність розв'язати будь-яку з них

$0,7$, а якщо він візьметься за розв'язування всіх шести задач, то ймовірність розв'язати будь-яку з них рівняється $0,6$. Якої тактики має притримуватись студент за таких гіпотетичних умов, щоби його шанси успішно виконати роботу були найбільшими? ($0,410$; $0,528$; $0,361$.)

6. Знайдіть імовірність того, що при киданні 12 правильних гральних кубиків (одного кубика 12 разів) кожна грань випаде двічі. ($\approx 0,0034$. *Вказівка.* Скористайтесь формулою (1.4.4).)

7. Імовірність того, що з конвеєра зійде виріб першого сорту рівняється $0,9$. Знайдіть імовірність того, що з 1000, взятих на перевірку, виробів першого сорту буде не менше 850 і не більше 950.

8. З бази до магазину відправлено 4000 пляшок пива. За спостереженнями відправника ймовірність того, що в дорозі пляшка розіб'ється, рівняється $0,0005$. Знайдіть імовірність того, що по дорозі з 4000 пляшок розіб'ється:
   а) три пляшки;
   б) не менше 3 і не більше 5 пляшок.
   (а) $\approx 0,180$; б) $\approx 0,307$.)

9. Електростанція обслуговує мережу, у якій задіяно 6000 лампочок. Імовірність включення кожної з них протягом деякого проміжку часу рівняється $0,8$. Знайдіть імовірність того, що за цей проміжок часу буде включено не менше 4750 лампочок. ($0,9463$.)

10. В деякому населеному пункті N 2500 жителів. Кожен з них приблизно 6 разів на місяць їздить поїздом до міста M, обираючи дні поїздок навгад незалежно від інших. Якої найменшої місткості може бути поїзд, щоб він переповнювався у середньому не частіше одного разу на

100 днів? (547. *Вказівка.* Нехай A — подія, яка полягає у тому, що житель обере для поїздки певний день. Тоді, згідно з умовою, можна прийняти $P(A) = \dfrac{1}{5}$. А отже, імовірність того, що в один день поїде до міста не менше k жителів рівняється

$$p_{2500}\ (\geqslant k)\ = \sum_{m=k}^{2500} C_{2500}^{m} \left(\frac{1}{5}\right)^{m} \left(\frac{4}{5}\right)^{2500-m} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{2500-500}{20}\right) - \Phi\left(\frac{k-500}{20}\right) = 0,5 - \Phi\left(\frac{k-500}{20}\right).$$

Місткість поїзда, яка забезпечує виконуваність вказаних умов визначається з нерівності

$$0,5 - \Phi\left(\frac{k-500}{20}\right) \leqslant 0,01.)$$

Контрольна робота №1

I. Обчислити:

1.	A_{10}^3,	C_{11}^4,	P_8,	$A_{(9)}^4$,	$C_{(8)}^5$,	$P_{11}(4,4,3)$;
2.	A_{11}^3,	C_{12}^4,	P_7,	$A_{(10)}^4$,	$C_{(9)}^5$,	$P_{10}(1,3,6)$;
3.	A_{12}^3,	C_{12}^3,	P_{10},	$A_{(11)}^4$,	$C_{(10)}^3$,	$P_{10}(4,2,4)$;
4.	A_9^4,	C_8^5,	P_9,	$A_{(9)}^3$,	$C_{(10)}^5$,	$P_{12}(2,3,7)$;
5.	A_{10}^4,	C_9^5,	P_7,	$A_{(12)}^4$,	$C_{(11)}^6$,	$P_{11}(4,5,2)$;
6.	A_{11}^4,	C_9^4,	P_8,	$A_{(10)}^2$,	$C_{(12)}^6$,	$P_{10}(2,3,5)$;
7.	A_{10}^5,	C_{10}^5,	P_7,	$A_{(11)}^2$,	$C_{(10)}^3$,	$P_{11}(3,2,6)$;
8.	A_{12}^2,	C_{11}^6,	P_9,	$A_{(10)}^3$,	$C_{(11)}^4$,	$P_{12}(4,1,7)$;
9.	A_{10}^2,	C_{12}^6,	P_{10},	$A_{(11)}^3$,	$C_{(12)}^3$,	$P_9(2,3,4)$;
10.	A_{11}^2,	C_{10}^4,	P_8,	$A_{(12)}^3$,	$C_{(12)}^4$,	$P_{10}(3,3,4)$.

II. Маємо $4n$ карток ($n \geqslant 2$) чотирьох кольорів по n карток кожного кольору. Картки кожного кольору занумеровані числами $1, 2, \ldots, n$. Скількома способами можна вибрати 5 карток так, щоб серед них було:
а) п'ять карток одного кольору з послідовними номерами;
б) чотири з п'яти карток мають однакові номери;
в) три картки з п'яти мають один номер, а дві — інший;
г) всі картки одного кольору;
д) п'ять послідовно занумерованих карток?
Конкретизувати задачу, якщо n рівняється:
1. 20; **2.** 19; **3.** 18; **4.** 17; **5.** 16; **6.** 15; **7.** 14; **8.** 13; **9.** 12; **10.** 11.

III. Скільки серед натуральних чисел, які не перевищують 10^n, є таких, що:
а) діляться на k_1 і k_2;
б) не діляться ні на k_1, ні на k_2;
в) не містить у своєму записі цифри k;
г) не містить у своєму записі двох цифр k підряд;
д) мають цифри, що розташовані у незростаючому порядку;
е) мають суму цифр, рівну r?

1. $k_1 = 2, \quad k_2 = 7, \quad k = 0, \quad r = 9;$
2. $k_1 = 2, \quad k_2 = 5, \quad k = 1, \quad r = 8;$
3. $k_1 = 3, \quad k_2 = 5, \quad k = 2, \quad r = 7;$
4. $k_1 = 2, \quad k_2 = 9, \quad k = 3, \quad r = 6;$
5. $k_1 = 3, \quad k_2 = 7, \quad k = 4, \quad r = 5;$
6. $k_1 = 5, \quad k_2 = 7, \quad k = 5, \quad r = 4;$
7. $k_1 = 5, \quad k_2 = 9, \quad k = 6, \quad r = 10;$
8. $k_1 = 7, \quad k_2 = 9, \quad k = 7, \quad r = 11;$
9. $k_1 = 3, \quad k_2 = 5, \quad k = 8, \quad r = 12;$
10. $k_1 = 2, \quad k_2 = 3, \quad k = 9, \quad r = 13.$

IV. Кидається три правильні гральні кубики. Нехай i, j, k — число очок, яке випадає, відповідно, на першому, другому і третьому кубиках. Знайдіть імовірності того, що:

1. а) випаде хоч одна шістка,
б) $i < j < k$, в) $i + j + k = 6$, г) $i + j + k \leqslant 11$;
2. а) випаде одна шістка,
б) $i \leqslant j < k$, в) $i + j + k = 7$, г) $i + j + k \leqslant 12$;
3. а) випаде більше однієї шістки,
б) $i < j \leqslant k$, в) $i + j + k = 8$, г) $i + j + k \leqslant 13$;
4. а) випаде менше двох шісток,
б) $i \leqslant j \leqslant k$, в) $i + j + k = 9$, г) $i + j + k \leqslant 14$;
5. а) випаде дві шістки,
б) $i = j < k$, в) $i + j + k = 10$, г) $i + j + k \leqslant 15$;
6. а) не випаде жодної шістки,
б) $i = j \leqslant k$, в) $i + j + k = 11$, г) $i + j + k \leqslant 6$;
7. а) випаде різне число очок,
б) $i < j = k$, в) $i + j + k = 12$, г) $i + j + k \leqslant 7$;
8. а) на двох кубиках випаде однакове число очок,
б) $i \leqslant j < k$, в) $i + j + k = 13$, г) $i + j + k \leqslant 8$;
9. а) випаде більше однієї одинички,
б) $i < 2j \leqslant k$, в) $i + j + k = 14$, г) $i + j + k \leqslant 9$;
10. а) випаде менше двох одиничок,
б) $2i \leqslant j \leqslant k$, в) $i + j + k = 15$, г) $i + j + k \leqslant 10$.

V.

1. З урни, що містить 10 занумерованих куль, витягують 3. Знайдіть імовірність того, що:
а) ці кулі будуть з різними номерами (вибір з повторенням);
б) номери витягнутих куль зростають (вибір з повторенням);
в) номери витягнутих куль зростають (вибір без повторення).

2. У ліфт 12-ти поверхового будинку заходять три пасажири, кожен з яких може вийти на будь-якому з поверхів, починаючи з другого. Знайдіть імовірність того, що:
а) пасажири вийдуть на різних поверхах;
б) пасажири вийдуть на трьох поверхах підряд;
в) один з них вийде до п'ятого, а два після п'ятого, якщо відомо, що вони живуть на різних поверхах.

3. Випадково відібрано три особи. Знайдіть імовірність того, що:
а) вони народились у різні місяці року;
б) двоє з них народились у перші 5 місяців року;
в) їхні дні народження припадають на три місяці, що йдуть підряд, якщо відомо, що вони народилися в різні місяці року.

4. Три пасажири сідають у 10 вагонів, обираючи їх навгад. Знайдіть імовірність того, що:
а) вони сядуть в різні вагони;
б) два з них сядуть у перші чотири вагони;
в) сядуть у три вагони, що йдуть підряд, якщо відомо, що вони сідають в різні вагони.

5. Шість пасажирів сідають у три вагони, обираючи їх навгад. Знайдіть імовірність того, що:
а) у перший вагон зайде три пасажири;
б) у кожний вагон зайде по два пасажири;
в) в один з вагонів зайде 3 пасажири, в другий — 2 пасажири, і у третій — один пасажир.

6. З урни, що містить 9 занумерованих куль, навгад витягають чотири. Знайдіть імовірність того, що:

а) ці кулі будуть з різними номерами (вибір з повторенням);
б) номери витягнутих куль зростають (вибір з повторенням);
в) номери витягнутих куль спадають (вибір без повторення).

7. У ліфт 9-ти поверхового будинку заходять чотири пасажири, кожен з яких може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайдіть імовірність того, що:
а) пасажири вийдуть на різних поверхах;
б) один з них вийде до п'ятого поверху;
в) пасажири вийдуть на чотирьох поверхах підряд, якщо відомо, що вони виходять на різних поверхах.

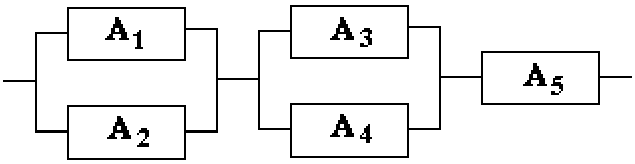
8. Випадково відібрано чотири особи. Знайдіть імовірність того, що:
а) вони народились у різні дні тижня;
б) двоє з них народились у понеділок;
в) їхні дні народження припадають на чотири дні тижня, що йдуть підряд, якщо відомо, що вони народились у різні дні тижня.

9. Чотири пасажири сідають у дев'ять вагонів, обираючи їх навгад. Знайдіть імовірність того, що:
а) вони сядуть у різні вагони;
б) два з них сяде у перші чотири вагони;
в) сядуть у чотири вагони, що йдуть підряд, якщо відомо, що вони сідають у різні вагони.

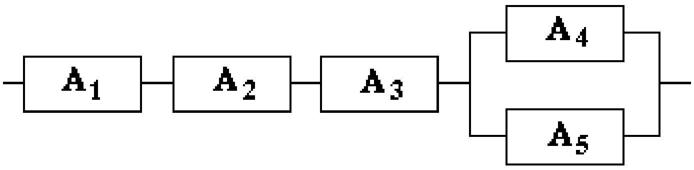
10. Дев'ять пасажирів сідають у три вагони, обираючи їх навгад. Знайдіть імовірність того, що:
а) у перший вагон сяде 4 пасажири;
б) у кожен вагон сяде по 3 пасажири;
в) в один з вагонів сяде 4 пасажири, в другий — 3 і у третій — 2.

VI. Електричний ланцюг складений з елементів A_k $(k = \overline{1,5})$ за заданою схемою. При виході з ладу будь-якого елемента ланцюг розривається на місці його підключення. Імовірності виходу з ладу за даний період часу елемента A_k рівняється p_k ($k = \overline{1,5}$). Припустимо, що елементи виходять або не виходять з ладу незалежно один від одного. Знайдіть ймовірність того, що за заданий період часу ланцюг пропускає струм.

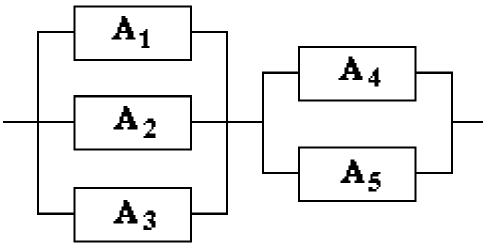
1.



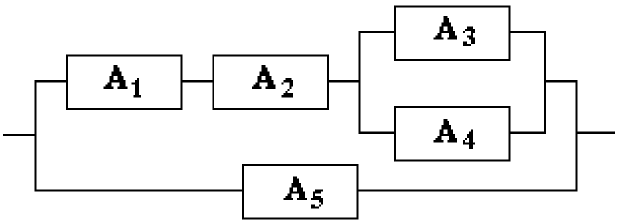
2.



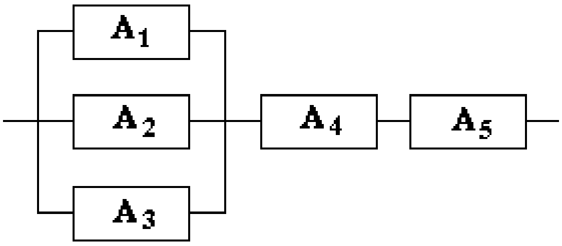
3.



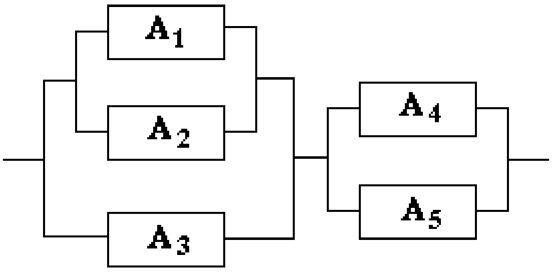
4.



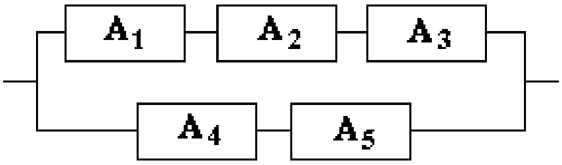
5.



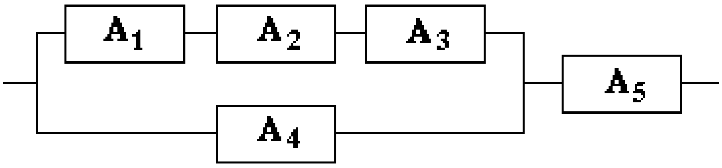
6.



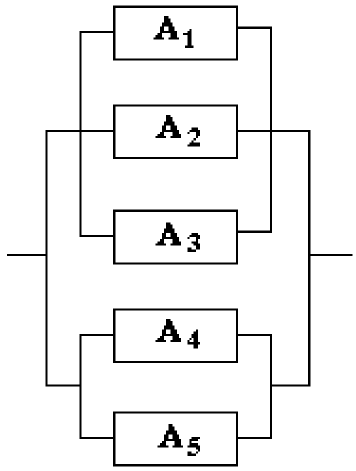
7.



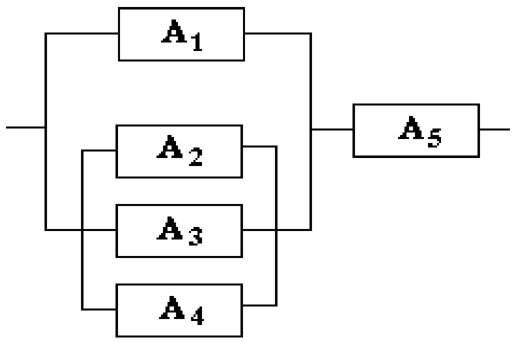
8.



9.



10.



VII. Розв'язати задачі, використовуючи формулу повної ймовірності.

1. З урни, яка містить 4 білі і 4 чорні кулі, взято дві кулі і перекладено в другу урну, яка містить 3 білі і 2 чорні кулі. Після цього з другої урни взято дві кулі. Яка ймовірність того, що вони білі?

2. В урні 4 білі і 6 чорних куль. Дві кулі, невідомо якого кольору, загублено. Знайти ймовірність того, що навгад взяті дві кулі з тих, що залишилися, будуть білі.

3. У першій урні 5 білих і 5 чорних куль, у другій — 7 білих і 3 чорних кулі. З кожної урни взято по одній кулі і покладено у третю урну, в якій 3 білих і 1 чорна куля. Після цього з третьої урни взято дві кулі. Знайти ймовірність того, що вони білі.

4. В урну, яка містить 4 кулі (чорні і білі), поклали 2 білі і 1 чорну кулю. Знайти ймовірність того, що витягнуті після цього з урни 2 кулі будуть чорні, якщо всі припущення про початковий склад урни рівноможливі.

5. З урни, яка містить 4 білі і 4 чорні кулі, взято дві кулі і перекладено в другу урну, яка містить 3 білі і 3 чорні кулі. Яка ймовірність того, що взяті з другої урни після перекладання дві кулі будуть чорні?

6. В урну, яка містить 5 куль, поклали дві білі кулі. Знайти ймовірність того, що взяті після цього дві кулі будуть різного кольору, якщо всі припущення про початковий склад урни рівноможливі.

7. З урни, яка містить 3 білі і 2 чорні кулі, перекладено дві кулі в урну, яка містить 4 білі і 4 чорні кулі. Знайти ймовірність того, що взяті навгад після перекладання дві кулі з другої урни будуть білі?

8. У трьох урнах лежать білі і чорні кулі. У першій — 3 білі і 1 чорна, у другій — 6 білих і 4 чорних, у третій — 9 білих і 1 чорна. Урну вибирають навмання і виймають з неї одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

9. У першій урні 5 білих і 3 чорні кулі, у другій — 7 білих і 5 чорних куль. З кожної урни взято по одній кулі і покладено в третю урну, в якій 1 біла і 1 чорна кулі. Після цього з третьої урни навгад взято 1 кулю. Знайти ймовірність того, що вона чорна.

10. В урні було 2 білі, 3 чорні і 1 червона кулі. Одну кулю (невідомо якого кольору) загублено. Знайти ймовірність того, що витягнуті після цього дві кулі будуть білі.

VIII. Знайти вказані умовні ймовірності за формулою Байєса.

1. В тирі — 10 рушниць. Ймовірність влучення для 5-ти з них — $0,7$, для 3-х — $0,8$, для двох — $0,9$. Визначити ймовірність того, що стріляли з однієї з 3-х рушниць другого виду, якщо відомо, що влучили при першому пострілі.

2. Перший і другий завод поставляють порівну однакових деталей. Але I-ий завод виготовляє 90% стандартних деталей, а II-ий — 80%. Навмання взята деталь виявилась стандартною. Яка ймовірність того, що вона виготовлена I-им заводом?

3. На зборку поступають деталі з 3-х автоматів. Перший дає в середньому $0,2\%$ браку, другий $0,5\%$ браку, третій — $0,1\%$. З автоматів поступило 2000, 1800, 1200 деталей відповідно. Взята навгад деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена першим автоматом.

4. В двох урнах знаходяться, відповідно, 3 чорні і 7 білих куль, і 6 чорних і 4 білі кулі. З кожної урни беруть по одній кулі і кладуть в порожню урну. Після цього з неї беруть навгад одну кулю. Знайти ймовірність того, що з обох урн були взяті кулі різного кольору, якщо взята куля виявилась білою.

5. З повного набору каменів доміно навгад беруть два камені по черзі. Знайти ймовірність того, що першим був витягнутий дубль, якщо відомо, що другий камінь можна приставити до першого.

6. В ящику знаходиться 10 тенісних м'ячів, з них 8 нових (таких, що ними ще не грали). Для першої гри беруть три м'ячі, після гри їх повертають в ящик. Для другої гри беруть один м'яч. Він виявився новим. Знайти ймовірність того, що для першої гри були взяті всі нові м'ячі.

7. На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25%, друга — 35%, третя — 40% усіх гвинтів. Частка браку, відповідно, 5%, 4%, 2%. Випадково вибраний гвинт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його зроблено третьою машиною?

8. В урні 12 куль (5 чорних і 7 білих). Дві кулі, невідомо які саме, були загублені. Після цього з урни взяли одну кулю. Вона виявилася чорною. Знайти ймовірність того, що були загублені білі кулі.

9. У правій кишені є три монети по 10 копійок і 2 монети по 1 копійці. А в лівій кишені — 6 монет по 10 коп. і 3 — по 1 коп. З правої кишені в ліву переклали три монети. Знайти ймовірність того, що було перекладено 1 монета по 10 коп. і 2 монети по 1 коп., якщо взята навгад монета з лівої кишені виявилася монетою 10 коп.

10. На двох полицях стоять книги. На нижній — 15 книг українською мовою і 5 російською; на верхній полиці — 10 українською мовою і 8 російською. З нижньої полиці взяли навмання дві книги і переклали на верхню. Потім взяли з верхньої одну книгу, вона виявилась українською. Знайти ймовірність того, що було перекладено дві книги українською мовою.

IX. Розв'язати задачі, пов'язані з випробуваннями Бернуллі. Для знаходження p і q використовувати геометричну ймовірність.

1. У правильний трикутник зі стороною a навгад кидається 6 точок. Знайти ймовірність того, що не менше 4-х з них попаде у круг, вписаний в цей трикутник.

2. У ромб з гострим кутом 60° і стороною a навгад кидається 4 точки. Знайти ймовірність того, що не менше 2-х з них попаде у трикутник, вершинами якого є вершина одного з гострих кутів ромба і середини сторін протилежного гострого кута.

3. У квадрат зі стороною a навгад кидається 10 точок. Знайти ймовірність того, що не більше 8-ми і не менше 2-х з них попадуть у восьмикутник з вершинами на сторонах квадрата, причому кожна з вершин лежить на відстані $\frac{1}{4}\,a$ від ближньої вершини квадрата.

4. В круг радіуса R навгад кидається 10 точок. Знайти ймовірність того, що більше 3-х з них попаде у правильний шестикутник, вписаний в цей круг.

5. У правильний трикутник зі стороною a навгад кидається 7 точок. Знайти ймовірність того, що більше 2-х і не менше 6-ти з них попадуть у шестикутник, вершини якого лежать на сторонах трикутника на відстані $\frac{1}{3}$ a від ближньої вершини трикутника.

6. У правильний шестикутник зі стороною a навгад кидається 8 точок. Знайти ймовірність того, що хоча б дві з них попадуть у круг, вписаний в цей шестикутник.

7. У правильний шестикутник зі стороною a навгад кидається 6 точок. Знайти ймовірність того, що принаймні 3 з них попадуть у шестикутник, вершинами якого є середини сторін заданого шестикутника.

8. В круг радіуса R навгад кидається 12 точок. Знайти ймовірність того, що 8 або 10 з них попаде в правильний трикутник, вписаний в цей круг.

9. У квадрат зі стороною a навгад кидається 10 точок. Знайти ймовірність того, що більше половини з них попаде в круг, вписаний у цей квадрат.

10. В круг радіуса R навгад кидається 5 точок. Знайти ймовірність того, що хоча б дві з них не попадуть в квадрат, вписаний в цей круг.

X.

1. З урни, у якій однакове число білих і чорних куль, 10000 раз витягувалась з поверненням куля, і в результаті біла куля була витягнута 5011 разів, а чорна — 4989 разів.
а) Знайдіть ймовірність такого результату досліду.
б) Якщо повторити такий дослід, то якою буде ймовірність того, що відхилення відносної частоти появи білої кулі від ймовірності цієї події буде більше відносного відхилення числа бі-

лих куль, витягнутих у попередньому досліді від найімовірнішого числа витягнутих білих куль при 10000 випробуваннях?

2. Імовірність того, що на сторінці книги можуть бути помилки, рівняється $0,0025$. Перевіряється книга, у якій 800 сторінок. Знайти ймовірність того, що з помилками виявиться:
а) 5 сторінок; б) від 3 до 5 сторінок.

3. Навгад витягується 10000 цифр. Знайдіть імовірність того, що:
а) число „дев'яток" буде не менше 940 і не більше 1060;
б) відносна частота появи „дев'ятки" буде відхилятись від імовірності цієї події менше, ніж на $0,01$.

4. На факультеті 730 студентів. Імовірність того, що студент народився в даний день рівняється $\frac{1}{365}$. Знайдіть найімовірніше число студентів, які народились 1-го січня. Знайдіть імовірність того, що знайдуться три студенти з одним і тим же днем народження:
а) за формулою Бернуллі;
б) з допомогою локальної теореми Муавра-Лапласа;
в) з допомогою теореми Пуассона.

5. Для контролю з 1000 виробів вибрано без повернення 50 штук. Знайдіть ймовірність того, що у вибірці не виявиться нестандартних, якщо у всій партії їх чотири. Порівняйте знайдену ймовірність з наближеним значенням, знайденим за формулою Пуассона. Зробіть відповідний висновок.

6. У водойму випущено 100 мічений риб. Через деякий час з водойми було виловлено 400 риб, серед яких виявлено 5 відмічених. Оцініть кількість риб у водоймі з імовірністю:
а) не меншою $0,9$; б) не меншою $0,6$.

7. По каналу зв'язку передається 1000 знаків. Кожен із знаків може бути спотворений незалежно від інших з ймовірністю $0,005$. Знайдіть імовірність того, що буде спотворено не більше трьох знаків:
а) за формулою Бернуллі;

б) з допомогою інтегральної теореми Муавра-Лапласа;
в) з допомогою теореми Пуассона.

8. Імовірність події A у кожному з 625 незалежних випробувань рівняється $0,8$. Знайдіть імовірність того, що відносна частота появи події A відхиляється від її ймовірності не більше, ніж на $0,04$.

9. Імовірність події A у кожному з 400 незалежних випробувань рівняється $0,8$. Знайдіть додатне число ε таке, що відносна частота появи події A відхиляється від її ймовірності з ймовірністю $0,9876$.

10. Правильний гральний кубик кидають 80 разів. Знайдіть межі, у яких буде заключено число появ „шістки“ з ймовірністю $0,9973$.

2 Випадкові величини, їх закони розподілу, числові характеристики

Зміст модуля. Результати будь-якого стохастичного досліду можна характеризувати як якісно(реєструючи певні факти), так і кількісно (визначаючи значення певної величини). Для опису фактів, пов'язаних з дослідом, маємо поняття "подія". А для величин, які характеризують кожен можливий результат стохастичного досліду кількісно, введено поняття "випадкова величина".

Для прикладу, такими величинами будуть: число зерен, яке буде у колоску висіяної насінням пшениці, число рядів зерен у початку кукурудзи (зверніть увагу, що воно обов'язково парне), добовий надій молока від певної корови, число покупців у деякому торговому центрі протягом дня, його виручка, результати вимірювання мікрометром діаметра дротини, швидкість молекул газу (змінюється за рахунок зіткнення з іншими молекулами) і так далі і тому подібне.

Напевно Сімеон Пуассон був першим (1832), хто чітко усвідомив, що випадковою величиною, пов'язаною з даним стохастичним дослідом, є величина, яка в результаті його проведення приймає певне значення, наперед невідомо, яке саме, а задати її можна, вказавши можливі результати і певні ймовірності [1, с. 422].

В данному модулі поняття випадкової величини та її закону розподілу вводиться через поняття функції (підхід запропонований А. М. Колмогоровим). Предметом вивчення будуть два класи випадкових величин: дискретні і неперервні.

Завдання студента. Після вивчення даного модуля студент має:

- розуміти, що означає вимірність числової функції, визначеної на просторі елементарних подій;
- знати характеристичні властивості функції розподілу і розуміти, чому випадкова величина вважається заданою, якщо задана її функція розподілу;
- уміти розпізнавати дискретні і неперервні випадкові величини;
- уміти за функцією розподілу двовимірної випадкової величини знаходити закон розподілу кожної компоненти, а у випадку незалежних випадкових величин і навпаки;
- уміти знаходити функцію розподілу суми двох випадкових величин.

2.1 Дискретні випадкові величини, їх закони розподілу

На першому етапі побудуємо математичну модель, що описує випадкові величини, пов'язані із стохастичними дослідами з скінченним числом можливих результатів.

Для прикладу, розглянемо дослід, що полягає у киданні двох "правильних" монет (для спрощення різного номіналу). Можливими результатами такого досліду є: $Г_1Г_2$ — на обох монетах випав герб, $Г_1Ц_2$ — на першій випав герб, а на другій — цифра, $Ц_1Г_2$ — на першій випала цифра, а на другій —

герб, $Ц_1Ц_2$ — на обох випали цифри. Таким чином, простором елементарних подій, що описує данний дослід, є множина $\Omega = \{Г_1Г_2, Г_1Ц_2, Ц_1Г_2, Ц_1Ц_2\}$ (Ω — літера грецького алфавіту, читається "омега"). Події, пов'язані з цим дослідом, описуються всіма можливими підмножинами множини Ω (у подальшому будемо позначати таку множину 2^Ω). Оскільки монети "правильні", то кожній елементарній події, приписується ймовірність $\frac{1}{4}$. В результаті маємо ймовірносний простір $(\Omega, 2^\Omega, P)$.

Будемо цікавитись числом гербів, яке може випасти при киданні двох монет. Очевидно, що цим числом може бути одне з чисел 0, 1, 2, однак заздалегідь передбачити, яким саме буде це число неможливо. Число гербів, яке випадає при киданні двох "правильних" монет є випадкова величина, описати яку можна задавши відповідність такого вигляду $Г_1Г_2 \mapsto 2$, $Г_1Ц_2 \mapsto 1$, $Ц_1Г_2 \mapsto 1$, $Ц_1Ц_2 \mapsto 0$. Таким чином маємо відповідність, яка кожному елементу множини Ω відносить один елемент множини $\{0, 1, 2\}$, тобто число гербів, які випадають при киданні двох монет, описується функцією, визначеною на просторі елементарних подій Ω.

Однак цього недостатньо для того, щоб робити якісь прогнози щодо поведінки цієї величини. Останнє можливе, якщо будуть відомі не тільки значення випадкової величини, а й оцінка того, як часто вона ці значення приймає. Зрозуміло, що реєстрація факту "випадкова величина прийме значення, яке належить певній множині" буде подією, а тому можна говорити про ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, що належить заданій множині, тобто про закон розподілу ймовірностей для неї. Як результат, маємо такі ймовірності того, що випадкова величина набере певних значень:

P(число гербів рівняється 0) $= \frac{1}{4}$,
P(число гербів рівняється 1) $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,
P(число гербів рівняється 2) $= \frac{1}{4}$.

Розглянемо ще один стохастичний дослід, а саме кидання двох "правильних" кубиків. Очевидно, що реєстрація факту "на обох гральних кубиках випало однакове число очок" є якісною характеристикою досліду, а от реєстрація факту "сума очок рівняється 6" є кількісною характеристикою. Більше того, значення суми очок, що випадають при киданні двох гральних кубиків, очевидно залежить від результату досліду, тобто є випадкова величина. А оскільки такий стохастичний дослід описується множиною можливих результатів $\Omega = \{(i,j) \mid i -$ число очок, що випадає на першому, $j -$ число очок, що випадає на другому кубику$\} = \{(i,j) \mid i,j = \overline{1,\ 6}\}$, то знову можна побудувати відповідність, яка кожній елементарній події (i,j) з Ω відносить число $i+j$ з множини $X = \{2, 3, \ldots, 12\}$.

Таким чином, і у цьому випадку маємо числову функцію, визначену на просторі елементарних подій Ω. Якщо позначити суму очок через ξ (ξ — літера грецького алфавіту, читається "ксі"), то ξ — випадкова величина, яка описується функцією

$$\xi \ : \ \Omega \longrightarrow X,$$

значення якої визначається за правилом: для кожного $\omega = (i,j)$ $\xi(\omega) = i + j$.

Зрозуміло, що факт "сума очок, що випадає при киданні двох гральних кубиків, рівняється k" є подія, ймовірність якої з врахуванням рівноможливості елементарних подій, рівняється

$$P(\xi = k) = P(\{(i,j) \mid i + j = k\}) = \sum_{(i,j) \ : \ i+j=k} \frac{1}{36}.$$

Зокрема,

$$P(\xi = 2) = P(\xi = 12) = \frac{1}{36},$$

$$P(\xi = 3) = P(\xi = 11) = \frac{2}{36},$$

$$P(\xi = 4) = P(\xi = 10) = \frac{3}{36},$$
$$P(\xi = 5) = P(\xi = 9) = \frac{4}{36},$$
$$P(\xi = 6) = P(\xi = 8) = \frac{5}{36},$$
$$P(\xi = 7) = \frac{6}{36},$$

що являє собою закон розподілу ймовірностей для випадкової величини ξ.

Приведену тут інформацію зручно подати у вигляді таблиці, у верхньому рядку якої записані можливі значення випадкової величини ξ, а в нижньому — ймовірності, з якими вона набирає цих значень

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\xi = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Така таблиця дає відповідь на два основних питання: Якими є можливі значення випадкової величини? Як часто ці значення вона набирає?

Нехай простір елементарних подій (опис можливих результатів стохастичного досліду) є скінченна множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, і нехай кожному ω_k відповідає невід'ємне число p_k (ймовірність того, що в результаті проведення досліду має місце ω_k), причому $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Означення 2.1.1 *Кожна числова функція, визначена на просторі елементарних подій Ω, називається випадковою величиною.*

Для позначення випадкових величин використовують літери грецького алфавіту (ξ — читається "ксі", η — читається "ета", ζ — читається "дзета"). Запис $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ або $\xi = \xi(\omega)$ (згадайте позначення функції $y = f(x)$) якраз і буде означати, що функція $\xi(\omega)$ кількісно описує результат стохастичного досліду.

Множина значень функції $\xi(\omega)$ $\xi(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ $(m \leqslant n)$ є множиною можливих значень випадкової величини ξ, а множина тих ω, для яких $\xi(\omega) = x_i$ $(i = \overline{1,m})$, тобто множина $\xi_{-1}(x_i) = \{\omega \mid \xi(\omega) = x_i\}$, є підмножиною простору елементарних подій Ω, а тому є подією. Таким чином, знаючи ймовірність кожного результату досліду ω, можна підрахувати ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення x_i $(i = \overline{1,m})$, а саме

$$P(\xi = x_i) := P(\{\omega \mid \xi(\omega) = x_i\}) = \sum_{k \,:\, \omega_k \in \xi^{-1}(x_i)} p_k. \qquad (2.1.1)$$

Запис $P(\xi = x_i)$ читається "ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення x_i".

Означення 2.1.2 *Набір чисел ($P(\xi = x_1)$, $P(\xi = x_2)$, ..., $P(\xi = x_m)$) називається розподілом ймовірностей випадкової величини ξ.*

Таким чином, дискретна випадкова величина ξ із скінченною множиною можливих значень повністю визначається переліком цих значень і розподілом ймовірностей (2.1.1). У зв'язку з цим у багатьох випадках можна не конкретизувати структуру основного ймовірносного простору, якщо є можливість дати перелік можливих значень випадкової величини та відповідних ймовірностей.

Підсумовуючи, звертаємо Вашу увагу на те, що дискретна випадкова величини із скінченною множиною можливих значень може бути задана, з одного боку, як функція, визначена на просторі елементарних подій, для якої необхідно побудувати розподіл ймовірностей, а, з другого боку, розподіл ймовірностей може бути задано відразу у вигляді таблиці

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \xi & x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ \hline P(\xi = x_i) & p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{array}\,, \qquad (2.1.2)$$

у верхньому рядку якої виписані можливі значення випадкової величини ξ, а в нижньому — ймовірності цих значень. Таблицю (2.1.2) називають *рядом розподілу випадкової величини* ξ. (**!** У таблиці (2.1.2) у першому рядку можуть бути будь-які дійсні числа, а в другому — невід'ємні числа $p_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, m})$ і $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$.)

Приклад 1. З урни, у якій M білих і $N - M$ чорних куль, навгад витягують n куль. Побудувати розподіл ймовірностей для числа білих куль у вибірці.

Розв'язання. Очевидно, що ми маємо справу із стохастичним дослідом, результатом якого є вибірка об'єму n з N елементів без повторення і невпорядкована або, інакше, комбінація з N елементів по n, тобто $\Omega = \{\ \omega \mid \omega\ -$ комбінація з N елементів по $n\}$. Кількісною характеристикою результату є число білих куль у ній. Зрозуміло, що коли $M = 0$ або ж $M = N$, відповідь однозначна (*Яка?*). У противному випадку число білих куль у вибірці є випадкова величина, значеннями якої є одне з чисел $0, 1, \ldots, \min(n, M)$, якщо $n \leqslant N - M$, і $n + M - N, n + M - N + 1, \ldots, \min(n, M)$, якщо $n > N - M$.

Побудуємо функцію $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ за правилом: кожному ω з Ω віднесемо число білих куль у вибірці ω. Така функція і задає випадкову величину ξ — число білих куль у вибірці. Відповідні ймовірності обчислюються за класичним означенням

$$P(\xi = i) = \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}. \tag{2.1.3}$$

Як ілюстрація! а) В урні 10 куль, серед яких 4 білі. Тоді з вибіркою об'єму 3 пов'язана випадкова величина (число білих куль у вибірці), яка набирає значення 0, 1, 2, 3 з ймовірностями

$$P(\xi = i) = \frac{C_4^i C_6^{3-i}}{C_{10}^3}.$$

Її ряд розподілу має вигляд

ξ	0	1	2	3
$P(\xi = i)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

б) Якщо ж серед 10 куль 8 білих. Тоді з вибіркою об'єму 3 пов'язана випадкова величина (число білих куль у вибірці), яка набирає значень 1, 2, 3, а її ряд розподілу має вигляд

ξ	1	2	3
$P(\xi = i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

Зазначимо, що про випадкову величину, яка може набирати значення 0, 1, ..., $\min(M, n)$ з ймовірностями (2.1.3), кажуть, що вона має *гіпергеометричний розподіл з параметрами* N, M, n. На практиці такий тип розподілів пов'язаний з розподілом числа об'єктів з певною ознакою у вибірці об'єму n, яка здійснюється без повернення з N об'єктів, серед яких M володіють цією ознакою.

Приклад 2. Числа $C_n^k p^k q^{n-k}$, де $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \ldots, n$, додатні, причому $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + p)^n = 1$. Отже, такі числа задають розподіл ймовірностей для будь-якої випадкової величини, значеннями якої є дійсні числа $x_0, x_1, \ldots, x_n$. У випадку, коли значеннями випадкової величини ξ є числа $0, 1, \ldots, n$, кажуть, що випадкова величина має *біномний розподіл з параметрами* n і p.

На практиці такий тип розподілу пов'язаний з послідовностями незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A рівняється p, а значеннями випадкової величини ξ є число появ події A, причому

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{2.1.4}$$

Дискретна випадкова величина може бути пов'язана і з нескінченним простором елементарних подій. Яскравий приклад — число очок, яким оцінюється попадання спортсменом у певну частину мішені. Зрозуміло, що простором елементарних подій є множина всіх точок мішені, а, для прикладу, подія "постріл оцінюється у 10 очок" еквівалентна події "попадання у десятку або яблучко". Оцінити ймовірність такої події можна, скориставшись статистичним матеріалом, що стосується результативності стрільби скажемо майстра спорту або ж першорозрядника.

Теоретичне обчислення ймовірності того, що випадкова величина, пов'язана з нескінченним простором елементарних подій, набере певного значення, можливе за умови застосовності геометричного означення ймовірностей, яке ґрунтується на "рівноможливості" можливих результатів і заміні підрахунку числа результатів вимірюванням певних областей.

Приклад 3. Не дуже вправний метальник дротиків кидає дротик в дошку, зображену на Рис.1. Припустимо, що ймовірність попадання дротика у будь-яку частину області пропорційна площі цієї області. Побудувати ряд розподілу числа очок, яким оцінюється попадання дротика у дошку (Рис.1).

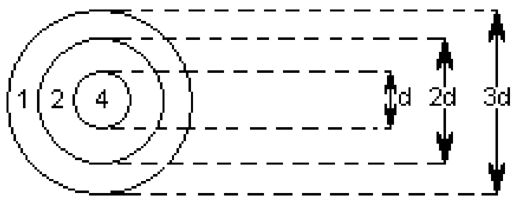


Рис.1

Розв'язання. Підставою для припущення про те, що ймовірність попадання дротика у будь-яку частину області пропорційна площі цієї області, слугує той факт, що метальник не дуже вправний. Отож для обчислення ймовірностей, пов'язаних з таким дослідом можна користуватись геометричним означенням. Якщо ξ є оцінка результату попадання дротика у дошку, то події "$\xi = 1$, $\xi = 2$, $\xi = 4$" еквівалентні подіям "A_1 — дротик попав в область "1", A_2 — дротик попав в область "2", A_3 — дротик попав в область "4"". Врахувавши, що

площа області "1" $= \dfrac{9\pi d^2}{4} - \dfrac{4\pi d^2}{4} = \dfrac{5\pi d^2}{4}$,

площа області "2" $= \dfrac{4\pi d^2}{4} - \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{3\pi d^2}{4}$,

площа області "4" $= \dfrac{\pi d^2}{4}$,

і скориставшись геометричним означенням, маємо:

$$P(A_1) = \frac{\text{площа області "1"}}{\text{площа дошки}} = \frac{5}{9},$$

$$P(A_2) = \frac{\text{площа області "2"}}{\text{площа дошки}} = \frac{3}{9},$$

$$P(A_3) = \frac{\text{площа області "4"}}{\text{площа дошки}} = \frac{1}{9}.$$

Таким чином, ряд розподілу оцінки результату кидання метальником дротика має вигляд

ξ	1	2	4
$P(\xi = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$

.

Побудований ряд розподілу можна використати для побудови рядів розподілу інших випадкових величин. Для прикладу, будемо вважати, що метальник двічі кидає дротик, а результат оцінюється добутком значень, яких набрала випадкова величина ξ за першим і другим киданням. Тоді скориставшись природним припущенням про незалежність результатів двох кидань і теоремою множення для незалежних подій, для випадкової величини $\eta = \xi_1 \xi_2$ маємо:

ξ	1	2	4	8	16
$P(\xi = x_i)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{19}{81}$	$\frac{30}{81}$	$\frac{25}{81}$

.

До класу дискретних випадкових величин належать також величини, які можуть приймати зчисленну множину різних значень. Об'єднуючи випадок скінченної і зчисленної множини значень, дамо таке означення.

Означення 2.1.3 *Розподіл випадкової величини ξ називається дискретним, якщо ξ може набирати лише скінченну чи зчисленну множину значень $x_1, x_2, \ldots$ так, що*

$$p_k = P(\xi = x_k) > 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

У зв'язку з цим випадкова величина, яка має дискретний розподіл, називається *дискретною.* Якщо S — деяка підмножина множини $\mathbb{R}$, то події вигляду $A = \{\omega \mid \xi(\omega) \in S\}$ називають подіями, породженими випадковою величиною ξ, а ймовірності таких подій обчислюються за формулою

$$P(A) = \sum_{k\ :\ x_k \in S} p_k.$$

Найбільш популярними є два розподіли такого типу: геометричний і пуассонівський. Випадкова величина ξ має *геометричний розподіл* з параметром p $(0 < p < 1)$, якщо значеннями її є цілі невід'ємні числа $0, 1, 2, \ldots$, а відповідні ймовірності обчислюються за формулою

$$P(\xi = n) = pq^n, \tag{2.1.5}$$

де $q = 1 - p$.

Справді, оскільки для кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$ $pq^n > 0$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} pq^n = p + pq + pq^2 + \ldots = \dfrac{p}{1-q} = 1$, то таблиця

ξ	0	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
$P(\xi = x_i)$	p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^n	$\ldots$

є рядом розподілу.

На практиці такий тип розподілу пов'язаний з послідовностями незалежних випробувань. А саме, це є розподіл числа проведених випробувань до першої появи події A, якщо у кожному випробуванні ймовірність появи події A рівняється p.

Як приклад розглянемо кидання правильного грального кубика. Число кидань до першої появи непарного числа очок є випадкова величина. І хоча здоровий глузд Вам підказує, що очікувати першого випадання непарного числа очок тільки на 1001-ому киданні марне, у математичній моделі це число ми не обмежуємо і вважаємо, що випадкова величина ξ (число кидань правильного грального кубика до першого випадання непарного числа очок) може набирати значення 0 (непарне число очок випало при першому киданні), 1 (при першому киданні випало парне число очок, а при другому — непарне число очок), 2 (при перших двох киданнях випало парне число очок, а при третьому — непарне число очок), $\ldots$, n (при перших n киданнях випало парне число очок, а при $n+1$-ому — непарне), $\ldots$.

Врахувавши, що ймовірність випадання непарного числа очок при кожному киданні правильного грального кубика рівняється $\frac{1}{2}$ (Чому?) і той факт, що випробування незалежні, маємо:

$$P(\xi = 0) = P(A_1) = \tfrac{1}{2},$$
$$P(\xi = 1) = P(\bar{A}_1 A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = \tfrac{1}{4},$$
$$P(\xi = 2) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \tfrac{1}{8}, \ldots,$$
$$P(\xi = n) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-1} A_n) = $$
$$= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_{n-1})P(A_n) = \tfrac{1}{2^n}, \ldots \ .$$

Таким чином, число кидань правильного грального кубика до першого випадання непарного числа очок має геометричний розподіл з параметром $p = \frac{1}{2}$, а його ряд розподілу має вигляд

ξ	0	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
$P(\xi = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\ldots$	$\frac{1}{2^{n+1}}$	$\ldots$

.

! Якщо Ви плануєте провести N дослідів такого типу, то очікуване число тих, у яких непарне число очок вперше випаде при n-ому киданні, рівняється $N \cdot P(\xi = n)$.

Ми провели підрахунок теоретичних частот для $N = 200$. Разом з тим з допомогою калькулятора $fx-570MS$ було імітовано 200 серій кидань грального кубика до першого випадання непарного числа очок. А саме, якщо генератор випадкових чисел за командою $Shift\ Ran\ \#$ видавав число $< 0,5$, ми вважали, що при киданні грального кубика випало непарне число очок, якщо ж — число $> 0,5$, то — парне число. Відповідні результати приведені у таблиці 1.

ξ	$P(\xi = n)$	Теоретична частота	Спостережувана частота	Відносна частота
0	0,5000	100	109	0,545
1	0,2500	50	52	0,260
2	0,1250	25	20	0,100
3	0,0625	12,5	11	0,055
4	0,0313	6,3	4	0,020
5	0,0157	3,1	3	0,015
6	0,0078	1,5	—	—
7	0,0034	0,7	—	—
8	0,0019	0,4	1	0,005
9	0,0010	0,2	—	—
>10	0,0014	0,28	—	—

Таблиця 1

Зауваження. Зверніть увагу на непогану узгодженість теоретичних ймовірностей і відносних частот. При бажанні Ви можете самі провести такий експеримент, наприклад, при $N = 500$.

Випадкова величина ξ має *розподіл Пуассона* з параметром $\lambda > 0$, якщо значеннями її є цілі невід'ємні числа $0, 1, 2, \ldots$, а відповідні ймовірності обчислюються за формулою

$$P(\xi = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda}. \qquad (2.1.6)$$

На практиці такий тип розподілу пов'язаний з рідкими подіями, які мають місце за певний проміжок часу із сталою інтенсивністю λ, або ж подіями, які відбуваються у послідовності незалежних випробувань (Згадайте апроксімаційну формулу Пуассона!).

Приведемо цікавий приклад ([5], p.203), пов'язаний з розподілом Пуассона. За 432 роки з 1500 по 1933 рік війна вибухала у якихось регіонах світу 299 раз. (За означенням військова акція вважається війною, якщо вона була оголошена, у ній брали участь понад 50000 військ або результатом була зміна кордонів. Для досягнення більшої однорідності великі війни поділені на "підвійни": для прикладу, перша світова війна поділена на п'ять "підвійн"). У таблиці 2 подано розподіл числа років, у які вибухали війни. За спостережуваними частотами знайдемо середнє число воєн, які розпочинались щороку. Середнє число

$$\frac{1}{432}\,(0 \cdot 223 + 1 \cdot 142 + 2 \cdot 48 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 4) \approx 0,69$$

прийнято за параметр розподілу Пуассона і пораховано очікувані частоти років, коли вибухали війни

$$432 \cdot \frac{(0,69)^n}{n!}\, e^{-0,69}.$$

Одним із тлумачень такої чудової узгодженості реальних даних і даних, отриманих на підставі прийнятої гіпотези, є припущення про наявність певного стабільного "рівня ворожості" у світовій спільноті, який вимірюється числом нових воєн, що розпочинаються кожного року. Однак, як зазначають автори посібника [5], середнє число воєн, що закінчуються кожного року теж приблизно рівняється 0,69, а тому число 0,69 можна трактувати як показник "бажання змін".

ξ — число війн, які починалися певного року	Спостережувана частота	Очікувана частота
0	223	217
1	142	149
2	48	52
3	15	12
>3	4	2
	432	432

Таблиця 2

Інформація для роздумів. Основна операція аналізу — граничний перехід дозволяє встановити зв'язок між розподілами 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6.

Теорема 2.1.1 *Якщо у послідовності гіпергеометричних розподілів з параметрами* (N, M, n)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M}{N} = p, \tag{2.1.7}$$

то для $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \tag{2.1.8}$$

тобто за заданої умови послідовність гіпергеометричних розподілів збігаєтьcя до біномного розподілу з параметрами n *і* p.

Доведення. Оскільки

$$C_M^k C_{N-M}^{n-k} (C_N^n)^{-1} = \frac{M!\ (N-M)!\ n!\ (N-n)!}{k!\,(M-k)!\,(n-k)!\,(N-M-(n-k))!\,N!} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ \frac{M(M-1)\ldots(M-k+1)(N-M)(N-M-1)\ldots(N-M-(n-k)+1)}{N(N-1)\ldots(N-n+1)} =$$

$$= C_n^k\ \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdots \frac{M-k+1}{N-k+1} \cdot \frac{N-M}{N-k} \cdot \frac{N-M}{N-k-1} \cdots \frac{N-M-(n-k)+1}{N-n+1},$$

то, врахувавши умову (2.1.7), маємо:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{M}{n}\cdot\frac{M-1}{N-1}\cdots\frac{M-k+1}{N-k+1}\right)=p^k,$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-M}{N-k-1}\cdot\frac{N-M-1}{N-k-2}\cdots\frac{N-M-(n-k)+1}{N-n+1}\right)=(1-p)^{n-k},$$

тобто $$\lim_{N\to\infty} C_M^k C_{N-M}^{n-k}(C_N^n)^{-1}=C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}. \qquad \square$$

Як ми вже зазначали, гіпергеометричний розподіл пов'язаний з розподілом числа об'єктів з певною ознакою у вибірці об'єму n, яка здійснюється без повернення з N об'єктів, серед яких M об'єктів володіють цією ознакою. Якби при формуванні вибірки досліджений об'єкт повертався назад у сукупність, то кожного разу вибір здійснювався би з усієї сукупності, тобто ми мали б справу з послідовністю незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події A (витягнутий об'єкт володіє ознакою) рівняється $\frac{M}{N}$.

Практично це виражається у тому, що при великих N і M всі розрахунки для безповторної вибірки об'єму n ($n \ll N$) можна проводити, припускаючи, що вибір здійснюється з поверненням.

У схемі Бернуллі ймовірність появи події A у кожному випробуванні рівняється p і не залежить від n. Будемо припускати, що розглядається послідовність серій випробувань, у кожній з яких випробування незалежні, а от ймовірність того, що у кожному з них відбудеться подія A, залежить від числа випробувань у серії.

Теорема 2.1.2 *(Пуассона). Якщо послідовність* (p_n), *де* p_n *— ймовірність появи події* A *у кожному випробуванні за умови, що число всіх випробувань рівняється* n, *така, що*

$$\lim_{n\to\infty} n\,p_n=\lambda>0, \tag{2.1.9}$$

то для ймовірності того, що при n *незалежних випробуван-*

нях подія A матиме місце k разів, має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \qquad (2.1.10)$$

тобто за заданої умови послідовність біномних розподілів збігається до розподілу Пуассона з параметром λ.

Доведення. Для серії з n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи події A рівняється p_n, обчислюється за формулою Бернуллі, яку подамо у вигляді

$$P_n(k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \tfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\, \tfrac{(np_n)^k}{n^k}\, (1-p_n)^{n-k} =$$
$$= \tfrac{1}{k!}\cdot 1\cdot \left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right)\, (np_n)^k (1-p_n)^{n-k}.$$

Згідно з умовою

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda,$$

а тому
$$\lim_{n\to\infty} (np_n)^k = \lambda^k, \qquad \lim_{n\to\infty} p_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-p_n)^k} = 1.$$

І, нарешті, врахувавши, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1-p_n)}{p_n} = -1,$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1-p_n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} np_n \frac{\ln(1-p_n)}{p_n}} = e^{-\lambda}.$$

Таким чином, маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}. \quad \square$$

Умова (2.1.9) означає, що при зростанні n ймовірність p_n появи події A у кожному випробуванні стає як завгодно малою, тобто при великих n подія A "рідко трапляється". А тому, згідно з теоремою Пуассона, маємо можливість скористатись апроксимаційною (асимптотичною) формулою

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k!}\, e^{-np}. \tag{2.1.11}$$

Використовують останню формулу для обчислення ймовірностей $P_n(k)$ і $P_n(k_1, k_2)$ біномного розподілу, якщо $n \geqslant 100$ і $0 < np < 10$.

Щодо геометричного розподілу, то він володіє цікавою властивістю, сутність якої у тому, що коли відомо, що випадкова величина ξ з таким розподілом набрала значення не меншого k_0, то випадкова величина $\xi - k_0$ має такий же розподіл як і випадкова величина ξ.

Теорема 2.1.3 *Якщо випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p, то для будь-якого k_0*

$$P(\xi - k_0 = k \mid \xi \geqslant k_0) = P(\xi = k), \tag{2.1.12}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Доведення. Очевидно, що подія "випадкова величина ξ набрала значення не більшого $k_0 + k - 1$ за умови, що ξ набрала значення не меншого k_0" і подія "випадкова величина ξ набрала значення рівного $k_0 + k$ за умови, що ξ набрала значення не меншого k_0" несумісні, причому сумою цих подій є подія "випадкова величина ξ набрала значення не більшого $k_0 + k$ за умови, що вона набрала значення не меншого k_0". А тому

$$P(\xi \leqslant k_0 + k - 1 \mid \xi \geqslant k_0) + P(\xi = k_0 + k \mid \xi \geqslant k_0) =$$
$$= P(\xi \leqslant k_0 + k \mid \xi \geqslant k_0).$$

Скориставшись означенням умовної ймовірності, маємо:

$$P(\xi = k_0 + k \mid \xi \geqslant k_0) = \frac{P(\xi \leqslant k_0 + k \ \wedge\ \xi \geqslant k_0)}{P(\xi \geqslant k_0)} -$$
$$- \frac{P(\xi \leqslant k_0 + k - 1 \ \wedge\ \xi \geqslant k_0)}{P(\xi \geqslant k_0)} =$$

$$= \frac{P(k_0 \leqslant \xi \leqslant k_0 + k)}{P(\xi \geqslant k_0)} - \frac{P(k_0 \leqslant \xi \leqslant k_0 + k - 1)}{P(\xi \geqslant k_0)}.$$

А оскільки

$$P(\xi \geqslant k_0) = pq^{k_0} + pq^{k_0+1} + \ldots = \\ = pq^{k_0}(1 + q + q^2 + \ldots) = \frac{pq^{k_0}}{1-q},$$

$$P(k_0 \leqslant \xi \leqslant k_0 + k) = pq^{k_0} + pq^{k_0+1} + \ldots + pq^{k_0+k} = \\ = pq^{k_0}(1 + q + \ldots + q^k) = \frac{pq^{k_0}(1-q^{k+1})}{1-q},$$

$$P(k_0 \leqslant \xi \leqslant k_0 + k - 1) = \\ = pq^{k_0} + pq^{k_0+1} + \ldots + pq^{k_0+k-1} = \frac{pq^{k_0}(1-q^k)}{1-q},$$

то

$$P(\xi - k_0 = k \mid \xi \geqslant k_0) = \frac{pq^{k_0}(1-q^{k+1})}{1-q} \cdot \frac{1-q}{pq^{k_0}} - \\ - \frac{pq^{k_0}(1-q^k)}{1-q} \cdot \frac{1-q}{pq^{k_0}} = 1 - q^{k+1} - 1 + q^k = \\ = q^k - q^{k+1} = q^k(1-q) = pq^k = P(\xi = k). \qquad \square$$

На закінчення зауважимо, що ймовірносна структура випадкової величини повністю описується рядом розподілу, тобто через нього можна здобути інформацію, що стосується частотних характеристик її значень. Так що на першому плані тут буде побудова ряду розподілу випадкової величини, для якої задається “механізм генерування її значень”.

Питання для самоперевірки та вправи

1. Наведіть приклади випадкових величин. Що є математичною моделлю, з допомогою якої їх можна вивчати?

2. Які властивості є характеристичними для ряду розподілу? Наведіть приклади рядів розподілу, що задають конкретні випадкові величини.

3. З допомогою якого закону розподілу можна задати такі випадкові величини:

а) число осіб жіночої статі у безповторній вибірці об'єму 5 з 30 студентів, серед яких 10 осіб чоловічої статі;
б) число осіб жіночої статі у повторній вибірці об'єму 5 з 30 студентів, серед яких 10 осіб чоловічої статі;
в) число кидань правильного грального кубика до першої появи числа очок меншого п'яти;
г) число бракованих виробів у партії з 1000 виробів, якщо ймовірність того, що випущено бракований виріб рівняється 0,008;
д) число очок, що відповідає вибраний з колоди у 36 гральних карт одній карті, якщо валету відповідає 2, дамі — 3, королю — 4, тузу — 11 очок, а останнім картам — відповідно 6, 7, 8, 9, 10 очок?

4. Нехай випадкова величина ξ задана рядом розподілу

ξ	1	2	3	4	5
$P(\xi = i)$	0,05	0,15	x	0,40	0,10

.

Чому дорівнює $p_3 = P(\xi = 3)$? Знайдіть ймовірності таких подій:
а) випадкова величина ξ набере значення менше 3;
б) випадкова величина ξ набере значення більше 3;
в) випадкова величина ξ набере значення не меншого 2 і не більшого 4.

5. Гральний кубик виготовлено так, що ймовірність випадання певної грані прямо пропорційна числу очок на цій грані. Знайдіть ймовірність того, що при киданні такого грального кубика випаде парне число очок.

6. В урні 5 куль, занумерованих від 1 до 5. Знайдіть ймовірність того, що серед взятих навгад трьох куль максимальним буде номер 4.

7. Побудуйте ряд розподілу для найменшого числа очок, яке випадає при киданні трьох правильних гральних кубиків.

8. Правильний гральний кубик кидається три рази. Побудуйте ряд розподілу випадкової величини, значеннями якої є модуль різниці між числом очок, яке випадає за першим киданням, і сумою числа очок, яке випадає за другим і третім киданням.

9. Дослідити на монотонність біномний, геометричний, пуассонівський розподіли. Знайдіть найімовірніші значення (моди) випадкових величин з такими розподілами.

10. [5, p.33] Протягом трьох років (1096 днів) у Лондоні померло 903 чоловіки у віці 85 і більше років. Число днів, у які померло рівно k літніх чоловіків, приведено у таблиці

число смертей в один день, k	0	1	2	3	4	5	6^+
число днів	484	391	164	45	11	1	0

.

Підрахуйте середнє число смертей, що трапились в один день. Прийміть це число за параметр розподілу Пуассона і підрахуйте, так би мовити, прогнозоване число днів, у які трапиться k смертей.

2.2 Випадкові величини. Функції розподілу

У попередньому параграфі розглядались дискретні випадкові величини як функції, визначені на просторі елементарних подій, причому цей простір був скінченним (природно, що множина можливих значень випадкової величини є скінченною) або ж нескінченним, тоді множина можливих значень випадкової величини є скінченною або зчисленною.

Однак класу дискретних випадкових величин недостатньо для описання реальних явищ, залежних від випадку. Справді для таких величин як результат вимірювання розмірів будь-яких фізичних об'єктів, температури, тиску, тривалості фізичних процесів більш природно вважати, що їх можливі значення в принципі можуть бути будь-якими у певних межах. І хоча наведені тут величини в результаті випробувань наберуть дискретну множину значень (за рахунок одиниці вимірювання), однак перехід від дискретної до неперервної множини значень у багатьох випадках значно спрощує її аналіз і разом з тим забезпечує достатну адекватність реальному явищу.

Ми будемо виходити із загального означення випадкової величини як вимірної функції, визначеної на просторі елементарних подій, і з класу означених таким чином математичних об'єктів виділимо вже розглянутий клас дискретних випадкових величин і клас неперервних (точніше, абсолютно неперервних) випадкових величин.

Нехай маємо ймовірносний простір $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$, Ω — простір елементарних подій, $\mathfrak{f}$ (літера готичного алфавіту, читається "еф") — σ-алгебра подій, P — функція, визначена на $\mathfrak{f}$, задає ймовірності подій.

Означення 2.2.1 *Функція $\xi = \xi(\omega)$, визначена на просторі елементарних подій Ω, називається випадковою величиною, якщо для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ множина тих ω, для яких*

$\xi(\omega) < x$, *є подія, тобто* $\{\omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{f}$.

Оскільки для кожного x підмножина $\{\omega \mid \xi(\omega) < x\}$ множини Ω є подія, то для неї задана ймовірність, яку позначатимемо

$$P(\xi < x) := P(\{\omega \mid \xi(\omega) < x\})$$

і читатимемо "ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення меншого x". У зв'язку з цим випадкова величина породжує числову функцію, визначену на $\mathbb{R}$ за правилом: для кожного $x \in \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto P(\xi < x)$.

Означення 2.2.2 *Функцію, визначену на множині всіх дійсних чисел, значеннями якої для кожного x є ймовірність того, що випадкова величина ξ набирає значення меншого x, називають функцією розподілу випадкової величини ξ і позначають*

$$F_\xi(x) := P(\xi < x). \tag{2.2.1}$$

Зауваження. Слід пам'ятати, що функція

$$P: \ \mathfrak{f} \longrightarrow \mathbb{R},$$

визначена на σ -алгебрі $\mathfrak{f}$, задає ймовірності подій, функція

$$\xi: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

визначена на просторі елементарних подій Ω, означає випадкову величину, і, нарешті, функція

$$F_\xi: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

визначена на множині дійсних чисел, задає ймовірності подій вигляду $\{\omega \mid \xi(\omega) < x\}$.

Приклад 1. Побудувати функцію розподілу для числа парних очок, які випадають при киданні двох правильних гральних кубиків.

Розв'язання. Простором елементарних подій Ω є множина $\Omega = \{(i,j) \mid i,j = \overline{1,6}\}$. Число парних очок, яке випадає при киданні двох правильних гральних кубиків є випадкова величина ξ, яка задається так: для $\omega \in \Omega$

$$\xi(\omega) = \xi((i,j)) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad i,j \ - \text{непарні}, \\ 1, & \text{якщо} \quad i \ - \text{парне}, j \ - \text{непарне або} \\ & \qquad\quad\ i \ - \text{непарне}, j \ - \text{парне}, \\ 2, & \text{якщо} \quad i,j \ - \text{парні}. \end{cases}$$

Це дискретна випадкова величина з рядом розподілу

$$\begin{array}{c|c|c|c|} \xi & 0 & 1 & 2 \\ \hline P(\xi = k) & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} .$$

Побудуємо функцію розподілу цієї випадкової величини. Якщо $x \leqslant 0$, то не існує таких ω, для яких $\xi(\omega) < x$, а тому для таких x $F_\xi(x) = 0$. Якщо $0 < x \leqslant 1$, то для кожного ω з множини $A = \{(i,j) \mid i \ -$ непарне, $j \ -$ непарне$\}$ $\xi(\omega) < x$, а тому для таких x

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(A) = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4}.$$

Якщо $1 < x \leqslant 2$, то для кожного ω з множини $B = \{(i,j) \mid i \ -$ непарне або $j \ -$ непарне$\}$ $\xi(\omega) < x$, а тому для таких x

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(B) = \tfrac{27}{36} = \tfrac{3}{4}.$$

Якщо $x > 2$, то для кожного ω з множини Ω $\xi(\omega) < x$, а тому для таких x

$$F_\xi(x) = P(\Omega) = 1.$$

Таким чином, функція розподілу випадкової величини подається у вигляді

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{3}{4}, & \text{якщо} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2, \end{cases}$$

або графічно (Рис.2)

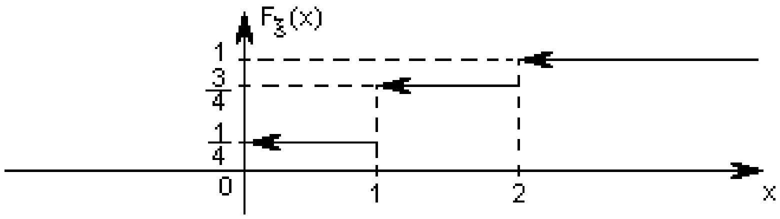


Рис.2

Приклад 2. У крузі радіуса навгад обирається точка. Побудувати функцію розподілу для відстані від центра круга до обраної точки.

Розв'язання. Простором елементарних подій Ω є множина $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$. На цьому просторі означимо функцію

$$\xi(\omega) = \xi((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Очевидно, що для кожного z (літера z обрана, бо літера x зайнята) множина тих ω, для яких $\xi < x$, є подія, ймовірність якої визначається за геометричним означенням. Зокрема, $P(\xi < z) = 0$, якщо $z \leqslant 0$,

$$P(\xi < z) = \frac{\text{площа круга радіуса } z}{\text{площа круга радіуса } r} = \frac{\pi z^2}{\pi r^2} = \frac{z^2}{r^2},$$

якщо $0 < z \leqslant r$, і $P(\xi < z) = 1$, якщо $z > r$. Як результат, маємо функцію розподілу

$$F_\xi(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z \leqslant 0, \\ \dfrac{z^2}{r^2}, & \text{якщо} \quad 0 < z \leqslant r, \\ 1, & \text{якщо} \quad z > r, \end{cases}$$

або графічно (Рис.3)

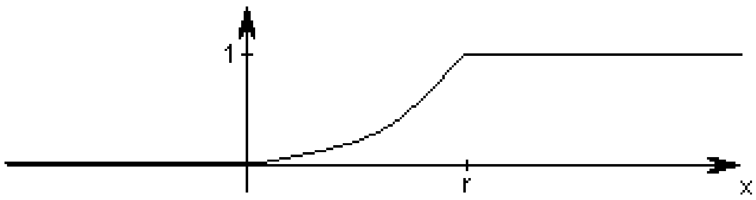


Рис.3

З випадковими величинами пов'язують різноманітні події, кожну з яких врешті-решт можна тлумачити як подію, яка полягає у тому, що випадкова величина набере значення, що належить заданій множині (значення випадкової величини попаде у задану множину). Виявляється, що як для теоретичних, так і практичних потреб цілком достатньо σ-алгебри борелевих множин, тобто класу множин, які одержуються з інтервалів з допомогою скінченного або зчисленного числа операцій обєднання, перерізу і доповнень. Більше того, такий клас породжує множина інтервалів вигляду $(-\infty; x)$, де $x \in \mathbb{R}$. А це дає можливість, знаючи ймовірності подій вигляду "$\xi < x$ — випадкова величина ξ набере значення, яке менше x", знаходити ймовірності подій вигляду "$\xi \in B$ — випадкова величина ξ набере значення, яке належить множині B", де B будь-яка борелева множина.

Скориставшись теоремою про неперервність ймовірності (див. [4], с.90–92), можна довести таку теорему.

Теорема 2.2.1 *Якщо $F_\xi(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ, то через неї визначаються ймовірності подій "випадкова величина ξ набере значення не більшого x", "випадкова величина ξ набере значення більше x", "випадкова величина ξ набере значення не меншого x", "випадкова величина ξ набере значення не меншого x_1 і менше x_2", "випадкова вели-*

чина ξ набере значення, що рівняється x", а саме

$$P(\xi \leqslant x) = \lim_{n\to\infty} F_\xi\left(x + \frac{1}{n}\right), \qquad (2.2.2)$$

$$P(\xi > x) = 1 - P(\xi \leqslant x) = 1 - \lim_{n\to\infty} F_\xi\left(x + \frac{1}{n}\right), \qquad (2.2.3)$$

$$P(\xi \geqslant x) = 1 - P(\xi < x) = 1 - F_\xi(x), \qquad (2.2.4)$$

$$P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) = P(\xi \in [x_1; x_2)) = F(x_2) - F(x_1), \qquad (2.2.5)$$

$$P(\xi = x) = \lim_{n\to\infty} F_\xi\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_\xi(x) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x). \qquad (2.2.6)$$

У наступній теоремі представлені основні (більше того, характеристичні) властивості функції розподілу.

Теорема 2.2.2 *Функція розподілу $F_\xi(x)$ будь-якої випадкової величини ξ є неспадною, неперервною зліва і*

$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1. \qquad (2.2.7)$$

Доведення. Нехай $F_\xi(x)$ — функція розподілу випадкової величини ξ. Тоді очевидно, що для будь-яких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ з того, що $x_1 < x_2$, випливає, що

$$\{\omega \mid \xi(\omega) < x_1\} \subset \{\omega \mid \xi(\omega) < x_2\}.$$

А отже, в силу властивості монотонності ймовірності,

$$P(\xi < x_1) = P(\{\omega \mid \xi(\omega) < x_1\}) \leqslant P(\{\omega \mid \xi(\omega) < x_2\}) = P(\xi < x_2),$$

тобто $F_\xi(x_1) \leqslant F_\xi(x_2)$.

За означенням для кожного x $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, а тому для кожного x $0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1$. Отож функція $F_\xi(x)$ неспадна і обмежена. За теоремою Вейєрштрасса у кожній точці x_0 вона має як ліву так і праву границі. Залишається показати, що

$$F_\xi(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0).$$

З цією метою розглянемо послідовність подій

$$A_n = \{\omega \mid x_0 - \tfrac{1}{n} \leqslant \xi < x_0\}.$$

Очевидно, що для будь-якого n $A_n \supset A_{n+1}$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Тоді

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

або
$$\lim_{n\to\infty}\left(F_\xi(x_0) - F_\xi(x_0 - \tfrac{1}{n})\right) = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} F_\xi\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) = F_\xi(x_0)$, тобто ми вказали зростаючу і збіжну до x_0 послідовність, для якої послідовність відповідних значень функції $F_\xi(x)$ збігається до $F_\xi(x_0)$. А це й означає, що

$$\lim_{x\to x_0-0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0).$$

В силу монотонності і обмеженості функції $F_\xi(x)$ границі $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x)$ існують. Залишається показати, що мають місце рівності (2.2.7). Знову оберемо дві послідовності подій (A_n) і (B_n), де

$$A_n = \{\omega \mid \xi(\omega) < -n\}, \quad B_n = \{\omega \mid \xi(\omega) < n\}.$$

Очевидно, що для будь-якого n

$$A_n \supset A_{n+1},\ B_n \subset B_{n+1} \ \text{ і } \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega.$$

Отже,
$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(-n) = 0,\ \lim_{n\to\infty} F_\xi(n) = 1,$$

а тому
$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1. \qquad \Box$$

Зауваження. Доведено, що коли визначена на всій числовій множині функція $F(x)$ є неспадною, неперервною зліва і задовольняє умови

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1,$$

то існує ймовірносний простір $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$ і пов'язана з ним випадкова величина ξ така, що $F_\xi(x) = F(x)$, тобто вказані у теоремі 2.2.2 властивості є характеристичними для функції розподілу. Тому можна вважати, що випадкова величина задається своєю функцією розподілу, і коли випадкові величини виступають як об'єкти дослідження, слід працювати в ймовірносному просторі, породженому функцією розподілу.

Той факт, що ймовірносна структура випадкової величини повністю описується функцією розподілу, вказує на можливість виділяти певні класи випадкових величин за структурою функції розподілу. У подальшому ми будемо мати справу з випадковими величинами дискретного і неперервного типу.

Означення 2.2.3 *Випадкова величина ξ називається дискретною (випадковою величиною дискретного типу), якщо її функція розподілу $F_\xi(x)$ є східчастою, тобто існує скінченна чи зчисленна множина X точок, у яких ця функція терпить розрив першого роду, а на інтервалах суміжних до множини X, вона стала.*

Зауважимо, що означення 2.2.3 дещо вужче, ніж означення 2.1.3 (тут множина можливих значень випадкової величини ніде не щільна, тоді як у попередньому випадку вона могла бути скрізь щільною).

Теорема 2.2.3 *Якщо дискретна випадкова величина ξ має функцію розподілу $F_\xi(x)$ і X — множина точок розриву цієї функції, то для будь-якого $x_k \in X \quad P(\xi = x_k) > 0$, а для будь-якого $x \in \mathbb{R} \setminus X \quad P(\xi = x) = 0$.*

Доведення. Оскільки згідно з теоремою 2.2.1

$$P(\xi = x_0) = \lim_{x \to x_0+0} F_\xi(x) - F_\xi(x_0) = F_\xi(x_0+0) - F_\xi(x_0),$$

то, врахувавши, що кожна точка $x_k \in X$ є точкою розриву першого роду, стрибок якої у точці x_k рівняється $F_\xi(x_k+0)-$ $-F_\xi(x_0-0) > 0$, маємо, що для кожного $x_k \in X$

$$P(\xi = x_k) = F_\xi(x_k+0) - F_\xi(x_k) > 0.$$

Згідно з означенням 2.2.3 у кожній точці $x_0 \in \mathbb{R} \setminus X$ функція $F_\xi(x)$ неперервна, тобто $F_\xi(x_0+0) = F_\xi(x_0-0) = F_\xi(x_0)$, і тому $P(\xi = x_0) = 0$. $\square$

Теорема 2.2.3 вказує на те, як за функцією розподілу дискретної випадкової величини побудувати її ряд розподілу. А саме, можливими значеннями такої випадкової величини є всі точки розриву першого роду, а ймовірностями цих значень є стрибки функції розподілу у відповідних точках. Таким чином, за функцією розподілу $F_\xi(x)$ дискретної випадкової величини ξ можна побудувати ряд розподілу

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \xi & x_1 & x_2 & \ldots & x_k & \ldots \\ \hline P(\xi = x_k) & p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots \end{array},$$

де x_1, x_2, ... — точки розриву першого роду функції $F_\xi(x)$, $p_1 = F_\xi(x_1+0) - F_\xi(x_1)$, $p_2 = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_2)$, ... Справді, для кожного $k \in X$

$$p_k = F_\xi(x_k+0) - F_\xi(x_k) > 0$$

і
$$\sum_k p_k = \sum \left(F_\xi(x_k+0) - F_\xi(x_k)\right) = 1.$$

Навпаки, якщо задано скінченну або зчисленну (ніде не щільну) множину X і кожному x_k з X віднесено додатне число p_k, причому

$$\sum_k p_k = 1,$$

то функція

$$F(x) = \sum_{k\,:\,x_k<x} p_k \tag{2.2.8}$$

є функцією розподілу випадкової величини ξ, для якої X є множиною можливих значень, а $p_k = P(\xi = x_k)$.

Приклад 3. Побудувати ряд розподілу для випадкової величини, що задається функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{1}{9}, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3}, & \text{якщо} \quad \frac{1}{3} < x \leqslant \frac{2}{3}, \\ \frac{7}{9}, & \text{якщо} \quad \frac{2}{3} < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо графік заданої функції (Рис.4).

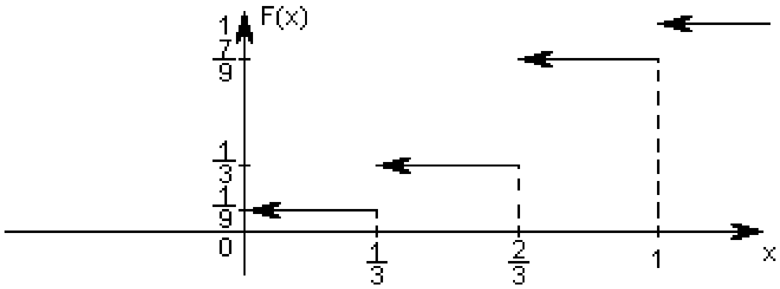


Рис.4

Ця функція задовольняє умови теореми 2.2.2, а тому є функцією розподілу деякої випадкової величини. Точками розриву першого роду для неї є точки $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$, причому стрибками є відповідно числа
$F(0+0) - F(0) = \frac{1}{9} - 0 = \frac{1}{9}$, $F(\frac{1}{3}+0) - F(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$, $F(\frac{2}{3}+0) - F(\frac{2}{3}) = \frac{7}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$, $F(1+0) - F(1) = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$.
Таким чином, функція $F(x)$ задає дискретну випадкову величину з рядом розподілу

ξ	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
p_k	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

.

Навпаки, якщо, для прикладу, випадкова величина ξ має біномний розподіл з параметрами n і p, то її функція розподілу має вигляд

$$F_\xi(x) = \sum_{k\,:\,k<x} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Другий клас випадкових величин, що буде розглядатись у наступному параграфі, це випадкові величини неперервного типу, тобто такі, у яких функція розподілу є неперервною, а точніше дещо вужче — клас випадкових величин, функції розподілу яких абсолютно неперервні.

Питання для самоперевірки та вправи

1. Через яке поняття у теорії ймовірностей означається випадкова величина?

2. Чи всяка функція, визначена на просторі елементарних подій, є випадковою величиною?

3. Подати через функцію розподілу випадкової величини ξ ймовірності таких подій:
   $\xi \in [x_1; x_2)$, $\xi \in [x_1; x_2]$, $\xi \in (x_1; x_2]$, $\xi = x_0$.

4. Чому при вивченні випадкової величини можна обмежитись ймовірносним простором, породженим функцією розподілу?

5. Які з поданих нижче функцій є функціями розподілу:
   а) $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$;
   б) $F(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg} x$;
   в) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ 0,3, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0,5, & \text{якщо} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2; \end{cases}$
   г) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ 0,1x, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 5, \\ 0,4, & \text{якщо} \quad 5 < x \leqslant 6, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 6; \end{cases}$

д) $F(x) = \begin{cases} 0,5e^x, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ 0,8, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1; \end{cases}$

е) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{[x]}{2}, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2; \end{cases}$

є) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{1+x}, & \text{якщо} \quad x > 0; \end{cases}$

ж) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{1 - e^{-x}}{x}, & \text{якщо} \quad x > 0; \end{cases}$

з) $F(x) = e^{-e^{-x}}$;

и) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

6. При яких значеннях параметрів a, b і c подані нижче функції будуть неперервними функціями розподілу:

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{ax}{1+bx}, & \text{якщо} \quad x > 0; \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad x \leqslant a, \\ bx + c, & \text{якщо} \quad a < x \leqslant b, \\ b, & \text{якщо} \quad x > b; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant -c, \\ a + b \arcsin \dfrac{x}{a}, & \text{якщо} \quad -c < x \leqslant c, \\ b, & \text{якщо} \quad x > c; \end{cases}$

г) $F(x) = a + b \operatorname{arctg} \dfrac{x}{c}$;

д) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ a + b\, e^{cx}, & \text{якщо} \quad x > 0; \end{cases}$

е) $F(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ b\sqrt{x}, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant \frac{1}{4}, \\ c\,x^2, & \text{якщо} \quad \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \frac{\sqrt{2}}{4}; \end{cases}$

є) $F(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad x \leqslant 1, \\ b\ln x, & \text{якщо} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ c\,x, & \text{якщо} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 3; \end{cases}$

ж) $F(x) = \begin{cases} c, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ ax^2 + bx + c, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1; \end{cases}$

з) первісна функції $f(x) = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$;

и) первісна функції

$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{якщо} \quad ax^2 + bx + c \geqslant 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad ax^2 + bx + c < 0 \end{cases}$?

7. Побудувати функцію розподілу для числа білих куль серед вибраних навгад чотирьох куль з урни, у якій 4 білі і 6 чорних куль.

8. З урни, яка містить 3 білі та 2 чорні кулі, перекладено дві кулі в урну, яка містить 4 білі і 4 чорні кулі. Побудувати функцію розподілу числа білих куль серед двох взятих навгад з другої урни після перекладання.

9. З точки $M_0(1, 0)$ проведено промінь під кутом α до осі Ox, причому величина кута обирається навгад з відрізка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Побудувати функцію розподілу довжини хорди всередині кола.

10. У фігурі $Q = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}$ навгад обирається точка. Побудувати функцію розподілу для відстані від початку координат до обраної точки.

2.3 Неперервні випадкові величини, їх закони розподілу

У попередньому параграфі за структурою функції розподілу ми виділили два класи випадкових величин. Ті випадкові величини, функції розподілу яких є східчастими, назвали *дискретними.* Разом з тим зазначимо, що, взагалі кажучи, клас дискретних випадкових величин дещо ширший [1, с.123–124], а саме випадкова величина називається дискретною, якщо множина її можливих значень є скінченною або ж зчисленною. Так що функція розподілу дискретної випадкової величини необов'язково східчаста. Для прикладу, коли множиною можливих значень випадкової величини є зчисленна скрізь щільна множина (множина раціональних чисел), то кожна точка цієї множини є точкою розриву її функції розподілу.

Найголовнішим для дискретної випадкової величини є те, що її ймовірносна структура повністю описується переліком можливих значень $x_1, x_2, \dots$ і переліком ймовірностей $p_k = P(\xi = x_k)$.

Нехай функція розподілу випадкової величини ξ є неперервною. Тоді, з одного боку, можливі значення її ми не можемо занумерувати, і, з другого боку,

$$P(\xi = x_0) = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0) = F_\xi(x_0) - F_\xi(x_0) = 0,$$

тобто ймовірність того, що випадкова величина ξ набере наперед заданого значення, рівняється нулю.

Вихід з цієї ситуації дає прийом, який дозволяє знаходити масу через густину, відстань через швидкість, навантаження на опору через розподіл навантаження. А саме, задавши щільність розподілу ймовірностей, ми можемо підрахувати ймовірність того, що випадкова величина приймає значення з деякого проміжку, як інтеграл від щільності.

Означення 2.3.1 *Випадкова величина ξ називається неперервною (точніше, абсолютно неперервною), якщо існує невід'ємна функція $f(x)$, інтегровна на всій числовій осі, така, що*

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \qquad (2.3.1)$$

Функцію $f(x)$ називають щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини ξ.

Щоб зазначити зв'язок функції $f(x)$ з випадковою величиною ξ, будемо позначати її так $f_\xi(x)$.

У формулі (2.3.1) фігурує невласний інтеграл I-го роду (інтеграл на нескінченному проміжку). Згідно з означенням

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt := \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{x} f_\xi(t)\,dt,$$

а, скориставшись адитивністю невласного інтеграла, маємо для неперервної випадкової величини ξ

$$\begin{aligned} P(\alpha < \xi < \beta) &= P(\alpha \leqslant \xi < \beta) = P(\alpha < \xi \leqslant \beta) = \\ &= P(\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)\,dx. \qquad (2.3.2) \end{aligned}$$

Теорема 2.3.1 *Якщо функція $f(x)$ визначена і невід'ємна на $\mathbb{R}$ і*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1, \qquad (2.3.3)$$

то існує випадкова величина ξ, для якої $f(x)$ є щільністю розподілу ймовірностей.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ інтегровна на $\mathbb{R}$, то для кожного $x \in \mathbb{R}$ існує інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Таким чином, на $\mathbb{R}$ визначена функція

$$F(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Якщо $x_1 < x_2$, то

$$F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{x_2} f(t)\,dt - \int\limits_{-\infty}^{x_1} f(t)\,dt = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geqslant 0,$$

тобто побудована функція неспадна. Як інтеграл із змінною верхньою межею функція $F(x)$ неперервна. Очевидно, також, що

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Останнє згідно з умовою (2.3.3).

Отже, побудована функція задовольняє характеристичні властивості функції розподілу, і тому можна вважати, що функція $f(x)$, яка задовольняє умови теореми, задає випадкову величину, тобто ця функція є законом розподілу для деякої випадкової величини ξ. Множиною значень такої випадкової величини є всі ті точки, у яких $f(x) > 0$.

Нехай випадкова величина ξ має щільність розподілу $f_\xi(x)$. У кожній точці неперервності цієї функції, функція $F_\xi(x)$ диференційовна, причому $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$. Тоді

$$P(x < \xi < x + \Delta x) = f_\xi(x)\Delta x + o(\Delta x), \tag{2.3.4}$$

тобто для достатньо малого Δx

$$P(x < \xi < x + \Delta x) \approx f_\xi(x)\Delta x. \tag{2.3.5}$$

Якраз рівністю (2.3.5) і розкривається ймовірносний зміст щільністю розподілу ймовірностей.

У подальшому, як правило, ми будемо мати справу з щільностями розподілу, які мають скінченне число точок розриву, або, інакше, з функціями розподілу, які диференційовні скрізь за винятком, можливо, скінченного числа точок.

Приклад 1. При яких значеннях параметрів α і β функція вигляду $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \alpha x e^{\beta x^2}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$ буде щільністю розподілу ймовірностей?

Розв'язання. В силу першої характеристичної властивості (теорема 2.3.1) щільності розподілу $\alpha > 0$. Далі, в силу другої характеристичної властивості маємо рівняння

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \alpha x e^{\beta x^2}\,dx = 1.$$

Ліву частину рівняння запишемо у вигляді

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \alpha x e^{\beta x^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{0}^{A} \alpha x e^{\beta x^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \frac{\alpha}{2\beta} e^{\beta x^2}\Big|_{0}^{A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{\alpha}{2\beta}(e^{\beta A^2} - 1).$$

Остання границя існує, коли $\beta < 0$. Отже, параметри α і β мають задовольняти умову

$$-\frac{\alpha}{2\beta} = 1,$$

де $\alpha > 0$ і $\beta < 0$. Звідки $\beta = -\frac{\alpha}{2}$ і функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \alpha x e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

є щільністю розподілу ймовірностей. Якщо позначити $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, то остання функція набере вигляду

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Відповідна функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{\infty}^{0} f(t)\,dt + \int\limits_{0}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \int\limits_0^x 2\lambda t e^{-\lambda t^2} dt, & \text{якщо} \quad x > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ -e^{-\lambda t^2}\Big|_0^x, & \text{якщо} \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x^2}, & \text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

При обчисленні ймовірностей подій, пов'язаних з випадковими величинами, що задаються щільністю розподілу, можна користуватись як функцією так і щільністю розподілу. Так, для прикладу, якщо у приведеному вище розподілі $\lambda = \frac{1}{2}$, то ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення з інтервалу $(-1; 2)$, рівняється

$$P(-1 < \xi < 2) = F(2) - F(-1) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 2^2} = 1 - e^{-2} \approx 0,86$$

або $\quad P(-1 < \xi < 2) = \int\limits_{-1}^{2} f(t)\, dt = \int\limits_0^2 t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \approx 0,86.$

Приклад 2. Щільність розподілу ймовірностей випадкової величини ξ має вигляд (Рис.5). Знайти щільність і функцію розподілу цієї випадкової величини.

Розв'язання.

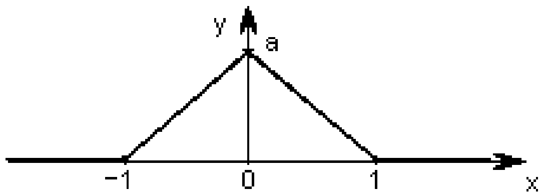


Рис.5

Оскільки щільність розподілу ймовірностей є невід'ємна функція, то $\int\limits_a^b f(x)\, dx$

є площа криволінійної трапеції $\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. А в силу другої характеристичної властивості щільності площа під кривою щільності має рівнятись 1. Отже площа трикутника з вершинами $(1,0)$, $(a,0)$, $(-1,0)$ має рівнятись 1. Очевидно, що у цьому випадку $a=1$. Тепер уже можна записати щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ 1+x, & \text{якщо} \quad -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 1-x, & \text{якщо} \quad 0<x\leqslant 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$$

Знайдемо функцію розподілу. Маємо:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,$$

причому якщо $x\leqslant -1$, то $F(x)=0$, якщо $-1<x\leqslant 0$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-1} f(t)dt+\int\limits_{-1}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-1}^{x}(1+t)dt=\left. t+\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{x}=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2},$$

якщо $0<x\leqslant 1$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-1} f(t)dt+\int\limits_{-1}^{0} f(t)dt+\int\limits_{0}^{x} f(t)dt=\frac{1}{2}+\int\limits_{0}^{x}(1-t)dt=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2},$$

якщо $x>1$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-1} f(t)dt+\int\limits_{-1}^{0} f(t)dt+\int\limits_{0}^{1} f(t)dt+\int\limits_{1}^{x} f(t)dt=1.$

Таким чином, функція розподілу записується у вигляді

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\leqslant -1, \\ \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}, & \text{якщо} \quad -1<x\leqslant 0, \\ -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}, & \text{якщо} \quad 0<x\leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$$

Графік цієї функції має вигляд (Рис.6).

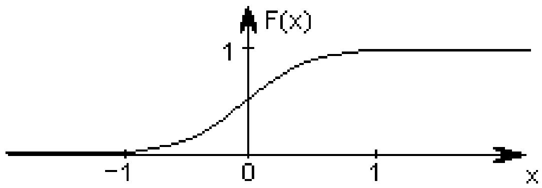


Рис.6

Зауваження. Через функцію розподілу означається така важлива характеристика як надійність приладу (системи). Справді, якщо ξ — час безвідмовної роботи приладу (природно, що ξ — невід'ємна випадкова величина), то ймовірність того, що прилад буде безвідмовно працювати час не менший t, рівняється

$$P(\xi \geqslant t) = 1 - P(\xi < t) = 1 - F_\xi(t).$$

Якраз цю функцію і називають *надійністю функціонування приладу.* Обчислимо умовну ймовірність того, що прилад відмовить в інтервалі часу $(t, t+\Delta t)$ за умови, що від безвідмовно працював до моменту t. Скориставшись означенням умовної ймовірності, маємо:

$$P(t < \xi < t + \Delta t \mid \xi \geqslant t) = \frac{P(\xi \geqslant t,\ \xi < t + \Delta t)}{P(\xi \geqslant t)} =$$
$$= \frac{P(t \leqslant \xi < t + \Delta t)}{P(\xi \geqslant t)} = \frac{F_\xi(t + \Delta t) - F_\xi(t)}{1 - F_\xi(t)}.$$

Припустимо, що ξ — абсолютно неперервна випадкова величина і $f_\xi(t)$ — її щільність. Тоді

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < \xi < t + \Delta t \mid \xi \geqslant t)}{\Delta t} =$$
$$= \frac{1}{1 - F(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F_\xi(t + \Delta t) - F_\xi(t)}{\Delta t} = \frac{f_\xi(t)}{1 - F(t)}.$$

Цю границю називають *інтенсивністю відмов приладу* і позначають через $\lambda(t)$.

Як приклад, у теорії надійності часто використовують розподіл Вейбулла-Гнєденко

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0, \\ 1 - e^{-\lambda t^\alpha}, & \text{якщо } t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.3.7}$$

де $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ (частинний випадок при $\alpha = 2$ є розподіл (2.3.6)). Для цього розподілу інтенсивність відмов $(t > 0)$

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1-F(t)} = \frac{\lambda\alpha\, t^{\alpha-1}e^{-\lambda\, t^{\alpha}}}{e^{-\lambda\, t^{\alpha}}} = \lambda\alpha\, t^{\alpha-1}.$$

Очевидно, що інтенсивність відмов $\lambda(t)$ спадає, якщо $0<\alpha<1$, і зростає, якщо $\alpha > 1$. Випадок $\alpha = 1$ буде розглянуто пізніше.

Слід також зазначити, що ймовірносна структура випадкової величини ξ повністю визначається функцією $\lambda(t)$. Справді, з того, що

$$\lambda(t) = \frac{F'(t)}{1-F(t)}$$

або

$$(1-F(t))' = -\lambda(t)\,(1-F(t)),$$

при заданому $\lambda(t)$ маємо диференціальне рівняння, загальний розв'язок якого має вигляд

$$1 - F(t) = C\, exp\,\{-\int_0^t \lambda(u)du\}.$$

Врахувавши, що $F(0) = 0$, маємо функцію розподілу

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t \leqslant 0, \\ 1 - exp\,\{-\int_0^t \lambda(u)du\}, & \text{якщо} \quad t > 0. \end{cases}$$

В демографії як математичну модель для розподілу тривалості життя людини використовують розподіл Гомпертуа-Макегана

$$\begin{matrix} 0, & \text{якщо} \quad t \leqslant 0, \\ 1 - exp\,\{-\alpha\, t - \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma\, t} - 1), & \text{якщо} \quad t > 0, \end{matrix}$$

де $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Функція інтенсивності відмов

$$\lambda(t) = \alpha + \beta\, e^{\gamma\, t}.$$

На завершення розглянемо три основні класи розподілів неперервних випадкових величин, які найчастіше зустрічаються при розв'язанні як теоретичних так і практичних задач.

Розглянемо функцію вигляду

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < a, \\ \dfrac{k}{b-a}, & \text{якщо} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{якщо} \quad x > b, \end{cases} \tag{2.3.8}$$

де $a, b, k \in \mathbb{R}$, $a < b$. Очевидно, що вона буде невід'ємною, якщо $k \geqslant 0$. Функція інтегровна на $\mathbb{R}$ і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} \frac{k}{b-a}\,dx + \int_{b}^{+\infty} 0\,dx = \frac{kx}{b-a}\bigg|_a^b = k.$$

Останній інтеграл рівняється 1, якщо $k = 1$. Отже, функція (2.3.8) задовольняє обидві характеристичні властивості щільності при будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ і $k = 1$.

Означення 2.3.2 *Казатимемо, що випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[a; b]$, якщо її щільність має вигляд*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \textit{якщо} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \textit{якщо} \quad x > b. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

На практиці такого виду розподіли мають неперервні випадкові величини, значення яких можна тлумачити як координати точки, кинутої наугад на відрізок.

Функція розподілу (2.3.1) у цьому випадку має вигляд

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо} \quad a < x \leqslant b, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > b. \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Щільність (2.3.9) і функція розподілу (2.3.10) зображені на рисунках 7 і 8.

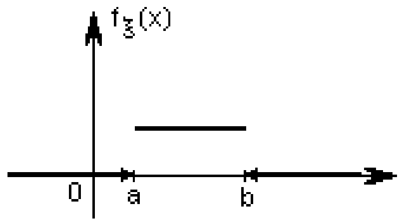


Рис.7

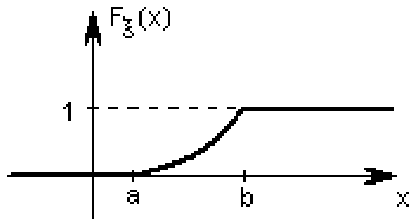


Рис.8

Ймовірність того, що випадкова величина ξ, рівномірно розподілена на відрізку $[a;b]$, набере значення з інтервалу (α, β), можна обчислювати як з допомогою щільності так і з допомогою функції розподілу, а саме

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)\, dx = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \beta \leqslant a, \\ \dfrac{\beta - a}{b - a}, & \text{якщо} \quad \alpha \leqslant a,\ \beta \leqslant b, \\ \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}, & \text{якщо} \quad a \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant b, \\ \dfrac{b - \alpha}{b - a}, & \text{якщо} \quad a \leqslant \alpha,\ \beta > b, \\ 1, & \text{якщо} \quad a > \beta. \end{cases}$$

Рівномірний розподіл, точніше рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$ випадкова величина, відіграє основну роль при розв'язуванні задач обчислювальної математики методом статистичних випробувань (методом Монте-Карло). Рівномірний розподіл виникає також як розподіл помилок при заокругленні чисел. Для прикладу, якщо ми проводимо обчислення з точністю до першого знаку після коми, то помилка такого заокруглення має рівномірний розподіл на інтервалі $(-0,5; 0,5)$. А тому, якщо після обчислень ми отримуємо число $4,6$, то фактичне значення належить інтервалу $(4,55; 4,65)$.

Для біномного розподілу ще Лапласом було побудовано апроксімаційну формулу, згідно з якою ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях подія A матиме місце не менше k_1 і не більше k_2 рази, можна обчислювати з допомогою такої формули

$$P(k_1 < \nu < k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{2.3.11}$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{2.3.12}$$

$x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, p — ймовірність появи події A у кожному випробуванні. Зрозуміло, що ν — дискретна випадкова величина, яка має біномний розподіл з параметрами n і p. А от справа у (2.3.11) фігурує функція

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Очевидно, що ця функція невід'ємна та інтегровна на $\mathbb{R}$. Обчислимо інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Покажемо, що має місце рівність

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{2.3.13}$$

(останній інтеграл називають інтегралом Пуассона). З цією метою розглянемо квадрат інтеграла, що стоїть у (2.3.13) зліва, і будемо розглядати його як подвійний інтеграл.

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy.$$

В останньому інтегралі перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \rho < +\infty$. Тоді

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho = \frac{\pi}{2} \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-\frac{\rho^2}{2}}\Big|_0^A\right) = \frac{\pi}{2} \lim_{A\to+\infty}\left(1 - e^{-\frac{A^2}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, і $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Таким чином, ми виявили, що функція

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2.3.14}$$

є щільністю розподілу ймовірностей.

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.3.15}$$

Очевидно, що вона є узагальненням функції (2.3.14) ($a = 0$, $\sigma = 1$). Якщо $\sigma > 0$, то при будь-якому $a \in \mathbb{R}$ і $\sigma > 0$ функція $f(x)$ додатна, причому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = 1.$$

Справді, якщо ввести заміну $\quad t = \dfrac{x-a}{\sigma}, \ dx = \sigma dt, \quad$ то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Таким чином, (2.3.15) при будь-якому $a \in \mathbb{R}$ і $\sigma > 0$ є щільністю розподілу.

Означення 2.3.3 *Казатимемо, що випадкова величина має нормальний закон розподілу з параметрами* a *і* $\sigma > 0$, *якщо її щільність має вигляд*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.3.16}$$

Похідна функції (2.3.16)

$$f'(x) = -\frac{(x-a)}{\sigma^3\ \sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

обертається в нуль у точці $x = a$, причому при переході через цю точку змінює знак з $+$ на $-$, тобто $x = a$ є точкою максимуму. Максимальне значення

$$f_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

залежить від σ. Друга похідна цієї функції

$$f''(x) = \frac{(x-a)^2 - \sigma^2}{\sigma^5\ \sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

обертається в нуль у точках $x_1 = a - \sigma$ і $x_2 = a + \sigma$, причому $f''(x) > 0$ на інтервалах $(-\infty; a-\sigma)$, $(a+\sigma; +\infty)$, $f''(x) < 0$ на інтервалі $(a-\sigma; a+\sigma)$. Отже, точки $a-\sigma$, $a+\sigma$ є точками перегину цієї функції, причому на інтервалах $(-\infty; a-\sigma)$,

$(a + \sigma; +\infty)$ вона опукла донизу, а на інтервалі $(a - \sigma; a + \sigma)$ опукла догори. Графік цієї функції має дзвіноподібну форму (Рис.9).

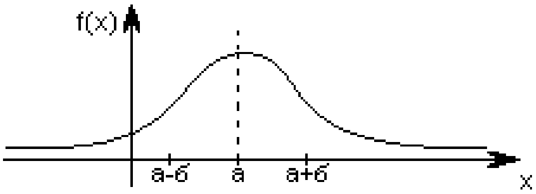


Рис.9

Функція розподілу

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

не подається у скінченному вигляді через елементарні функції. Тому необхідно її табулювати. Однак наявність параметрів a і σ ускладнює справу.

Функція (2.3.14) є нормальна щільність розподілу ймовірностей, але з конкретними параметрами 0 і 1. Якраз функція

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(*функція Лапласа*) табульована (Таблиця 1 у додатку) значення функції (2.3.16) знаходять за правилом

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\ \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Аналогічно поступають і при обчисленні значень функції розподілу. Якщо в інтегралі

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

виконати заміну $u = \dfrac{t-a}{\sigma}$, то прийдемо до інтеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Як правило, табулюють функцію (Таблиця 2 у додатку)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(*функція Гаусса*), причому тільки для значень від 0 до 5, бо, з одного боку, $\Phi(-x) = \Phi(x)$, а, з другого боку, функція $\Phi(x)$ зростаюча,

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0,5$$

і $\Phi(5) = 0,499997 \approx 0,5.$

Значення функції розподілу знаходять за правилом

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Отже, ймовірність того, що випадкова величина ξ, яка має нормальний розподіл з параметрами a і σ, набере значення з інтервалу $(\alpha; \beta)$, обчислюється за формулою

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (2.3.17)$$

Обчислимо ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення відповідно з інтервалів $(a-\sigma; a+\sigma)$, $(a-2\sigma; a+2\sigma)$,

$(a-3\sigma; a+3\sigma)$. Маємо:
$P(a-\sigma < \xi < a+\sigma) = 2\ \Phi(1) \approx 0,6826$,
$P(a-2\sigma < \xi < a+2\sigma) = 2\ \Phi(2) \approx 0,9544$,
$P(a-3\sigma < \xi < a+3\sigma) = 2\ \Phi(3) \approx 0,9973 \approx 1$.
Остання рівність формулюється як "*правило трьох сигм*": практично достовірно (з ймовірністю $0,9973 \approx 1$), що відхилення нормально розподіленої випадкової величини ξ від параметра a (математичного сподівання) не перевищує за абсолютною величиною 3σ.
Коротка історична довідка. Нормальний закон розподілу вже майже 200 років відіграє виключно важливу роль у теорії ймовірностей та її застосуваннях. Його, як наближення біномного розподілу, вперше ввів Муавр у своєму трактаті "Доктрина шансів" (1718). Тільки через сто років результат Муавра привернув увагу Лапласа і він включив його у свою знамениту аналітичну теорію ймовірностей у такому вигляді

$$\lim_{n\to\infty} P(a < \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

де ξ — число появ події при n незалежних випробуваннях, p — ймовірність появи події у кожному випробуванні. Правда, інтеграл, що стоїть справа, зацікавив його значно раніше. Якраз Лаплас звернув увагу на те, що цей інтеграл не може бути поданий у скінченному вигляді через значення елементарних функцій і у 1783 році він запропонував підходящу обчислювальну формулу. Перші солідні таблиці значень цього інтеграла належать французькому фізику Крампу (1799).

Одне із перших застосувань власне нормального розподілу безвідносно до біномного розподілу належить великому Карлу Гауссу, який при обробці результатів спостереження в астрономії і геодезії істотно використав функцію

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2\Delta^2}$$

(названу ним законом похибок) і намагався з'ясувати особливу роль нормальної кривої (дістанемо нормальний закон розподілу з параметрами $a = 0$, $\sigma = \frac{1}{h\,\sqrt{2}}$).

З 1830 р. нормальний закон розподілу був взятий на озброєння фізиками. А по-справжньому він стає невід'ємним інструментом в руках дослідників після того, як бельгійський статистик Ламберт Кетле показав, що з його допомогою можна описати неймовірно широке коло соціальних і антропологічних феноменів.

Ще один вчений, з чиїм іменем асоціюється нормальний закон розподілу, — англійський біолог Френсіс Гальтон (згадайте знамениту дошку Гальтона). Якраз він помилки, розходження, відхилення, розбіжності, розсіювання і окремі варіації назвав нормальною величиною. Термін "нормальний закон розподілу" ввів найвидатніший французький математик другої половини XIX ст. Анрі Пуанкаре.

Ще один розподіл, на який звернули увагу у середині минулого століття теоретики і прикладники теорії ймовірностей, є так званий показниковий розподіл.

Означення 2.3.4 *Казатимемо, що випадкова величина має показниковий розподіл з параметром* $\lambda > 0$*, якщо її щільність має вигляд*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.3.18}$$

Очевидно, що на інтервалі $(0; +\infty)$ функція (2.3.18) спадає, у точці $x = 0$ досягає максимуму, причому $f_{\max} = \lambda$. Оскільки на інтервалі $(0; +\infty)$ $f''(x) = \lambda^3 e^{-\lambda x} > 0$, то $f(x)$ опукла донизу на цьому інтервалі. Функція розподілу показниково розподіленої випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \tag{2.3.19}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, & \text{якщо } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x > 0 \end{cases} .$$

Щільність (2.3.18) і функція розподілу (2.3.19) зображені на рисунках 10 і 11.

Рис.10

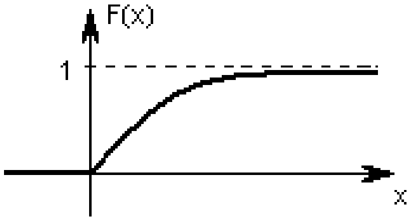


Рис.11

Що особливого у цьому розподілі? Це, насамперед, те, що він є єдиним розподілом, інтенсивність відмов якого є сталою, а саме для $x > 0$

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \lambda.$$

З другого боку, це єдиний розподіл, який володіє властивістю "відсутності пам'яті" (використовуються ще два терміни "відсутність післядії" і "марківська властивість"). Ця властивість полягає у тому, що умовна ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення меншого $x_0 + x$ (для будь-яких $x_0 > 0$ і $x > 0$) за умови, що $\xi > x_0$, рівняється ймовірності того, що ξ набере значення менше x. Справді,

$$P(\xi < x_0 + x \mid \xi > x_0) = \frac{P(\xi < x_0 + x \quad \text{і} \quad \xi > x_0)}{P(\xi > x_0)} =$$
$$= \frac{P(x_0 < \xi < x_0 + x)}{P(\xi > x_0)} = \frac{F(x_0 + x) - F(x_0)}{1 - F(x_0)} =$$
$$= \frac{1 - e^{-\lambda(x_0+x)} - 1 + e^{-\lambda x_0}}{e^{-\lambda x_0}} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Оскільки у середині XX століття з'явились технічні пристрої, для яких протягом реального часу експлуатації відсутнє старіння і тривалість безвідмовної роботи залежить тільки від коливань навантаження, то цілком природно вважати, що коли пристрій відпрацював час t_0, то ймовірність того, що після цього він відпрацює час t, буде залежати тільки від t. Якраз це призвело до того, що в багатьох випадках показниковий розподіл став не менш популярний, ніж нормальний. А поєднання його із, запропонованим на початку XX ст. російським математиком А.А.Марковим, узагальнення послідовності незалежних випробувань (сучасна назва "ланцюг Маркова") привело до поняття випадкового процесу марковського типу, достатньо ефективного інструменту вивчення випадкових явищ, що розгортаються у часі.

Питання для самоперевірки та вправи

1. Що таке неперервна випадкова величина, і чому її не можна задати за допомогою ряду розподілу?

2. Що таке абсолютно неперервна випадкова величина? За допомогою чого можна описати її ймовірносну структуру?

3. Аналогом яких дискретних розподілів є рівномірний, нормальний і показниковий розподіли?

4. Чи буде щільністю розподілу ймовірностей функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0 \ ? \end{cases}$$

Якщо так, то знайдіть функцію розподілу. Побудуйте графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Знайдіть ймовірність того, що така випадкова величина набере значення меншого $\frac{2}{\lambda}$.

5. Чи буде щільністю розподілу функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 2x, & \text{якщо} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 6 - 6x, & \text{якщо} \quad \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x > 1 \ ? \end{cases}$$

Якщо так, то знайдіть функцію розподілу. Побудуйте графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Знайдіть ймовірність того, що така випадкова величина набере значення не меншого $\frac{1}{4}$ і не більшого $\frac{3}{4}$.

6. На перехресті стоїть автоматичний світлофор, у якому 1 хв. горить зелене світло і півхвилини — червоне, потім знову 1 хв. горить зелене світло і півхвилини — червоне і т.д. (спрощений варіант світлофора). Хтось під'їжджає до перехрестя на автомобілі у випадковий момент, не пов'язаний з роботою світлофора. а) Знайти ймовірність того, що він проїде перехрестя, не зупиняючись. б) Побудувати функцію розподілу часу чекання на перехресті.

7. Нехай маємо біномний розподіл з параметрами n і p. У якому з трьох випадків а) $p < \frac{1}{2}$, б) $p = \frac{1}{2}$, в) $p > \frac{1}{2}$ нормальна крива $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(x-np)^2}{\sqrt{npq}}}$ найкраще апроксимує відповідний біномний розподіл? Провести чисельний експеримент для випадку $n = 5$ а) $p = \frac{1}{3}$, б) $p = \frac{1}{2}$, в) $p = \frac{2}{3}$.

8. У таблиці 2 (див. [3], с.176)

Інтервали росту у см	Число школярів	Інтервали росту у см	Число школярів
(143; 146)	1	(167; 170)	170
(146; 149)	2	(170; 173)	120
(149; 152)	8	(173; 176)	64
(152; 155)	26	(176; 179)	27
(155; 158)	65	(179; 182)	10
(158; 161)	120	(182; 185)	3
(161; 164)	181	(185; 188)	1
(164; 167)	201		$\sum n_i = 1000$

приведені результати вимірювання росту 1000 школярів старших класів. Припустимо, що ріст школяра є значення випадкової величини, яка має нормальний розподіл з параметрами $a = 165,35$ (середній ріст) і $\sigma = 6$. Знайдіть теоретичне число школярів, ріст яких попадає в інтервали $(143; 146)$, …, $(185; 188)$. Про що свідчить отриманий результат?

9. Проводиться послідовність серій незалежних випробувань така, що для кожного n ймовірність появи події A у кожному випробуванні рівняється P_n, причому $\lim\limits_{n\to\infty} P_n n = \lambda > 0$. Нехай ν_n — число проведених випробувань до першої появи події A у серії під номером n. Довести, що для $t > 0$
$$\lim_{n\to\infty} P(\nu_n < [nt]) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

10. (Задача про зустріч). Дві особи домовились зустрітися протягом заданого проміжку часу. Побудувати функцію щільності розподілу ймовірностей для часу між моментами приходу на місце зустрічі обох осіб, якщо кожна з них може прийти на місце зустрічі у будь-який момент домовленого проміжку часу.

2.4 Багатовимірні випадкові величини (випадкові вектори)

У попередніх параграфах побудовані основи теорії випадкових величин як функцій, визначених на просторі елементарних подій, причому значеннями таких функцій є числа, які є кількісною характеристикою можливих результатів стохастичного досліду.

Однак практика ставить задачі, пов'язані із стохастичними дослідами, можливі результати яких характеризуються не одним, а двома, трьома і взагалі n числами. Таким чином, виникає потреба розглядати не одну, а дві, три і взагалі n випадкових величин, визначених на одному просторі елементарних подій.

Як приклад, з урни, у якій 2 чорні, 3 білі і 5 жовтих куль, навгад взято 2 кулі. Нас цікавить число чорних і білих куль у вибірці. Очевидно, що можливі результати такого досліду характеризуються парами чисел (i, j), де $i, j = 0, 1, 2$ і $i + j \leqslant 2$. Отже, можна говорити про пару випадкових величин (ξ, η), де ξ — число чорних, η — число білих куль у вибірці, і про сумісний розподіл ймовірностей для такої пари. А саме, скориставшись класичним означенням, маємо:
$P(\xi = 0, \eta = 0) = \dfrac{C_5^2}{C_{10}^2} = \dfrac{10}{45}$, $P(\xi = 1, \eta = 0) = \dfrac{2 \cdot 5}{45} = \dfrac{10}{45}$,
$P(\xi = 0, \eta = 1) = \dfrac{3 \cdot 5}{45} = \dfrac{15}{45}$, $P(\xi = 1, \eta = 1) = \dfrac{2 \cdot 3}{45} = \dfrac{6}{45}$,
$P(\xi = 2, \eta = 0) = \dfrac{1}{45}$, $P(\xi = 0, \eta = 2) = \dfrac{C_3^2}{45} = \dfrac{3}{45}$.

Маючи декілька випадкових величин, можна конструювати з них нові випадкові величини. Як результат маємо функцію від випадкових величин, для якої необхідно знайти закон розподілу ймовірностей, знаючи сумісний закон розподілу випадкового вектора. Так фактично ставиться задача при розрахунках надійності функціювання технічних систем, якщо відомі надійності окремих її компонент.

Звичайно теорія багатовимірних випадкових величин (випадкових векторів) будується на заданому ймовірносному просторі $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$, на якому задані випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ $\xi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ $(k = \overline{1, m})$. Ці випадкові величини сумісно кожному ω з Ω відносять вектор $\vec{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_m(\omega))$.

Означення 2.4.1 *Відображення*

$$\vec{\xi} \ : \ \Omega \to \mathbb{R}^m,$$

яке задаєтсья випадковими величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$*, називаєтьтся випадковим вектором або* m*-вимірною випадковою величиною.*

Надалі будемо вважати, що $\mathbb{R}^m$ наділено структурою евклідового простору з ортонормованим базисом.

Оскільки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ — випадкові величини, пов'язані з простором елементарних подій Ω, то множини $\{\omega \mid \xi_1(\omega) < x_1\}$, $\{\omega \mid \xi_2(\omega) < x_2\}$, ..., $\{\omega \mid \xi_m(\omega) < x_m\}$ для будь-якого вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ належать $\mathfrak{f}$, тобто є події. Тоді множина $\{\omega \mid \xi_1(\omega) < x_1\} \cap \{\omega \mid \xi_2(\omega) < x_2\} \cap \ldots \cap \{\omega \mid \xi_m(\omega) < x_m\} \in \mathfrak{f}$, а тому для неї визначена ймовірність, тобто для будь-якого вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ визначено ймовірність того, що випадкова величина ξ_1 набере значення меншого x_1, випадкова величина ξ_2 набере значення меншого x_2, ..., випадкова величина ξ_m набере значення меншого x_m. Таким чином, на $\mathbb{R}^m$ визначена функція m змінних, яка кожній точці $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ відносить число за правилом

$(x_1, x_2, \ldots, x_m) \longmapsto P(\{\omega \mid \xi_1(\omega) < x_1\} \cap \{\omega \mid \xi_2(\omega) < x_2\} \cap \ldots$
$\ldots \cap \{\omega \mid \xi_m(\omega) < x_m\}),$

для якого будемо використовувати позначення

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_m < x_m).$$

Означення 2.4.2 *Функція*

$$\begin{aligned} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) := \\ &= P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_m < x_m) \quad (2.4.1) \end{aligned}$$

називається функцією розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$ *або функцією сумісного розподілу випадкових величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$.

З означення безпосередньо випливає, що функція $F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обмежена і по кожній змінній неспадна. А тому при фіксованих $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, $\ldots$, $x_{m-1} = x_{m-1}^{(0)}$ існує границя $\lim\limits_{x_m \to +\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{m-1}^{(0)}, x_m)$.

Якщо побудувати послідовність подій

$A_n = \{\omega \mid \xi_1(\omega) < x_1^{(0)}, \xi_2(\omega) < x_2^{(0)}, \ldots, \xi_{m-1}(\omega) < x_{m-1}^{(0)}, \xi_m(\omega) < n\}$,

то вона неспадна ($A_n \subset A_{n+1}$) і

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \mid \xi_1(\omega) < x_1^{(0)}, \xi_2(\omega) < x_2^{(0)}, \ldots, \xi_{m-1}(\omega) < x_{m-1}^{(0)}\}.$$

На підставі теореми про неперервність ймовірності

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1}}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{m-1}^{(0)}).$$

Отже

$$\lim_{x_m \to +\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{m-1}^{(0)}, x_m) = F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m-1}}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{m-1}^{(0)}),$$

тобто від функції розподілу випадкового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ можна перейти до функції розподілу випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m-1})$, виконавши граничний перехід при $x_m \to +\infty$. Аналогічна властивість має місце, коли $x_k \to +\infty$ для $k = \overline{1, m}$.

В силу того, що функція $F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ обмежена і неспадна по кожній змінній, існує границя

$$\lim_{x_m \to -\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Значення цієї границі знайдемо, побудувавши послідовність

подій
$(B_n)=(\{\omega|\xi_1(\omega)<x_1\}\cap\ldots\cap\{\omega|\xi_{m-1}(\omega)<x_{m-1}\}\cap\{\omega|\xi_m(\omega)<-n\})$.
Ця послідовність незростаюча $(B_n \supset B_{n+1})$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Знову таки в силу теореми про неперервність ймовірності

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0,$$

тобто
$$\lim_{x_m\to-\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0.$$

Послідовне виконання граничного переходу, коли $x_k \to +\infty$, приведе до функції розподілу окремої компоненти, тобто за функцією сумісного розподілу випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ можна знайти функцію розподілу кожної з цих випадкових величин. Знайти ж функцію сумісного розподілу за розподілами окремих компонент можна тільки у випадку, коли вони незалежні.

Означення 2.4.3 *Випадкові величини* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ *називаються незалежними в сукупності (надалі просто незалежними), якщо для будь-якого* $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

$$F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\ldots F_{\xi_m}(x_m). \quad (2.4.2)$$

Більш детально розглянемо двомірну випадкову величину, тобто випадок, коли з простором елементарних подій пов'язано дві випадкові величини ξ і η. Вони задають відображення Ω в $\mathbb{R}^2$ або, що те саме, маємо випадковий вектор, значеннями якого є точки площини. Крім того, вони породжують функцію двох змінних, визначену на $\mathbb{R}^2$, значеннями якої для кожної точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ є ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення меншого x, а випадкова величина η набере значення меншого y.

Якщо Ω описує дослід, то результатом такого досліду є випадкова точка (ξ, η) у площині, а значеннями функції $F_{\xi,\eta}(x, y)$

є ймовірність того, що ця точка попаде у нескінченний відкритий прямокутник з вершиною (x, y) і сторонами, паралельними осям координат (заштрихована область на рис.12). Різниця $F_{\xi,\eta}(x_2, y) - F_{\xi,\eta}(x_1, y)$, де $x_1 < x_2$ є ймовірність того, що точка (ξ, η) попаде у нескінченний прямокутник з вершинами (x_1, y) і (x_2, y) і сторонами, паралельними осям координат (заштрихована область на рис.13, промінь з початком у точці (x_1, y) належить прямокутнику). Вираз

$$F_{\xi,\eta}(x_2, y_2) - F_{\xi,\eta}(x_1, y_2) - F_{\xi,\eta}(x_2, y_1) + F_{\xi,\eta}(x_1, y_1),$$

де $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, є ймовірність того, що точка (ξ, η) попаде у прямокутник з вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2) і сторонами, паралельними осям координат (заштрихована область на рис.14, сторони, що сполучають вершини (x_1, y_1) і (x_2, y_1), (x_1, y_1) і (x_1, y_2) належать прямокутнику).

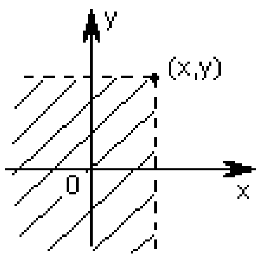


Рис.12

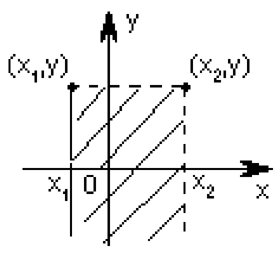


Рис.13

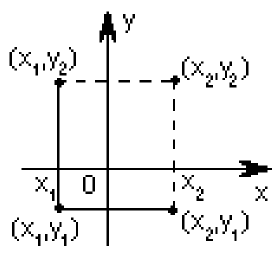


Рис.14

Таким чином, для подальшого використання маємо формули

$$P(\xi < x, \eta < y) = F_{\xi,\eta}(x, y), \tag{2.4.3}$$

$$P(x_1 \leqslant \xi < x_2, \eta < y) = F_{\xi,\eta}(x_2, y) - F_{\xi,\eta}(x_1, y), \tag{2.4.4}$$

$$P(\xi < x, y_1 \leqslant \eta < y_2) = F_{\xi,\eta}(x, y_2) - F_{\xi,\eta}(x, y_1), \tag{2.4.5}$$

$$\begin{aligned} P(x_1 \leqslant \xi < x_2, y_1 \leqslant \eta < y_2) = F_{\xi,\eta}(x_2, y_2) - \\ - F_{\xi,\eta}(x_1, y_2) - F_{\xi,\eta}(x_2, y_1) + F_{\xi,\eta}(x_1, y_1). \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Крім того, зазначимо, що

$$\lim_{y\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x), \ \lim_{x\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\eta(y),$$
$$\lim_{x\to-\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F_{\xi,\eta}(x,y) = 0,$$
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F_{\xi,\eta}(x,y) = 1.$$

Нарешті, випадкові величини ξ і η називаються *незалежними*, якщо

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y). \tag{2.4.7}$$

Формула (2.4.7) (у загальному випадку формула (2.4.2)) дає можливість будувати функції розподілу двовимірного випадкового вектора (ξ,η) через функції розподілу випадкових величин ξ і η за умови, що останні незалежні. Як приклад, нехай випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$, а випадкова величина η рівномірно розподілена на відрізку $[0;2]$. Тоді

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \leqslant 0, \\ x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, \text{ якщо } x > 1, \end{cases} \quad F_\eta(y) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } y \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}y, \text{ якщо } 0 < y \leqslant 2, \\ 1, \text{ якщо } y > 2. \end{cases}$$

Якщо ці випадкові величини незалежні, то функція розподілу випадкового вектора (ξ,η) має вигляд

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0 \text{ або } y \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}xy, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant 2, \\ x, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1,\ y > 2, \\ \frac{1}{2}y, & \text{якщо } x > 1,\ 0 < y \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 1,\ y > 2. \end{cases}$$

Подібно до того, як виділялись класи випадкових величин (дискретні і абсолютно неперервні), виділимо два класи двовимірних випадкових величин.

Нехай маємо дві дискретні випадкові величини ξ і η і нехай $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ можливі значення першої, а $y_1, y_2, \ldots, y_l, \ldots$

можливі значення другої випадкової величини. Тоді можливими значеннями випадкового вектора (ξ, η) є пари (x_i, y_j) такі, що

$$P(\xi = x_i,\ \eta = y_j) = p_{ij} > 0 \quad \text{і} \quad \sum_{i,j} p_{ij} = 1. \tag{2.4.8}$$

Такого типу двовимірні випадкові величини будемо називати *дискретними* і задавати двовимірним рядом (таблицею) розподілу (2.4.8). Звичайно (2.4.8) можна подати і у вигляді таблиці, але тоді для пар, які не можуть бути значеннями випадкового вектора (ξ, η) слід вважати, що відповідна ймовірність рівняється нулю.

За рядом розподілу (2.4.8) відновлюється функція розподілу, а саме

$$F_{\xi,\eta}(x, y) \ = \sum_{(i,j)\,:\,x_i<x,\,y_j<y} p_{ij}. \tag{2.4.9}$$

Точно у такий саме спосіб означається дискретна m-вимірна випадкова величина, причому вона вважається заданою, якщо задано перелік можливих значень випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, тобто перелік n-ок чисел $(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{m,i_m})$ таких, що

$$P(\xi_1 = x_{1,i_1}, \xi_2 = x_{2,i_2}, \ldots, \xi_m = x_{m,i_m}) = p_{i_1,i_2,\ldots,i_m} > 0$$

і

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m} p_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = 1.$$

За двовимірним рядом розподілу ймовірностей дискретного випадкового вектора (ξ, η) знаходяться ряди розподілу ймовірностей для кожної компоненти, а саме

$$P(\xi = x_i) = \sum_j P(\xi = x_i,\ \eta = y_j) = \sum_j p_{ij},$$
$$P(\eta = y_j) = \sum_i P(\xi = x_i,\ \eta = y_j) = \sum_i p_{ij}. \tag{2.4.10}$$

Приклад 1. Повернемось до досліду, приведеного на початку параграфа. Тут ξ — число чорних, η — число білих куль у вибірці об'єму 2 з 10 куль, серед яких 2 чорні, 3 білі і 5 жовтих куль.

Можливими значеннями випадкового вектора (ξ, η) є пари чисел $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(0,2)$, причому для кожної з цих пар маємо: $P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{10}{45}$, $P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{10}{45}$, $P(\xi = 0, \eta = 1) = \frac{15}{45}$, $P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{6}{45}$, $P(\xi = 2, \eta = 0) = \frac{1}{45}$, $P(\xi = 0, \eta = 2) = \frac{3}{45}$. Сума таких ймовірностей рівняється 1.

Зручніше розподіл ймовірностей цього випадкового вектора подати у вигляді таблиці 3.

$\xi \diagdown \eta$	0	1	2
0	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{3}{45}$
1	$\frac{10}{45}$	$\frac{6}{45}$	0
2	$\frac{1}{45}$	0	0

Таблиця 3

Ряди розподілу ймовірностей для кожної компоненти знаходяться з вище приведеної таблиці сумування чисел по рядках, якщо необхідно побудувати ряд розподілу для ξ, і по стовпцях, якщо необхідно побудувати ряд розподілу для η. В результаті такого сумування маємо:

ξ	0	1	2
	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

,

η	0	1	2
	$\frac{21}{45}$	$\frac{21}{45}$	$\frac{3}{45}$

.

Звичайно це легко перевірити і безпосередньо користуючись класичним означенням. □

Приклад 2. Кидається два правильних гральних кубики. Побудувати сумісний розподіл для випадкового вектора (ξ, η), де ξ — число парних очок, яке випадає, η — модуль різниці між числом очок, яке випало на першому, і числом очок, яке випало на другому гральному кубику.

Розв'язання. Очевидно, що ξ може набирати значення: 0 — на обох кубиках випало непарне число очок, 1 — на одному з гральних кубиків випало парне число очок, 2 — на обох гральних кубиках випало парне число очок; а η може набирати значення: 0 — на обох гральних кубиках випало однакове число очок, 1 — на одному з них число очок на одиницю більше, ніж на другому, ..., 5 — на одному з них число очок на 5 більше, ніж на другому. Тоді (згадайте простір елементарних подій, який описує результати кидання двох гральних кубиків) маємо:
$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{3}{36}$, $P(\xi = 2, \eta = 0) = \frac{3}{36}$, $P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{10}{36}$,
$P(\xi = 0, \eta = 2) = \frac{4}{36}$, $P(\xi = 2, \eta = 2) = \frac{4}{36}$, $P(\xi = 1, \eta = 3) = \frac{6}{36}$,
$P(\xi = 0, \eta = 4) = \frac{2}{36}$, $P(\xi = 2, \eta = 4) = \frac{2}{36}$, $P(\xi = 1, \eta = 5) = \frac{2}{36}$.
Сума цих чисел рівняється 1, а отже, сумісний розподіл ймовірностей для випадкового вектора (ξ, η) побудовано. Подамо його у вигляді таблиці 4.

$\xi\diagdown\eta$	0	1	2	3	4	5
0	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{4}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0
1	0	$\frac{10}{36}$	0	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{2}{36}$
2	$\frac{3}{36}$	0	$\frac{4}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0

Таблиця 4

Ряди розподілу кожної компоненти отримаємо з цієї таблиці сумуванням чисел по рядках

ξ	0	1	2
	$\frac{9}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{9}{36}$

для випадкової величини ξ, і сумуванням по стовпцях для η

η	0	1	2	3	4	5
	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

. $\square$

Приклад 3. Розглянемо послідовність незалежних випробувань, з кожним з яких пов'язані попарно несумісні події $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Побудувати сумісний розподіл числа появ кожної з цих подій при n таких випробуваннях за умови, що ймовірності появ подій $A_1, A_2, \ldots, A_r$ у кожному випробуванні рівняються відповідно $p_1, p_2, \ldots, p_r$ $(\sum\limits_{k=1}^{r} p_k = 1)$.

Розв'язання. Насамперед зауважимо, що така задача була розв'язана у випадку $r = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = 1-p$. Тоді двовимірний випадковий вектор (ν_1, ν_2) фактично є одновимірним, бо коли $\nu_1 = 1$, то $\nu_2 = n - k$, а його розподіл ймовірностей дає формула Бернуллі

$$P(\nu_1 = k,\ \nu_2 = n-k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p_1^k\, p_2^{n-k}.$$

Побудуємо математичну модель, що описує послідовність незалежних випробувань у загальному випадку. Якщо $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ — множина подій, пов'язаних з кожним випробуванням, то результат n незалежних випробувань можна розглядати як вибірку об'єму n з r елементів з повторенням і упорядковану. Таким чином, простором елементарних подій, що описує таку послідовність випробувань, є множина $\Omega = \{\omega \mid \omega\ $ – розміщення з r елементів по n з повторенням$\}$, а число елементів у цій множині

$$N(\Omega) = r^n.$$

Нехай $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ — число появ відповідно подій $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Тоді $\nu_1 = k_1$, $\nu_2 = k_2$, $\ldots$, $\nu_r = k_r$ $(\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = n)$ для тих розміщень, у яких A_1 зустрічається k_1 раз, A_2 — k_2 рази, $\ldots$, A_r — k_r раз, а ймовірність такого ω, в силу незалежності випробувань і несумісності родій, рівняється

$$P(\omega) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}.$$

Число всіх ω такого типу рівняється числу перестановок з елементів $A_1, A_2, \ldots, A_r$ по n з поверненням таких, у яких A_1

присутнє k_1, A_2 — k_2, ..., A_r — k_r раз, а саме

$$\frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \ldots\ k_r!},$$

де $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = n$. Як результат маємо сумісний розподіл випадкового вектора $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r)$

$$P(\nu_1 = k_1, \nu_2 = k_2, \ldots, \nu_r = k_r) = \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \ldots\ k_r!}. \qquad (2.4.11)$$

Розподіл (2.4.11) називають *поліноміальним* розподілом (при $r = 2$ — біномним розподілом), бо (2.4.11) є елемент розкладу полінома $(p_1 + p_2 + \ldots + p_r)^n$ за степенями $p_1, p_2, \ldots, p_r$. $\square$

Теорема 2.4.1 *Дискретні випадкові величини ξ і η незалежні тоді і лише тоді, коли*

$$P(\xi = x_i,\ \eta = y_j) = P(\xi = x_i)\ P(\eta = y_j), \qquad (2.4.12)$$

де (x_i, y_j) можливі пари значень, яких можуть набирати відповідно випадкові величини ξ і η.

Доведення. Необхідність. Нехай ξ і η незалежні, тобто

$$F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x)\ F_\eta(y).$$

Тоді для кожного значення (x_i, y_j) випадкового вектора (ξ, η) маємо:

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (F_{\xi,\eta}(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - F_{\xi,\eta}(x_i + \Delta x, y_j) -$$

$$- F_{\xi,\eta}(x_i, y_j + \Delta y) - F_{\xi,\eta}(x_i, y_j)) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (F_\xi(x_i + \Delta x)\ F_\eta(y_j + \Delta y) -$$

$$- F_\xi(x_i + \Delta x)\ F_\eta(y_j) - F_\xi(x_i)\ F_\eta(y_j + \Delta y) + F_\xi(x_i)\ F_\eta(y_j)) =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (F_\xi(x_i + \Delta x) - F_\xi(x_i))\ (F_\eta(y_j + \Delta y) - F_\eta(y_j)) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (F_\xi(x_i + \Delta x) - F_\xi(x_i))\ \lim_{\Delta y \to 0} (F_\eta(y_j + \Delta y) - F_\eta(y_j)) =$$

$$= (F_\xi(x_i + 0) - F_\xi(x_i))\,(F_\eta(y_j + 0) - F_\eta(y_j)) = P(\xi = x_i) P(\eta = y_j).$$

Достатність. Нехай для всіх пар виконується рівність (2.4.11). Тоді

$F_{\xi,\eta}(x,y) = \sum\limits_{(i,j)\,:\,x_i<x,y_j<y} P(\xi{=}x_i,\eta{=}y_j) = \sum\limits_{(i,j)\,:\,x_i<x,y_j<y} P(\xi{=}x_i)P(\eta{=}y_j) =$

$= \sum\limits_{i\,:\,x_i<x} P(\xi = x_i) \sum\limits_{j\,:\,y_j<y} P(\eta = y_j) = F_\xi(x)\ F_\eta(y).$ □

У загальному випадку дискретні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні, якщо для будь-якого значення $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ має місце рівність

$P(\xi_1{=}x_1, \xi_2{=}x_2, \ldots, \xi_n{=}x_n) = P(\xi_1{=}x_1)P(\xi_2{=}x_2)\ldots P(\xi_n{=}x_n).$

Означення 2.4.4 *Двовимірна випадкова величина* (ξ, η) *називається абсолютно неперервною, якщо існує функція* $f(x,y)$*, визначена і невід'ємна на* $\mathbb{R}^2$*, така, що її функція розподілу подається у вигляді*

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv. \qquad (2.4.13)$$

Функція $f(x,y)$ називається у цьому випадку *щільністю розподілу ймовірностей* двовимірної випадкової величини (ξ, η) і позначається $f_{\xi,\eta}(x,y)$.

Нехай маємо функцію $f(x,y)$, визначену і невід'ємну на $\mathbb{R}^2$, причому вона інтегровна на $\mathbb{R}^2$ і

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1. \qquad (2.4.14)$$

Покажемо, що функція, побудована за формулою (2.4.13) є функція розподілу.

Справді, оскільки $f(x,y)$ інтегровна на $\mathbb{R}^2$, то вона і інтегровна і на будь-якому нескінченному прямокутнику

$Q_{x,y} = \{(u,v) \mid u < x,\ v < y\}$. А тому відповідність, яка кожному (x,y) відносить число

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv, \tag{2.4.15}$$

є функція $F(x,y)$ визначена на $\mathbb{R}^2$. Для інтеграла маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{x} du \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dv = \int\limits_{-\infty}^{y} dv \int\limits_{-\infty}^{x} f(u,v)du.$$

Оскільки при фіксованому y

$$\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dv$$

є невід'ємна функція змінної u, то (2.4.14) є наспадна і неперервна функція змінної x. Аналогічно відносно змінної y. Очевидно, що

$$\lim_{x\to-\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \lim_{y\to-\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = 0$$

і
$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = 1.$$

Нарешті для будь-якого прямокутника

$$Q = \{(x,y) \mid a \leqslant x < b,\ c \leqslant y < d\}$$

маємо: $\quad F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{b} \int\limits_{-\infty}^{d} f(u,v)dudv - \int\limits_{-\infty}^{a} \int\limits_{-\infty}^{d} f(u,v)dudv - \int\limits_{-\infty}^{b} \int\limits_{-\infty}^{c} f(u,v)dudv +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{a} \int\limits_{-\infty}^{c} f(u,v)dudv = \iint\limits_{Q} f(u,v)dudv \geqslant 0.$$

Отже, функція, означена за правилом (2.4.13) є функція розподілу двовимірної випадкової величини.

На підставі цього можна стверджувати, що визначена і невід'ємна на $\mathbb{R}^2$ функція $f(x, y)$, яка задовольняє умову (2.4.14), повністю визначає деяку двовимірну випадкову величину (ξ, η), причому для будь-якої області D (будь-якої борелевої множини точок площини)

$$P((\xi, \eta) \in D) = \iint\limits_D f(x, y) dx dy. \tag{2.4.16}$$

Нехай точка (x, y) є точкою неперервності функції $F_{\xi,\eta}(x, y)$, і нехай $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$. Тоді природно границю вигляду

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((\xi, \eta) \in Q_{x,y})}{\Delta x \; \Delta y},$$

де $Q_{x,y} = \{(u, v) \mid x \leqslant u < x + \Delta x, \;\; y \leqslant v < y + \Delta y\}$, назвати щільністю розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини (ξ, η) у точці (x, y). Переконаємось, що ця границя існує. Справді, за теоремою про середнє

$$\iint\limits_{Q_{x,y}} f(u, v) du dv = f(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y,$$

де $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, а тому

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} P((\xi, \eta) \in Q_{x,y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) = f(x, y).$$

З другого боку,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} P((\xi, \eta) \in Q_{x,y}) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} (F(x + \Delta x, y + \Delta y) -$$

$$- F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - \right.$$

$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x} \Bigg) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F'_x(x, y+\Delta y) - F'_x(x,y)}{\Delta y} = F''_{xy}(x,y).$$

Таким чином, у кожній точці неперервності функції $F_{\xi,\eta}(x,y)$ має місце рівність

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{\xi,\eta}(x,y) = f(x,y). \qquad (2.4.17)$$

І у зв'язку з цим природним є термін "щільність розподілу ймовірностей".

Нехай двовимірна випадкова величина (ξ,η) задана щільністю $f_{\xi,\eta}(x,y)$. Тоді її функція розподілу подається у вигляді

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)dudv,$$

а функції розподілу кожної компоненти подаються у вигляді

$$F_{\xi}(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(u,v)dudv,$$

$$F_{\eta}(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(u,v)dudv.$$

Звідси дістаємо, що у кожній точці неперервності функції $f_{\xi,\eta}(x,y)$

$$f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,v)dv, \qquad (2.4.18)$$

$$f_{\eta}(y) = F'_{\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(u,y)du, \qquad (2.4.19)$$

Приклад 4. При якому значенні параметра c, функція

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,(x+y), & \text{якщо } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}$$

є щільністю розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини (ξ, η). Побудувати функцію розподілу і щільності розподілу кожної компоненти.

Розв'язання. Параметр c знайдемо з умови (2.4.14). Маємо: $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = c\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x+y)dxdy = c\int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx =$
$= c\int\limits_0^1 (x+\frac{1}{2})dx = c\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1 = c = 1.$

Таким чином, щільністю розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини є функція

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Згідно з формулою (2.4.13) маємо:

$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)dudv =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0 \text{ або } y \leqslant 0, \\ \int\limits_0^x\int\limits_0^y (u+v)dudv, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant 1, \\ \int\limits_0^x du\int\limits_0^1 (u+v)dv, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1,\ y > 1, \\ \int\limits_0^y dv\int\limits_0^1 (u+v)du, & \text{якщо} \quad x > 1,\ 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1,\ y > 1 \end{cases} =$$

$$
= \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0 \text{ або } y \leqslant 0, \\ \frac{x^2 y}{2} + \frac{x y^2}{2}, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1,\ 0 < y \leqslant 1, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\, x, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1,\ y > 1, \\ \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\, y, & \text{якщо} \quad x > 1,\ 0 < y \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1,\ y > 1. \end{cases}
$$

А згідно з формулами (2.4.18), (2.4.19), маємо:

$$
f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,v)dv = \begin{cases} \int_0^1 (x+v)dv, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках} \end{cases} =
$$

$$
= \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}
$$

$$
f_\eta(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{якщо } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases} \qquad \square
$$

Приклад 5. Переконатись, що функція

$$
f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.
$$

$$
\left.\left. - 2\rho \, \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\},
$$

де $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $|\rho| < 1$, є щільністю розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини (ξ, η). Знайти щільності розподілу кожної компоненти.

Розв'язання. Насамперед очевидно, що $f(x,y) > 0$ для всіх $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Переконаємось, що

$$
I := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.
$$

Якщо виконати заміну $u = \dfrac{x - a_1}{\sigma_1}$, $v = \dfrac{y - a_2}{\sigma_2}$, то якобіан $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2$, а межі залишаться ті самі. Тоді

$$I = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right\} du dv = \tag{2.4.20}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - \rho^2 u^2 + (v + \rho u)^2)\right\} du dv.$$

Виконаємо ще раз заміну $t = v + \rho u$, $dt = dv$, і подамо інтеграл у вигляді

$$I = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du\ \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}} dt = \frac{2}{\pi}\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Тут ми скористались інтегралом Пуассона. Згідно з формулами (2.4.18), (2.4.19), маємо:

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\ e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}} dt$$

(тут ми скористались заміною $t = \dfrac{y - a_2}{\sigma_2} - p\ \dfrac{x - a_1}{\sigma_1}$, $dt = \dfrac{1}{\sigma_2} dy$).

Отже,

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\ e^{-\frac{(x-a_1)}{2\sigma_1^2}}.$$

Аналогічно,

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\ e^{-\frac{(y-a_2)}{2\sigma_2^2}}. \quad \square$$

Таким чином, кожна компонента має нормальний закон розподілу відповідно з параметрами a_1, σ_1 і a_2, σ_2. У зв'язку з цим функцію (2.4.20) називають двовимірним нормальним розподілом.

Теорема 2.4.2 *Неперервні випадкові величини ξ і η незалежні тоді і лише тоді, коли*

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x)\ f_\eta(y). \tag{2.4.21}$$

Доведення. Необхідність. Якщо випадкові величини ξ і η незалежні, то для будь-якого $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)\ F_\eta(y)$$

або

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du \int\limits_{-\infty}^{y} f_\eta(v)dv = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(u)f_\eta(v)dudv.$$

Така рівність можлива, коли підінтегральні функції рівні.
Достатність. Якщо виконується рівність (2.4.21), то

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_\xi(u)f_\eta(v)dudv = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du \int\limits_{-\infty}^{y} f_\eta(v)dv,$$

тобто $$F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)\ F_\eta(y). \quad \square$$

Формула (2.4.21) дає можливість будувати закон розподілу двовимірної абсолютно неперервної випадкової величини за законами розподілу окремих компонент (звичайно за умови, що вони незалежні). Для прикладу, якщо випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[a;b]$, а випадкова величина η рівномірно розподілена на відрізку $[c;d]$, причому ξ і η незалежні, то з того, що

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{якщо } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c}, & \text{якщо } c \leqslant y \leqslant d, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках,} \end{cases}$$

то $$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & \text{якщо } a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Питання для самоперевірки та вправи

1. Чому при означенні закону розподілу ймовірностей для випадкового вектора вживається термін "сумісний"?

2. Як виділяється клас дискретних двовимірних випадкових величин? Чим описується ймовірносна структура такої величини? Як пов'язані її сумісний розподіл ймовірностей з розподілами ймовірностей окремих компонент?

3. Як виділяється клас неперервних двовимірних випадкових величин? Чим описується ймовірносна структура такої величини? Як пов'язані її сумісний розподіл ймовірностей з розподілами ймовірностей окремих компонент?

4. Побудувати розподіл ймовірностей для двовимірної випадкової величини (ξ, η), де ξ — число очок, яке випадає при киданні правильного грального кубика першого разу, η — число очок, яке випадає при киданні його другого разу.

5. З урни, у якій 2 чорні, 3 білі і 5 жовтих куль, загублено дві кулі, невідомо якого кольору. Після цього з урни навгад взяли дві кулі. Побудувати сумісний розподіл для випадкового вектора (ξ, η), де ξ — число чорних, η — число білих куль у вибірці.

6. Нехай шаховий турнір між двома шахістами продовжується доти, поки один з них не виграє 12 партій. Будемо вважати, що незалежно від результатів попередніх партій

перший шахіст виграє з ймовірністю p, програє з ймовірністю q і робить нічию з ймовірністю $1-p-q$. Побудувати сумісний розподіл випадкового вектора (ξ, η), де ξ — число виграних, η — число програних партій першим гравцем в n зіграних партіях. Знайти ймовірність того, що турнір закінчиться за n партій.

7. Для кожної щільності розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини (ξ, η)

   а) $f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases}$

   б) $f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} xy\, e^{-(x+y)}, & \text{якщо } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases}$

   в) $f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}\,(x+2y), & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases}$

   г) $f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} y^2\, e^{-y(x+1)}, & \text{якщо } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases}$

   д) $f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 2\, e^{-(x+y)}, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant y,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках} \end{cases}$

   Знайти функцію розподілу $F_{\xi,\eta}(x,y)$ та щільності розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$.

8. Незалежні випадкові величини ξ і η мають показникові розподіли відповідно з параметрами 1 і 0,5. Знайти сумісний розподіл випадкового вектора (ξ, η). Обчислити ймовірність того, що (ξ, η) набере значення з прямокутника $Q = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

9. Незалежні випадкові величини ξ, η мають нормальні закони розподілу відповідно з параметрами $a_1 = a_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$. Побудувати сумісний розподіл випадкового вектора (ξ, η). Знайдіть ймовірності того, що випадковий

вектор набере значення в:

а) кільці $\{(x, y) \mid 2 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 3\}$;

б) області $\{(x, y) \mid 2 \leqslant \min(|x|, |y|),\ \max(|x|, |y|) \leqslant 3\}$;

в) області $\{(x, y) \mid 2 \leqslant |x|+|y| \leqslant 3\}$.

10. При якому значенні параметра a функція

$$f(x, y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2 y^2}$$

є щільністю розподілу випадкового вектора (ξ, η)? Знайдіть щільності розподілу кожної компоненти. З'ясуйте, чи залежні випадкові величини ξ і η.

2.5 Функції від випадкових величин

Нехай $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$ — ймовірносний простір і ξ — випадкова величина, пов'язана з ним, тобто ξ вимірна функція, визначена на Ω. Нехай числова функція φ визначена на множині значень функції $\xi(\omega)$

$$\varphi \; : \; R(\xi) \longrightarrow \mathbb{R},$$

тобто маємо складену функцію $\varphi(\xi(\omega))$, визначену на Ω. Якщо композиція функцій ξ і φ є вимірною функцією, то $\varphi(\xi(\omega))$ є випадковою величиною, яку природно вважати функцією від випадкової величини ξ.

Як приклад, нехай ξ число очок, яке випадає при киданні грального кубика, $\varphi(x) = x^2 - 7x + 6$. Композиція функцій $\xi(\omega)$ і $\varphi(x)$

$$\varphi(\xi(\omega)) = \xi^2 - 7\xi + 6$$

є функція, визначена на Ω. Перевіримо, чи буде вона вимірною.

Оскільки $R(\xi) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то множиною значень функції $\varphi(\xi(\omega))$ є множина $\{-6, -4, 0\}$. А тому $\{\omega \,|\, \varphi(\xi(\omega)) < x\} = \emptyset$, якщо $x \leqslant -6$, $\{\omega \,|\, \varphi(\xi(\omega)) < x\} = \{\omega_3, \omega_4\}$, якщо $-6 < x \leqslant -4$, $\{\omega \,|\, \varphi(\xi(\omega)) < x\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, якщо $-4 < x \leqslant 0$, $\{\omega \,|\, \varphi(\xi(\omega)) < x\} = \Omega$, якщо $x > 0$. Таким чином, для кожного $x \in \mathbb{R}$ множина тих ω, для яких $\varphi(\xi(\omega)) < x$, є подія, тобто $\eta = \xi^2 - 7\xi + 6$ випадкова величина, функція розподілу якої має вигляд

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant -6, \\ \frac{1}{3}, & \text{якщо} \quad -6 < x \leqslant -4, \\ \frac{2}{3}, & \text{якщо} \quad -4 < x \leqslant 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

Аналогічно, якщо з ймовірносним простором $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$ пов'язані випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, а функція n змінних визначена на множині можливих значень випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, то коли складена функція

$$\eta = \varphi(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n(\omega))$$

є вимірною, маємо випадкову величину, пов'язану з тим же ймовірносним простором.

Щодо того, якою має бути функція φ, щоб композиція $\varphi(\xi)$ або $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ були випадковими величинами, скажемо лише, що такий клас функцій досить широкий (більше того, практично всі ті функції, з якими Ви маєте справу, є вимірними). Тут ми лише обґрунтуємо, що результат арифметичних операцій над випадковими величинами є випадкова величина.

Теорема 2.5.1 *Якщо ξ — випадкова величина, пов'язана з ймовірносним простором $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$, то $\xi + k$, $k\xi$, де $k \in \mathbb{R}$, $|\xi|$, ξ^2, $\frac{1}{\xi}$, якщо $\xi \neq 0$, випадкові величини, пов'язані з тим же ймовірносним простором.*

Доведення. Оскільки ξ випадкова величина, то для кожного $x \in \mathbb{R}$ $\{\omega \,|\, \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{f}$. Тоді для будь-якого фіксованого k

$$\{\omega \mid \xi(\omega) + k < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < x - k\} \in \mathfrak{f}.$$

Отже, $\xi(\omega)+k$ є вимірна функція, визначена на Ω, тобто $\xi(\omega)+k$ випадкова величина.

Нехай $k > 0$. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\{\omega \mid k\,\xi(\omega) < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < \tfrac{x}{k}\} \in \mathfrak{f}.$$

Якщо ж $k < 0$, то

$$\{\omega \mid k\,\xi(\omega) < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) > \tfrac{x}{k}\} \in \mathfrak{f}.$$

Якщо ж $k = 0$, то маємо невипадкову величину, тобто вироджений випадок.

Якщо $x \leqslant 0$, то $\{\omega \mid |\xi(\omega)| < x\} = \emptyset \in \mathfrak{f}$. Якщо ж $x > 0$, то $\{\omega \mid |\xi(\omega)| < x\} = \{\omega \mid -x < \xi(\omega) < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < x\} \setminus$ $\setminus \{\omega \mid \xi(\omega) \geqslant -x\} \in \mathfrak{f}$. А це й означає, що $|\xi|$ — випадкова величина.

Аналогічно для $x \leqslant 0$ $\{\omega \mid \xi^2(\omega) < x\} = \emptyset \in \mathfrak{f}$, для $x > 0$ $\{\omega \mid \xi^2(\omega) < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < \sqrt{x}\} \in \mathfrak{f}$, тобто ξ^2 — випадкова величина.

Якщо $x = 0$, то

$$\{\omega \mid \tfrac{1}{\xi(\omega)} < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < 0\} \in \mathfrak{f}.$$

Якщо $x < 0$, то

$$\{\omega \mid \tfrac{1}{\xi(\omega)} < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < 0\} \cap \{\omega \mid \xi(\omega) > \tfrac{1}{x}\} \in \mathfrak{f}$$

як переріз двох множин з сигма-алгебри $\mathfrak{f}$. Нарешті, якщо $x > 0$, то

$$\{\omega \mid \tfrac{1}{\xi(\omega)} < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < 0\} \cup (\{\omega \mid \xi(\omega) > 0\} \cap \{\omega \mid \xi(\omega) > \tfrac{1}{x}\})$$

теж належить $\mathfrak{f}$ як переріз і об'єднання множин з $\mathfrak{f}$. Отож для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ $\{\omega \mid \frac{1}{\xi(\omega)} < x\} \in \mathfrak{f}$, тобто $\frac{1}{\xi}$ — випадкова величина. $\square$

Зауваження. Коли випадкова величина ξ може обертатись в нуль, але $P(\xi = 0) = 0$ (наприклад, для абсолютно неперервних випадкових величин), то $\frac{1}{\xi}$ є випадкова величина.

Теорема 2.5.2 *Якщо ξ і η випадкові величини, пов'язані з ймовірносним простором $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$, то $\{\omega \mid \xi(\omega) < \eta(\omega)\} \in \mathfrak{f}$, тобто той факт, що випадкова величина ξ набере значення меншого, ніж випадкова величина η, є подія.*

Доведення. Оскільки множина $\mathbb{Q}$ раціональних чисел зчисленна, то її елементи можна занумерувати, тобто виписати у вигляді послідовності (r_n). Теорема очевидно буде доведена, якщо буде показано, що

$$\{\omega \mid \xi(\omega) < \eta(\omega)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid \xi(\omega) < r_n\} \cap \{\omega \mid \eta(\omega) > r_n\},$$

бо множина, яка стоїть справа є об'єднанням зчисленної множини множин з $\mathfrak{f}$.

Нехай $\omega_0 \in \{\omega \mid \xi(\omega) < \eta(\omega)\}$. Тоді $\xi(\omega_0) < \eta(\omega_0)$, а отже, існує раціональне число r таке, що $\xi(\omega_0) < r < \eta(\omega_0)$. Це число присутнє у послідовності (r_n) під певним номером n_0. А тому можна записати, що $\xi(\omega_0) < r_{n_0} < \eta(\omega_0)$, тобто

$$\omega_0 \in \{\omega \mid \xi(\omega) < r_{n_0}\} \cap \{\omega \mid \eta(\omega) > r_{n_0}\}.$$

Звідси дістаємо, що

$$\{\omega \mid \xi(\omega) < \eta(\omega)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid \xi(\omega) < r_n\} \cap \{\omega \mid \eta(\omega) > r_n\}.$$

Якщо ж ω_0 належить множині, що стоїть справа, то ω_0 належить хоча би одній множині, що входить в об'єднання, тобто існує номер n_0 такий, що $\omega_0 \in \{\omega \mid \xi(\omega) < r_{n_0}\} \cap \{\omega \mid \eta(\omega) > r_{n_0}\}$. Звідси випливає, що $\xi(\omega_0) < r_{n_0}$ і $\eta(\omega_0) > r_{n_0}$ або $\xi(\omega_0) < \eta(\omega_0)$. □

Теорема 2.5.3 *Якщо ξ, η — випадкові величини, пов'язані з ймовірносним простором $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$, то $\xi - \eta$, $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$, $\dfrac{\xi}{\eta}$ (η дискретна або абсолютно неперервна випадкова величина) є випадкові величини, пов'язані з цим же простором.*

Доведення. Оскільки для кожного $x \in \mathbb{R}$ $\eta + x$ є випадкова величина, то згідно з теоремою 2.5.2 $\{\omega \mid \xi(\omega) < \eta(\omega) + x\} \in \mathfrak{f}$. Залишилось врахувати, що

$$\{\omega \mid \xi(\omega) - \eta(\omega) < x\} = \{\omega \mid \xi(\omega) < \eta(\omega) + x\}.$$

А це й означає, що $\xi - \eta$ випадкова величина.

Скориставшись поданням

$$\xi + \eta = \xi - (-\eta), \quad \xi \cdot \eta = \frac{1}{4}\left((\xi + \eta)^2 - (\xi - \eta)^2\right), \quad \frac{\xi}{\eta} = \xi \cdot \frac{1}{\eta}$$

і теоремою 2.5.1, маємо, що $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$, $\dfrac{\xi}{\eta}$ — випадкові величини. □

Глобальна задача. Нехай маємо m-вимірну випадкову величину $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ із заданим сумісним розподілом ймовірностей. За деяким правилом побудовані випадкові величини $\eta_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $\eta_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, $\ldots$, $\eta_n = \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. Необхідно побудувати сумісний закон розподілу ймовірностей для n-вимірної випадкової величини $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Через відсутність необхідного інструментарію (інтеграл Лебега-Стілт'єса) ми не розглядаємо розв'язання цієї задачі у загальній постановці. Обмежимось випадками, коли необхідно знайти закон розподілу ймовірностей випадкової величини $\eta = \varphi(\xi)$ і закон розподілу випадкової величини $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$, зокрема випадкових величин $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$, $\dfrac{\xi}{\eta}$.

Якщо випадкова величина ξ дискретна з рядом розподілу ймовірностей

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
$P(\xi = x_n)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

,

то для випадкової величини $\eta = \varphi(\xi)$ значеннями будуть числа $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\ldots$, $\varphi(x_n)$, $\ldots$, причому

$$P(\eta = \varphi(x_n)) = P(\xi = x_n) = p_n.$$

Єдине, що необхідно зробити, це просумувати ймовірності тих значень x_n, для яких функція φ приймає рівні значення.

Приклад 1. Нехай випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p. Побудувати ряд розподілу ймовірностей для випадкової величини $\eta = \sin \dfrac{\pi\xi}{2}$.

Розв'язання. За умовою можливими значеннями випадкової величини ξ є числа $0, 1, 2, \ldots$, причому $P(\xi = n) = pq^n$. А тому випадкова величина може набирати тільки три значення $-1, 0, 1$ з ймовірностями

$$P(\eta = -1) = P(\xi = 3) + P(\xi = 7) + \cdots + P(\xi = 4k + 3) + \cdots =$$
$$= pq^3 + pq^7 + \cdots + pq^{4k+3} + \cdots = pq^3(1 + q^4 + \cdots + q^{4k} + \cdots) = \frac{pq^3}{1 - q^4},$$
$$P(\eta = 0) = P(\xi = 0) + P(\xi = 2) + P(\xi = 4) + \cdots + P(\xi = 2k) + \cdots =$$
$$= p + pq^2 + pq^4 + \cdots + pq^{2k} + \cdots = p\,(1 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2k} + \cdots) = \frac{p}{1 - q^2},$$
$$P(\eta = 1) = P(\xi = 1) + P(\xi = 5) + \cdots + P(\xi = 4k + 1) + \cdots =$$
$$= pq + pq^5 + \cdots + pq^{4k+1} + \cdots = pq\,(1 + q^4 + \cdots + q^{4k} + \cdots) = \frac{pq}{1 - q^4}.$$

Таким чином, ряд розподілу ймовірностей для випадкової величини $\eta = \sin \dfrac{\pi\xi}{2}$ має вигляд

$$\begin{array}{c|c|c|c} \eta & -1 & 0 & 1 \\ \hline & \dfrac{pq^3}{1-q^4} & \dfrac{p}{1-q^2} & \dfrac{pq}{1-q^4} \end{array} \quad . \qquad \square$$

Приклад 2. З урни, у якій 2 чорні, 3 білі і 5 жовтих куль, навгад взято 2 кулі. Нехай ξ_1 — число чорних, ξ_2 — число білих куль у вибірці об'єму 2. Побудувати ряд розподілу ймовірностей випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1\xi_2$, сумісний розподіл для випадкового вектора (η_1, η_2).

Розв'язання. Сумісний розподіл випадкового вектора (ξ_1, ξ_2) побудовано у прикладі 1 попереднього параграфу, а саме

$\xi_1 \diagdown \xi_2$	0	1	2
0	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{3}{45}$
1	$\frac{10}{45}$	$\frac{6}{45}$	0
2	$\frac{1}{45}$	0	0

Тоді для випадкової величини $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ маємо:

$P(\eta_1 = 0) = P(\xi_1 + \xi_2 = 0) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) = \frac{10}{45}$,

$P(\eta_1 = 1) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \text{ або } \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) =$

$= P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) + P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = \frac{15}{45} + \frac{10}{45} = \frac{25}{45}$,

$P(\eta_1 = 2) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 2 \text{ або } \xi_1 = 1, \xi_2 = 1 \text{ або } \xi_1 = 2, \xi_2 = 0) =$

$= P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 2) + P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) +$

$+ P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 0) = \frac{3}{45} + \frac{6}{45} + \frac{1}{45} = \frac{10}{45}$.

Отже, ряд розподілу ймовірностей випадкової величини η_1 має вигляд

$$\begin{array}{c|c|c|c} \eta_1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \quad .$$

Для випадкової величини $\eta_2 = \xi_1 \xi_2$ маємо.

$P(\eta_2 = 0) = P(\xi_1 = 0 \text{ або } \xi_2 = 0) = P(\xi_1 = 0) + P(\xi_2 = 0) -$

$- P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) = \frac{28}{45} + \frac{21}{45} - \frac{10}{45} = \frac{39}{45},$

$P(\eta_2 = 1) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \frac{6}{45}.$

Отже, ряд розподілу ймовірностей випадкової величини η_2 має вигляд

η_2	0	1
	$\frac{13}{15}$	$\frac{2}{15}$

.

Побудуємо сумісний розподіл ймовірностей для випадкового вектора (η_1, η_2). Маємо:

$P(\eta_1 = 0, \eta_2 = 0) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) = \frac{10}{45},$

$P(\eta_1 = 1, \eta_2 = 0) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \text{ або } \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) =$

$= P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) + P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = \frac{15}{45} + \frac{10}{45} = \frac{25}{45},$

$P(\eta_1 = 2, \eta_2 = 0) = P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 2 \text{ або } \xi_1 = 2, \xi_2 = 0) =$

$= P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 2) + P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 0) = \frac{3}{45} + \frac{1}{45} = \frac{4}{45},$

$P(\eta_1 = 2, \eta_2 = 1) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \frac{6}{45}.$

Отже, сумісний розподіл ймовірностей випадкового вектора має вигляд

$\eta_1 \diagdown \eta_2$	0	1
0	$\frac{10}{45}$	0
1	$\frac{25}{45}$	0
2	$\frac{4}{45}$	$\frac{6}{45}$

.

Очевидно, що випадкові величини η_1 і η_2 залежні. $\square$

Приклад 3. Нехай незалежні випадкові величини ξ_1, ξ_2 мають розподіл Пуассона відповідно з параметрами λ_1 і λ_2. Побудувати розподіл суми цих випадкових величин.

Розв'язання. Згідно з умовою

$$P(\xi_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k\,!}\, e^{-\lambda_1}, \; P(\xi_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k\,!}\, e^{-\lambda_2}$$

для $k=0,1,2,\ldots$. А оскільки ξ_1 і ξ_2 незалежні, то їх сумісний розподіл має вигляд

$$P(\xi_1=k,\ \xi_2=l)=\frac{\lambda_1^k\,\lambda_2^k}{k\,!\,l\,!}\ e^{-\lambda_1-\lambda_2}$$

Тоді для випадкової величини $\eta=\xi_1+\xi_2$ маємо:

$$P(\eta=0)=P(\xi_1=0,\xi_2=0)=e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},$$

$$P(\eta=1)=P(\xi_1=1,\xi_2=0 \text{ або } \xi_1=0,\xi_2=1)=$$

$$=P(\xi_1=1,\xi_2=0)+P(\xi_1=0,\xi_2=1)=$$

$$=\frac{\lambda_1}{1\,!}\ e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2}{1\,!}\ e^{-\lambda_2}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{1\,!}\ e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},$$

$$P(\eta=2)=P(\xi_1=2,\xi_2=0 \text{ або } \xi_1=1,\xi_2=1 \text{ або } \xi_1=0,\xi_2=2)=$$

$$=\frac{\lambda_1^2}{2\,!}\ e^{-\lambda_1}\cdot e^{-\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{1\,!}\ e^{-\lambda_1}\ \frac{\lambda_2}{1\,!}\ e^{-\lambda_2}+e^{-\lambda_1}\ \frac{\lambda_2^2}{2\,!}\ e^{-\lambda_2}=$$

$$=\frac{1}{2\,!}\ e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1^2+2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{2\,!},\quad\ldots,$$

$$P(\eta=n)=P(\xi_1=n,\xi_2=0 \text{ або } \xi_1=n-1,\xi_2=1,\ldots,\xi_1=0,\xi_2=n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P(\xi_1=n-k,\xi+2=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^{n-k}}{(n-k)!}\,e^{-\lambda_1}\,\frac{\lambda_2^k}{k\,!}\,e^{-\lambda_2}=$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,\frac{1}{n\,!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n\,!}{(n-k)!\,k\,!}\,\lambda_1^{n-k}\cdot\lambda_2^k=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n\,!}\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Висновок. Якщо незалежні випадкові величини мають розподіли Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно, то їх сума має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1+\lambda_2$. $\square$

Нехай випадкові величини ξ_1,ξ_2 незалежні і мають біномний розподіл з параметрами m,p і n,p відповідно. Тоді

$$P(\xi_1+\xi_2=k)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi_1=i,\xi_2=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(\xi_1=i)\,P(\xi_2=k-i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_m^i\,p^iq^{m-i}C_n^{k-i}p^{k-i}q^{n-(k-i)}=p^kq^{m+n-k}\sum_{i=0}^{k}C_m^iC_n^{k-i}.$$

Щоб знайти останню суму, скористаємось тотожністю

$(1 + x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ і біномом Ньютона. Маємо:

$$\sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k = \sum_{i=0}^{m} C_m^i\, x^i \sum_{j=0}^{n} C_n^j\, x^j.$$

Прирівняємо коефіцієнти при x^k. Зліва це C_{m+n}^k, а справа $C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \ldots + C_m^{k-1} C_n^0$. Отже,

$$P(\xi_1 + \xi_2 = k) = C_{m+n}^k\, p^k q^{m+n-k},$$

тобто сума незалежних випадкових величин, кожна з яких має біномний розподіл з параметрами m, p і n, p, має біномний закон розподілу з параметрами p і $m+n$.

Нехай випадкова величина ξ має щільність розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$, причому $f_\xi(x) \neq 0$ на інтервалі $(a;b)$ (інтервал може мати одну або обидві межі нескінченними). Нехай $\eta = \varphi(\xi)$, причому функція φ зростає на інтервалі $(a;b)$. Тоді функція розподілу випадкової величини η так подається через функцію розподілу випадкової величини ξ

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\varphi(\xi) < x) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant \varphi(a), \\ P(\xi < \varphi^{-1}(x)), & \text{якщо } \varphi(a) < x \leqslant \varphi(b), \\ 1, & \text{якщо } x > \varphi(b) \end{cases}$$

у випадку, коли $\lim\limits_{x \to a+0} \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x)$ скінченні;

$$F_\eta(x) = \begin{cases} F_\xi(\varphi^{-1}(x)), & \text{якщо } x \leqslant \varphi(b), \\ 1, & \text{якщо } x > \varphi(b) \end{cases}$$

у випадку, коли $\lim\limits_{x \to a+0} \varphi(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x)$ скінченна;

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant \varphi(a) \\ F_\xi(\varphi^{-1}(x)), & \text{якщо } x > \varphi(a) \end{cases}$$

у випадку, коли $\lim\limits_{x \to a+0} \varphi(x)$ — скінченна, $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x) = +\infty$;

$$F_\eta(x) = F_\xi(\varphi^{-1}(x))$$

у випадку, коли $\lim\limits_{x \to a+0} \varphi(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to b-0} \varphi(x) = +\infty$.

Якщо продиференціювати $F_\eta(x)$, то отримаємо щільність розподілу ймовірностей випадкової величини η

$$f_\eta(x) = f_\xi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)'. \tag{2.5.1}$$

У тому разі, коли функція φ спадає на інтервалі $(a;b)$, то

$$f_\eta(x) = -f_\xi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\left(\varphi^{-1}(x)\right)'. \tag{2.5.2}$$

Нагадаємо, що $\varphi^{-1}(x)$ є функція обернена до функції $\varphi(x)$.

Як приклад, нехай випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$, то для випадкової величини $\eta = \xi^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ маємо: функція $y = x^\alpha$ зростає на інтервалі $(0;1)$ при $\alpha > 0$, причому $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to 1-0} x^\alpha = 1$ і $\varphi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ на інтервалі $(0;1)$, а тому за формулою (2.5.1)

$$f_\eta = f_\xi\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)' = \frac{1}{\alpha}\, x^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

на інтервалі $(0;1)$. При $\alpha < 0$ функція $y = x^\alpha$ спадає на інтервалі $(0;1)$, причому $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} x^\alpha = 1$, а тому за формулою (2.5.2) $\quad f_\eta = -f_\xi\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)' = -\dfrac{1}{\alpha}\, x^{\frac{1}{\alpha}-1}$
на інтервалі $(1;+\infty)$.

Побудові функції розподілу випадкової величини $\eta = \varphi(\xi)$, де випадкова величина ξ має щільність розподілу $f_\xi(x)$ ($f_\xi(x)>0$ на інтервалі $(a;b)$), а функція $y = \varphi(x)$ визначена на цьому інтервалі (Рис.15), причому $m = \inf\limits_{a<x<b}\varphi(x)$, $M = \sup\limits_{a<x<b}\varphi(x)$.

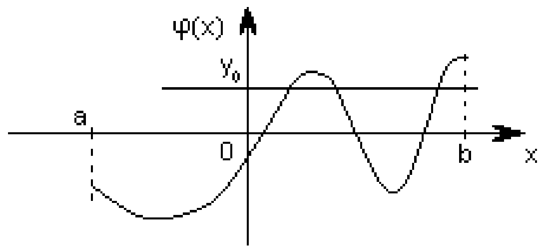


Рис.15

Тоді $P(\eta < y_0)$ рівняється ймовірності події, яка полягає у тому, що точка кривої з координатами $(\xi, \varphi(\xi))$ буде лежати нижче прямої $y = y_0$. А така ймовірність рівняється

$$P(\eta < y_0) = \sum_k \int\limits_{\Delta_{y_0}^{(k)}} f_\xi(x)\,dx,$$

де $\Delta_{y_0}^{(k)}$ — ті відрізки на осі Ox, на яких функція $\varphi(x)$ приймає значення, що не перевищує y_0, $m < y_0 < M$. Отже,

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant m, \\ \sum\limits_k \int\limits_{\Delta_{y_0}^{(k)}} f_\xi(x)\,dx, & \text{якщо} \quad m < x \leqslant M, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > M. \end{cases}$$

Приклад 4. Рівнобедренний трикутник утворюється одиничним вектором у напрямку осі абсцис і одиничним вектором, взятому у довільному напрямку. Побудувати функцію розподілу довжини третьої сторони.

Розв'язання. Нехай ξ — кут, який утворює вектор, взятий у довільному напрямку, з фіксованим вектором (Рис.16).

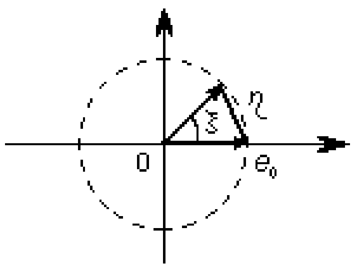


Рис.16

Тоді довжина третьої сторони рівнобедренного трикутника є випадкова величина $\eta = 2\sin\dfrac{|\xi|}{2}$, де ξ — випадкова величина рівномірно розподілена на відрізку $[-\pi; \pi]$, тобто

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \pi \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Функція $y = 2\sin\dfrac{|x|}{2}$ визначена на відрізку $[-\pi;\pi]$, причому $m = 0$, $M = 2$ (Рис.17).

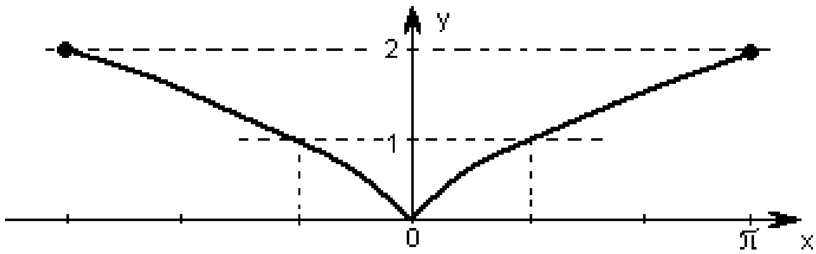


Рис.17

Тоді для фіксованого y $(0 < y \leqslant 2)$ крива лежить під прямою на інтервалі $(-2\arcsin\frac{y}{2}; 2\arcsin\frac{y}{2})$, тобто випадкова величина $\eta = 2\sin\frac{|\xi|}{2}$ набирає значення $< y$ тоді, коли випадкова величина ξ набере значення з інтервалу $(-2\arcsin\frac{y}{2}; 2\arcsin\frac{y}{2})$. Остання ймовірність рівняється

$$\int\limits_{-2\arcsin\frac{y}{2}}^{2\arcsin\frac{y}{2}} \frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\,\arcsin\frac{y}{2}.$$

Таким чином,

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad y \leqslant 0, \\ \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{y}{2}, & \text{якщо} \quad 0 < y \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad y > 2. \end{cases} \qquad \square$$

Нехай маємо двовимірну випадкову величину (ξ_1, ξ_2) з сумісною щільністю розподілу ймовірностей $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$, і нехай $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Знайдемо закон розподілу випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Нехай $G_z = \{(x, y) \mid x + y < z\}$, де $z \in \mathbb{R}$ (Рис.18).

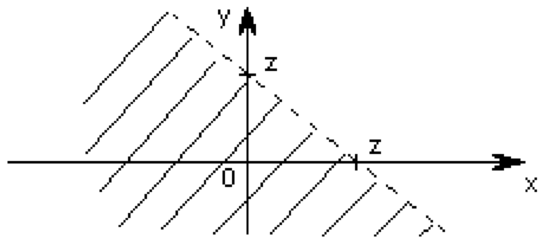


Рис.18

Тоді ймовірність того, що випадкова величина η набере значення $< z$, рівняється ймовірності того, що випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) набере значення з області G_z. Згідно з (2.4.16) остання ймовірність рівняється

$$P((\xi_1, \xi_2) \in G_z) = \iint\limits_{G_z} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)\, dxdy.$$

Отже, для побудови функції розподілу суми випадкових величин ξ_1 і ξ_2 маємо формулу

$$F_\eta(z) = \iint\limits_{G_z} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)\, dxdy. \tag{2.5.3}$$

У подвійному інтегралі (2.5.3) перейдемо до повторного (внутрішнє інтегрування за змінною y, а зовнішнє за змінною x) і у повторному інтегралі

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)\, dydx$$

виконаємо заміну $y = t - x$. Тоді $dy = dt$, а межі у внутрішньому інтегралі нижня $-\infty$, а верхня z. Отже,

$$F_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z} f_{\xi_1,\xi_2}(x, t - x)\, dt \right) dx$$

або, змінивши порядок інтегрування, маємо:

$$F_\eta(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x, t - x)\, dx \right) dt. \qquad (2.5.4)$$

Функція розподілу випадкової величини η подається як інтеграл із змінною верхньою межею від невід'ємної функції

$$f_\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x, t - x)\, dx. \qquad (2.5.5)$$

Якраз функція (2.5.5) і є щільністю розподілу ймовірностей для випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

У випадку, коли випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні, тобто

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y),$$

то формула (2.5.5) набере вигляду

$$f_\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x)\, dx. \qquad (2.5.6)$$

Зауваження. У подвійному інтегралі (2.5.3) перехід до повторного можна здійснити, узявши внутрішній інтеграл за змінною x, а зовнішній за змінною y. Тоді від (2.5.3) ми прийдемо до ще одного подання функції розподілу випадкової величини η

$$F_\eta(z) = \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(t - y, y)\, dy \right) dt \qquad (2.5.7)$$

та її щільності розподілу ймовірностей

$$f_\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(t-y, y)\, dy. \tag{2.5.8}$$

У випадку незалежності випадкових величин ξ_1 і ξ_2

$$f_\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(t-y) f_{\xi_2}(y)\, dy. \tag{2.5.9}$$

Зазначимо, що побудова функції за правилом (2.5.6) або (2.5.9) називається *згорткою* функцій $f_{\xi_1}(x)$ і $f_{\xi_2}(x)$.

Приклад 5. Побудувати щільність розподілу ймовірностей суми незалежних випадкових величин, кожна з яких рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Тут незалежні випадкові величини ξ_1, ξ_2 мають щільності розподілу ймовірностей

$$f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \\ 1, & \text{якщо} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Скориставшись формулами (2.5.6) або (2.5.9), для випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$ маємо:

$$f_\eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x-y) f_{\xi_2}(y)\, dy = \int\limits_{0}^{1} f_{\xi_1}(x-y)\, dy.$$

Очевидно, що для змінної y мають виконуватись нерівності $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x-y \leqslant 1$ або $x-1 \leqslant y \leqslant x$. Якщо $0 < x \leqslant 1$, то $f_\xi(x-y) = 1$ на відрізку $[0;\ x]$. Якщо ж $1 < x \leqslant 2$, то $f_\xi(x-y) = 1$ на відрізку $[1-x;\ 1]$. Таким чином,

$$f_\eta(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x<0,\\ \int\limits_0^x dy, & \text{якщо } 0\leqslant x<1,\\ \int\limits_{x-1}^1 dy, & \text{якщо } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{якщо } x>2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x<0,\\ x, & \text{якщо } 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & \text{якщо } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{якщо } x>2. \end{cases}$$

Цей результат можна отримати, скориставшись геометричним означенням ймовірності. Розглянемо більш загальний випадок і будемо вважати, що незалежні випадкові величини ξ_1, ξ_2 рівномірно розподілені на відрізку $[a;b]$. Тоді випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) можна розглядати як випадкову точку, що з'являється у квадраті $Q = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant b\}$, причому будемо вважати, що ймовірність того, що випадкова точка (ξ_1, ξ_2) з'явиться у деякій підобласті $G \subset Q$, рівняється площі цієї підобласті поділеній на площу квадрата. Нехай $G_z = \{(x,y) \mid (x,y) \in Q, x+y < z\}$. Тоді (Рис.19) $G_z = \emptyset$, якщо $z \leqslant 2a$, G_z — трикутник AEF, якщо $2a < z \leqslant a+b$, G_z — п'ятикутник $ABMND$, якщо $a+b < z \leqslant 2b$, $G_z = Q$, якщо $z > 2b$. Таким чином, якщо враховувати, що $S_{AEF} = \frac{1}{2}(z-2a)^2$, $S_{ABMND} = (b-a)^2 - \frac{1}{2}(2b-z)^2$, то, скориставшись геометричним означенням ймовірності, маємо:

$$P((\xi_1,\xi_2)\in G_z) = \frac{\text{пл.}\, G_z}{(b-a)^2} = P(\xi_1+\xi_2<z).$$

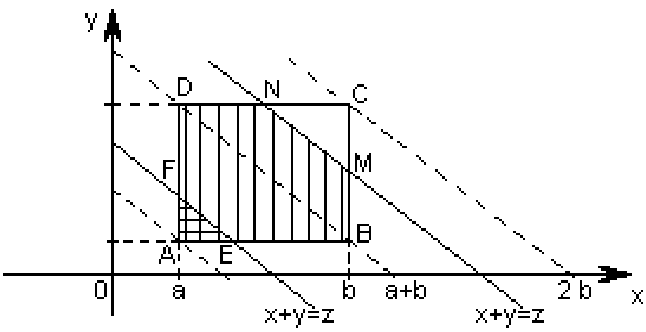


Рис.19

Звідси

$$F_\eta(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z \leqslant 2a, \\ \frac{(z-2a)^2}{2\,(b-a)^2}, & \text{якщо} \quad 2a < z \leqslant a+b, \\ 1 - \frac{(2b-z)^2}{2\,(b-a)^2}, & \text{якщо} \quad a+b < z \leqslant 2b, \\ 1, & \text{якщо} \quad 2b < z. \end{cases}$$

Продиференціювавши $F_\eta(z)$ по z і поклавши $a = 0$, $b = 1$, отримаємо попередній результат.

Приклад 6. Побудувати щільність розподілу ймовірностей суми незалежних випадкових величин, кожна з яких має показниковий розподіл з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно.

Розв'язання. За умовою щільностями розподілу ймовірностей випадкових величин ξ_1, ξ_2 є функції

$$f_{\xi_1}(x) = f_{\xi_2}(x) = 0 \qquad \text{для} \quad x < 0$$

і
$$f_{\xi_1} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, \ f_{\xi_2} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} \ \text{для} \quad x \geqslant 0.$$

А оскільки випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні, то сумісною щільністю розподілу ймовірностей випадкового вектора (ξ_1, ξ_2) є функція

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} \lambda_1\lambda_2\, e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}, & \text{якщо } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді для випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$ функція розподілу подається у вигляді

$$F_\eta(z) = \iint\limits_{x+y<z} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\, dxdy.$$

Цей інтеграл рівняється нулю, якщо $z \leqslant 0$, і набирає вигляду

$$\iint\limits_D \lambda_1\lambda_2\, e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 y}\, dxdy, \quad \text{де } D = \{(x,y) \,|\, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y < z\}.$$

Перейшовши до повторного, дістанемо

$$\int_0^z \int_0^{z-x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dxdy = \int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \left(- e^{\lambda_2 y} \Big|_0^{z-x} \right) dx =$$

$$= \lambda_1 \int_0^z \left(e^{-\lambda_1 x} - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\, x} e^{-\lambda_2 z} \right) dx = 1 - e^{-\lambda_1 z} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\, e^{-\lambda_2 z} \times$$

$$\times \left(1 - e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)\, z} \right) = 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\, e^{-\lambda_1 z} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\, e^{-\lambda_2 z},$$

якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Якщо ж $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то цей інтеграл рівняється

$$1 - e^{-\lambda z} - \lambda z\, e^{-\lambda z}.$$

Таким чином, маємо у випадку, коли $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$f_\eta(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z < 0, \\ \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{-\lambda_2 z} - e^{-\lambda_1 z} \right), & \text{якщо} \quad z \geqslant 0, \end{cases}$$

а коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$f_\eta(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z < 0, \\ \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & \text{якщо} \quad z \geqslant 0. \quad \square \end{cases}$$

Приклад 7. Побудувати щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\eta = \xi_1 + \xi_2$, якщо двовимірна випадкова величина (ξ_1, ξ_2) має нормальну сумісну щільність розподілу ймовірностей з параметрами a_1, a_2, σ_1, σ_2, ρ відповідно.

Розв'язання. За умовою двовимірна випадкова величина (ξ_1, ξ_2) має нормальний закон розподілу, тобто її сумісна щільність має вигляд

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\,(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\,\rho\, \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2} \right) \right\}.$$

Скориставшись формулою (2.5.5), маємо

$$f_\eta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x, z-x)\, dx = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2\,(1-\rho^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\,\rho\,\frac{(x-a_1)(z-x-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(z-x-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} dx.$$

Проведемо заміну $u = x - a_1$ і, крім того, позначимо $v = z - a_1 - a_2$ (звертаємо увагу на те, що v не залежить від x). Тоді $du = dx$, межі не змінюються, і інтеграл запишеться у вигляді

$$f_\eta(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2\,(1-\rho^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2\,\rho\,\frac{u(v-u)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(v-u)^2}{\sigma_2^2} \right) \right\} du.$$

Оскільки

$$\frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2\,\rho\,\frac{u(v-u)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(v-u)^2}{\sigma_2^2} = \frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2\,\rho\,\frac{uv}{\sigma_1\sigma_2} + 2\,\rho\,\frac{u^2}{\sigma_1\sigma_2} +$$

$$+ \frac{1}{\sigma_2^2}(v^2 - 2uv + u^2) = u^2\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{2\,\rho}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) - 2\,uv\left(\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) + \frac{v^2}{\sigma_2^2} = u^2\,\frac{\sigma_1^2 + 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} - 2\,uv\,\frac{\sigma_1 + \rho\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2^2} + \frac{v^2}{\sigma_2^2} =$$

$$= \left(u\,\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{v}{\sigma_2}\,\frac{\sigma_1 + \rho\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}} \right)^2 + \frac{v^2}{\sigma_2^2} -$$

$$- \frac{(\sigma_1 + \rho\sigma_2)^2\, v^2}{\sigma_2^2\,(\sigma_1^2 + 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} = (\text{виділили повний квадрат}) =$$

$$= \left(u\,\frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{v}{\sigma_2}\,\frac{\sigma_1 + \rho\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}} \right)^2 +$$

$$= \frac{v^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2},$$ то, виконавши в інтегралі заміну

$$t = \left(u \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{v}{\sigma_2} \frac{\sigma_1 + \rho\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

$$du = \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}\, dt,$$ дістанемо

$$f_\eta(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{v^2}{2(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}}\, e^{-\frac{v^2}{2(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Врахувавши, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

і $v = z - a_1 - a_2$, остаточно дістаємо

$$f_\eta(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\, e^{-\frac{(z-a_1-a_2)^2}{2(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)}},$$

тобто випадкова величина η має нормальний закон розподілу, але з параметрами $a_1 + a_2$ і $\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$.

Зауважимо, що коли ξ_1 і ξ_2 незалежні, то $\rho = 0$ і щільність розподілу має вигляд

$$f_\eta(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\, e^{-\frac{(z-a_1-a_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}. \quad \square$$

Приклад 8. Побудувати щільність розподілу ймовірностей добутку незалежних випадкових величин, кожна з яких рівномірно розподілена на відрізку $[0; a]$.

Розв'язання. Нехай $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$, де ξ_1, ξ_2 — незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $[0; a]$. Тоді сумісною щільністю випадкового вектора (ξ_1, ξ_2) є функція

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Очевидно, що випадкова величина $\eta = \xi_1 \xi_2$ може набирати значень з відрізка $[0; a^2]$. А її функція розподілу буде мати вигляд

$$F_\eta(z) = \iint\limits_{xy<z} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dxdy = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z \leqslant 0, \\ \iint\limits_{xy<z} \frac{1}{a^2}\,dxdy, & \text{якщо } 0 < z \leqslant a^2, \\ 1, & \text{якщо } z > a^2. \end{cases}$$

Врахувавши, що областю інтегрування є фігура, зображена на Рис.20, то

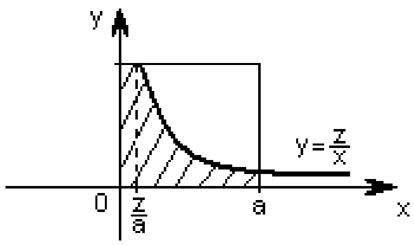


Рис.20

$\iint\limits_{xy<z} dxdy$ рівняється площі заштрихованої фігури, тобто

$$\iint\limits_{xy<z} dxdy = a \cdot \frac{z}{a} + \int\limits_{\frac{z}{a}}^{a} \frac{z}{x}\,dx = z + z\ln\frac{a^2}{z}.$$

Отже, $$F_\eta(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } z \leqslant 0, \\ \frac{1}{a^2}\left(z + z\ln\frac{a^2}{z}\right), & \text{якщо } 0 < z \leqslant a^2, \\ 1, & \text{якщо } z > a^2. \end{cases}$$

Звідси $$f_\eta(z) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}\ln\frac{a^2}{z}, & \text{якщо } 0 < z < a^2, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$ □

Зауваження. У загальному випадку щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\eta = \xi_1\xi_2$ обчислюється за формулою

$$f_\eta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} f_{\xi_1,\xi_2}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x} f_{\xi_1,\xi_2}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx, \quad (2.5.10)$$

де $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$ — сумісна щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (ξ_1, ξ_2).

Нехай випадкова величина η є часткою від ділення випадкової величини ξ_1 на випадкову величину ξ_2. Знайдемо функцію та щільність розподілу випадкової величини $\eta = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$.

Якщо $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$ — сумісна щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (ξ_1, ξ_2), то

$$F_\eta(z) = P(\eta < z) = P\left(\tfrac{\xi_1}{\xi_2} < z\right) = \iint\limits_{\frac{x}{y}<z} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\, dxdy.$$

Область інтегрування має вигляд (заштрихована фігура на Рис.21 для $z > 0$ і Рис.22 для $z < 0$).

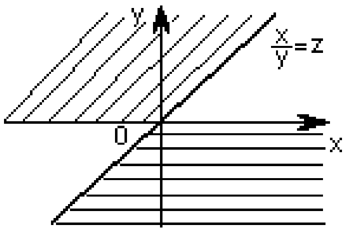


Рис.21

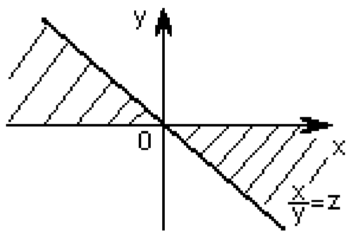


Рис.22

В обох випадках маємо:

$$F_\eta(z) = \int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{zy} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\, dx\right)dy + \int_{-\infty}^{0}\left(\int_{zy}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\, dx\right)dy. \quad (2.5.11)$$

Якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, то

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = f_{\xi_1}(x)\, f_{\xi_2}(y),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{zy} f_{\xi_1}(x)\,dx = F_{\xi_1}(zy), \quad \int\limits_{zy}^{+\infty} f_{\xi_1}(x)\,dx = 1 - F_{\xi_1}(zy),$$

і формула (2.5.11) запишеться у вигляді

$$F_\eta(z) = \int\limits_0^{+\infty} F_{\xi_1}(zy) f_{\xi_2}(y)\,dy + \int\limits_{-\infty}^{0} (1 - F_{\xi_1}(zy))\, f_{\xi_2}(y)\,dy,$$

а щільність розподілу ймовірностей подається у вигляді

$$f_\eta(z) = \int\limits_0^{+\infty} y\, f_{\xi_1}(zy) f_{\xi_2}(y)\,dy - \int\limits_{-\infty}^{0} y\, f_{\xi_1}(zy) f_{\xi_2}(y)\,dy. \qquad (2.5.12)$$

Приклад 9. Нехай незалежні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 мають нормальні закони розподілу відповідно з параметрами $0, \sigma_1$ і $0, \sigma_2$. Побудувати щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\eta = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$.

Розв'язання. За умовою

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}, \quad f_{\xi_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Тоді за формулою (2.5.12)

$$f_\eta(z) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\, e^{-\frac{z^2 y^2}{2\sigma_1^2}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\,dy -$$

$$- \int_{-\infty}^{0} \frac{y}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\, e^{-\frac{z^2y^2}{2\sigma_1^2}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\, dy.$$

Оскільки підінтегральна функція парна, то

$$- \int_{-\infty}^{0} \frac{y}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-y^2\left(\frac{z^2}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)}\, dy = \int_{0}^{+\infty} \frac{y}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-y^2\left(\frac{z^2}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)}\, dy.$$

А тому

$$f_\eta(z) = \frac{2}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{0}^{+\infty} y\, e^{-y^2\, \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2 z^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}\, dy.$$

Виконаємо заміну $t = y^2\, \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2z^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}$. Тоді межі залишаться ті ж, $dt = \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2z^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\, dy$, і

$$f_\eta(z) = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2}\, \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2z^2} \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2z^2\right)}. \quad \square$$

Зазначимо, що на практиці досить часто виникає потреба у знаходженні закону розподілу функцій від випадкових величин. Так, для прикладу, при розрахунку надійності функціонування системи, що складається з двох елементів, які з'єднані паралельно (дублювання двох джерел живлення, двох двигунів тощо), виходять з того, що час функціонування кожного елемента є випадкова величина. Тоді час функціонування системи є випадкова величина $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$, де ξ_1, ξ_2 — час функціонування кожного з елементів. Якщо припустити, що випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні і мають показникові розподіли з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно, то надійність такої системи обраховується так

$$P(\eta > t) = 1 - P(\eta < t) = 1 - P(\max(\xi_1, \xi_2) < t) =$$
$$= 1 - P(\xi_1 < t, \xi_2 < t) = 1 - (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}).$$
Якщо ж елементи з'єднані послідовно, то час функціонування системи є випадкова величина $\eta = \min(\xi_1, \xi_2)$, і за попередніх умов надійність такої системи обраховується так
$$P(\eta > t) = P(\min(\xi_1, \xi_2) > t) = P(\xi_1 > t, \xi_2 > t) =$$
$$= P(\xi_1 > t)P(\xi_2 > t) = e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\,t}.$$

Знання сумісного закону розподілу ймовірностей випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$. а у випадку їх незалежності знання законів розподілу ймовірностей кожної компоненти, дозволяють розв'язувати задачі, пов'язані з ймовірностями того, що випадкові величини знаходяться у певному відношенні (необов'язково функціональному). Як приклад, знайдемо ймовірність того, що випадкова величина ξ_1 набере значення меншого, ніж значення, якого набере випадкова величина ξ_2 за умови, що сумісна щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (ξ_1, ξ_2) є функція
$$f_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = \begin{cases} y^2 e^{-y\,(x+1)}, & \text{якщо } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0, & \text{в усіх інших випадках.} \end{cases}$$
Очевидно, що подія $\xi_1 < \xi_2$ має місце тоді і тільки тоді, коли випадкова точка попаде в область $G = \{(x, y) \mid x < y\}$. Тоді шукана ймовірність рівняється
$$P(\xi_1 < \xi_2) = \iint\limits_{x<y} y^2 e^{-y\,(x+1)} dxdy = \int\limits_0^{+\infty} y^2 e^{-y} \left(\int\limits_0^{y} e^{-yx} dx \right) dy =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} y\, e^{-y} (-e^{-yx}|_0^y)\, dy = \int\limits_0^{+\infty} y\, e^{-y} \left(1 - e^{-y^2}\right) dy = 1 - \int\limits_0^{+\infty} y\, e^{-y^2-y} dy =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} (2y + 1 - 1)\, e^{-y^2-y} dy = 1 - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} (2y + 1)\, e^{-y^2-y} dy +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2-y} dy = 1 - \frac{1}{2} \left(-e^{-y^2-y} \Big|_0^{+\infty} \right) + \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2-y} dy =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2-y} dy.$$

Обчислення останнього інтеграла зведемо до обчислення інтеграла Пуассона. З цією метою показник експоненти подамо у вигляді

$$-y^2 - y = -\frac{1}{2}(2y^2 + 2y) = -\frac{1}{2}\left(2y^2 + 2y + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

і проведемо заміну $t = \sqrt{2}\,y + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $dy = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,dt$. Тоді

$$P(\xi_1 < \xi_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{0,25}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{0,25}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{0,25}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\pi}\,\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{0,25}\left(\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \approx 0,775.$$

Такого типу задачі можуть виникати при математичному моделюванні вповні реальних ситуацій.

Приклад 10. До двох телефонів-автоматів підійшли три особи. Двоє зайняли телефони, а третій залишився чекати. Тривалість розмови для кожної особи є відповідно випадкові величини ξ_1, ξ_2, ξ_3. Будемо припускати, що кожна з цих величин має показниковий розподіл з параметром λ і що вони незалежні. Знайти: а) ймовірність того, що третя особа буде розмовляти по телефону, по якому розмовляла перша особа; б) щільність розподілу ймовірностей часу чекання третьої особи; в) ймовірність того, що третя особа закінчить розмову раніше першої або другої особи.

Розв'язання. а) Третя особа буде розмовляти по тому телефону, по якому розмовляла перша особа тоді, коли перша особа закінчить розмову раніше другої, тобто коли $\xi_1 < \xi_2$.

Ймовірність цієї події рівняється

$$P(\xi_1<\xi_2)=\iint\limits_{x<y} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{x<y} f_{\xi_1}(x)\,f_{\xi_2}(y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\lambda\,e^{-\lambda y}\int\limits_0^{y}\lambda\,e^{-\lambda x}\,dxdy=\int\limits_0^{+\infty}\lambda\,e^{-\lambda y}(-e^{-\lambda x}\big|_0^y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\lambda\,e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y})\,dy=\int\limits_0^{+\infty}\lambda\,e^{-\lambda y}\,dy-\int\limits_0^{+\infty}\lambda\,e^{-2\lambda y}\,dy=1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}.$$

б) Нехай τ — час чекання на розмову третьої особи. Очевидно, що $\tau=\min(\xi_1,\xi_2)$. А отже,

$$\begin{aligned}F_\tau(t)&=P(\tau<t)=P(\min(\xi_1,\xi_2)<t)=1-P(\min(\xi_1,\xi_2)>t)=\\&=1-P(\xi_1>t,\xi_2>t)=1-P(\xi_1>t)\,P(\xi_2>t)=\\&=1-e^{-\lambda t}e^{-\lambda t}=1-e^{-2\lambda t}\end{aligned}$$

для $t>0$ і $F_\tau(t)=0$ для $t\leqslant 0$.

Тоді щільність розподілу ймовірностей часу чекання третьої особи на розмову є функція

$$f_\tau(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad t<0,\\ 2\lambda\,e^{-2\lambda t}, & \text{якщо}\quad t\geqslant 0.\end{cases}$$

в) Нехай τ — тривалість розмови однієї з осіб після того, як одна з них (перша чи друга) закінчили розмову. Тоді

$$\tau=\begin{cases}\xi_1-\xi_2, & \text{якщо}\quad \xi_1>\xi_2,\\ \xi_2-\xi_1, & \text{якщо}\quad \xi_1<\xi_2\end{cases}$$

і $F_\tau(t)=P(\tau<t)=P(\xi_1-\xi_2<t,\xi_1>\xi_2)+P(\xi_2-\xi_1<t,\xi_1<\xi_2)=$
$=P(\xi_2<\xi_1<\xi_2+t)+P(\xi_1<\xi_2<\xi_1+t)$.

Скористаємось неперервним аналогом формули повної ймовірності, а саме, якщо припустити, що $\xi_2=u$, то

$$P(u<\xi_1<u+t)=F_{\xi_1}(u+t)-F_{\xi_1}(u)=1-e^{-\lambda(u+t)}-(1-e^{-\lambda u})=$$
$$=e^{-\lambda u}-e^{-\lambda(u+t)}$$

і $\quad P(\xi_2<\xi_1<\xi_2+t)=\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-\lambda u}-e^{-\lambda(u+t)}\right)\lambda\,e^{-\lambda u}du=$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\lambda\,e^{-2\lambda u}du-e^{-\lambda t}\int\limits_0^{+\infty}\lambda\,e^{-2\lambda u}du=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\,e^{-\lambda t}.$$

Аналогічно $\quad P(\xi_1 < \xi_2 < \xi_1 + t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-\lambda t}.$

Отже, $\quad F_\tau(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-\lambda t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t},$

тобто τ має показниковий розподіл з параметром λ.

Третя особа закінчить розмову раніше першої або другої особи, коли $\xi_3 < \tau$. Оскільки ξ_3 теж має показниковий розподіл з параметром λ, то $P(\xi_3 < \tau) = \frac{1}{2}$. $\square$

Питання для самоперевірки та вправи

1. Які операції над випадковими величинами не виводять за межі випадкових величин?

2. Як будується розподіл ймовірностей для функції від дискретних випадкових величин?

3. Як будується розподіл ймовірностей для функції від неперервних випадкових величин?

4. Сумісний розподіл випадкових величин ξ_1, ξ_2 задається таблицею

$\xi_1 \diagdown \xi_2$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{24}$
1	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

   Побудувати ряди розподілу для випадкових величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 \cdot \xi_2$. Побудувати сумісний розподіл для випадкового вектора (η_1, η_2).

5. Випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) набирає значень $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, кожне з ймовірністю $\frac{1}{6}$. Знайти розподіл ймовірностей скалярного добутку цього вектора на одиничний вектор $(1,1)$.

6. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $[0; 1]$. Знайти щільності розподілу ймовірностей випадкових величин $\xi_1 - \xi_2$, $|\xi_1 - \xi_2|$, $\xi_1 \, \xi_2$, $\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$. Побудувати графіки щільностей.

7. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні і мають показниковий розподіл з параметром λ. Знайти щільності розподілу випадкових величин $\xi_1 - \xi_2$, $|\xi_1 - \xi_2|$, $\dfrac{\xi_1}{\xi_2}$.

8. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні і мають нормальний розподіл з параметрами $0, 1$. Знайти щільності розподілу випадкових величин $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 - \xi_2$, ξ^2, $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_1^2}$.

9. Знайти ймовірність того, що квадратний тричлен $x^2 - 2\,\xi_1\,x + \xi_2^2$ має комплексні корені, якщо ξ_1 і ξ_2 незалежні однаково розподілені випадкові величини, що мають:
а) рівномірний розподіл на відрізку $[0; 1]$;
б) показниковий розподіл з параметром λ.

10. Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, де $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні показниково розподілені випадкові величини з параметром λ (розподіл Ерланга).

2.6 Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу ймовірностей дає повну інформацію про випадкову величину. Однак при розв'язуванні практичних задач такий закон, як правило, нам невідомий (наприклад, ми можемо висунути гіпотезу про тип розподілу). У зв'язку з цим нам потрібна певна найбільш суттєва інформація про випадкову величину. Виявляється, що така інформація закладена у певних числах (числових характеристиках), які, з одного боку, за певними правилами можуть бути отримані з допомогою закону розподілу ймовірностей, а, з другого боку, через них конкретизується закон розподілу, якщо відомо до якого типу він належить. Найважливішими з них є математичне сподівання і дисперсія, а також характеристики, з допомогою яких можна аналізувати залежності між випадковими величинами.

Розглянемо таку реальну ситуацію. Ми маємо результати стрільби у мішень двох осіб: першої 6, 7, 9, 10, 10, 7; другої 6, 7, 10, 3, 5, 7, 10, 10, 9. Сумарний результат першої — 49 очок, результат другої 67 очок. Хто з них більш результативний?

На перший погляд — друга особа. Однак за наявності інформації про число виконаних пострілів кожною особою більш об'єктивну оцінку результативності дає середнє число очок, точніше, середнє арифметичне числа очок, яке набрала кожна особа (для першої $8,2$, для другої $6,7$, а тому результативність першої особи вища). Зазначимо, що середнє арифметичне використовувалось на практиці задовго до Піфагора, а от школа Піфагора користувалась принаймні дев'ятьма різного роду середніх (числами, що знаходяться між найменшим і найбільшим числом).

Давайте пофантазуємо! Скажемо, нехай перша особа виконує (у незмінних умовах її майстерність не підвищується) 100 пострілів з результатами

6	7	8	9	10
3	12	24	28	33

.

Середнє арифметичне рівняється 8,76. А при 1000 пострілах з результатами

6	7	8	9	10
52	97	261	300	290

.

Середнє арифметичне рівняється 8,68. Якщо число пострілів буде зростати, то згідно із законом великих чисел відносні частоти будуть наближатись до певних чисел, які є ймовірностями того, що в результаті пострілу буде певним число. Отже, ми маємо випадкову величину, значеннями якої є числа 6, 7, 8, 9, 10, а відповідними ймовірностями є (наші фантазії) 0,05; 0,1; 0,25; 0,3; 0,3. Якщо відносні частоти із збільшенням числа пострілів наближаються до останніх чисел, то природно, що середні арифметичні будуть наближатись до числа

$$6 \cdot 0,05 + 7 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,25 + 9 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,3 = 8,7.$$

Отож з випадковою величиною можна пов'язати число, яке з ймовірностної точки зору схоже на ймовірність події. Якщо припустити, що випробування, результатами яких є значення випадкової величини, необмежено повторюються і після кожного обчислювати середнє арифметичне значень, яких набрала випадкова величина, то із зростанням числа дослідів вплив результату кожного випробування на середнє арифметичне зменшується. Середнє арифметичне стабілізується біля цього числа.

Означення 2.6.1 *Математичним сподіванням дискретної випадкової величини з рядом розподілу*

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(\xi = x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

називають суму попарних добутків значень випадкової вели-

чини на їх ймовірності і позначають

$$M(\xi) := x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k. \qquad (2.6.1)$$

Російськомовний термін "математическое ожидание" і теж саме позначення, англомовний термін "mathematical expectation" і позначення $E(\xi)$. Введене це поняття Гюйгенсом у 1657 році.

У випадку, коли множина можливих значень дискретної випадкової величини є нескінченною, то її математичним сподіванням називають суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_np_n$$

за умови, що цей ряд збігається абсолютно. Остання вимога забезпечує можливість оперувати з рядами як із звичайними сумами (сполучати члени ряду у групи, переставляти їх). Таким чином, у цьому випадку

$$M(\xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_kp_k, \qquad (2.6.2)$$

якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|p_n$ збігається.

Нарешті, якщо випадкова величина ξ абсолютно неперервна і задається щільністю розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$, то її математичним сподіванням називають інтеграл вигляду

$$\int_a^b x\, f_\xi(x)\, dx,$$

якщо $f_\xi(x) > 0$ на відрізку $[a; b\,]$ і $f_\xi(x) = 0$ поза ним. Якщо ж $f_\xi(x) > 0$ на нескінченному проміжку, то математичним сподіванням є відповідний невласний інтеграл.

Означення 2.6.2 *Математичним сподіванням абсолютно неперервної випадкової величини із щільністю розподілу ймовірностей називають інтеграл вигляду*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)\, dx$$

за умови, що такий інтеграл збігається абсолютно.

Позначення залишається теж саме

$$M(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)\, dx. \tag{2.6.3}$$

Якщо ж закон розподілу випадкової величини ξ невідомий, то ми не можемо скористатись формулами (2.6.1)—(2.6.3). Однак можна знайти його наближене значення дослідним шляхом. А саме, якщо в результаті N випробувань випадкова величина ξ набрала значення x_1 — N_1 раз, x_2 — N_2 рази, $\ldots$, x_n — N_n раз, то

$$x_{cep} = \frac{1}{N}\,(x_1N_1 + x_2N_2 + \ldots + x_nN_n) \approx M(\xi). \tag{2.6.4}$$

Приклад 1. З урни, у якій міститься 4 білі і 5 чорних куль, навгад беруть три кулі. Очевидно, що число чорних куль у вибірці є випадкова величина. Знайдемо її математичне сподівання.

Розв'язання. Число чорних куль у вибірці є випадкова величина ξ, значеннями якої є числа 0, 1, 2, 3. На підставі класичного означення маємо:

$$P(\xi = i) = \frac{C_5^i\, C_4^{3-i}}{C_9^3} \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Тоді згідно з формулою (2.6.1)

$$M(\xi)=\sum_{i=0}^{3} P(\xi=i)=\sum_{i=0}^{3} i\,\frac{C_5^i\,C_4^{3-i}}{C_9^3}=0\cdot\frac{4}{84}+1\cdot\frac{30}{84}+2\cdot\frac{40}{84}+3\cdot\frac{10}{84}=\frac{5}{3}.$$

При бажанні такий дослід можна провести велике число разів і отримати підтвердження висунутої вище гіпотези. (Цей факт пізніше буде доведено.) □

Оскільки математичне сподівання є те число, навколо якого групуються значення випадкової величини, то природно ввести характеристику відхилення цих значень від її математичного сподівання.

Означення 2.6.3 *Дисперсією випадкової величини ξ називають математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від її математичного сподівання і позначають*

$$D(\xi) := M(\xi - M(\xi))^2. \tag{2.6.5}$$

Російськомовний термін "дисперсия" і теж саме позначення, англомовний "dispersion or variance" і позначення $D(\xi)$ або $Var(\xi)$.

Є певна незручність в означенні (2.6.5) через те, що розмірність дисперсії є квадрат розмірності випадкової величини. Тому поруч з дисперсією користуються ще однією характеристикою розсіювання

$$\sigma(\xi) := \sqrt{D(\xi)}, \tag{2.6.6}$$

яку називають *середнім квадратичним відхиленням* або *стандартним відхиленням.*

На підставі означення (2.6.5) маємо формули для обчислення дисперсії

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - M(\xi))^2\, p_k, \tag{2.6.7}$$

якщо випадкова величина ξ дискретна із скінченною множиною значень;

$$D(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - M(\xi))^2 \, p_n, \tag{2.6.8}$$

якщо випадкова величина ξ дискретна із зчисленною множиною значень і ряд (2.6.8) збігається;

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^2 \, f_\xi(x) \, dx, \tag{2.6.9}$$

якщо випадкова величина ξ абсолютно неперервна і інтеграл (2.6.9) збігається.

Як іллюстрація, для випадкової величини ξ, описаної у прикладі 1, маємо:
$D(\xi) = \left(0 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{84} + \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{30}{84} + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{40}{84} + \left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{10}{84} = \frac{5}{9}.$

Сформулюємо і доведемо основні властивості математичного сподівання і дисперсії.

1°. Математичне сподівання сталої рівняється самій сталій

$$M(c) = c. \tag{2.6.10}$$

2°. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто

$$M(c\,\xi) = c\,M(\xi). \tag{2.6.11}$$

Безпосередньо випливає з того, що сталий множник можна виносити за знак суми (інтеграла).

3°. Якщо кожна з випадкових величин ξ і η має математичне сподівання, то математичне сподівання суми двох випадкових величин рівняється сумі їх математичних сподівань

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta). \tag{2.6.12}$$

Доведення. Нехай двовимірна дискретна випадкова величина (ξ, η) задана сумісним розподілом

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P_{ij}, \text{ де } i = 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots.$$

Тоді
$$M(\xi) = \sum_i x_i \, P(\xi = x_i) = \sum_i x_i \sum_j P_{ij},$$
$$M(\eta) = \sum_j y_j \, P(\eta = y_j) = \sum_j y_j \sum_i P_{ij}.$$

А оскільки

$$\sum_{i,j} |x_i + y_j| \, P_{ij} \leqslant \sum_{i,j} |x_i| \, P_{ij} + \sum_{i,j} |y_j| \, P_{ij} = \sum_i |x_i| \sum_j P_{ij} +$$
$$+ \sum_j |y_j| \sum_i P_{ij} = \sum_i |x_i| \, P(\xi = x_i) + \sum_j |y_j| \, P(\eta = y_j) < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{i,j} (x_i + y_j) \, P_{ij}$ збігається абсолютно. А тому

$$M(\xi + \eta) = \sum_k z_k \, P(\xi + \eta = z_k) = \sum_k z_k \sum_{i,j: x_i + y_j = z_k} P(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$
$$= \sum_{i,j} (x_i + y_j) P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_{i,j} x_i P_{ij} + \sum_{i,j} y_j P_{ij} = \sum_i x_i \sum_j P_{ij} +$$
$$+ \sum_j y_j \sum_i P_{ij} = \sum_i x_i P(\xi = x_i) + \sum_j y_j P(\eta = y_j) = M(\xi) + M(\eta).$$

Якщо ж двовимірна випадкова величина є абсолютно неперервною, то

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_\xi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) \, dy dx,$$
$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, f_\eta(y) \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) \, dx dy,$$

причому інтеграли збігаються абсолютно. А оскільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x + y| \, f_{\xi,\eta}(x, y) \, dx dy \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) \, dy dx +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) \, dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, f_\xi(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \, f_\eta(y) dy < +\infty,$$

то інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,dxdy$ збігається абсолютно. А тому

$$M(\xi+\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\,f_{\xi+\eta}(z)\,dz=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,z-x)\,dxdz=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(z-x+x)\,f_{\xi,\eta}(x,z-x)\,dxdz=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(z-x)\,f_{\xi,\eta}(x,z-x)\,dxdz+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,f_{\xi,\eta}(x,z-x)\,dxdz=$$

(заміна у першому інтегралі $z-x=t$, $dt=dz$, у другому $z-x=u$, $dz=du$)

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi,\eta}(x,u)\,dx\right)du+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi,\eta}(x,u)\,du\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u\,f_{\eta}(u)\,du+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,f_{\xi}(x)\,dx=M(\eta)+M(\xi).\quad\square$$

4°. Якщо випадкові величини ξ і η незалежні і мають математичні сподівання, то математичне сподівання їх добутку рівняється добутку математичних сподівань

$$M(\xi\,\eta)=M(\xi)\,M(\eta).\qquad(2.6.13)$$

Доведення. Оскільки за умовою випадкові величини незалежні, то $P(\xi=x_i,\eta=y_j)=P(\xi=x_i)\,P(\eta=y_j)$ в дискретному випадку і $f_{\xi,\eta}(x,y)=f_{\xi}(x)\,f_{\eta}(y)$ в абсолютно неперервному випадку. Тоді

$$M(\xi\,\eta)=\sum_{i,j}x_i\,y_j\,P(\xi=x_i,\eta=y_j)=$$
$$=\sum_i x_i\,P(\xi=x_i)\sum_j y_j\,P(\eta=y_j)=M(\xi)\,M(\eta),$$

$$M(\xi\,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\xi}(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{\eta}(y)\,dy = M(\xi)\,M(\eta). \quad \square$$

5°. (нерівність Коші-Буняковського)

$$(M|\xi\,\eta|)^2 \leqslant M\xi^2\, M\eta^2.$$

6°. Якщо випадкова величина η є функцією від випадкової величини ξ, тобто $\eta = \varphi(\xi)$, то

$$M(\eta) = \sum_i \varphi(x_i)\,P(\xi = x_i) \tag{2.6.14}$$

в дискретному і

$$M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,f_{\xi}(x)\,dx \tag{2.6.15}$$

у неперервному випадку для досить широкого класу функцій φ.

Зауваження. Оскільки кожна подія A є підмножиною відповідного простору елементарних подій Ω, то індикаторна функція

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \omega \in A, \\ 0, & \text{якщо} \quad \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

є випадкова величина, яка набирає значення 1 і 0 з ймовірностями p і $1-p$. А тому

$$P = M(I_A(\omega)),$$

тобто ймовірність події є математичне сподівання відповідної індикаторної функції. У зв'язку з цим можлива побудова теорії ймовірностей, виходячи з поняття математичного сподівання.

Щодо дисперсії, то вона володіє такими властивостями.

7°. Для будь-якої випадкової величини ξ $D(\xi) \geqslant 0$, якщо вона існує, причому $D(\xi) = 0$, коли ξ —невипадкова величина.

8°. Дисперсія добутку сталої на випадкову величину рівняється добутку квадрата сталої на дисперсію випадкової величини

$$D(c\,\xi) = c^2\, D(\xi). \tag{2.6.16}$$

Доведення. Згідно з означенням

$$D(c\,\xi) = M(c\,\xi - M(c\,\xi))^2 = M(c\,(\xi - M(\xi)))^2 = c^2\, M(\xi - M(\xi))^2 = \\ = c^2\, D(\xi). \quad \square$$

9°. Дисперсія випадкової величини ξ рівняється різниці математичного сподівання квадрата випадкової величини і квадрата математичного сподівання ξ

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \tag{2.6.17}$$

Доведення. Справді

$$D(\xi) = M((\xi - M(\xi))^2) = M(\xi^2 - 2\,M(\xi)\,\xi + (M(\xi))^2) = \\ = M(\xi^2) - 2\,M(\xi)\,M(\xi) + (M(\xi))^2 = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \quad \square$$

10°. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин рівняється сумі дисперсій

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta). \tag{2.6.18}$$

Доведення. Нехай $M(\xi) = a$, $M(\eta) = b$. Тоді $M(\xi + \eta) = a + b$. І на підставі властивості 9° маємо:

$$D(\xi + \eta) = M((\xi + \eta)^2) - (M(\xi + \eta))^2 = M(\xi^2 + 2\,\xi\,\eta + \eta^2) - \\ - (a + b)^2 = M(\xi^2) + 2\,M(\xi)\,M(\eta) + M(\eta^2) - a^2 - 2\,ab - b^2 = \\ = M(\xi^2) - a^2 + M(\eta^2) - b^2 = D(\xi) + D(\eta). \quad \square$$

Для середніх квадратичних відхилень

$$\sigma(\xi + \eta) = \sqrt{\sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)}, \tag{2.6.19}$$

звичайно якщо ξ і η незалежні.

Скориставшись методом математичної індукції, властивості 3°, 4°, 10° можна поширити на більше, ніж дві випадкові величини, а саме

$$M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)$$

для будь-яких випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, якщо кожна з них має математичне сподівання

$$M\left(\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\prod_{i=1}^{n}M(\xi_i),$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i),$$

якщо випадкові величини незалежні.

Покажемо, що для основних типів дискретних і абсолютно неперервних випадкових величин математичне сподівання і дисперсія виражаються через параметри розподілу. Саме це дає можливість конкретизувати розподіл заданого типу, якщо відомі числові характеристики.

1. Числові характеристики біномного розподілу. Нехай випадкова величина ξ має біномний розподіл з параметрами n, p, тобто $\xi=0,1,2,\ldots,n$ з ймовірностями

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{2.6.20}$$

де $q=1-p$. Тоді

$$M(\xi)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot P(\xi=k)=\sum_{k=1}^{n}k\,C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k q^{n-k}=$$

(у кожному доданку скоротимо на k і винесемо спільний множник np)

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,p^{k-1}q^{n-k}=\text{(проведемо заміну } i=k-1\text{)}$$

$= np\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}\,p^iq^{n-1-i} = np\,(q+p)^n = np.$

$D(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n}(k-np)^2 = (\text{властивість } 9^\circ) = \sum\limits_{k=0}^{n}k^2\,C_n^kp^kq^{n-k}-$
$-(M(\xi))^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2\,n!}{k!(n-k)!}\,p^kq^{n-k}-n^2p^2 = np\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k\,(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\times$
$\times p^{k-1}q^{n-k}-n^2p^2 = np\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k-1+1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,p^{k-1}q^{n-k} = np\times$
$\times\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k-1)(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,p^{k-1}q^{n-k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\,p^{k-1}q^{n-k}\right)-$
$-n^2p^2 = np\left(\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!}\,p^{k-1}q^{n-k}+\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^ip^iq^{n-1-i}\right)-$
$-n^2p^2 = np\left((n-1)\,p\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}\,p^{k-2}q^{n-k}+(q+p)^{n-1}\right)-$
$-n^2p^2 = np\left((n-1)\,p\sum\limits_{i=0}^{n-2}\dfrac{(n-2)!}{i!\,(n-2-i)!}\,p^iq^{n-2-i}+1\right)-n^2p^2 =$
$= np\,((n-1)\,p\,(q+p)^{n-2}+1)-n^2p^2 = np\,(np-p+1)-n^2p^2 =$
$= np\,(1-p) = npq.$

Отже, для біномного розподілу маємо

$$M(\xi) = np, \quad D(\xi) = npq. \tag{2.6.21}$$

Обчислення цих характеристик значно спрощується, якщо врахувати, що число появ події A при n незалежних випробуваннях рівняється сумі числа подій A у кожному випробуванні, тобто випадкову величину ξ можна розглядати як суму n незалежних випадкових величин $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, кожна з яких має такий розподіл ймовірностей $P(\mu_k = 1) = p$, $P(\mu_k = 0) = 1-p = q$. Тоді для кожної такої випадкової величини

$$M(\mu_k) = 0\cdot q + 1\cdot p = p,$$
$$D(\mu_k) = (0-p)^2q + (1-p)^2p = pq.$$

Звідси дістаємо, що

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n}M(\mu_k) = \sum_{k=1}^{n}p = np,$$

$$D(\xi)=\sum_{k=1}^{n}D(\mu_k)=\sum_{k=1}^{n}pq=npq.$$

Якщо відомо, що випадкова величина має біномний розподіл з невідомими параметрами x, y і відомим математичним сподіванням a і дисперсією d, то ці параметри можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} xy=a, \\ xy\,(1-y)=d. \end{cases}$$

Зрозуміло, що x має бути натуральним, а y задовольняти умову $0<y<1$.

2. Числові характеристики гіпергеометричного розподілу. Нехай випадкова величина ξ має гіпергеометричний розподіл з параметрами N, M, n, тобто ξ набирає значення $0,1,2,\ldots,\min(M,n)$ з ймовірностями

$$P(\xi=k)=\frac{C_M^k\,C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}. \tag{2.6.22}$$

Для подання математичного сподівання

$$M(\xi)=\sum_{k}^{\min(M,n)}k\ P(\xi=k)$$

через параметри N, M, n, скористаємось рівністю многочленів

$$M\cdot t\,(1+t)^{N-1}=M\sum_{k=0}^{N-1}C_{N-1}^k t^{k+1}=t\cdot M(1+t)^{M-1}(1+t)^{N-M}=$$

$$=t\,\left((1+t)^M\right)'(1+t)^{N-M}=t\,\left(\sum_{k=0}^{M}C_M^k\,t^k\right)'(1+t)^{N-M}=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}k\,C_M^k\,t^k\sum_{k=0}^{N-M}C_{N-M}^k t^k.$$

Прирівняємо коефіцієнти при t^n, якщо $n\leqslant M$, і при t^M, якщо $M<n$. В обох випадках маємо:

$$\sum_{k=1}^{\min(n,M)}k\,C_M^k C_{N-M}^{n-k}=M\cdot C_{N-1}^{n-1}.$$

Поділимо обидві частини на C_N^n, дістанемо

$$M(\xi) = M\, C_{N-1}^{n-1}/C_N^n = n \cdot \frac{M}{N}.$$

Скористаємось рівністю многочленів

$$M(M-1)t^2(1+t)^{N-2} = M\,(M-1) \sum_{k=0}^{N-2} C_{N-2}^k t^{k+2} = t^2 \left((1+t)^M\right)'' =$$

$$= (1+t)^{N-M} = t^2 \sum_{k=2}^{M} k\,(k-1)\, C_M^k\, t^{k-2} \sum_{k=0}^{N-M} C_{N-M}^k\, t^k =$$

$$= \sum_{k=2}^{M} k\,(k-1)\, C_M^k\, t^k \sum_{k=0}^{N-M} C_{N-M}^k\, t^k$$

і прирівняємо коефіцієнти при t^n, якщо $n \leqslant M$, при t^M, якщо $M < n$. Дістанемо рівність

$$M\,(M-1)\, C_{N-2}^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\, C_M^k\, C_{N-M}^{n-k}.$$

Розділивши обидві частини на C_N^n, маємо:

$$M\,(M-1)\,\frac{n\,(n-1)}{N\,(N-1)} = \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,\frac{C_M^k\, C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = M(\xi(\xi-1)) =$$
$$= M(\xi^2) - M(\xi).$$

Звідси

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = M\,(M-1)\,\frac{n\,(n-1)}{N\,(N-1)} + \frac{n\,M}{N} - \frac{n^2 M^2}{N^2} =$$
$$= \frac{M\,n}{N}\left(\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1 - \frac{n\,M}{N}\right) = \frac{M\,n}{N}\left(N^2 - NM -\right.$$
$$\left. - Nn + Mn\right) = n \cdot \frac{M\,(N-M)\,(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Таким чином, для гіпергеометричного розподілу з параметрами N, M, n маємо:

$$M(\xi) = n \cdot \frac{M}{N}, \quad D(\xi) = n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}. \qquad (2.6.23)$$

3. Числові характеристики геометричного розподілу. Нехай випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p, тобто ξ набирає цілі невід'ємні значення з ймовірностями

$$P(\xi = n) = pq^n.$$

На інтервалі $(-1; 1)$ збігається ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, причому

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

На цьому ж інтервалі збігаються ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, x^{n-2},$$

причому $$\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

А тому

$$M(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, P(\xi = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, pq^n = pq \sum_{n=1}^{\infty} n\, q^{n-1} = pq\, \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{p},$$

$$M(\xi(\xi-1)) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, P(\xi = n) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, pq^n =$$

$$= pq^2 \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, q^{n-2} = pq^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^2} = \frac{2\, q^2}{p^2}.$$

Звідси $\quad M(\xi^2) = \dfrac{2\, q^2}{p^2} + \dfrac{q}{p} \quad$ і $\quad D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 =$

$$= \frac{2\, q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q^2 + qp}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Таким чином, для геометричного розподілу з параметром p маємо:

$$M(\xi) = \frac{p}{q}, \quad D(\xi) = \frac{q}{p^2}. \tag{2.6.24}$$

4. Числові характеристики розподілу Пуассона. Нехай випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з параметром λ, тобто ξ набирає цілі невід'ємні значення з ймовірностями

$$P(\xi = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda}.$$

Скориставшись рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, який збігається на всій числовій осі, причому

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

і тим, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

маємо:

$$M(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda,$$

$$M(\xi(\xi-1)) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1) \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2,$$

$$M(\xi^2) - M(\xi) = \lambda^2, \quad M(\xi^2) = \lambda^2 + \lambda,$$

і $\quad D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

Таким чином, для розподілу Пуассона з параметром λ маємо:

$$M(\xi) = D(\xi) = \lambda. \tag{2.6.25}$$

5. Числові характеристики рівномірного розподілу. Нехай випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[a; b]$, тобто її щільністю розподілу ймовірностей є функція

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{якщо} \quad x > b. \end{cases}$$

Тоді $\quad M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{a} x\, f_\xi(x) dx + \int\limits_{a}^{b} x\, f_\xi(x) dx +$

$$+\int_b^{+\infty} x\, f_\xi(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a}\ \frac{x^2}{2}\ \Big|_a^b = \frac{a+b}{2},$$

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^2 f_\xi(x)dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\ dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\ \frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b = \frac{1}{3\,(b-a)}\left(\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8}\right) =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12\,(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким чином, для рівномірного розподілу на відрізку $[a; b\,]$ маємо:

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (2.6.26)$$

6. Числові характеристики показникового розподілу. Нехай випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ, тобто її щільністю розподілу ймовірностей є функція

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ \lambda\, e^{-\lambda\, x}, & \text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

Тоді $\quad M(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_\xi(x)dx = \int_0^{+\infty} x\,\lambda\, e^{-\lambda\, x}dx =$

$$\left(u = x,\ du = dx,\ dv = \lambda\, e^{-\lambda\, x}dx,\ v = -e^{-\lambda\, x}, \lim_{x\to+\infty} x\, e^{-\lambda\, x} = 0\right)$$

$$= -x\, e^{-\lambda\, x}\,\big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, x}dx = -\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\, x}\,\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda},$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \int_0^{+\infty} x^2\lambda\, e^{-\lambda\, x}dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$\left(u = x^2, du = 2xdx, dv = \lambda\, e^{-\lambda\, x}dx, v = -e^{-\lambda\, x}, \lim_{x\to+\infty} x^2\, e^{-\lambda\, x} = 0\right)$$

$$= -x^2 e^{-\lambda\, x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int\limits_0^{+\infty} x\, e^{-\lambda\, x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким чином, для показникового розподілу з параметром λ маємо:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (2.6.27)$$

7. Числові характеристики нормального розподілу. Нехай випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з параметрами a і σ, тобто її щільністю розподілу ймовірностей є функція

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Тоді $\quad M(\xi) = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$

$$\left(t = \frac{x-a}{\sigma},\ dx = \sigma\, dt,\ \text{межі не змінюються}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t + a)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$$

(перший інтеграл від непарної функції у симетричних межах рівняється нулю, а другий інтеграл від парної функції у симетричних межах рівняється два інтеграли на проміжку $[0; +\infty)$)

$$= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a,$$

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$\left(t = \frac{x-a}{\sigma},\ dx = \sigma\, dt,\ \text{межі не змінюються}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2\, t^2\, e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{0}^{+\infty} t^2\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$\left(u = t,\ du = dt,\ dv = t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt,\ v = -e^{-\frac{t^2}{2}},\ \lim_{t\to+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} = 0\right)$$

$$= -\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\, t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty} + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sigma^2.$$

Таким чином, для нормального розподілу з параметрами a і σ маємо:

$$M(\xi) = a, \quad D(\xi) = \sigma^2. \tag{2.6.28}$$

Для кожної випадкової величини ξ і будь-якого натурального n ξ^n — випадкова величина. Якщо існує $M(\xi^n)$, то його називають *моментом порядку* n (початковим моментом n-го порядку) випадкової величини ξ. Якщо $M(\xi) = a$, то $(\xi - a)^n$ — випадкова величина, і коли існує $M((\xi - a)^n)$, то його називають *центральним моментом порядку* n. Якщо ввести позначення

$$\nu_n = M(\xi^n), \quad \mu_n = M((\xi - M(\xi))^n),$$

то $\nu_0 = \mu_0 = 1$, $\nu_1 = M(\xi)$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(\xi)$, $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$. Взагалі для $n > 2$ має місце подання

$$\mu_n = M(\xi - \nu_1)^n = M \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\xi)^k (-\nu_1)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} \nu_k \cdot \nu_1^{n-k} +$$

$$+ C_n^1 (-1)^{n-1} \nu_1 \cdot \nu_1^{n-1} + C_n^0 (-1)^n \nu_0 \cdot \nu_1^n = \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} \nu_k \cdot \nu_1^{n-k} +$$

$$+ (-1)^{n-1} (n-1)\, \nu_1^n.$$

Для всіх приведених вище розподілів існують моменти будь-якого порядку.

Як приклад, для нормального розподілу з параметрами 0, 1

$$\nu_n = M\xi^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$\left(\begin{array}{lll} u = x^{n-1}, & du = (n-1)\, x^{n-2} dx, & \\ dv = x\, e^{-\frac{x^2}{2}}, & v = -e^{-\frac{x^2}{2}}, & \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \end{array} \right)$$

$$= -x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (n-1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} = (n-1)\, M(\xi^{n-2}) =$$

$$= (n-1)\, \nu_{n-2}.$$

А оскільки $\nu_1 = 0$, $\mu_2 = \nu_2 = 1$, то $\nu_{2n-1} = 0$ для $n = 1, 2, \ldots$,

$$\mu_{2n} = \nu_{2n} = M(\xi^{2n}) = \frac{M(\xi^{2n})}{M(\xi^{2n-2})} \cdot \frac{M(\xi^{2n-2})}{M(\xi^{2n-4})} \cdots \frac{M(\xi^4)}{M(\xi^2)} M(\xi^2) =$$

$$= (2n-1)\,(2n-3)\,(2n-4) \cdots 3 \cdot 1 = (2n-1)!! =$$

$$= \frac{(2n-1)\,(2n-2)\,(2n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n-2)\,(2n-4) \cdots 2} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}.$$

А для нормального розподілу з параметрами a і σ

$$\mu_{2n-1} = 0, \quad \mu_{2n} = \sigma^{2n} \, \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}.$$

8. Числові характеристики двовимірної випадкової величини. Нехай маємо двовимірну випадкову величину (ξ_1, ξ_2) із заданим сумісним розподілом ймовірностей $P(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = p_{ij}$. Через сумісний розподіл визначаються розподіли ймовірностей для кожної компоненти, а тому можемо знайти (якщо вони існують) числові характеристики кожної компоненти, а саме

$$M(\xi_1) = \sum_i x_i \sum_j p_{ij}, \quad M(\xi_2) = \sum_j y_j \sum_i p_{ij}, \tag{2.6.29}$$

$$D(\xi_1) = \sum_i (x_i - M(\xi_1))^2 \sum_j p_{ij}, \; D(\xi_2) = \sum_j (y_j - M(\xi_2))^2 \sum_i p_{ij}.$$

Якщо ж двовимірна випадкова величина (ξ_1, ξ_2) абсолютно неперервна із сумісною щільністю розподілу ймовірностей $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)$, то

$$M(\xi_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dydx,$$
$$M(\xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy, \qquad (2.6.30)$$
$$D(\xi_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi_1))^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dydx,$$
$$D(\xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - M(\xi_2))^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy,$$

Для аналізу залежності між двома випадковими величинами ξ_1, ξ_2 вводять числову характеристику

$$M((\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2))),$$

яку називають *кореляційним моментом* (коваріацією, змішаним моментом другого порядку), і позначають

$$cov(\xi_1, \xi_2) := M((\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2))). \qquad (2.6.31)$$

Обчислюють цю характеристику за формулами

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j (x_i - M(\xi_1))(y_j - M(\xi_2))\, p_{ij} \qquad (2.6.32)$$

для дискретного випадкового вектора (ξ_1, ξ_2),

$$cov(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi_1))(y - M(\xi_2))\, f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)dxdy. \qquad (2.6.33)$$

Якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, то між ними зв'язок відсутній і природно чекати, що $cov\,(\xi_1, \xi_2) = 0$. Справді, врахувавши, що з незалежності випадкових величин ξ_1, ξ_2 випливає незалежність випадкових величин $\xi_1 - M(\xi_1)$, $\xi_2 - M(\xi_2)$, маємо:

$$cov(\xi_1, \xi_2) = M((\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2))) =$$
$$= M(\xi_1 - M(\xi_1))M(\xi_2 - M(\xi_2)) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Взагалі випадкові величини ξ_1, ξ_2, для яких $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$, називають *некорельованими.* У зв'язку з цим незалежні випадкові величини є некорельованими. А от некорельованість випадкових величин не є умовою їх незалежності. Як приклад, розглянемо випадкові величини $\xi_1 = \sin\eta$, $\xi_2 = \cos\eta$, де η — випадкова величина з рядом розподілу $P(\eta = 0) = P(\eta = \frac{\pi}{2}) = P(\eta = \pi) = \frac{1}{3}$. Ці випадкові величини явно залежні. Справді, якщо $\xi_1 = 1$, то це означає, що $\eta = \frac{\pi}{2}$, а тому $\xi_2 = 0$. Разом з тим

$$M(\xi_1) = \sin 0 \cdot \tfrac{1}{3} + \sin\tfrac{\pi}{2} \cdot \tfrac{1}{3} + \sin\pi \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{\pi}{6},$$
$$M(\xi_2) = \cos 0 \cdot \tfrac{1}{3} + \cos\tfrac{\pi}{2} \cdot \tfrac{1}{3} + \cos\pi \cdot \tfrac{1}{3} = 0$$

і $cov(\xi_1, \xi_2) = (0 - \frac{\pi}{6})(1-0)\frac{1}{3} + (0 - \frac{\pi}{6})(-1-0)\frac{1}{3} + (1 - \frac{\pi}{6})(0-0) = 0.$

Якщо кореляційний момент випадкових величин ξ_1 і ξ_2 відмінний від нуля, то обов'язково присутня залежність між ними і їх називають *корельованими.* А сам кореляційний момент слугує мірою ступеня залежності випадкових величин ξ_1, ξ_2. Правда зручніше користуватись не $cov\,(\xi_1, \xi_2)$, а безрозмірною характеристикою — *коефіцієнтом кореляції*

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\sigma(\xi_1)\,\sigma(\xi_2)}. \qquad (2.6.34)$$

Характеристика (2.6.34) володіє такими двома властивостями, які ми сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 2.6.1 *Якщо для випадкових величин ξ_1, ξ_2 коефіцієнт кореляції існує, то*

$$|\,\rho(\xi_1, \xi_2)| \leqslant 1. \qquad (2.6.35)$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $t(\xi_1 - M(\xi_1))-$ $-(\xi_2 - M(\xi_2))$, де $t \in \mathbb{R}$. Тоді $M(t(\xi_1 - M(\xi_1)) - (\xi_2 - M(\xi_2)))^2 \geqslant 0$. Скориставшись властивостями математичного сподівання маємо: $t^2 M(\xi_1 - M(\xi_1))^2 - 2tM((\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2))) +$

$$+ M(\xi_2 - M(\xi_2))^2 = D(\xi_1)\, t^2 - 2\, cov(\xi_1, \xi_2)\, t + D(\xi_2) \geqslant 0.$$

Звідси випливає, що дискримінант цього квадратного тричлена $cov^2(\xi_1, \xi_2) - D(\xi_1)D(\xi_2) \leqslant 0$ або $cov^2(\xi_1, \xi_2) \leqslant D(\xi_1)D(\xi_2)$.

А отже, $\sqrt{\dfrac{cov^2(\xi_1, \xi_2)}{D(\xi_1)D(\xi_2)}} = \dfrac{|cov\,(\xi_1, \xi_2)|}{\sigma(\xi_1)\,\sigma(\xi_2)} = |\,\rho(\xi_1, \xi_2)| \leqslant 1.$ □

Теорема 2.6.2 *Коефіцієнт кореляції випадкових величин ξ_1 і ξ_2 рівняється -1 або 1 тоді і лише тоді, коли ці випадкові величини пов'язані лінійною залежністю.*

Доведення. Необхідність. Нехай $|\,\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1$. Тоді

$$cov^2(\xi_1, \xi_2) = D(\xi_1)D(\xi_2)$$

і квадратний тричлен

$$D(\xi_1)t^2 - 2\, cov(\xi_1, \xi_2)t + D(\xi_2) = (t\,(\xi_1 - M(\xi_1)) - (\xi_2 - M(\xi_2)))^2$$

має кратний корінь $a = \dfrac{cov(\xi_1, \xi_2)}{D(\xi_1)}$. Звідси випливає, що

$$M(a(\xi_1 - M(\xi_1)) - (\xi_2 - M(\xi_2)))^2 = M(a\xi_1 - \xi_2 - M(a\xi_1 - \xi_2))^2 =$$
$$= D(a\xi_1 - \xi_2) = 0.$$

Це можливо тоді і лише тоді, коли $a\xi_1 - \xi_2$ є невипадкова величина, тобто коли $a\xi_1 - \xi_2 = b$. А цей означає, що ξ_2 виражається лінійно через ξ_1.

Достатність. Нехай $\xi_2 = a\xi_1 + b$, де $a, b \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{cov(\xi_1, \xi_2)}{\sigma(\xi_1)\,\sigma(\xi_2)} = \frac{M((\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2)))}{\sigma(\xi_1)\,\sigma(\xi_2)} =$$
$$= \frac{M((\xi_1 - M(\xi_1))(a\xi_1 + b - M(a\xi_1 + b)))}{\sigma(\xi_1)\,\sigma(a\xi_1 + b)} =$$
$$= \frac{a\, M((\xi_1 - M(\xi_1))^2)}{|a|\,\sigma(\xi_1)\,\sigma(\xi_1)} = \frac{a \cdot D(\xi_1)}{|a|\, D(\xi_1)} = \frac{a}{|a|}. \qquad \square$$

У прикладі 5 (див.р.2.4) ми переконались, що функція

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\rho\,\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

де $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $|\,\rho| < 1$, є сумісною щільністю розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини (ξ_1, ξ_2). Ми також переконались, що

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\ e^{-\frac{(x-a_1)}{2\sigma_1^2}}, \quad f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\ e^{-\frac{(y-a_2)}{2\sigma_2^2}}.$$

На підставі цього маємо, що $a_1 = M(\xi_1)$, $\sigma_1^2 = D(\xi_1)$, $a_2 = M(\xi_2)$, $\sigma_2^2 = D(\xi_2)$. Залишається з'ясувати ймовірносний зміст параметра ρ. З цією метою знайдемо коваріацію випадкових величин ξ_1 і ξ_2.

$$cov(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}(x-a_1)(y-a_2)\ \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}\ -\ 2\rho\,\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}dxdy.$$

Скориставшись заміною $u = x - a_1$, $v = y - a_2$, і після цього заміною $t = \dfrac{v}{\sigma_2} - \rho\,\dfrac{u}{\sigma_1}$, $dt = \dfrac{1}{\sigma_2}\,dv$, $v = \sigma_2\,t + \rho\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\,u$, маємо:

$$cov(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}uv\ \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\ 2\rho\,\frac{uv}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{v^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}dudv =$$

$$\left(\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\,\frac{uv}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{v^2}{\sigma_2^2}\right) = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{v^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\,\frac{uv}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2\,\frac{u^2}{\sigma_1^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (1-\rho^2)\,\frac{u^2}{\sigma_1^2}\right) = \frac{1}{1-\rho^2}\,t^2 + \frac{u^2}{\sigma_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} u\,(\sigma_2 t+\rho\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,u)\,\exp\left\{-\,\frac{1}{2(1-\rho^2)}\,t^2-\frac{1}{2}\frac{u^2}{\sigma_1^2}\right\}\times$$

$$\times\,du\,dt = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_2\,t\,e^{-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}}dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\,e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}du\,+$$

$+\quad \dfrac{\sigma_2\,\rho}{2\pi\sigma_1^2\sqrt{1-\rho^2}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2(1-\rho^2)}}dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\,e^{-\frac{u^2}{2}}du.$ Врахувавши, що $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\,e^{-\frac{u^2}{2\sigma_1^2}}du = 0$ як інтеграл від непарної функції у симетричних межах, маємо:

$$cov(\xi_1,\xi_2) = \frac{\sigma_2\,\rho}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\,e^{-\frac{u^2}{2}}du = \quad \left(\frac{u}{\sigma_1}=x,\ du=\sigma_1\,dx\right)$$

$$= \frac{\sigma_2\,\rho}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma_1^2\,x^2\,e^{-\frac{x^2}{2}}\sigma_1\,dx = \frac{\rho\,\sigma_2\,\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

(інтегрування частинами $u=x$, $dv = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, $du=dx$, $v=-e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}}=0$)

$$= \frac{\rho\,\sigma_1\,\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \rho\,\sigma_1\sigma_2.$$ Таким чином, маємо:

$$cov(\xi_1,\xi_2) = \rho\,\sigma_1\sigma_2 \qquad \text{або} \qquad \rho = \frac{cov(\xi_1,\xi_2)}{\sigma_1\,\sigma_2},$$

тобто ρ — коефіцієнт кореляції випадкових величин ξ_1 і ξ_2. Крім того зазначимо, що коли $\rho = 0$

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = f_{\xi_1}(x)\,f_{\xi_2}(y),$$

тобто для нормально розподілених випадкових величин з некорельованості випливає незалежність.

Питання для самоперевірки та вправи

1. Який ймовірностний зміст математичного сподівання і дисперсії?

2. Як визначають параметри основних розподілів, якщо відомі числові характеристики?

3. Яким чином визначають ступінь залежності випадкових величин?

4. Два правильних гральних кубиків одночасно кидаються три рази. Побудувати ряд розподілу для числа випадань парного числа очок на обох гральних кубиках. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

5. Побудувати ряд розподілу для найменшого числа очок, яке випадає при киданні трьох гральних кубиків. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

6. Можливими значеннями випадкової величини ξ є числа $1, 2, 3$. Знайти ймовірності цих значень, якщо $M(\xi) = 2,3$; $M(\xi^2) = 5,9$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\eta = -2\xi - 1$.

7. Випадкова величина ξ має біномний закон розподілу з $M(\xi) = 20$, $D(\xi) = 15$. Знайти параметри розподілу. Визначити ймовірність того, що $\xi > 20$.

8. Нехай ξ число появ події A при n незалежних випробуваннях, у кожному з яких $P(A) = p$. Знайти $M(\xi^3)$ і $M(\xi^4)$.

9. Робітник обслуговує 5 однотипних верстатів, що розташовані в ряд на відстані a між сусідніми. Закінчивши обслуговування якогось верстату, робітник переходить до того

станка, який раніше всього потребував обслуговування. Обчислити середнє значення довжини переходу робітника, якщо виходи з ладу будь-якого з п'яти верстатів рівноймовірні.

10. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона такий, що $\dfrac{P(\xi = 3) + P(\xi = 1)}{P(\xi = 2)} = \dfrac{5}{3}$ і $M\xi^2 = 22$. Знайти $M(\xi)$.

11. Випадкова величина η є сумою трьох випадкових величин ξ_1, ξ_2, ξ_3. Відомо, що $M(\xi_1) = 1$, $M(\xi_2) = 2$, $M(\xi_3) = 0$, $D(\xi_1) = 0,01$, $D(\xi_2) = 4$, $D(\xi_3) = 0,36$, $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0,2$, $\rho(\xi_1, \xi_3) = 0,3$, $\rho(\xi_2, \xi_3) = -0,1$. Знайти $M(\eta)$, $D(\eta)$.

12. Вважаючи результати вимірювання півосей еліпса значеннями незалежних випадкових величин ξ і η, що рівномірно розподілені відповідно на відрізках $[a; b]$ і $[c; d]$, знайти математичне сподівання і дисперсію площі цього еліпса.

13. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\xi - \eta$ за умови, що $\eta < \xi$, де ξ і η незалежні випадкові величини, причому ξ має показниковий розподіл з параметром λ, а η довільна невід'ємна абсолютно неперервна випадкова величина.

14. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкових величин $\sin \xi$ і $\cos \xi$.

15. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ послідовність незалежних випадкових величин, кожна з яких має показниковий розподіл з параметром λ, і нехай незалежно від них випадкова величина η приймає натуральні значення з ймовірностями $P(\eta = n) = pq^{n-1}$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$.

16. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і нормально розподілені з параметрами відповідно a і σ, b і σ. Знайти математичне сподівання і дисперсію відстані точки (ξ_1, ξ_2) до центру розподілу $(a; b)$.

17. Двовимірна випадкова величина (ξ_1, ξ_2) має сумісною щільністю розподілу ймовірностей функцію
$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\,(x^2+2xy+5y^2)}.$$
Знайти $M(\xi_1)$, $M(\xi_2)$, $D(\xi_1)$, $D(\xi_2)$, $\rho(\xi_1, \xi_2)$.

18. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 — незалежні і мають нормальний закон розподілу з параметрами 0, 1. Знайти $M(\xi_1+\xi_2)$, $M(\xi_1-\xi_2)$, $D(\xi_1+\xi_2)$, $D(\xi_1-\xi_2)$, $\rho(\xi_1+\xi_2, \xi_1-\xi_2)$. Знайти сумісний закон розподілу ймовірностей випадкових величин $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 - \xi_2$.

19. Випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) має щільність розподілу ймовірностей $f(x, y)$. Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (η_1, η_2), де $\eta_1 = \xi_1 \cos\alpha + \xi_2 \sin\alpha$, $\eta_2 = -\xi_1 \sin\alpha + \xi_2 \cos\alpha$ (поворот осей координат). Конкретизуйте задачу, коли випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) має нормальний закон розподілу вигляду
$$f_{\xi_1,\xi_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\,(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\,\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$
Знайти числові характеристики випадкового вектора (η_1, η_2).

Контрольна робота №2

I.

1. Випадкова величина ξ має біномний розподіл з $p = 0,6$. Знайти $P(\xi = 5)$, якщо відношення $P(\xi = 3)$ до $P(\xi = 1)$ рівне 21.

2. Випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з параметрами 3 і 3. Записати щільність розподілу і побудувати її графік. Записати функцію розподілу. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення не меншого 1 і не більшого 3.

3. У круг радіуса R навгад кидається 7 точок. Нехай ξ — число точок, що попаде у квадрат, вписаний у цей круг. Знайти: $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(\xi = 3)$.

4. Щільність показниково розподіленої випадкової величини ξ має максимальне значення рівне $\frac{1}{2}$. Знайти дисперсію випадкової величини $\eta = \frac{1}{2}\xi - 30$. Яка з двох подій $(\xi < D\xi)$ чи $(\xi > D\xi)$ має більшу ймовірність?

5. Дискретна випадкова величина ξ може набирати тільки два можливих значення ξ_1 і ξ_2. Ймовірність того, що ξ набирає значення ξ_1 рівна 0,2. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо $M(\xi) = 2,6$, $\sigma(\xi) = 0,8$.

II.

1. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл. Знайти $P(\xi = 2)$, якщо $P(\xi = 1) = 0,16$.

2. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-1; 5]$. Записати щільність розподілу і побудувати її

графік. Записати функцію розподілу і побудувати її графік. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення меншого 3.

3. У правильний трикутник зі стороною a навгад кидається 6 точок. Нехай ξ — число точок, що попаде у круг, вписаний у цей трикутник. Знайти: $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(\xi = 2)$.

4. Щільність нормально розподіленої випадкової величини ξ у точці -2 досягає максимального значення $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$. Знайти дисперсію випадкової величини $\eta = -2\xi + 120$. Знайти $P(\xi > 0)$.

5. Випадкова величина ξ може набирати значень $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 3$. Знайти відповідні ймовірності цих значень, якщо $M(\xi) = 2,3$, $M(\xi^2) = 5,9$. Знайти дисперсію випадкової величини $\eta = -100\xi - 0,01$.

III.

1. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона. Знайти $P(\xi = 2)$, якщо відношення суми $P(\xi = 1)$ і $P(\xi = 2)$ до $P(\xi = 3)$ рівне 3.

2. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром 1,5. Записати щільність розподілу і побудувати її графік. Записати функцію розподілу і побудувати її графік. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення не меншого 0,2 і не більшого 1.

3. У круг радіуса R навгад кидається 7 точок. Нехай ξ — число точок, що попаде у правильний трикутник, вписаний у цей круг. Знайти: $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(\xi = 3)$.

4. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл. Записати функцію розподілу випадкової величини ξ, якщо

$M(\xi) = 1$, а дисперсія рівна $\frac{1}{3}$. Знайти $P(\xi \leqslant 0,5$ або $\xi \geqslant 1,5)$.

5. Випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з $M(\xi) = -2$. Знайти $D(\xi)$, якщо відомо, що одна із точок перегину щільності розподілу є точка -5. Яким має бути ε, щоб $P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) = 0,2$.

IV.

1. Випадкова величина ξ має біномний розподіл з $n = 7$. Знайти $P(\xi = 1)$, якщо відношення $P(\xi = 1)$ до $P(\xi = 3)$ рівне 3,2.

2. Випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з параметрами -2 і 5. Записати щільність розподілу і побудувати її графік. Записати функцію розподілу. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення не меншого 0 і не більшого 3.

3. У правильний шестикутник зі стороною a навгад кидається 5 точок. Нехай ξ — число точок, що попаде у круг, вписаний у цей шестикутник. Знайти: $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(\xi = 3)$.

4. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з математичним сподіванням $M(\xi) = 2$. Знайти $D(\xi)$. Записати закон розподілу ξ. Яка з двох подій $(\xi < M\xi)$ чи $(\xi > M\xi)$ має більшу ймовірність?

5. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона з $\sigma(\xi) = 0,3$. Знайти $P(|\xi - M(\xi)| < 4\sigma(\xi))$.

V.

1. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл. Знайти $P(\xi = 2)$, якщо $P(\xi = 1) = 0,09$.

2. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[-2;3]$. Записати щільність розподілу і побудувати її графік. Записати функцію розподілу і побудувати її графік. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення більшого 0.

3. У квадрат зі стороною a навгад кидається 8 точок. Нехай ξ — число точок, що попаде у круг, вписаний у цей квадрат. Знайти: $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(\xi = 5)$.

4. Випадкова величина ξ має нормальний закон розподіл з параметрами 2 і 3. Знайти дисперсію випадкової величини $\eta = 2\xi + 1000$. Яка з двох подій $(\xi < M\xi)$ чи $(\xi > M\xi)$ має більшу ймовірність?

5. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл. Знайти $D(\xi)$, якщо відомо, що $M(\xi) = \frac{1}{2}$. Який має бути ε, щоб $P(\xi > \varepsilon) = 0,9$?

VI.

1. Випадкова величина ξ має розподіл Пуассона. Знайти $P(\xi = 1)$, якщо відношення суми $P(\xi = 2)$ і $P(\xi = 3)$ до $P(\xi = 4)$ рівне 16.

2. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром 2. Записати щільність розподілу і побудувати її графік. Записати функцію розподілу і побудувати її графік. Знайти ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення не меншого 0,2 і не більшого 0,8.

3. У круг радіуса R навгад кидається 6 точок. Нехай ξ — число точок, що попаде у правильний шестикутник, вписаний у цей круг. Знайти: $M(\xi)$, $D(\xi)$, $P(\xi = 3)$.

4. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл з параметрами $M(\xi) = 1$ і $D(\xi) = 3$. Записати функцію розподілу випадкової величини ξ. Яка з двох подій $(\xi < 0)$ чи $(\xi > 2)$ має більшу ймовірність?

5. Випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з $D(\xi) = 25$. Знайти $P(-3 \leqslant \xi \leqslant 7)$, якщо відомо, що $P(\xi < -3) = P(\xi > 7)$.

VII.

1. Випадкова величина ξ має біномний закон розподілу. $M(\xi) = 4,5$, $D(\xi) = 1,125$. Побудувати ряд розподілу і знайти ймовірність $P(2 \leqslant \xi < 4)$.

2. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку з параметрами $a = -2$, $b = 4$. Знайти $M(\xi)$ і $D(\xi)$. Записати функцію розподілу і щільність цієї випадкової величини, побудувати їх графіки.

3. Випадкова величина ξ має показниковий закон розподілу з параметром $\lambda = 0,4$. Записати щільність розподілу, побудувати графік і знайти $P(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$.

4. Випадкова величина ξ має геометричний закон розподілу з параметром $0,1$. Побудувати ряд розподілу, знайти $M(\xi)$ і $D(\xi)$.

5. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини ξ дорівнюють 10 і 5. Знайти довжину інтервалу, симетричного відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю $0,9973$ попаде ξ в результаті випробування.

VIII.

1. Знайти параметр пуассонівського розподілу, якщо відомо, що відношення $P(\xi = 3)$ до $P(\xi = 2)$ дорівнює $\frac{1}{e}$.

2. У круг радіуса кидається 5 точок. ξ — число точок, що попадуть у вписаний квадрат. Знайти числові характеристики випадкової величини ξ. Знайти ймовірність $P(\xi > 3)$.

3. ξ має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 1$, $\sigma = 3$. Записати щільність, побудувати її графік. Знайти $P(1 < \xi < 6)$.

4. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку. Знайти функцію розподілу і ймовірність події $P(0 \leqslant \xi \leqslant 2)$, якщо $M(\xi) = 1$, $D(\xi) = 3$.

5. Випадкова величина ξ має показниковий закон розподілу. $M(\xi) = \frac{1}{2}$. Яким має бути ε, щоб $P(\xi < \varepsilon) = 0,7$?

IX.

1. У правильний трикутник кидається 4 точки. ξ — число точок, які попадають у вписане коло. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ і знайти її числові характеристики.

2. Випадкова величина ξ має геометричний закон розподілу. Знайти $P(\xi = 3)$, якщо $P(\xi = 1) = 0,4$.

3. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на $[0; 5]$. Записати функцію розподілу, щільність, побудувати графіки. Знайти ймовірність $P(\xi > 3)$.

4. Випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 20$ і $\sigma = 5$. Знайти $P(15 < \xi < 25)$. Побудувати графік щільності.

5. Випадкова величина ξ має показниковий закон розподілу з параметром 4. Записати функцію розподілу, щільність, побудувати їх графіки. Знайти $P(1 < \xi < 4)$.

X.

1. Параметр біномного розподілу $n = 10$. Знайти другий параметр цього розподілу, якщо $M(\xi) = 7$. Знайти $D(\xi)$ і $D(-3\xi + 70)$. Знайти $P(\xi = 3)$.

2. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[a; b]$. Знайти b, якщо $a = 2$ і $D(\xi) = 3$. Записати щільність, побудувати її графік.

3. Максимальне значення щільності нормально розподіленої випадкової величини дорівнює $\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}$. Точки перегину гауссової кривої $\xi_1 = -4$, $\xi_2 = 2$. Знайти параметри розподілу. Побудувати графік щільності.

4. В урні 4 білих і 6 чорних куль. Навмання беруть 3 кулі. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ, що дорівнює числу білих куль у вибірці.

5. Випадкова величина ξ має геометричний закон розподілу з параметром $p = \frac{2}{3}$. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ, знайти числові характеристики.

Література

[1] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1988. — 446 с.

[2] Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 574 с.

[3] Солодовников А.С. Теория вероятностей. — М.: Просвещение, 1983. — 207 с.

[4] Томусяк А.А., Трохименко В.С., Шунда Н.М. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. Ч.І. — Вінниця, 2001. — 331 с.

[5] Larsen R., Marx M. An introduction to Mathematical Statistic and its Applications. — New Jersey, 1986. — 630 p.

[6] Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. — К.: Вища шк., 1994. — 192 с.

[7] Гмурман И.И. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая шк., 1979. — 400 с.

[8] Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986. — 327 с.

[9] Теорія ймовірностей. Збірник задач. /За заг. ред. А.В.Скорохода. — К.: Вища шк., 1976. — 384 с.

[10] Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційних технологій. — К.: Вища шк., 1995. — 351 с.

[11] Конет І.М. Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах. — Кам'янець-Подільський: "Абетка", 2001. — 217 с.

[12] Вотякова Л.А., Твердохліб Ю.С. Теорія ймовірностей. Методичні рекомендації. Ч.І. — Вінниця, 2001. — 85 с.

[13] Уиттл П. Вероятность. Пер. с англ. — М.: Наука, 1982. — 287 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК 1

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3902	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1735
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,20	0,0793	0,40	0,1554	0,60	0,2257
0,01	0,0040	0,21	0,0832	0,41	0,1591	0,61	0,2291
0,02	0,0080	0,22	0,0871	0,42	0,1628	0,62	0,2324
0,03	0,0120	0,23	0,0910	0,43	0,1664	0,63	0,2357
0,04	0,0160	0,24	0,0948	0,44	0,1700	0,64	0,2389
0,05	0,0199	0,25	0,0987	0,45	0,1736	0,65	0,2422
0,06	0,0239	0,26	0,1026	0,46	0,1772	0,66	0,2454
0,07	0,0279	0,27	0,1064	0,47	0,1808	0,67	0,2486
0,08	0,0319	0,28	0,1103	0,48	0,1844	0,68	0,2517
0,09	0,0359	0,29	0,1141	0,49	0,1879	0,69	0,2549
0,10	0,0398	0,30	0,1179	0,50	0,1915	0,70	0,2580
0,11	0,0438	0,31	0,1217	0,51	0,1950	0,71	0,2611
0,12	0,0478	0,32	0,1255	0,52	0,1985	0,72	0,2642
0,13	0,0517	0,33	0,1293	0,53	0,2019	0,73	0,2673
0,14	0,0557	0,34	0,1331	0,54	0,2054	0,74	0,2703
0,15	0,0596	0,35	0,1368	0,55	0,2088	0,75	0,2734
0,16	0,0636	0,36	0,1406	0,56	0,2123	0,76	0,2764
0,17	0,0675	0,37	0,1443	0,57	0,2157	0,77	0,2794
0,18	0,0714	0,38	0,1480	0,58	0,2190	0,78	0,2823
0,19	0,0753	0,39	0,1517	0,59	0,2224	0,79	0,2852

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,80	0,2881	1,05	0,3531	1,30	0,4032	1,55	0,4394
0,81	0,2910	1,06	0,3554	1,31	0,4049	1,56	0,4406
0,82	0,2939	1,07	0,3577	1,32	0,4066	1,57	0,4418
0,83	0,2967	1,08	0,3599	1,33	0,4082	1,58	0,4429
0,84	0,2995	1,09	0,3621	1,34	0,4099	1,59	0,4441
0,85	0,3023	1,10	0,3643	1,35	0,4115	1,60	0,4452
0,86	0,3051	1,11	0,3665	1,36	0,4131	1,61	0,4463
0,87	0,3078	1,12	0,3686	1,37	0,4147	1,62	0,4474
0,88	0,3106	1,13	0,3708	1,38	0,4162	1,63	0,4484
0,89	0,3183	1,14	0,3729	1,39	0,4177	1,64	0,4495
0,90	0,3159	1,15	0,3749	1,40	0,4192	1,65	0,4505
0,91	0,3186	1,16	0,3770	1,41	0,4207	1,66	0,4515
0,92	0,3212	1,17	0,3790	1,42	0,4222	1,67	0,4525
0,93	0,3238	1,18	0,3810	1,43	0,4236	1,68	0,4535
0,94	0,3264	1,19	0,3830	1,44	0,4251	1,69	0,4545
0,95	0,3289	1,20	0,3849	1,45	0,4265	1,70	0,4554
0,96	0,3315	1,21	0,3869	1,46	0,4279	1,71	0,4564
0,97	0,3340	1,22	0,3883	1,47	0,4292	1,72	0,4573
0,98	0,3365	1,23	0,3907	1,48	0,4306	1,73	0,4582
0,99	0,3389	1,24	0,3925	1,49	0,4319	1,74	0,4591
1,00	0,3413	1,25	0,3944	1,50	0,4332	1,75	0,4599
1,01	0,3438	1,26	0,3962	1,51	0,4345	1,76	0,4608
1,02	0,3461	1,27	0,3980	1,52	0,4357	1,77	0,4616
1,03	0,3485	1,28	0,3997	1,53	0,4370	1,78	0,4625
1,04	0,3508	1,29	0,4015	1,54	0,4382	1,79	0,4633

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

Відповіді, вказівки, розв'язання

Модуль 2

2.1 **3.** а) гіпергеометричний з параметрами $(30, 20, 5)$; б) біномний з параметрами $5, \frac{2}{3}$; в) геометричний з параметром $\frac{2}{3}$; г) розподіл Пуассона з параметром 8; д) ряд розподілу має вигляд $P(\xi = k) = \frac{1}{9}$, де $k = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. **4.** $x = 0,3$, в) $P(2 \leqslant \xi \leqslant 4) = 0,85$. **5.** $\frac{12}{21}$. *Вказівка.* Побудуйте ряд розподілу для випадкової величини ξ — число очок, яке випадає при киданні грального кубика, скориставшись тим, що $P(\xi = i) = ki$ і $\sum\limits_{i=1}^{6} P(\xi = i) = 1$. **6.** 0,3. *Вказівка.* Побудуйте ряд розподілу для випадкової величини ξ, значеннями якої є 3, 4, 5, а ймовірності цих значень знайдіть за класичним означенням. **7.** *Вказівка.* На просторі елементарних подій $\Omega = \{(i, j, k) \,|\, i, j, k = \overline{1, 6}\}$ побудуйте функцію за правилом $(i, j, k) \mapsto \min\{i, j, k\}$. Очевидно, що ця функція може набирати значень $\overline{1, 6}$. Ймовірність того, що випадкова величина ξ набере значення r, рівняється $\frac{n_r}{216}$, де n_r — число елементарних подій (i, j, k), для яких $\min\{i, j, k\} = r$. Для прикладу $P(\xi = 1) = \frac{91}{216}$, $P(\xi = 2) = \frac{61}{216}$, $\ldots$, $P(\xi = 5) = \frac{7}{216}$, $P(\xi = 6) = \frac{1}{216}$.

8.

ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P(\xi = i)$	$\frac{15}{216}$	$\frac{31}{216}$	$\frac{31}{216}$	$\frac{30}{216}$	$\frac{28}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

9. а) $m_0 = [np + p]$, якщо $np + p$ — дробове, $m_0 = np + p$ і $m + 0 - 1$, якщо $np + p$ — ціле; б) $m_0 = 0$; в) $[\lambda]$. **10.** $\lambda = 0,82$,

0	1	2	3	4	5	6^+
482	396	162	44	9	1	2

2.2 **5.** а), в), д), є), з), и). *Вказівка.* Не є функцією розподілу: б) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \frac{1}{2}$; г) не є неспадною; е) у точці $x = 1$ вона неперервна справа; ж) функція не визначена у точці $x = 0$ (якщо покласти $F(0) = 0$, то ж) є функція розподілу). У пункті и) скористатись інтегралом Пуассона $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6. а) $a = b > 0$; б) $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$; в) $a = 0$, $b = 1$, $c < 0$; г) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\pi}$; д) $a = -b = 1$, $c < 0$; е) $a = 0$, $b = 1$, $c = 8$; є) $a = 0$, $b = \frac{2}{\ln 8}$, $c = \frac{1}{3}$; ж) $c = 0$, $a = -1$, $b = 2$; з) $a > 0$, $4ac - b^2 = 4\pi^2$. *Вказівка.* Подати $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{\pi^2}{a}$. Тоді $\frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{\pi^2}{a^2}} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{2\pi} + C$, де C слід взяти рівним $\frac{1}{2}$; и) $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$, $b^2 + 3bc + 4c = 6a$. *Вказівка.* Очевидно, що $f(x)$ має бути невід'ємною, $a < 0$ і $b^2 - 4ac > 0$. Якщо x_1 і x_2 корені квадратного тричлена, то $\int\limits_{x_1}^{x_2}(ax^2 + bx + c)dx = 1$.

7. $F(x) = \sum\limits_{k:k<x} \frac{C_4^k C_6^{4-k}}{210}$. **8.** $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ \frac{31}{150}, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{113}{150}, & \text{якщо } 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

Розв'язання. Нехай H_i $(i = 0, 1, 2)$ подія, яка полягає у тому, що серед взятих двох куль з першої урни i білих. Тоді $P(H_0) = 0,1$, $P(H_1) = 0,6$, $P(H_2) = 0,3$. Якщо склад другої урни 4 білі і 6 чорних куль, то ряд розподілу для числа витягнутих куль має вигляд $\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{15}{45} & \frac{24}{45} & \frac{6}{45} \end{array}$. Якщо склад другої урни 5 білих і 5 чорних куль, то ряд розподілу для числа витягнутих з неї білих куль має вигляд $\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{10}{45} & \frac{25}{45} & \frac{10}{45} \end{array}$. І, нарешті, якщо склад другої урни 6 білих і 4 чорні кулі, то ряд розподілу для числа витягнутих з неї білих куль має вигляд $\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{6}{45} & \frac{24}{45} & \frac{15}{45} \end{array}$. З врахуванням ймовірностей гіпотез маємо ряд розподілу для числа витягнутих з другої урни білих куль $\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{31}{150} & \frac{82}{150} & \frac{37}{150} \end{array}$. **9.** $F(x) =$
$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\frac{x}{2}, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$ *Розв'язання.* Нехай ξ — довжина хорди всередині кола. Якщо $\xi = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$,

то величина кута, який утворює промінь з віссю Ox, визначається з рівняння $\cos\alpha = \frac{x}{2}$. Тоді довжина хорди ξ буде меншою x, якщо $|\alpha| > \arccos\frac{x}{2}$. За геометричним означенням ймовірності маємо $P(\xi < x) = \frac{\pi - 2\arccos\frac{x}{2}}{\pi}$. **10.** $F(x) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{\pi x^2}{2}, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{2}x^2\left(2\cos(2\arccos\frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{2x}) + 4\arccos\frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{2x}\right), & \text{якщо} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

2.3 **4.** Так. $F(x) = 0$, якщо $x \leqslant 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}$, якщо $x > 0$. 0,594. *Розв'язання.* Очевидно, що $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) \geqslant 0$. Крім того, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{-\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx =$
$= \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{0}^{A} \lambda^2 x e^{-\lambda x}dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^A =$
$= \lim\limits_{A\to+\infty} \left(-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1\right) = 1$. Отже, задана функція є щільністю розподілу. Для $x > 0$ $\ F(x) = \int\limits_{0}^{x} \lambda^2 t e^{-\lambda t}dt =$
$= \left(-\lambda t e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}\right)\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}$. При побудові графіків врахувати, що точка $x = \frac{1}{\lambda}$ є точкою максимуму для функції $f(x)$ і точкою перегину для функції $F(x)$, а точка $x = \frac{2}{\lambda}$ точкою перегину для функції $f(x)$. $P(\xi < \frac{2}{\lambda}) = F(\frac{2}{\lambda}) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2}$.
5. Так. $F(x) = 0$, якщо $x \leqslant 0$, $F(x) = x^2$, якщо $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, $F(x) = -2 + 6x - 3x^2$, якщо $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, $F(x) = 1$, якщо $x > 1$. *Розв'язання.* Оскільки $2x \geqslant 0$ на проміжку $[0; \frac{1}{2}]$, $6 - 6x \geqslant 0$ на проміжку $(\frac{1}{2}; 1]$, то $f(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Перевіримо, чи виконується друга характеристична властивість щільності. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} 2xdx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(6 - 6x)dx = x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} + 6x - 3x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$
$= \frac{1}{4} + 6 - 3 - 3 + \frac{3}{4} = 1$. Отже, задана функція є щільністю розподілу ймовірностей. Обчислимо $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Для $x \leqslant 0$

$\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$, для $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ $\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} 2tdt = x^2$, для $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$

$\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} 2tdt + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} (6-6t)dt = \frac{1}{4} + 6t - 3t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{x} = 6x - 3x^2 - 2$,

для $x > 1$ $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ зображені на рисунках 23, 24.

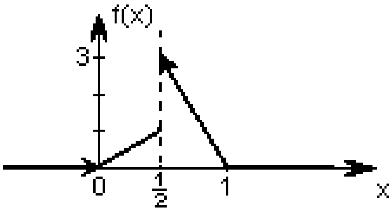


Рис.23

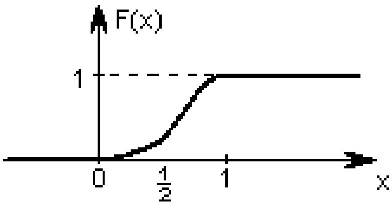


Рис.24

$P(\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}) = F(\frac{3}{4}) - F(\frac{1}{4}) = 6 \cdot \frac{3}{4} - 3\,(\frac{3}{4})^2 - 2 - (\frac{1}{4})^2 = \frac{9}{2} - \frac{27}{16} - 2 - \frac{1}{16} = \frac{3}{4}$. **6.** а) $\frac{2}{3}$; б) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ \frac{2}{3}(x+1), & \text{якщо } 0 < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{якщо } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Момент переїзду автомобіля через перехрестя є випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі, що рівняється періоду зміни кольорів у світлофорі, тобто 1,5 хв. Тому ймовірність того, що автомобіль проїде перехрестя, не зупиняючись, рівняється $\frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$. А ймовірність того, що він змушений зупинитись рівняється $\frac{1}{3}$. Якщо автомобіль під'їхав до світлофора на зелене світло, то час чекання рівняється нулеві з ймовірністю 1, а тому функція розподілу часу чекання у цьому випадку має вигляд $F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$ Якщо ж автомобіль під'їхав до світлофора на червоне світло, то його час чекання є випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі $(0; 0,5)$, а тому функція розподілу часу чекання має вигляд $F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{x}{0,5}, & \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 0,5, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 0,5. \end{cases}$ За формулою повної ймовірності функція розподілу часу чекання має вигляд $F(x) = \frac{2}{3}F_1(x) + \frac{1}{3}F_2(x)$.

Зауваження. Ми побудували тут так звану *суміш розподілів*. У загальному випадку змішування розподілів здійснюється за правилом: якщо маємо набір функцій розподілу $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\ldots$, $F_n(x)$, $\ldots$ і послідовність (p_n), де $p_n > 0$ $\forall n$ і $\sum\limits_n p_n = 1$, то функція $F(x) = \sum\limits_n p_n F_n(x)$ є функцією розподілу. Очевидно, що у цьому випадку вона може не належати ні до функцій розподілу дискретного, ні до неперервного типу. Однак виявляється, що кожна функція розподілу (фундаментальна теорема Анрі Лебега) може бути поданою у вигляді $F(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x) + p_3F_3(x)$, де $p_i \geqslant 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $F_1(x)$ — дискретна функція розподілу, $F_2(x)$ — абсолютно неперервна функція розподілу, $F_3(x)$ — сингулярна функція розподілу (неперервна функція розподілу, яка не має щільності).

7. $p = \frac{1}{2}$. **8.** Заокруглено до цілих чисел 1, 2, 10, 29, 69, 123, 177, 198, 173, 117, 63, 25, 10, 3, 0. *Вказівка.* Для кожного інтервалу $(c_k; c_{k+1})$ $(k = \overline{1,15})$ знайти $P(c_k < \xi < c_{k+1}) = \Phi(\frac{c_{k+1} - 165,35}{6}) - \Phi(\frac{c_k - 165,35}{6})$ і кожне з цих чисел помножити на 1000, округливши до цілих. **9.** *Доведення.* Випадкова величина ν_n (число проведених випробувань до першої появи події A) має геометричний розподіл з параметром p_n. А тому для $t > 0$ $P(\nu_n < [nt]) = 1 - P(\nu_n \geqslant [nt]) = 1 - \sum\limits_{k=[nt]} p_n(1-p_n)^k = 1 - p_n(1-p_n)^{[np]} \sum\limits_{k=0}^{\infty}(1-p_n)^k = 1 - \frac{p_n(1-p_n)^{[np]}}{p_n} = 1 - (1-p_n)^{[nt]}$. Якщо врахувати, що $nt \leqslant [nt] < nt + 1$, і те, що $\lim\limits_{n\to\infty}(1-p_n)^{nt} = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{nt} = e^{-\lambda t}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1-p_n)^{nt+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{nt}(1-\frac{\lambda}{n}) = e^{-\lambda t}$, то, перейшовши до границі, маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} P(\nu_n < [nt]) = \lim\limits_{n\to\infty}(1-(1-p_n)^{[nt]}) =$ $= 1 - e^{-\lambda t}$. **10.** $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ \frac{2}{a^2}(a-x), & \text{якщо} \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 0, & \text{якщо} \quad x > a. \end{cases}$ *Розв'язання.* Позначимо через ξ час між моментами приходу осіб на місце зустрічі і, скориставшись геометричним означенням ймовірності, побудуємо функцію розподілу цієї випадкової величини. Очевидно, що ця випадкова величина може приймати будь-яке значення з домовленого проміжку часу $[0; a]$. А тому $F_\xi(x) = 0$ для $x \leqslant 0$ і $F_\xi(x) = 1$ для $x > 1$. Подія, яка полягає у тому, що час між моментами приходу осіб на місце зустрічі буде меншим x є множина A точок квадрата $Q = \{(u, v) \,|\, 0 \leqslant u \leqslant a,\, 0 \leqslant v \leqslant a\}$, які задовольняють умову $|u - v| < x$. Тоді за геометричним означенням ймовірності маємо: $P(\xi < x) = \frac{m(A)}{m(Q)} = \frac{\text{пл } A}{\text{пл } Q} = \frac{a^2-(a-x)^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}\,(2ax - x^2)$.

2.4 **4.** $P(\xi = i, \eta = j) = \frac{1}{36}$. **5.** $P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{10}{45}$, $P(\xi = 0, \eta = 1) = \frac{15}{45}$, $P(\xi = 0, \eta = 2) = \frac{3}{45}$, $P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{10}{45}$, $P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{6}{45}$, $P(\xi = 2, \eta = 0) = \frac{1}{45}$. *Вказівка.* Відносно загублених куль маємо 6 гіпотез: H_1 — загублено 2 чорні, H_2 — 2 білі, H_3 — 2 жовті, H_4 — одна чорна і одна біла, H_5 — одна чорна і одна жовта, H_6 — одна біла і одна жовта кулі. Побудувати сумісний розподіл випадкового вектора (ξ, η) за умови, що мала місце кожна з гіпотез. Як приклад, сумісний розподіл ймовірностей випадкового вектора (ξ, η) за умови, що було загублено дві чорні кулі, має вигляд $P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{10}{28}$, $P(\xi = 0, \eta = 1) = \frac{15}{28}$, $P(\xi = 0, \eta = 2) = \frac{3}{28}$. *Зауваження.* Зверніть увагу, що побудований розподіл збігається з розподілом, отриманим у прикладі 1. **6.** Ймовірність того, що в n партіях перший шахіст виграє i, програє j і зведе в нічию $n-i-j$ партій, рівняється $P_n(\xi = i, \eta = j) = \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\,p^i q^j (1-p-q)^{n-i-j}$. Якщо ν — тривалість турніру, то ймовірність того, що турнір завершиться за n партій, рівняється $P(\nu = n) = \sum\limits_{j=0}^{11} P_{n-1}(\xi = 11, \eta = j)\, p\, +$

$+\ \sum\limits_{i=0}^{11} P_{n-1}(\xi = i, \eta = 11)\, q.$ **7.**

а) $F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \text{ або } y\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}xy, & 0<x\leqslant 2, 0<y\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}x, & 0<x\leqslant 2, y>1,\\ y, & x>2, 0<y\leqslant 1,\\ 1, & x>2, y>1,\end{cases}$ $f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{в усіх інших випадках,}\end{cases}$ $f_\eta(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{в усіх інших випадках;}\end{cases}$

б) $F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, x\leqslant 0 \text{ або } y\leqslant 0,\\ (1-e^{-x})(1-e^{-y}), x>0, y>0,\end{cases}$

$f_\xi(x)=f_\eta(y)=0,\ x<0, y<0,\qquad f_\xi(x) = xe^{-x}, f_\eta = ye^{-y};$

в) $F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \text{ або } y\leqslant 0,\\ \frac{1}{3}\,(x^2y+2xy^2), & 0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}\,(x^2+2x), & 0<x\leqslant 1,\ y>1,\\ \frac{1}{3}\,(y+2y^2), & x>1,\ 0<y\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\ y>1,\end{cases}$

$f_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x+1), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{в усіх інших випадках,}\end{cases}$ $f_\eta(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(1+4y), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{в усіх інших випадках;}\end{cases}$

г) $F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\leqslant 0 \text{ або } y\leqslant 0,\\ 1-e^{-y}-ye^{-y}-\frac{1}{(x+1)^2}+ & \\ +\frac{y}{x+1}e^{-y(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}e^{-y(x+1)}, & \text{якщо } x>0,\ y>0,\end{cases}$

$f_\xi(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x<0,\\ \frac{2}{(x+1)^3}, & \text{якщо } x\geqslant 0,\end{cases}$ $f_\eta(y)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } y<0,\\ ye^{-y}, & \text{якщо } y\geqslant 0.\end{cases}$

Розв'язання. Якщо $x \leqslant 0$ або $y \leqslant 0$, то $F_{\xi,\eta}(x,y) = 0$. Нехай $x > 0$, $y > 0$. Тоді $F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_0^x\int\limits_0^y t^2e^{-t(s+1)}dsdt =$ $= \int\limits_0^y t^2dt\int\limits_0^x e^{-t(s+1)}ds = \int\limits_0^y \left(-te^{-t(s+1)}\right)\Big|_0^x dt = \int\limits_0^y t(e^{-t}-e^{-t(x+1)})dt =$ $= t(-e^{-t}+\frac{1}{x+1}e^{-t(x+1)})\Big|_0^y + \int\limits_0^y(e^{-t} - \frac{1}{x+1}e^{-t(x+1)})dt = -ye^{-y}+$

$+\frac{y}{x+1}e^{-y(x+1)} - e^{-t} + \frac{1}{(x+1)^2}e^{-t(x+1)}\Big|_0^y = 1 - e^{-y} - ye^{-y} - \frac{1}{(x+1)^2} +$ $+\frac{y}{x+1}e^{-y(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}e^{-y(x+1)}$. Згідно формул (2.4.18), (2.4.19) маємо: $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy = \int\limits_{0}^{+\infty} y^2 e^{-y(x+1)}dy$. В останньому інтегралі проведемо заміну $u = y(x+1)$, $du = (x+1)dy$. Тоді $f_\xi(x) = \frac{1}{(x+1)^3}\int\limits_0^{+\infty} u^2 e^{-u}du = \frac{1}{(x+1)^3}\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_0^A u^2 e^{-u}du = \frac{1}{(x+1)^3} \times$ $\times \lim\limits_{A\to+\infty}(-u^2e^{-u} - 2ue^{-u} - 2e^{-u})|_0^A = \frac{2}{(x+1)^3}$, $f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dx =$ $= \int\limits_0^{+\infty} y^2 e^{-y(x+1)}dy = ye^{-y}$. **8.** $F_{\xi,\eta}(x,y) = (1-e^{-x})(1-e^{-\frac{y}{2}})$, якщо $x > 0$, $y > 0$. $P((\xi,\eta) \in Q) = F_{\xi,\eta}(2,2) - F_{\xi,\eta}(2,1) - F_{\xi,\eta}(1,2) +$ $+ F_{\xi,\eta}(1,1) \approx 0,206$. **9.** а) $e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{9}{8}} \approx 0,2819$; б) $4(\Phi(\frac{3}{2}) - \Phi(1))^2 \approx 0,0338$; в) $4(\Phi^2(\frac{1,5}{\sqrt{2}}) - \Phi^2(\frac{1}{\sqrt{2}})) \approx 0,2348$. *Розв'язання.* Згідно з умовою випадкова величина ξ має щільність розподілу ймовірностей $f_\xi(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}$, а випадкова величина η має щільність розподілу ймовірностей $f_\eta(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}$. Тоді щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (ξ,η) є функція $f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x)f_\eta(y) =$ $= \frac{1}{8\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}$. а) $P((\xi,\eta) \in D_1) = \iint\limits_{D_1} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \frac{1}{8\pi} \times$ $\times \iint\limits_{D_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_2^3 \rho e^{-\frac{\rho^2}{8}}d\rho$ (здійснено перехід до полярних координат) $= -e^{-\frac{\rho^2}{8}}\Big|_2^3 = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{9}{8}}$. б) Область $D =$ $= \{(x,y)|\, 2 \leqslant \min(|x|,|y|), \max(|x|,|y|) \leqslant 3\} = \{(x,y)|\, 2 \leqslant x \leqslant 3,$ $2 \leqslant y \leqslant 3\} \cup \{(x,y)|-3 \leqslant x \leqslant -2, 2 \leqslant y \leqslant 3\} \cup \{(x,y)|-3 \leqslant x \leqslant -2,$ $-3 \leqslant y \leqslant -2\} \cup \{(x,y)|\, 2 \leqslant x \leqslant 3, -3 \leqslant y \leqslant -2\}$, тобто є об'єднанням чотирьох квадратів. А тому в силу парності функції $f_{\xi,\eta}(x,y)$ $P((\xi,\eta) \in D_2) = 4\int\limits_2^3\int\limits_2^3 \frac{1}{8\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \times$

$\times\int\limits_{2}^{3} e^{-\frac{x^2}{8}}dx \cdot \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-2}^{3} e^{-\frac{y^2}{8}}dy = 4(\Phi(\frac{3}{2}) - \Phi(1))^2$. в) Область $D_3 = \{(x,y) \mid 2 \leqslant |x| + |y| \leqslant 3\}$ є рамка, яка отримується вилученням з квадрата $Q_1 = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 3\}$ квадрата $Q_2 = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leqslant 2\}$. Тому $P((\xi,\eta) \in D_3) = \iint\limits_{Q_1} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy - \iint\limits_{Q_2} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$. У цих інтегралах проведемо заміну змінних $x + y = u$, $-x + y = v$. Тоді $x = \frac{1}{2}(u - v)$, $y = \frac{1}{2}(u + v)$, $\dfrac{\partial(xy)}{\partial u \partial v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$ і $P((\xi,\eta) \in D_3) = \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{Q_1} e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy - \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{Q_21} e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}dxdy =$
$=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-3}^{3}\int\limits_{-3}^{3} e^{-\frac{u^2+v^2}{16}}\frac{1}{2}dudv - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-2}^{2} e^{-\frac{u^2+v^2}{16}}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-3}^{3} e^{-\frac{u^2}{16}}du \times$
$\times \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-3}^{3} e^{-\frac{v^2}{16}}dv - \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-2}^{2} e^{-\frac{u^2}{16}}du \quad \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-2}^{2} e^{-\frac{v^2}{16}}dv =$
$= 4(\Phi^2(\frac{3}{2\sqrt{2}}) - \Phi^2(\frac{1}{\sqrt{2}}))$. **10.** $a = \frac{1}{\pi^2} \cdot f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $f_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Випадкові величини ξ і η незалежні.

2.5 **4.**

η_1	-2	-1	0	1	2
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$

,

η_2	-1	0	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

$P(\eta_1 = 0, \eta_2 = -1) = \frac{1}{2}$, $P(\eta_1 = -1, \eta_2 = 0) = \frac{1}{12}$, $P(\eta_1 = 1, \eta_2 = 0) = \frac{1}{6}$, $P(\eta_1 = -2, \eta_2 = 1) = \frac{1}{8}$, $P(\eta_1 = 2, \eta_2 = 1) = \frac{1}{8}$. **5.** $\eta = ((\xi_1,\xi_2),(1,1)) = \xi_1 + \xi_2$, $P(\eta = 0) = P(\eta = 3) = \frac{1}{6}$, $P(\eta = 1) = P(\eta = 2) = \frac{1}{3}$. **6.** $f_{\xi_1-\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1 - |x|, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$

$f_{|\xi_1-\xi_2|}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2(1-x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$ $f_{\xi_1\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ -\ln x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$

$f_{\frac{\xi_1}{\xi_2}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2x^2}, & x > 1. \end{cases}$ *Вказівка*. Оскільки ξ_1, ξ_2 —

незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $[0;1]$, то їх сумісна щільність є функція $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=1$, якщо $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=0$ в усіх інших випадках. Тоді $P((\xi_1,\xi_2)\in G)=\iint\limits_{G\cap Q}dxdy$, тобто рівняється площі фігури $G\cap Q$, де Q — одиничний квадрат. А тому $F_{\xi_1-\xi_2}(z)=$
$$=\begin{cases}0, & z\leqslant -1,\\ \frac{1}{2}(1+z)^2, & -1<z\leqslant 0,\\ 1-\frac{1}{2}(1-z)^2, & 0<z\leqslant 1,\\ 1, & z>1,\end{cases}\quad F_{|\xi_1-\xi_2|}(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ 1-(1-z)^2, & 0<z\leqslant 1,\\ 1, & z>1,\end{cases}$$
$$F_{\xi_1\cdot\xi_2}(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ z-z\ln z, & 0<z\leqslant 1,\\ 1, & z>1.\end{cases}\quad F_{\frac{\xi_1}{\xi_2}}(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}z, & 0<z\leqslant 1,\\ 1-\frac{1}{2z}, & z>1.\end{cases}$$

7. $f_{\xi_1-\xi_2}(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, $f_{|\xi_1-\xi_2|}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\end{cases}=f_{\xi_1}(x)$, $f_{\frac{\xi_1}{\xi_2}}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{(x+1)^2}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ *Розв'язання.* Знайдемо функцію розподілу випадкової величини $\xi_1-\xi_2$. Маємо: $F_{\xi_1-\xi_2}(z)=$ $=\iint\limits_{x-y<z}f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0,\\ x-y<z}}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$. Якщо $z\leqslant 0$, то $F_{\xi_1-\xi_2}(z)=\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\left(\int\limits_{x-z}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy\right)dx=\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\left(-e^{-\lambda y}\Big|_{x-z}^{+\infty}\right)dx=$ $=e^{\lambda z}\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-2\lambda x}=\frac{1}{2}e^{\lambda z}$. Якщо ж $z>0$, то $F_{\xi_1-\xi_2}(z)=\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}\times$ $\times\left(\int\limits_0^{z+y}\lambda e^{-\lambda x}dx\right)dy=\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}\left(1-e^{-\lambda(z+y)}\right)dy=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda z}$. Таким чином, $F_{\xi_1-\xi_2}(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda z}, & \text{якщо } z\leqslant 0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda z}, & \text{якщо } z>0.\end{cases}$ Знайдемо функцію розподілу випадкової величини $|\xi_1-\xi_2|$. Маємо: $F_{|\xi_1-\xi_2|}(z)=\iint\limits_{|x-y|<z}f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)dxdy=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0,\\ |x-y|<z}}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$.
Область інтегрування при $z>0$ має вигляд (Рис.25).

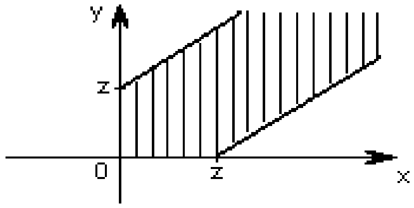


Рис.25

Тоді $F_{|\xi_1-\xi_2|}(z) = \int\limits_0^z \lambda e^{-\lambda x}(\int\limits_0^{z+x} \lambda e^{-\lambda y} dy)dx + \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}(\int\limits_{x-z}^{z+x} \lambda e^{-\lambda y} dy)dx =$
$= \int\limits_0^z \lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda(z+x)})\ dx + \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}(e^{-\lambda(x-z) - e^{-\lambda(x+z)}})\ dx =$
$= 1 - e^{-\lambda z} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda z} + \frac{1}{2}e^{-3\lambda z} + \frac{1}{2}e^{-2\lambda z} - \frac{1}{2}e^{-3\lambda z} = 1 - e^{-\lambda z}$. Для знаходження щільності розподілу ймовірностей випадкової величини $\frac{\xi_1}{\xi_2}$ скористаємось формулою (2.5.12). Маємо для $x > 0$ $f_{\frac{\xi_1}{\xi_2}}(x) = \int\limits_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda x t}\lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda^2 \int\limits_0^{+\infty} t e^{-\lambda(x+1)t} dt =$
$= \lambda(-\frac{t}{x+1}e^{-\lambda(x+1)t}\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{x+1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1)t} dt) = -\frac{\lambda}{x+1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda(x+1)t} dt =$
$= -\frac{1}{(x+1)^2}e^{-\lambda(x+1)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{(x+1)^2}$. *Зауваження.* Згідно з формулою (2.5.10) для $x > 0$ $f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t}\lambda e^{-\lambda \frac{x}{t}}\lambda e^{-\lambda t} dt =$
$= \lambda^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t}\exp\{-\frac{\lambda x}{t} - \lambda t\} dt$. Останній інтеграл, залежний від параметра x не подається як елементарна функція. Скориставшись таблицями інтегралів[1] (с.354, 973), можемо записати останній інтеграл у більш привабливому вигляді:

$$f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(x) = \lambda^2 \int\limits_0^{+\infty} \cos(2\lambda\sqrt{x}\,\mathrm{sh}\,t) dt.$$

[1]Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 1097 с.

9. $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1-\xi_2$ мають нормальний закон розподілу з параметрами 0, $\sqrt{2}$; $f_{\xi_1^2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}$, $f_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
Розв'язання. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини $\xi_1+\xi_2$. Скориставшись тим, що $f_{\xi_1}(x)=f_{\xi_2}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, маємо: $F_{\xi_1+\xi_2}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{z-x}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dydx=$ (у внутрішньому інтегралі заміна $t=y+x$) $=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}(\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\frac{(t-x)^2}{2}}dt)dx=$ (змінюємо порядок інтегрування) $=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{z}(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{(t-x)^2}{2}}dx)dt$. Подамо показник експоненти у вигляді $-\frac{1}{2}(2x^2-2tx+t^2)=-\frac{1}{2}\times$ $\times(2x^2-2tx+\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2})=-\frac{1}{2}((\sqrt{2}x+\frac{t}{\sqrt{2}})^2+\frac{t^2}{2})$, і проведемо заміну $u=\sqrt{2}x+\frac{t}{\sqrt{2}}$ у внутрішньому інтегралі. Тоді $F_{\xi_1+\xi_2}(z)=\frac{1}{2\pi}\times$ $\times\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{4}}(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}du)dt=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{4}}dt=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{4}}dt$.
Отже, $f_{\xi_1+\xi_2}(z)=F'_{\xi_1+\xi_2}(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}$. Аналогічно для випадкової величини $\xi_1-\xi_2$. $F_{\xi_1-\xi_2}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}(\int\limits_{-\infty}^{z+y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx)dx=$ $=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Для випадкової величини ξ_1^2 маємо: $F_{\xi_1^2}(z)=$ $=P(\xi_1^2<z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ P(-\sqrt{z}<\xi_1<\sqrt{z}), & z>0.\end{cases}$ Враховуючи те, що $P(-\sqrt{z}<\xi_1<\sqrt{z})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\sqrt{z}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, дістаємо $F_{\xi_1^2}(z)=\begin{cases}0, \ z\leqslant 0,\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\sqrt{z}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\end{cases}$ $f_{\xi_1^2}(z)=\begin{cases}0, \ z<0,\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z}{2}}\frac{1}{x}.\end{cases}$ Для випадкової величини $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ $F_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}<z}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy$

для $z > 0$, рівняється нулю для $z \leqslant 0$. Здійснивши перехід до полярних координат, маємо: $F_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^z \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = = -e^{-\frac{\rho^2}{2}}\Big|_0^z = 1 - e^{-\frac{z^2}{2}}$ і $f_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}(z) = F'_{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}(z) = ze^{-\frac{z^2}{2}}$ для $z > 0$. **9.** В обох випадках $\frac{1}{2}$. *Розв'язання.* Квадратний тричлен $x^2 - 2\xi_1 x + \xi_2^2$ має комплексні корені, коли $\xi_1^2 - \xi_2^2 < 0$. а) У випадку, коли ξ_1, ξ_2 — незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $[0;1]$ $\xi_1^2 - \xi_2^2$ набирає значень з відрізка $[-1;1]$. Тоді $F_{\xi_1^2-\xi_2^2}(z) = \iint\limits_{x^2-y^2<z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)\, dxdy$ для $-1 < z \leqslant 1$, $F_{\xi_1^2-\xi_2^2}(z) = 0$, якщо $z \leqslant -1$, $F_{\xi_1^2-\xi_2^2}(z) = 1$, якщо $z > 1$. Якщо $z < 0$, то $x^2 - y^2 = z$ верхня гілка гіперболи, якщо ж $z > 0$, то $x^2 - y^2 = z$ права гілка гіперболи. Тоді область інтегрування має вигляд (Рис.26). А оскільки підінтегральна функція

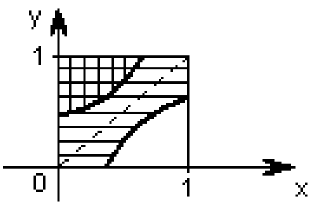


Рис.26

рівняється 1, то для $z < 0$ інтеграл рівний площі фігури з подвійною штриховкою, а при $z > 0$ — площі частини квадрата над гіперболою $x^2 - y^2 = z$.

Таким чином, маємо для $-1 < z < 0$

$F_{\xi_1^2-\xi_2^2}(z) = \int\limits_0^{\sqrt{1+z}} (1 - \sqrt{x^2 + |z|}) dz = \sqrt{1+z} - \int\limits_0^{\sqrt{1+z}} \sqrt{x^2 - z}\, dz = = \sqrt{1+z} - \left(\frac{x\sqrt{x^2-z}}{2} - \frac{z}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - z}|\right)\Big|_0^{\sqrt{1+z}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+z} - \frac{z}{2} \times \times \ln(1 + \sqrt{1+z}) - \frac{z}{2}\ln\sqrt{-z}$, а для $0 < z < 1$ $F_{\xi_1^2-\xi_2^2}(z) = 1 - - \int\limits_{\sqrt{z}}^1 \sqrt{x^2 - z}\, dx = 1 - \left(\frac{x\sqrt{x^2-z}}{2} - \frac{z}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - z}|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^1 = 1 - \frac{1}{2} \times \times \sqrt{1-z} + \frac{z}{2}(\ln(1 + \sqrt{1-z}) - \ln\sqrt{z})$. Шукана ймовірність рівняється $F_{\xi_1^2-\xi_2^2}(0) = \lim\limits_{z\to 0-0}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+z} - \frac{z}{2}\ln(1+\sqrt{1+z}) + \frac{z}{2}\ln\sqrt{-z}\right) = = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0-0} z\ln\frac{\sqrt{-z}}{1+\sqrt{1+z}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0-0} \ln\frac{\sqrt{-z}}{1+\sqrt{1+z}} : \frac{1}{z} =$

(скористаємось правилом Лопіталля) $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lim\limits_{z\to 0-0} \frac{1+\sqrt{1+z}}{\sqrt{-z}}\times$
$\times\frac{-\frac{1}{2\sqrt{-z}}(1+\sqrt{1+z})-\frac{\sqrt{-z}}{2\sqrt{1+z}}}{(1+\sqrt{1+z})^2}(-z^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\lim\limits_{z\to 0-0}((1+\sqrt{1+z})z+\frac{z^2}{\sqrt{1+z}}) = \frac{1}{2}$.
Можна зробити по-іншому. Знайти щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\xi_1^2-\xi_2^2$ і показати, що вона парна функція. Справді, якщо $-1 < z < 0$, то $f_{\xi_1^2-\xi_2^2}(z) = \frac{1}{4\sqrt{1+z}} + \frac{1}{2}(\ln(1+\sqrt{1+z}) - \ln\sqrt{-z}) - \frac{z}{2}(\frac{1}{2\sqrt{1+z}\,(1+\sqrt{1+z})} - \frac{1}{2z})$, якщо ж $0 < z < 1$, то $f_{\xi_1^2-\xi_2^2}(z) = \frac{1}{4\sqrt{1-z}} + \frac{1}{2}(\ln(1+\sqrt{1-z}) - \ln\sqrt{z}) + \frac{z}{2}(\frac{-1}{2\sqrt{1-z}\,(1+\sqrt{1-z})} - \frac{1}{2z})$. Очевидно, що $f_{\xi_1^2-\xi_2^2}(-z) = f_{\xi_1^2-\xi_2^2}(z)$.
б) У випадку, коли ξ_1, ξ_2 незалежні і мають показниковий розподіл з параметром λ, $P(\xi_1^2 - \xi_2^2 < 0) = \int\limits_0^{+\infty}(\int\limits_0^y \lambda e^{-\lambda x}dx)\lambda\times$ $\times e^{-\lambda y}dy = \frac{1}{2}$. **10.** $f_{\eta_n}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$ *Розв'язання.*
Для $n = 1$ випадкова величина $\eta_1 = \xi_1$ має щільність $f_{\eta_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (тут і надалі для всіх n $f_{\eta_n}(x) = 0$, якщо $x < 0$). Скориставшись формулою (2.5.9), маємо: $f_{\eta_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x-t)f_{\xi_2}(t)dt = \int\limits_0^{+\infty} f_{\xi_1}(x-t)\lambda e^{-\lambda t}dt$. Оскільки для $t > x$ $x - t < 0$, то для таких t $f_{\xi_1}(x-t) = 0$, а тому $f_{\eta_2}(x) = \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda(x-t)}\lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda^2 e^{-\lambda x}\int\limits_0^x dt = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$.
Доведемо, що для кожного n з того, що $f_{\eta_n}(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}$, випливає, що $f_{\eta_{n+1}}(x) = \frac{\lambda^{n+1}x^n}{n!}e^{-\lambda x}$. Справді, скориставшись формулою (2.5.6), маємо: $f_{\eta_{n+1}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\eta_n}(t)f_{\xi_{n+1}}(x-t)dt =$
$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}f_{\xi_{n+1}}(x-t)dt = \int\limits_0^x \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\lambda e^{-\lambda(x-t)}dt =$
$= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\int\limits_0^x t^{n-1}dt = \frac{\lambda^{n+1}x^n}{n!}e^{-\lambda x}$.

2.6 **4.**

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$M(\xi) = \frac{3}{4}$, $D(\xi) = \frac{9}{16}$, $\sigma(\xi)=\frac{3}{4}$.

5.

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{91}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{1}{216}$

; 2,04; 1,31; 1,14. *Розв'язання.* Нехай ξ — найменше число очок, яке випадає при киданні трьох гральних кубиків, і нехай p_k $(k = \overline{1,6})$ — ймовірність того, що випадкова величина набирає значення рівного k. Очевидно, що $1-p_1$ є ймовірність того, що найменше число очок буде більшим 1, тобто це ймовірність того, що на кожному гральному кубику випаде число очок більше одиниці. Ймовірність останньої події рівняється $(\frac{5}{3})^3$, і p_1 визначається з рівняння $1-p_1 = (\frac{5}{6})^3$. Отож $p_1 = \frac{91}{216}$. Аналогічно $1-(p_1+p_2)$ є ймовірність того, що найменше число очок буде більшим 2, тобто ймовірність того, що на кожному кубику випаде число очок більше 2. Оскільки ймовірність останньої події рівняється $(\frac{4}{6})^3$, то з рівняння $1 - p_1 - p_2 = (\frac{4}{6})^3$ дістаємо $p_2 = \frac{61}{216}$. Точно так саме з рівняння $1-(p_1+p_2+p_3) = (\frac{3}{6})^3$ дістаємо $p_3 = \frac{37}{216}$, з рівняння $1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = (\frac{2}{6})^3$ — $p_4 = \frac{19}{216}$, а з рівняння $1-(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5) = (\frac{1}{6})^3$ — $p_5 = \frac{7}{216}$. Нарешті, ймовірність того, що найменшим числом очок буде 6, рівняється $\frac{1}{216}$ (на всіх трьох кубиках випаде шістка). **6.** $P(\xi=1)=0,2$, $P(\xi=2) = 0,3$, $P(\xi = 3) = 0,5$, $M(\eta) = -5,6$, $P(\eta) = 2,44$. *Вказівка.* Якщо $P(\xi = 1) = x$, $P(\xi = 2) = y$, то $P(\xi = 3) = 1 - x - y$. А отже, $M(\xi) = x + 2y + 3(1 - x - y) = 2,3$, $x + 4y + 9(1 - x - y) = 5,9$. **7.** $n = 80$, $p = \frac{1}{4}$, $\approx 0,4$. *Вказівка.* Невідомі параметри n і p знайдемо з системи $np = 20$, $npq = 15$. Для обчислення $P(\xi > 20)$ скористатись апроксимаційною формулою Муавра-Лапласа. **8.** $M(\xi^3) = np + 3n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3$, $M(\xi) = np+7n(n-1)p^2+6n(n-1)(n-2)p^3+n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$. *Вказівка.* Для біномного розподілу з параметрами n і p побудуємо функцію $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} x^k = (q + px)^n$ (її називають *твірною* функцією цього розподілу, коефіцієнт при x^k у цьому многочлені рівняється $P(\xi = k)$). Знайдемо похідну цієї функції у точці $x=1$. Маємо: $P'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, C_n^k p^k q^{n-k} x^{k-1} = np(q+px)^{n-1}$ і $P'(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, C_n^k p^k q^{n-k} = M(\xi) = np$. Домножимо $P'(x)$ на x і знову продиференціюємо. Маємо: $xP'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} x^k = npx(q+px)^{n-1}$, $(xP'(x))' = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k \times q^{n-k} x^{k-1} = np(q+px)^{n-1} + n(n-1)p^2(q+px)^{n-2}$ і $(xP'(x))|_{x=1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = M(\xi^2) = np + n^2p^2 - np^2 = npq + n^2p^2$. Домножимо $(xP'(x))'$ на x і знову продиференціюємо. Маємо: $(xP'(x))'x = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} x^k = npx(q+px)^{n-1} + n(n-1)p^2 x \times (q+px)^{n-2}$, $((xP'(x))'x)' = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 C_n^k p^k q^{n-k} x^{k-1} = np(q+px)^{n-1} + 2n(n-1)p^2 x(q+px)^{n-2} + n(n-1)(n-2)p^3 x(q+px)^{n-3}$ і $((xP'(x))'x)'|_{x=1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 C_n^k p^k q^{n-k} = M(\xi^3) = np + 2n(n-1)p^2 + n(n-1)(n-2)p^3$. Аналогічно знаходиться $M(\xi^4)$. **9.** $\frac{8}{5}a$. *Розв'язування.* Очевидно, що довжина переходу робітником є випадкова величина ξ, яка може набирати значення 0, a, $2a$, $3a$, $4a$. Ймовірності кожного з цих значень будемо підраховувати за формулою повної ймовірності, прийнявши той факт, що шанси на те, що робітник знаходиться біля будь-якого із станків однакові. Тоді $P(\xi = 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A_0/H_k)$, де H_k $(k = \overline{1,5})$ — подія, яка полягає у тому, що робітник знаходиться біля k-го верстата. Згідно з умовою $P(H_k) = \frac{1}{5}$, $P(\xi = 0/H_k) = \frac{1}{5}$, а тому $P(\xi = 0) = \sum\limits_{k=1}^{5} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$, $P(\xi = a) = P(H_1)P(\xi = a/H_1) + \ldots + P(H_5)P(\xi = a/H_5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$, $P(\xi = 2a) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{25}$,

$P(\xi = 3a) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$, $P(\xi = 4a) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot 0 + + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$. (контроль $\frac{1}{5} + \frac{8}{25} + \frac{6}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25} = 1$). За побудованим розподілом маємо: $M(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{5} + a \cdot \frac{8}{25} + 2a \cdot \frac{6}{25} + +3a \cdot \frac{4}{25} + 4a \cdot \frac{2}{25}$. **10.** $M(\xi) = 2$. *Розв'язання.* Рівняння $\frac{\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}} = \frac{5}{3}$ або $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ має два додатні розв'язки $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. З цих двох оберемо той, для якого $M(\xi^3) = 46$. Побудуємо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} x^n$, який збігається на всій числовій прямій, причому його сума $P(x) = e^{\lambda x - \lambda}$. Продиференціюємо почленно цей ряд $P'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} x^{n-1}$ і покладемо $x = 1$. Маємо: $P'(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = M(\xi) = \lambda$. Домножимо останній степеневий ряд на x і знову продиференціюємо. Маємо: $xP'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} x^n = \lambda x e^{\lambda x - \lambda}$, $(xP'(x))' = = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} x^{n-1} = (\lambda + \lambda^2 x) e^{\lambda x - \lambda}$. Якщо покласти $x = 1$, то $(xP'(x))'|_{x=1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = M\xi^2 = \lambda + \lambda^2$. І, нарешті, ще ряд домножимо на x і продиференціюємо. Маємо: $x(xP'(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} x^n = (\lambda x + \lambda^2 x^2) e^{\lambda x - \lambda}$, $(x(xP'(x))')' = = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} x^{n-1} = (\lambda + 2\lambda^2 x + \lambda^2 x + \lambda^3 x^2) e^{\lambda x - \lambda}$. Знову покладемо $x = 1$, то $(x(xP'(x))')'|_{x=1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = M(\xi^3) = = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 = 22$. Звідси $\lambda = 2$. **11.** $M(\eta) = 3$, $D(\eta) = 4,206$. *Розв'язання.* Оскільки математичне сподівання суми випадкових величин рівняється сумі математичних сподівань, то $M(\eta) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + M(\xi_3) = 1 + 2 + 0 = 3$. Знайдемо $M(\eta^2)$. Маємо: $M(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 = M(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2\xi_3) =$

$= M(\xi_1^2)+M(\xi_2^2)+M(\xi_3^2)+2M(\xi_1\xi_2)+2M(\xi_1\xi_3)+2M(\xi_2\xi_3)$. Враховуючи, що $M(\xi_1^2)=D(\xi_1)+(M(\xi_1))^2=0,01+1=1,01$, $M(\xi_2^2)=D(\xi_2)+(M(\xi_2))^2=4+4=8$, $M(\xi_3^2)=D(\xi_3)+$ $+(M(\xi_3))^2=0,36$, $M(\xi_1\xi_2)=M((\xi_1-1)(\xi_2-2))+2M(\xi_1)+$ $+2M(\xi_2)-2=\rho(\xi_1,\xi_2)\sigma(\xi_1)\sigma(\xi_2)+2+2-2=0,2\cdot 0,1\cdot 2+2=2,04$, $M(\xi_1\xi_3)=M((\xi_1-1)(\xi_3-0))+M(\xi_3)=0,3\cdot 0,1\cdot 0,6=0,018$, $M(\xi_2\xi_3)=M((\xi_2-2)(\xi_3-0))+2M(\xi_3)=-0,1\cdot 2\cdot 0,6=-0,12$, маємо: $M(\eta^2)=1,01+8+0,36+4,04+0,036-0,24=13,206$. **12.** $\frac{\pi}{4}(a+b)(c+d)$, $\frac{\pi^2}{9}(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)-\frac{\pi}{16}(a+b)^2(c+d)^2$. *Вказівка*. $M(\xi^2\eta^2)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d x^2y^2\frac{dxdy}{(b-a)(d-c)}$. **13.** $M(\xi)=\frac{1}{\lambda}$, $D(\xi)=\frac{1}{\lambda^2}$. *Розв'язання*. Характеристичною властивістю показникового розподілу був той факт, що коли ξ має показниковий розподіл, то випадкова величина $\xi-t$ за умови, що $\xi>t$, має показниковий розподіл з тим же параметром. Покажемо, що цю ж властивість має випадкова величина $\xi-\eta$, де ξ і η незалежні і η — довільна невід'ємна абсолютно неперервна випадкова величина і $\eta<\xi$. Позначимо цю різницю через $[\xi-\eta]^+$ і знайдемо її функцію розподілу. Маємо: $F_{[\xi-\eta]^+}(x)=0$, якщо $x\leqslant 0$, $F_{[\xi-\eta]^+}(x)=P([\xi-\eta]^+<x)=P(\xi-\eta<x/\eta<\xi)=$ $=\frac{P(\xi-\eta<x,\eta<\xi)}{P(\eta<\xi)}=\frac{P(\eta<\xi<\eta+x)}{P(\eta<\xi)}$, якщо $x>0$. Нехай $f_\eta(t)$ — щільність розподілу ймовірностей випадкової величини η. Тоді за формулою повної ймовірності (неперервний аналог) маємо: $F_{[\xi-\eta]^+}(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{P(t<\xi<t+x)}{P(\xi>t)}f_\eta(t)dt$. Оскільки для показниково розподіленої випадкової величини ξ $P(t<\xi<t+x)=$ $=1-e^{-\lambda(t+x)}-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t+x)}$ і $P(\xi>t)=e^{-\lambda t}$, то $F_{[\xi-\eta]^+}(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}}f_\eta(t)dt=(1-e^{-\lambda x})\int\limits_0^{+\infty}f_\eta(t)dt=1-e^{-\lambda x}$. **14.** $M(\sin\xi)=\frac{\lambda}{\lambda^2+1}$, $D(\sin\xi)=\frac{\lambda^4+2}{(\lambda^2+4)(\lambda^2+1)^2}$, $M(\cos\xi)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+1}$, $D(\cos\xi)=\frac{5\lambda^2+2}{(\lambda^2+4)(\lambda^2+1)^2}$. *Вказівка.* Скористатись тим, що

$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin mx\,dx = \frac{m}{a^2+m^2}$, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos mx\,dx = \frac{a}{a^2+m^2}$. Тоді $M(\sin\xi) = \int\limits_0^{+\infty} \sin x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$, $M(\sin\xi)^2 = \int\limits_0^{+\infty} \sin^2 x\times$ $\times\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}(1-\cos 2x)\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2+4)}$, $D(\sin\xi) =$ $= M(\sin\xi)^2 - (M\sin\xi)^2$. Аналогічно для випадкової величини $\cos\xi$. **15.** $\frac{1}{p\lambda}$, $\frac{1}{p^2\lambda^2}$. *Розв'язання.* Якщо випадкова величина η набрала значення n, то маємо суму n незалежних випадкових величин, кожна з яких має показниковий розподіл з параметром λ. Така випадкова величина має розподіл Ерланга (див. розв'язання задачі 2.6.10), тобто її щільністю є функція $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$ Тоді за формулою повної ймовірності (гіпотезами є те, що випадкова величина η набере значення 1, 2, ...) щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta$ подається у вигляді $p\lambda e^{-\lambda x} + pq\frac{\lambda^2 x}{1!}e^{-\lambda x} + pq^2\frac{\lambda^3 x^2}{2!}e^{-\lambda x} + \ldots + pq^{n-1}\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x} + \ldots =$ $= p\lambda e^{-\lambda x}(1 + \frac{\lambda q x}{1!} + \frac{\lambda^2 q^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{n-1}q^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots) = p\lambda e^{-\lambda x} \times$ $\times\ e^{\lambda q x} = p\lambda e^{-\lambda x(1-q)} = p\lambda e^{-p\lambda x}$. Таким чином, випадкова величина $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\eta$ має показниковий розподіл з параметром $p\lambda$. **16.** $\sigma\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sigma^2(4-\pi)}{2}$. *Розв'язання.* Оскільки випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, то їх сумісна щільність розподілу ймовірностей є функція $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}}$.
Тоді функція розподілу для випадкової величини $\eta = \sqrt{(\xi_1-a)^2+(\xi_2-b)^2}$ має вигляд $F_\eta(z) = 0$, якщо $z \leqslant 0$, і для $z > 0$ $F_\eta(z) = P(\eta < z) = P(\sqrt{(\xi_1-a)^2+(\xi_2-b)^2} < z) =$ $= \iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2<z^2} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{2\sigma^2}\right\}dxdy$. Виконаємо заміну $x = \rho\cos\varphi + a$, $y = \rho\sin\varphi + b$. Тоді $dxdy$ замінюється на $\rho d\varphi d\rho$, а областю інтегрування стане прямокутник

$\{(\varphi,\rho)\,|\,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant z\}$, і $F_\eta(z)$ набере вигляду $F_\eta(z) = = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho = \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\rho = -e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}|_0^z = 1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$. Звідси щільність розподілу ймовірностей $f_\eta(z)=0$, якщо $z<0$, $f_\eta(z) = \frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$, якщо $z\geqslant 0$. Далі $M(\eta) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{z^2}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz = = \begin{pmatrix} u=z, & du=dz, \\ dv=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz, & v=-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \lim\limits_{z\to+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}=0\end{pmatrix} = \int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $M(\eta^2)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{z^3}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz = \begin{pmatrix} u=z^2, & du=2zdz, \\ dv=\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz, & v=-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \lim\limits_{z\to+\infty} z^2e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}=0\end{pmatrix} = = 2\int\limits_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz = 2\sigma^2(-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}|_0^{+\infty}) = 2\sigma^2$. Отже $D(\eta) = = M(\eta^2)-(M(\eta))^2 = 2\sigma^2-\sigma^2\frac{\pi}{2} = \sigma^2\frac{4-\pi}{2}$. **17.** $M(\xi_1)=M(\xi_2)=0$, $D(\xi_1)=\frac{5}{4}$, $D(\xi_2)=\frac{1}{4}$, $\rho(\xi_1,\xi_2)=-\frac{1}{\sqrt5}$. *Розв'язання.* За структурою заданої функції природно припустити, що двовимірна величина має нормальний закон розподілу. (Звичайно це можна перевірити, знайшовши $f_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$, $f_{\xi_2}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$). Однак можна піти іншим шляхом. Запишемо нормальну двовимірну щільність розподілу ймовірностей у загальному вигляді $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big(\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}\Big)\}$. Насамперед, очевидно, що $a=b=0$. Далі $2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}=\pi$ або $\sigma_1\sigma_2=\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}$. Оскільки $-\frac{2\rho}{(1-\rho^2)\,\sigma_1\sigma_2}=2$, то, підставивши $\sigma_1\sigma_2$ в останнє рівняння, дістаємо $-\frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=1$ або $5\rho^2=1$. За ρ слід взяти від'ємний корінь останнього рівняння, тобто $\rho=-\frac{1}{\sqrt5}$. Далі з рівнянь $\frac{1}{(1-\rho^2)\,\sigma_1^2}=1$ і $\frac{1}{(1-\rho^2)\,\sigma_2^2}=5$ дістаємо $\sigma_1^2=\frac{5}{4}$, $\sigma_2^2=\frac{1}{4}$. **18.** *Розв'язання.* Насамперед, очевидно, що $M(\xi_1+\xi_2)=M(\xi_1-\xi_2)=0$. В силу незалежності випадкових величин ξ_1 і ξ_2 $D(\xi_1+\xi_2)=D(\xi_1-\xi_2)=2$. $cov(\xi_1+\xi_2,\xi_1-\xi_2) = M(\xi_1+\xi_2)(\xi_1-\xi_2) = M\xi_1^2-M\xi_2^2=0$.

Таким чином, випадкові величини некорельовані. Знайдемо функцію розподілу випадкового вектора $(\xi_1+\xi_2, \xi_1-\xi_2)$. Маємо: $F(x,y) = P(\xi_1+\xi_2<x, \xi_1-\xi_2<y) = \iint\limits_{\substack{u+v<x \\ u-v<y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{v^2}{2}}\, dudv.$

Виконавши заміну $u = \frac{s+t}{2}$, $v = \frac{s-t}{2}$, якобіан $\frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(s,t)} = -\frac{1}{2}$, від області (Рис.27) перейдемо до області (Рис.28). Отже, $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(s+t)^2}{8}} \cdot e^{-\frac{(s-t)^2}{8}} \cdot \frac{1}{2}\, dsdt.$

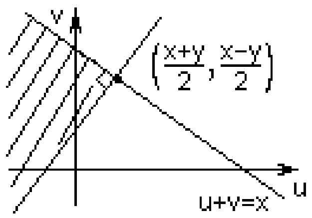


Рис.27

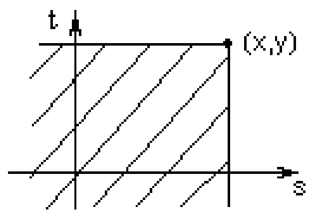


Рис.28

Звідси сумісна щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора $(\xi_1+\xi_2, \xi_1-\xi_2)$ рівняється $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(x+y)^2}{8}} \times$ $\times\ e^{-\frac{(x-y)^2}{8}} = \frac{1}{4\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{4}}$. Випадкові величини $\xi_1 - \xi_2$, $\xi_1 + \xi_2$ однаково розподілені і кожна з них має нормальний закон розподілу з параметрами 0 і $\sqrt{2}$. **19.** *Розв'язання.* Побудуємо функцію розподілу для випадкового вектора (η_1, η_2). Маємо: $F_{\eta_1,\eta_2}(x,y) = P(\eta_1 < x,\ \eta_2 < y) = \iint\limits_{\substack{u\cos\alpha + v\sin\alpha < x \\ -u\sin\alpha + v\cos\alpha < y}} f_{\xi_1,\xi_2}(u,v)dudv$. Проведемо заміну змінних $s = u\cos\alpha + v\sin\alpha$, $t = -u\sin\alpha + v\cos\alpha$. Розв'язавши систему лінійних рівнянь $\begin{cases} u\cos\alpha + v\sin\alpha = s, \\ -u\sin\alpha + v\cos\alpha = t \end{cases}$ відносно u і v, отримаємо подання старих змінних u, v через нові змінні s і t $u = s\cos\alpha - t\sin\alpha$, $v = s\sin\alpha + t\cos\alpha$. Якобіан цього перетворення рівняється $\frac{\partial\,(u,v)}{\partial\,(s,t)} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$. Отже,

$F_{\eta_1,\eta_2}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1,\xi_2}(s\cos\alpha - t\sin\alpha, s\sin\alpha + t\cos\alpha)\,dsdt$, а щільність розподілу ймовірностей випадкового вектора (η_1,η_2) має вигляд $f_{\eta_1,\eta_2}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi_1,\xi_2}(x\cos\alpha - t\sin\alpha,$ $x\sin\alpha + t\cos\alpha)\,dt = f_{\xi_1,\xi_2}(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$. Якщо $f_{\xi_1,\xi_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$ exp $\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\}$, то, підставивши в останню функцію замість x $x\cos\alpha - y\sin\alpha$, а замість y $x\sin\alpha + y\cos\alpha$, дістанемо $\frac{(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2}{\sigma_2^2} =$ $= \left(\frac{\cos^2\alpha}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2\alpha}{\sigma_2^2}\right)x^2 - 2\left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_1^2} - \rho\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sigma_1\sigma_2} - \right.$ $\left. - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_2^2}\right)xy + \left(\frac{\sin^2\alpha}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\cos^2\alpha}{\sigma_2^2}\right)y^2$. Оскільки згідно умови $M(\xi_1) = M(\xi_2) = 0$, $D(\xi_1) = \sigma_1^2$, $D(\xi_2) = \sigma_2^2$, $cov(\xi_1,\xi_2) = \rho\sigma_1\sigma_2$, то $M(\eta_1) = M(\eta_2) = 0$, $D(\eta_1) = D(\xi_1\cos\alpha +$ $+\xi_2\sin\alpha = M(\xi_1\cos\alpha + \xi_2\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha\, M(\xi_1^2) + 2\cos\alpha\sin\alpha\, \times$ $\times M(\xi_1\xi_2) + \sin^2\alpha\, M(\xi_2^2) = \cos^2\alpha\,\sigma_1^2 + 2\cos\alpha\sin\alpha\,\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sin^2\alpha\,\sigma_2^2$, $D(\eta_2) = D(-\xi_1\sin\alpha + \xi_2\cos\alpha) = M(-\xi_1\sin\alpha + \xi_2\cos\alpha)^2 =$ $= \sin^2\alpha\,\sigma_1^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha\, M(\xi_1\xi_2) + \cos^2\alpha\,\sigma_2^2 = \sin^2\alpha\,\sigma_1^2 - 2\rho\, \times$ $\times\sin\alpha\cos\alpha\,\sigma_1\sigma_2) + \cos^2\alpha\,\sigma_2^2$, $cov(\eta_1,\eta_2) = M(\eta_1,\eta_2) = M(\xi_1\cos\alpha +$ $+\xi_2\sin\alpha)(-\xi_1\sin\alpha + \xi_2\cos\alpha) = -\sigma_1^2\sin\alpha\cos\alpha + (-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\times$ $\times\rho\,\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\sin\alpha\cos\alpha$. Як висновок, поворот осі координат переводить нормальний розподіл у нормальний. Більше того, якщо α є коренем рівняння $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\rho\,\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$, то $\frac{\sin 2\alpha}{\sigma_1^2} + 2\rho\frac{\cos 2\alpha}{\sigma_1\sigma_2} -$ $- \frac{\sin 2\alpha}{\sigma_2^2} = \cos 2\alpha\left((\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2})\,\mathrm{tg}\,2\alpha + \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}\right) = \cos\alpha\,(-\frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{2\rho}{\sigma_1\sigma_2}) = 0$, тобто такий поворот приводить до незалежних нормально розподілених випадкових величин.

Вотякова Леся Андріївна

Твердохліб Юрій Степанович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ