ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра алгебри і методики навчання математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Перший проректор
з науково-педагогічної роботи
_______ проф. Блажко О. А.
_______ 2025 року

Міністерство освіти і науки України * Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського * Код 02125094

ПРОГРАМА КОМПЛЕКСНОГО ЕКЗАМЕНУ З МАТЕМАТИКИ ДЛЯ АТЕСТАЦІЇ ЗДОБУВАЧІВ СТУПЕНЯ ВИЩОЇ ОСВІТИ «БАКАЛАВР»

галузі знань *01 Освіта/Педагогіка*
спеціальності *014 Середня освіта*
предметної спеціальності *014.04 Середня освіта (Математика)*
додаткової предметної спеціальності *014.09 Середня освіта (Інформатика)*
освітньо-професійна програма *Середня освіта. Математика, інформатика*
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Вінниця – 2025 рік

Програма комплексного екзамену з математики для атестації здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра галузі знань 01 Освіта/Педагогіка спеціальності 014 Середня освіта, предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика), додаткової предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика). 27 с.

Розробники:

Панасенко О. Б., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики,

Бак С. М., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики та інформатики,

Тютюн Л.А., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та інформатики.

Програма розглянута і схвалена на засіданні кафедри алгебри і методики навчання математики факультету математики, фізики і комп'ютерних наук

Протокол від *12 листопада 2025 року № 4*.

Завідувач кафедри алгебри
і методики навчання математики О. Л. Коношевський

12 листопада 2025 р.

Програма розглянута і схвалена на засіданні навчально-методичної комісії факультету математики, фізики і комп'ютерних наук

Протокол від «20» листопада 2025 року № 3/1

Голова НМК О. Б. Панасенко

«20» листопада 2025 р.

ВСТУП

Програма комплексного екзамену з математики укладена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) освітньо-професійної програми *Середня освіта. Математика, інформатика*.

Програма визначає перелік питань, обсяг, складові та технологію оцінювання навчальних досягнень студентів на завершальному етапі навчання.

1. Мета та завдання комплексного екзамену з математики

1.1. *Мета* комплексного екзамену з математики полягає у діагностиці рівня сформованості складових професійної компетентності випускників, визначеної освітньо-професійною програмою і необхідною для здійснення професійної діяльності. Метою освітньо-професійної програми бакалавра галузі знань 01 Освіта/Педагогіка спеціальності 014 Середня освіта (Математика): підготувати фахівців із широким доступом до працевлаштування у професійній діяльності або в процесі навчання, що передбачає застосування теорій та методів математики, статистики й комп'ютерних технологій, а також які в подальшому зможуть виконувати професійні функції вчителя математики в закладах загальної середньої освіти та здійснювати навчально-виховну, науково-методичну й організаційну діяльність; сформувати у них відповідні загальні і фахові компетентності для подальшого навчання та розвитку. Комплексний екзамен проводиться як комплексна перевірка знань і вмінь випускників з навчальних дисциплін, передбачених навчальним планом, виявлення рівня їх фахових компетентностей.

1.2. *Завдання* комплексного екзамену з математики полягають у визначенні та оцінюванні рівня освітньо-професійної підготовки випускників та їх готовності до професійної діяльності шляхом діагностики сформованості інтегральної компетентності та її складових – загальних та фахових компетентностей і містить основні питання з навчальних дисциплін: **лінійної алгебри, алгебри і теорії чисел, аналітичної геометрії, математичного аналізу,** які об'єднані у три розділи: «Алгебра», «Геометрія», «Математичний аналіз». На комплексному екзамені студент повинен продемонструвати вміння формулювати означення і теореми, наводити при необхідності ілюстрації, застосовувати теоретичні факти до розв'язування конкретних задач, володіти основними компетентностями.

1.3. *Компетентності*

Інтегральна компетентність – здатність розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми в галузі середньої освіти, що передбачає застосування теорій та методів педагогіки та математики і характеризується комплексністю та невизначеністю педагогічних умов організації навчально-виховного процесу в базовій середній школі.

1.3.1.Загальні компетентності (ЗК):

ЗК 1. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК 2. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 3. Здатність планувати та управляти часом.

ЗК 4. Здатність до пошуку, аналізу та критичної оцінки інформації з різних джерел.

ЗК 5. Здатність ефективно формувати комунікативну стратегію.

ЗК 7. Здатність використовувати інформаційно-комунікаційні технології навчання.

ЗК 8. Здатність оцінювати якість виконуваних робіт.

1.3.2. *Фахові компетентності спеціальності (ФК):*

ФК 8. Здатність застосовувати системні знання з математики, методики її навчання, історії виникнення та розвитку.

ФК 10. Здатність аналізувати сприйняття та засвоєння учнями нових фактів та методів з метою визначення ефективності використаних прийомів та засобів навчання.

ФК 11. Здатність розв'язувати задачі шкільного курсу математики різного рівня складності та формувати відповідні уміння в учнів.

ФК 15. Здатність проектувати та організувати сучасне безпечне і дружнє до дитини освітнє середовище для навчання, виховання та розвитку учнів на уроках та в позаурочний час.

1.4. *Програмні результати навчання.* Здобувач вищої освіти після успішного завершення освітньо-професійної програми має продемонструвати заплановані знання, уміння, здатності:

ПРН 8. Демонструвати та застосувати знання з математики та інформатики, необхідні для формування відповідних предметних компетентностей учнів.

ПРН 11. Знати сутність і основні методи доведення тверджень у навчанні учнів.

ПРН 13. Уміти розв'язувати задачі різних рівнів складності шкільних курсів математики та інформатики.

ПРН 14. Здатний формувати в учнів розуміння основ математичного моделювання, готовність до застосування моделювання для розв'язування задач.

Комплексний екзамен проводиться **в усній формі** за білетами затвердженими кафедрою алгебри і методики навчання математики. Кожен білет містить три теоретичні питання відповідно до різних груп навчальних дисциплін та одну задачу з певної дисципліни.

Відповідаючи на теоретичне питання екзаменаційного білету, студент повинен продемонструвати свідоме володіння математичними поняттями, про які йде мова у даному питанні, та показати загальне розуміння відповідної математичної теорії. Від студента не вимагається проведення детальних математичних викладок з доведенням усіх тверджень, які стосуються питання білету. Він повинен викласти основні положення теорії, яка стосується даного питання (аксіоми, теореми, формули, методи, алгоритми тощо) у строгій логічній послідовності та обґрунтувати основні з них.

За рішенням екзаменаційної комісії на екзамені під час підготовки до відповіді студентам можна дозволити користуватись підручниками та навчальними посібниками, вказаними в програмі.

Проведення атестації здобувачів вищої освіти з використанням технологій дистанційного навчання у ВДПУ ім. М. Коцюбинського може відбуватися в разі виникнення обставин непереборної сили (природні катаклізми, заходи карантинного порядку, безпекова ситуація у період дії правового режиму воєнного стану, інші форс-мажорні обставини), коли можливості фізичної присутності у ВДПУ ім. М. Коцюбинського обмежені або відсутні та визначається Р.4 Положення про порядок створення та організацію роботи екзаменаційної комісії зі встановлення відповідності рівня освітньої підготовки кадрів до вимог освітніх програм та присвоєння їм кваліфікації за ступенями вищої освіти бакалавра, магістра у Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського https://vspu.edu.ua/content/position/p109_2.pdf.

2. Програми навчальних дисциплін, які виносяться на комплексний екзамен з математики

Згідно з навчальними програмами з навчальних дисциплін: лінійної алгебри, алгебри і теорії чисел, аналітичної геометрії, математичного аналізу та освітньо-професійної програми бакалавра галузі знань 01 Освіта/Педагогіка спеціальності 014 Середня освіта (Математика) визначено зміст комплексного екзамену з математики.

2.1. Програма навчальної дисципліни «Лінійна алгебра»

Тема 1. Системи лінійних рівнянь. Матриця системи лінійних рівнянь. Східчаста і зведена східчаста форми матриць. Метод Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь. Метод Йордана-Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь.

Тема 2. *n*-вимірний арифметичний векторний простір. Поняття про n-вимірний арифметичний векторний простір. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів.

Тема 3. Базис і ранг системи векторів; базис і розмірність арифметичного векторного простору. Базис і ранг системи векторів. Еквівалентні системи векторів. Базис і розмірність арифметичного векторного простору.

Тема 4. Поняття підпростору простору R^n. Означення підпростору простору R^n. Критерій підпростору. Лінійна оболонка векторів як підпростір.

Тема 5. Поняття матриці як сукупності векторів. Рядковий і стовпцевий ранги матриці. Ранг матриці. Критерій сумісності систем лінійних рівнянь (теорема Кронекера–Капеллі).

Тема 6. Операції над матрицями. Сума матриць. Множення матриці на число. Множення матриць.

Тема 7. Оборотність матриць. Поняття оберненої матриці. Елементарні матриці. Знаходження оберненої матриці. Розв’язування систем лінійних рівнянь матричним методом.

Тема 8. Визначник (детермінант) матриці. Означення детермінанту (визначника) матриці. Детермінанти матриць другого і третього порядків. Теорема Лапласа про розклад детермінанта. Властивості детермінантів.

Тема 9. Детермінанти і операції над матрицями. Детермінант від суми, добутку матриць. Формули Крамера розв’язування систем лінійних рівнянь. Знаходження оберненої матриці з допомогою приєднаної матриці.

Тема 10. Лінійні (векторні) простори та їхні найпростіші властивості. Поняття лінійного (векторного) простору. Приклади векторних просторів. Найпростіші властивості векторних просторів.

Тема 11. Лінійна залежність і незалежність векторів у векторному просторі. Поняття лінійно залежної та лінійно незалежної систем векторів. Базис і розмірність лінійного простору. Координати вектору в різних базисах та зв’язок між ними. Матриця переходу від одного базису до іншого.

Тема 12. Підпростір векторного простору. Поняття підпростору векторного простору. Поняття лінійного многовиду. Перетин і сума підпросторів. Зв’язок між розмірностями перетину і суми підпросторів.

Тема 13. Скалярне множення у векторному просторі. Властивості скалярного множення. Евклідові векторні простори. Найпростіші властивості скалярного множення.

Тема 14. Ортогональність, довжина і відстань у векторному просторі. Ортогональні системи векторів. Норма (довжина) вектора. Властивості норми вектора. Нерівність Коші-Буняковського-Шварца та нерівність трикутника. Відстань між векторами у векторному просторі. Кут між векторами.

Тема 15. Лінійні відображення векторних просторів. Відображення між множинами: сюр’єктивні, ін’єктивні, бієктивні. Поняття ізоморфізму векторних просторів. Поняття лінійного відображення векторних просторів. Приклади. Найпростіші властивості лінійних відображень. Матриця лінійного відображення в базисі.

Тема 16. Операції над лінійними відображеннями. Сума лінійних відображень. Добуток відображення на число. Композиція лінійних відображень.

Тема 17. Ядро і образ, ранг і дефект лінійного відображення. Ядро, образ, ранг і дефект лінійного оператора. Теорема про суму ранга і дефекта лінійного відображення.

Тема 18. Лінійні оператори векторного простору. Означення лінійного оператора. Приклади лінійних операторів векторних просторів. Операції над лінійними операторами: сума, добуток на число, композиція. Оборотні лінійні оператори. Лінійні оператори простору R^2.

Тема 19. Матриці лінійного оператора в різних базисах і зв’язок між ними. Матриці лінійного оператора в різних базисах. Зв’язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах.

Тема 20. Вироджені і невироджені лінійні оператори. Вироджені і невироджені лінійні оператори. Приклади. Оборотні лінійні оператори.

Тема 21. Власні значення і власні вектори лінійного оператора. Власні значення і власні вектори лінійного оператора. Характеристичний многочлен лінійного оператора. Алгоритм знаходження власних значень і власних векторів лінійного оператора.

Тема 22. Діагоналізація матриць. Зведення матриці до діагонального виду. Критерій діагоналізовності матриці.

2.1.1. Рекомендована література

Основна

1. Бондаренко Н. В. Лінійна алгебра: навч. посіб. / Н. В. Бондаренко, В. В. Отрашевська. Київ: КНУБА, 2023. 180 с. Режим доступу: https://repositary.knuba.edu.ua/server/api/core/bitstreams/a58d4437-3196-4a12-a1df-b8c327ed4b2a/content
2. Кулик В.Т., Рокіцький І. О. Алгебра. Вінниця : Глобус-Прес, 2005. 264 с.
3. Москаленко Ю. Д., Москаленко О. А., Коваленко О. В. Лінійна алгебра : метод. рек. до проведення практ. занять та організації самостійної роботи студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2021. 91 с. Режим доступу: http://dspace.pnpu.edu.ua/bitstream/123456789/16898
4. Нитребич З. М., Кучма М. І., Дрогомирецька Х. Т., Клапчук М. І.. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Теорія й моделі, приклади й задачі: Підручник / Київ, Видавничий дім «КОНДОР», 2022. 560 с.
5. Панасенко О. Б. Лекції з лінійної алгебри : вид. 2-е, доповнене. Вінниця: ФОП «Легкун В. М.», 2015. 222 с.
6. Панасенко О. Б. Лінійна алгебра. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2025.

Додаткова

1. Безущак О. О. Навчальний посібник з лінійної алгебри: для студентів механіко-математичного факультету / О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська– Київ: ВПЦ «Київський університет», 2019. 224 с.
2. Дубовик В. В. Лінійна алгебра. Частина І: навчальний посібник / В. В. Дубовик – Умань: ВПЦ «Візаві», 2021. 119 с. Режим доступу: https://dspace.udpu.edu.ua/bitstream/123456789/16511
3. Каленюк П. І., Рибицька О. М., Івасик Г. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Базовий курс / LinearAlgebraandAnalyticGeometry. BasicCourse. Львів: Вид-во Львівська політехніка, 2019. 160 с.
4. Лінійна алгебра: курс лекцій : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 214 с. Режим доступу: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/47625
5. Набока О. О. Лінійна алгебра : навч.-метод. посібник / О. О. Набока ; Нац. техн. університет «Харків. політехн. ін-т». Харків : Стильна типографія, 2020. 64 с. Режим доступу: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/49165
6. Linearalgebra: theTextbookforEngineeringStudents : educationaltextbookforstudentsoftechnicalspecialtiesinallformsofeducation / L. V. Kurpa, K. I. Liubytska, V. M. Burlayenko - Kharkiv : NTU «KhPI», 2024. 154 p. inEnglish.

Інформаційні ресурси

1. http://amnm.vspu.edu.ua/studentam/metodichne-zabezpechennya-2/

2.2. Програма навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел»

1. Група. Найпростіші властивості груп. Підгрупи. Приклади груп.
2. Поняття кільця і поля. Найпростіші властивості кілець і полів. Приклади. Числові поля.

3. Поняття гомоморфізму та ізоморфізму алгебраїчних систем (груп, кілець, векторних просторів).

4. Побудова поля комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами.

5. Тригонометрична форма комплексного числа. Множення і ділення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі. Піднесення до степеня комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі, добування кореня.

6. Аксіоми Пеано для натуральних чисел. Метод математичної індукції.

7. Кільце цілих чисел. Подільність цілих чисел. Властивості подільності. Ділення з остачею.

8. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне двох цілих чисел та зв'язок між ними. Алгоритм Евкліда відшукання найбільшого спільного дільника.

9. Прості числа. Нескінченість множини простих чисел. Основна теорема арифметики.

10. Конгруенції в кільці цілих чисел, властивості конгруенцій.

11. Повна і зведена система лишків, їхні властивості. Теореми Ейлера і Ферма.

12. Лінійні конгруенції з одним невідомим та способи їх розв'язування.

13. Арифметичні застосування теорії конгруенцій. Ознаки подільності на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11.

14. Многочлени над полем. Теорема про ділення многочленів з остачею. Ділення многочлена на двочлен. Схема Горнера.

15. Найбільший спільний дільник двох многочленів від однієї змінної, алгоритм Евкліда.

16. Звідні і незвідні многочлени над даним полем. Розклад многочлена в добуток незвідних у даному полі многочленів.

17. Корені многочленів. Кратні корені многочлена.

18. Симетричні многочлени від кількох змінних. Основна теорема теорії симетричних многочленів.

19. Знаходження раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами.

20. Скінченні ланцюгові дроби. Розклад дійсного числа в ланцюговий дріб.

2.2.1. Рекомендована література

Основна

1. Алгебра і теорія чисел : навчальний посібник / О. В. Заїка, Л. Ф. Сухойваненко, Т. О. Прокопець. Глухів: ФОП Цьома С. П., 2023. 264 с. Режим доступу: http://hdl.handle.net/123456789/2805

2. Гарвацький В. С., Калашніков І. В., Кулик В. Т. Основи сучасної алгебри. Ч.1. Вінниця: ВДПУ, Друкарня «РОМІКС», 2010. 262 с.

3. Гарвацький В. С., Калашніков І. В., Кулик В. Т. Вступ до алгебри. Ч.2. Вінниця: ВДПУ, Друкарня «РОМІКС», 2010. 196 с.

4. Кулик В.Т., Рокіцький І. О. Алгебра. Вінниця : Глобус-Прес, 2005. 264 с.

5. Погоруй А. О., Фонарюк О. В. Алгебра і теорія чисел: Навчально-методичний посібник. Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2024. 86 с. Режим доступу: http://eprints.zu.edu.ua/41463/1/%D0%90%D0%A2%D0%A7_17.10.2024.pdf

6. Скасків Л. В. Теорія чисел та основні структури сучасної математики : навчальний посібник / Л. В. Скасків. – Ірпінь : Університет ДФС України, 2021. 70 с. Режим доступу: https://ir.dpu.edu.ua/handle/123456789/1504

Додаткова

1. Болдарєва О. М. Методичні рекомендації до самостійної роботи з дисципліни «Алгебра і теорія чисел» (курс лекцій) / О. М. Болдарєва, О. М. Яковлєва. Одеса : ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2021. 54 с. Режим доступу:

http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/11802

2. Верпатова Наталія. Алгебра і теорія чисел. Основні факти та алгоритми (дидактичні матеріали для самостійної роботи студентів). К.: УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. 130 с. Режим доступу:
https://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/46772/Verpatova%20Nataliia.pdf?sequence=1

3. Гаврилків В.М. Елементи теорії груп та теорії кілець: навчальний посібник / В. М. Гаврилків. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. 148 с.

4. Елементи теорії чисел : навчально-методичний посібник з елементів алгебри та теорії чисел / укладачі Н. П. Гиря, О. О. Заварзіна, Є. О. Каролінський, Л. Ю. Полякова. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. 48 с. Режим доступу:
https://ekhnuir.karazin.ua/server/api/core/bitstreams/344c2900-e53e-4f06-999d-8ca5c40f60bc/content

5. Москаленко Ю. Д., Коваленко О. В., Черкаська Л. П. Алгебра і теорія чисел : метод. рек. до проведення практ. занять та організації самостійної роботи студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика). Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка, 2021. 96 с. Режим доступу:
http://dspace.pnpu.edu.ua/bitstream/123456789/17121

6. Пилипів В. М. Класичні основи теорії чисел: навчально-методичний посібник / В. М. Пилипів, Р. А. Заторський, І. І. Ліщинський. – Івано-Франківськ: Плай, 2014. 68 с. 12.

7. Пилипів В. М. Кільце поліномів: навчально-методичний посібник / В. М. Пилипів, Р. А. Заторський, І. І. Ліщинський. – Івано-Франківськ: Плай, 2014. 100 с.

Інформаційні ресурси

1. http://amnm.vspu.edu.ua/studentam/metodichne-zabezpechennya-2/

2.3. Програма навчальної дисципліни «Аналітична геометрія»

Розділ 1. Елементи векторної алгебри на площині і в просторі.

1.1. Вектор. Лінійні операції над векторами, їх властивості. Лінійна залежність і незалежність декількох векторів та їх властивості. Лінійна залежність 2-х і 3-х векторів. Векторний простір. Координати вектора в заданому базисі.

1.2. Скалярний добуток векторів, його властивості та застосування.

1.3. Векторний добуток двох векторів та його властивості. Площа трикутника.

1.4. Мішаний добуток трьох векторів та його властивості. Об’єм тетраедра.

Розділ 2. Метод координат на площині.

2.1. Афінна і прямокутна декартова системи координат. Полярна система координат. Рівняння кола. Ділення відрізка в заданому відношенні. Відстань між двома точками.

2.2. Орієнтація площини. Перетворення афінних та прямокутних координат.

2.3. Пряма лінія на площині та її рівняння: через дві точки, канонічне, загальне, параметричні, з кутовим коефіцієнтом, у відрізках, нормальне. Кут між прямими.

2.4. Геометричний зміст знака тричлена $Ax+By+C$. Відстань від точки до прямої. Взаємне розміщення двох прямих на площині.

Розділ 3. Геометричні перетворення площини.

3.1. Перетворення (взаємно однозначні відображення множини на себе). Рух (переміщення) площини. Аналітичне задання руху. Осьова симетрія, розкладання руху в добуток симетрій.

3.2. Класифікація рухів площини. Група рухів площини та її підгрупи (рухи 1-го роду, обертання із заданим центром, паралельне перенесення). Рухи 2-го роду. Група симетрій геометричної фігури.

3.3. Перетворення подібності, його аналітичне задання. Гомотетія. Подібність, як добуток гомотетії та руху.

Розділ 4. Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола.

4.1. Еліпс, канонічне рівняння, властивості. Фокальні радіуси еліпса. Побудова еліпса.

4.2. Гіпербола, канонічне рівняння, властивості. Фокальні радіуси та асимптоти гіперболи. Побудова гіперболи.

4.3. Парабола, канонічне рівняння, властивості. Побудова параболи.

4.4. Директриси ліній 2-го порядку. Рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярних координатах. Оптичні властивості конічних перерізів.

Розділ 5. Загальна теорія алгебричних ліній 2-го порядку.

5.1. Загальне рівняння лінії 2-го порядку. Перетин прямої з лінією 2-го порядку.

5.2. Асимптотичні напрямки лінії другого порядку.

5.3. Дотична до лінії 2-го порядку та її рівняння.

5.4. Центр лінії 2-го порядку. Центральні та нецентральні лінії другого порядку.

5.5. Спряжені напрямки лінії 2-го порядку. Головні напрямки. Діаметри.

5.6. Зведення рівняння лінії 2-го порядку до канонічного вигляду шляхом повороту та паралельного перенесення системи координат.

Розділ 6. Метод координат у просторі.

6.1. Афінна та прямокутна декартова системи координат у просторі. Ділення відрізка в заданому відношенні. Відстань між двома точками. Полярно-сферична та полярно-циліндрична системи координат. Сфера.

6.2. Орієнтація простору. Перетворення декартової системи координат.

6.3. Різні способи задання площини. Загальне рівняння площини та його дослідження. Геометричний зміст знака многочлена $Ax+By+Cz+D$. Відстань від точки до точки площини, заданої загальним рівнянням.

6.4. Кут між двома площинами. Взаємне розташування двох і трьох площин.

6.5. Різні рівняння прямої у просторі. Взаємне розташування двох прямих. Кут між двома прямими.

6.6. Кут між прямою і площиною. Взаємне розташування прямої і площини.

Розділ 7. Вивчення поверхонь 2-го порядку за їх канонічними рівняннями.

7.1. Поверхні обертання. Циліндричні і конічні рівняння.

7.2. Еліпсоїди.

7.3. Одно- та двопорожнинні гіперболоїди.

7.4. Еліптичний та гіперболічний параболоїди.

7.5. Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку.

Розділ 8. Загальна теорія алгебричних поверхонь 2-го порядку.

8.1. Загальне рівняння поверхні 2-го порядку. Перетин поверхні 2-го порядку з прямою. Асимптотичні напрямки і асимптотичний конус.

8.2. Центр поверхні 2-го порядку. Діаметральні площини. Головні діаметральні площини. 8.3. Центр плоского перерізу. Діаметри. Дотична площина і нормаль до поверхні 2-го порядку.

8.4. Головні напрямки поверхні 2-го порядку та її спрощення за допомогою обертання.

8.5. Спрощення рівняння поверхні 2-го порядку за допомогою паралельного перенесення початку координат. Характеристичне рівняння. Класифікація поверхонь 2-го порядку.

2.3.1. Рекомендована література

Основна

1. Аналітична геометрія в теоремах і задачах / навч. посіб. Друге вид. Виправлене і доп. В.В. Городецький, С.Б. Боднарук, Ж.І. Довгей, В.С. Лучко. – Чернівці: – Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. – 408 с.

2. Основи аналітичної геометрії в теоремах і задачах / навч. посіб.: В.В.

Городецький, С.Б. Боднарук, Ж.І. Довгей, В.С. Лучко. – Чернівці: – Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2020. – 384 с.

3. Аналітична геометрія: конспект лекцій / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2022. – 84 с.

4. Тимченко Г. М., Одинцова О. В., Кириллова Н. О., Мазур О. С. Стислий курс вищої математики. Ч. 1: Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри : навч. посіб. – Київ : Кондор, 2022. – 188 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://bazhum.mdu.in.ua/…

5. Розв'язання задач аналітичної геометрії векторним методом: навч.-метод. посібник / С.Д. Дімітрова-Бурлаєнко, В. М. Бурлаєнко, Н. П. Гиря; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – 2-ге вид., випр. і доп. – Харків : НТУ "ХПІ", 2020. – 50 с.

6. Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. Аналітична геометрія: навчальний посібник. Суми: Університет, 2004. 296 с.

Додаткова

1. Кілочицька Т. В. Вища математика. Векторна алгебра та аналітична геометрія : навч.-метод. посіб. – Чернігів : Чернігівський колегіум, 2020. – 120 с.
2. Клепко В., Голець В. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. – Київ : Центр учбової літератури, 2020. – 643 с. – ISBN 978-617-673-946-3.
3. Кузьма О. В., Суліма О. В., Рудик Т. О. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри : конспект лекцій. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 127 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/…
4. Нитребич З. М., Кучма М. І., Дрогомирецька Х. Т., Клапчук М. І.. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Теорія й моделі, приклади й задачі: Підручник / Київ, Видавничий дім «КОНДОР», 2022. 560 с.
5. Томусяк А.А., Трохименко В.С., Шунда Н.М. Геометрія. Частина 1. Аналітична геометрія. Вінниця: ВДПУ, 2002. 220с.
6. Троян Л.Ф., Тютюн Л.А. Індивідуальні завдання та методичні вказівки з навчальної дисципліни «Аналітична геометрія»: методичні рекомендації. Вінниця, 2012. 56 с.
7. Тютюн Л.А., Троян Л.Ф. Аналітична геометрія (структурно-змістові таблиці). Навчальний посібник. Вінниця: ТОВ «Планер», 2009. 112 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. https://library.vspu.edu.ua
2. http://maxima.sourceforge.net
3. http://www.geogebra.org

2.4. Програма навчальної дисципліни "Математичний аналіз"

РОЗДІЛ 1. Вступ до математичного аналізу

Тема 1. Математичний аналіз як розділ математики. Головний об'єкт і метод математичного аналізу. Логічні символи. Елементи теорії множин.

Тема 2. Множина дійсних чисел. Числові множини. Властивості множини дійсних чисел. Геометрія множини дійсних чисел. Обмеженні зверху і знизу числові множини. Точна верхня і точна нижня межі, їх властивості. Неперервність множини дійсних чисел. Принцип Вейєрштрасса.

Тема 3. Функції та їх класифікація. Головний об'єкт аналізу, означення і способи задання. Складна і обернена функції. Елементарні функції та їх класифікація. Окремі класи функцій.

Тема 4. Збіжні послідовності. Границя послідовності. Необхідна умова збіжності. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності. Головна частина збіжної послідовності. Основні властивості збіжних послідовностей. Невизначеності типу

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$. Таблиця основних границь послідовностей. Границя монотонної послідовності. Теорема про стяжну послідовність вкладених відрізків. Число Ейлера. Теорема Больцано-Вейєрштрасса. Критерій Коші.

Тема 5. Границя функції в точці. Означення границі функції в точці. Рівносильність означень за Коші і за Гейне. Односторонні границі. Границя функції на нескінченності. Основні властивості границь функцій в точці. Таблиця важливих границь. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.

Тема 6. Функції, неперервні в точці. Неперервні функції в точці та їх основні властивості. Точки розриву та їх класифікація. Поняття функцій, неперервних на відрізку. Обмеженість функцій, неперервних на відрізку. Проміжні значення функцій, неперервних на відрізку. Рівномірна неперервність функцій, неперервних на відрізку.

РОЗДІЛ2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Тема 1. Похідна та диференціал. Означення диференційовної функції, її неперервність. Похідна і диференціал. Односторонні похідні. Нескінченні похідні.

Геометричний і механічний зміст похідної і диференціала. Похідна і диференціал суми, добутку і частки функцій. Похідна і диференціал складеної функції. Похідна оберненої функції. Функції, задані параметрично. Диференціювання функцій, заданих параметрично. Основні теореми диференціального числення.

Тема 2. Похідні та диференціали вищих порядків. Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца. Диференціали вищих порядків. Диференціали вищих порядків складеної функції.

Тема 3. Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці. Розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$ (перше правило Лопіталя). Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ (друге правило Лопіталя). Розкриття невизначеності $\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$.

Тема 4. Формула Тейлора та її застосування. Виведення формули Тейлора. Обчислення значень функцій з допомогою формули Тейлора і оцінка точності наближення. Основні формули Маклорена. Обчислення границь функцій у точці з допомогою формули Тейлора.

Тема 5. Дослідження функцій на монотонність, екстремум та опуклість. Умови сталості функції. Умови монотонності функції. Застосування диференціального числення до доведення тотожностей, розв’язування рівнянь і нерівностей. Точки екстремуми функції. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму. Знаходження найменшого і найбільшого значення функції, диференційовної на відрізку. Функція строго опукла донизу. Достатні умови строгої опуклості донизу. Функція строго опукла догори. Достатні умови строгої опуклості догори. Точки перегину. Достатні умови наявності точок перегину.

Тема 6. Повне дослідження функції і побудова графіка функції. Похилі і вертикальні асимптоти. Загальна схема дослідження функції. Побудова графіків функцій, заданих формулою $y = f(x)$.

РОЗДІЛ3. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Тема 1. Первісна та невизначений інтеграл. Задача відновлення функції за її похідною. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних невизначених інтегралів. Інтегрування частинами. Інтегрування підстановкою (заміна змінної).

Тема 2. Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування елементарних раціональних дробів. Алгоритм розкладання правильних раціональних дробів. Інтегрування раціональних дробів у загальному випадку.

Тема 3. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Інтегрування функцій вигляду $f(x)=R(x^{r_1},x^{r_2},...,x^{r_k}),$ $f(x)=R\left(x,\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$. Інтегрування функцій вигляду $f(x)=R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$. Підстановки Ейлера. Інтегрування біномних диференціалів $x^m(a+bx^r)^p\,dx$.

Тема 4. Інтегрування деяких трансцендентних функцій. Інтегрування функцій вигляду $R(\sin x,\cos x)$. Інтегрування функцій вигляду $\sin^m x,\ \cos^m x,\ \sin^m x\cos^n x$. Інтегрування функцій вигляду $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $x^n\cos\alpha x$, $x^n\sin\alpha x$, $x^n e^{\alpha x}$.

Тема 5. Визначений інтеграл. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Означення визначеного інтеграла. Необхідна умова інтегровності функції. Суми Дарбу, їх властивості. Достатня умова інтегровності функції. Класи інтегровних функцій. Властивості визначеного інтеграла, пов'язані з арифметичними операціями. Адитивна властивість визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла, пов'язані з нерівностями. Теореми про середнє.

Тема 6. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца. Означення функції за допомогою інтеграла (інтеграл зі змінною верхньою межею), її неперервність. Диференційовність інтеграла зі змінною верхньою межею. Перлина математичного аналізу – формула Ньютона-Лейбніца.

Тема 7. Основні методи обчислення визначеного інтеграла. Означення як інструмент обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона-Лейбніца як інструмент обчислення визначених інтегралів. Застосування інтегрування замінною змінних та інтегрування частинами при обчисленні визначеного інтеграла. Поняття про наближені методи обчислення визначених інтегралів. Формула прямокутників. Формула трапецій. Формула Сімпсона.

Тема 8. Застосування визначених інтегралів. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл обертання. Обчислення довжини дуги кривої. Обчислення площі поверхні обертання. Обчислення статичних моментів і координат центра ваги плоскої кривої. Перша теорема Гульдіна. Друга теорема Гульдіна.

Тема 9. Невласні інтеграли. Невласний інтеграл на нескінченному проміжку та його основні властивості. Умови збіжності. Невласний інтеграл від необмеженої функції та його основні властивості. Умови збіжності.

РОЗДІЛ 4. Числові та функціональні ряди

Тема 1. Числові ряди та їх збіжність. Числовий ряд, його сумування. Сумування геометричної прогресії. Умови збіжності числового ряду. Гармонійний ряд. Властивості збіжних числових рядів.

Тема 2. Числові ряди з невід'ємними членами. Критерії збіжності ряду з невід'ємними членами. Теорема про порівняння рядів. Достатні ознаки збіжності.

Тема 3. Абсолютна та умовна збіжність числового ряду. Абсолютна та умовна збіжність ряду з довільними членами. Збіжність числового ряду, у якого знаки змінюються почережно. Збереження комутативності додавання при сумуванні абсолютно збіжних рядів.

Тема 4. Функціональні послідовності та ряди. Збіжність функціональних послідовностей та рядів. Область збіжності. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей та рядів. Умови рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду. Неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду. Почленне інтегрування рівномірно збіжного функціонального ряду. Почленне диференціювання рівномірно збіжного функціонального ряду.

Тема 5. Степеневий ряд. Структура області збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля. Знаходження радіуса збіжності степеневого ряду. Формула Коші-Адамара. Властивості суми степеневого ряду. Формула Тейлора. Залишковий член формули

Тейлора. Задача про розвинення функції у степеневий ряд. Необхідна умова розвинення. Достатні умови розвинення функції у степеневий ряд. Розвинення у степеневий ряд деяких елементарних функцій. Застосування степеневих рядів.

РОЗДІЛ 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Тема 1. Границя і неперервність функції багатьох змінних. Функції багатьох змінних. Основні поняття. Границя функції багатьох змінних. неперервність функції багатьох змінних.

Тема 2. Диференційовність функції багатьох змінних. Частинні похідні і частинні диференціали функції багатьох змінних. Достатні умови диференційовності функції багатьох змінних. Геометричний зміст диференційовності функції багатьох змінних.

Тема 3. Властивості диференційовних функцій багатьох змінних. Диференціювання складеної функції. Похідна за напрямом. градієнт.

Тема 4. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функції багатьох змінних.

Тема 5. Неявні функції багатьох змінних. Функція однієї змінної, задана рівнянням $F(x, y) = 0$. Існування, неперервність, диференційовність. Функція двох змінних, задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Існування та диференційовність. Диференціювання функцій, заданих системою рівнянь $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases}$

Тема 6. Екстремум функції багатьох змінних. Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови строгого екстремуму функції двох змінних. Найбільше і найменше значення функції багатьох змінних у замкненій області.

Тема 7. Умовний екстремум функції багатьох змінних. Умовний екстремум функції багатьох змінних відносно рівнянь зв’язку. Метод множників Лагранжа.

РОЗДІЛ 6. Інтегральне числення функцій багатьох змінних

Тема 1. Подвійний інтеграл. Міра Жордана плоскої множини. Означення подвійного інтеграла. Умови існування та основні властивості подвійного інтеграла. Обчислення подвійного інтеграла. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Застосування подвійного інтеграла.

Тема 2. Потрійний інтеграл. Тривимірна міра Жордана. Означення потрійного інтеграла. Умови існування та основні властивості потрійного інтеграла. Обчислення потрійного інтеграла. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Застосування потрійного інтеграла.

Тема 3. Криволінійний інтеграл першого роду. Означення криволінійного інтеграла першого роду. Умови існування та основні властивості криволінійного інтеграла першого роду. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду. Застосування криволінійного інтеграла першого роду.

Тема 4. Криволінійний інтеграл другого роду. Означення криволінійного інтеграла другого роду. Умови існування та основні властивості криволінійного інтеграла другого роду. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду. Формула Гріна. Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування.

Тема 5. Скалярні і векторні поля. Диференційовні скалярні поля. Основні характеристики. Диференційовні векторні поля та їх характеристики.

2.4.1. Рекомендована література.

Основна

1. Бак С.М. Робочий зошит студента зі вступу до математичного аналізу (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2022. 61 с.

2. Бак С.М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. ІІІ семестр.

Визначений інтеграл. Ряди (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2020. 38 с.

3. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. IV семестр. Аналіз функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2021. 64 с.

4. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 299 с.

5. Ковтонюк М. М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. 289 с. (Гриф МОНМС України, лист №1/11–15245 від 01.10.2012 р.).

6. Ковтонюк М.М. Клімішина А.Я., Леонова І.М. Практикум з диференціального числення функції однієї змінної. [Електронне мережне наукове видання]. Вінниця: ВНТУ, 2022. 380 с. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/731

7. Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М., Соя О. М. Практикум з диференціального числення функції багатьох змінних : навч. посіб. для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика). [Електронний ресурс]. Вінниця: ВНТУ. 2023. 251 с. URL: https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/812

8. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: У 2-х ч. Київ: Вища школа, 1993. Ч.1: Вступ до аналізу. Диференціальне числення. 375 с.

9. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: У 2-х ч. Київ: Вища школа, 1995. Ч.2: Інтегральне числення. Ряди. 541 с.

Додаткова

1. Бубняк Т. І. Вища математика, Підручник. Видавництво:Новий світ-2000. (ISBN:978-966-7827-41-0) 2023. 436с.

2. Ковтонюк М. М., Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу: І семестр. Вступ в математичний аналіз. Вінниця, 2021. 82с.

3. Ковтонюк М. М., Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу: ІІ семестр. Диференціальне числення функції однієї змінної. Вінниця, 2021. 82с.

4. Ковтонюк М. М., Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу: Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Вінниця, 2021. 78с.

5. Щерба А. І., НестеренкоА. М., МірошкінаІ. В., ЩербаВ. О. Математичнийаналіз: навч. посіб. [Електронний ресурс].Черкаси: ЧДТУ, 2023. – 513 с.

Інформаційні ресурси

1. Сайт Ковтонюк М. М. «Математичний аналіз і диференціальні рівняння вивчаю сам»: www.kovtonyuk.inf.ua (2012–2025 рр.).

2. Сайт Бака С.М. https://sites.google.com/site/sajtbakasm/ (2010 – 2025 рр.).

3. КРИТЕРІЇ
оцінювання відповідей на питання комплексного екзамену з математики

Результати складання комплексного екзамену оцінюються у формі рейтингового балу, максимальне значення якого рівне 100, за розширеною шкалою та в системі ECTS. Підсумковий рейтинговий бал є сумою рейтингових балів за кожне теоретичне питання білету (максимум по 25 балів) і кожне практичне завдання білету (максимум по 25 балів). Основним критерієм оцінювання є повнота відповіді на теоретичні питання та виконання практичних завдань білету.

3.1. Критерії оцінювання відповідей на питання та задачі з алгебри

Екзаменовані повинні володіти теоретико-множинною і логічною символікою, знати основні поняття алгебри і теорії чисел (алгебраїчна операція, група, кільце, поле, векторний простір, лінійна залежність і незалежність, лінійний оператор, матриця, визначник, просте число, подільність, конгруенція, многочлени тощо), знати основні алгебраїчні твердження (основна теорема арифметики, основна теорема алгебри многочленів, основна теорема теорії симетричних многочленів тощо), мати чіткі уявлення про основні числові системи та їх будову, володіти навичками розв'язування систем лінійних рівнянь, знаходження детермінанту матриці, власних векторів матриці, знати основні арифметичні застосування теорії конгруенцій.

3.2. Критерії оцінювання відповідей на питання та задачі з геометрії

Студенти повинні володіти методами аналітичної геометрії, бути ознайомленими як з груповою, так і з структурною точкою зору на геометрію, з сучасним аксіоматичним методом, основними фактами геометрії Лобачевського, мати загальні уявлення про різні неевклідові геометрії, використовувати знання топології при означенні ліній і поверхонь, вміти застосовувати теоретичні знання на практиці, зокрема, до доведення теорем і розв'язування задач шкільного курсу геометрії. Це означає, що при відповіді студенти повинні продемонструвати достатньо широкий погляд на геометрію і готовність викладати елементарну геометрію незалежно від того, на якій аксіоматиці вона побудована, тобто готовність працювати в школі за будь-яким посібником.

Володіти сучасними поглядами на аксіоматичний метод побудови математичної теорії. Володіти векторним методом розв'язування задач, методами досліджень ліній другого порядку, методом геометричних перетворень до розв'язування задач, методами досліджень поверхонь другого порядку, методами перерізів, геометричних місць точок, геометричних перетворень, рухів, подібності, інверсії та алгебраїчним методом при розв'язуванні задач на побудову.

Вміти використовувати метод координат для завдання і дослідження геометричних об'єктів і до розв'язування задач, застосовувати теорію прямих до розв'язування задач, застосовувати теорію площин до розв'язування задач, використовувати знання топології при означенні ліній, поверхонь, поверхонь з межею, геометричного тіла, тощо.

3.3. Критерії оцінювання відповідей на питання та задачі з математичного аналізу

Згідно з освітньою програмою питання з математичного аналізу мають бути спрямованими на перевірку уміння виконувати такі типові завдання професійної діяльності: ставити математичні задачі; аналізувати математичну проблему (задачу); формулювати гіпотетичне твердження; обґрунтовувати (доводити) гіпотетичні твердження, будувати контрприклади; вибирати і використовувати алгоритми, методи, прийоми та способи розв'язування ДР та СДР; вміти проводити прикладні дослідження в галузі математики.

Студенти повинні володіти основними поняттями математичного аналізу (функція, послідовність, ряд, границя, неперервність, похідна, інтеграл, міра), мати чітке уявлення про основні елементарні функції дійсної та комплексної змінної, метричний простір, володіти навичками обчислення границь, похідних, інтегралів, вміти розв'язувати найпростіші типи ДР, знати застосування диференціального та інтегрального числення, а також диференціальних рівнянь до розв'язування практичних задач.

Критерії оцінювання відповідей на 1-3 питання:

Критерії оцінювання відповідей	*Оцінка за шкалою ECTS /за розширеною шкалою /кількість балів*
Студент дає повну вичерпну відповідь на питання білету. Студент володіє: понятійним апаратом відповідної математичної теорії на поглибленому рівні; комплексом знань і вмінь, який характеризується системністю. Застосування знань здійснюється на основі самостійного ціле утворення, побудови власних програм діяльності. Студент проявляє нешаблонність мислення у виборі і використанні елементів комплексу знань, здатний самостійно і творчо використовувати набуті уміння відповідно до варіативних ситуацій навчання. Студент спроможний самостійно формулювати проблеми, узагальнення та висновки. Навчально-пізнавальна активність обумовлена пізнавальними інтересами, мотивами саморозвитку і професійного становлення.	A відмінно 23-25 балів
Студент дає повну і логічно обґрунтовану відповідь на питання білету. Студент володіє понятійним і фактичним апаратом відповідної математичної теорії на поглибленому рівні. Володіє комплексом знань та вмінь, який є частково впорядкованим. У процесі застосування знань студент спроможний самостійно вибрати необхідний елемент комплексу знань та вмінь. Застосування знань та вмінь здійснюється як у стандартних ситуаціях, так і при незначних варіаціях умов на основі використання загальних рекомендацій. Навчально-пізнавальна активність стимулюється пізнавальними інтересами, продукт діяльності оцінюється як професійно значущий.	B дуже добре 20-22 балів
Студент дає повну і логічно обґрунтовану відповідь на питання білету, але з деякими неточностями. Студент володіє понятійним і фактичним апаратом відповідної математичної теорії на підвищеному рівні, може усвідомлено застосовувати знання та вміння для висвітлення суті питання. Відповідь його повна, логічна, обґрунтована, але з деякими неточностями. Комплекс знань з відповідної математичної теорії частково-структурований. Знання застосовуються переважно у знайомих ситуаціях. Навчально-пізнавальна активність стимулюється мотивами професійного становлення і пізнавальними інтересами.	C добре 18-19 балів
Студент дає неповну відповідь на питання білету. Відповідь його правильна, але недостатньо осмислена. Студент володіє понятійним і фактичним апаратом відповідної математичної теорії на середньому рівні, значна частина матеріалу засвоєна на репродуктивному рівні. Навчально-пізнавальна активність студентів є ситуативно евристичною. Використання засобів саморозвитку та самопізнання відбувається не усвідомлено.	D задовільно 15-17 балів
Студент дає неповну і частково неправильну відповідь на питання білету. Студент володіє понятійним і фактичним апаратом відповідної математичної теорії на середньому рівні, на рівні окремих фрагментів, виявляє здатність елементарно викласти думку, здатний усно відтворити окремі частини теми. Має уявлення про специфіку навчальних та прикладних задач, з допомогою викладача виконує елементарні завдання. Відсутні систематизовані знання, уміння та навички.	E достатньо 12-14 балів
Студент дає фрагментарну і переважно неправильну відповідь на питання білету із суттєвими помилками. Студент володіє понятійним і фактичним апаратом відповідної математичної теорії на елементарному рівні, теоретичний матеріал засвоєно частково, необхідні практичні уміння не сформовані. Студент не вміє застосувати теоретичні положення при розв’язанні практичних задач. Виконання окремих дій відбувається правильно, але неусвідомлено. Навчально-пізнавальна активність мотивується ситуативно прагматичним інтересом.	FX незадовільно 9-11 балів

Студент дає фрагментарну і переважно неправильну відповідь на питання білету із суттєвими помилками. Студент володіє понятійним і фактичним апаратом відповідної математичної теорії на елементарному рівні. Теоретичний матеріал не засвоєно або засвоєно частково. Студент не знає основних фундаментальних положень. Необхідні практичні уміння не сформовані. Студент не вміє орієнтуватися при розв'язанні практичних задач Виконання окремих дій відбувається неусвідомлено, у більшості випадків неправильно, навчально-пізнавальна активність проявляється лише у ситуаціях зовнішнього примусу.	F неприйнятно 0-8 балів

Критерії оцінювання відповідей на 4-те питання:

Критерії оцінювання відповідей	*Оцінка за шкалою ECTS /за розширеною шкалою /кількість балів*
Задача розв'язана повністю і правильно. При розв'язанні задачі студент демонструє володіння комплексом знань та вмінь, який характеризується системністю. Застосування знань здійснюється на основі самостійного цілеутворення, побудови власних програм діяльності. Студент проявляє нешаблонність мислення у виборі і використанні способів розв'язання поставленої задачі, здатний самостійно і творчо використовувати набуті уміння. Студент спроможний самостійно формулювати нові задачі, розв'язувати нестандартні задачі. Навчально-пізнавальна активність обумовлена пізнавальними інтересами, мотивами саморозвитку і професійного становлення.	A відмінно 23-25 балів
Задача розв'язана повністю і правильно з однією або двома незначними неточностями. При розв'язанні задачі студент демонструє володіння комплексом знань та вмінь, який є частково-впорядкованим. У процесі застосування знань студент спроможний самостійно вибрати необхідний елемент комплексу знань та вмінь для розв'язання поставленної задачі. Застосування знань та вмінь здійснюється як у стандартних ситуаціях, так і при незначних варіаціях умов на основі використання загальних рекомендацій. Відбувається перенесення сформованих умінь або їх комплексів на розв'язування незнайомих задач. Навчально-пізнавальна активність стимулюється пізнавальними інтересами, продукт діяльності оцінюється як професійно значущий.	B дуже добре 20-22 балів
Задача розв'язана правильно з кількома неточностями та/або незначними помилками. При розв'язанні задачі студент демонструє усвідомлене застосування знань та вмінь. Комплекс знань частково-структурований. Знання застосовуються переважно у знайомих ситуаціях. Пошук способів розв'язання задач здійснюється за зразком. Студент спроможний аргументувати застосування певної методичної дії у ході розв'язування задач. Навчально пізнавальна активність стимулюється мотивами професійного становлення і пізнавальними інтересами.	C добре 18-19 балів
Задача розв'язана в цілому правильно, але зі значною кількістю помилок. Студент має знання про способи розв'язування типових задач. Однак процес самостійного розв'язування задач потребує опори на зразок. Навчально пізнавальна активність студентів є ситуативно-евристичною. Домінують мотиви обов'язку та особистого успіху.	D задовільно 15-17 балів
Задача розв'язана на половину. Студент має уявлення про способи розв'язування типових задач. Виконання дій при розв'язуванні задач частково усвідомлюється, здійснюється частково правильно.	E достатньо 12-14
Задача розв'язана неправильно. Студент має елементарні знання та вміння. Виконання окремих дій відбувається неусвідомлено, навчально-пізнавальна активність мотивується ситуативно-прагматичним інтересом	FX незадовільно 9-11
Задача не розв'язана або розв'язана неправильно. Студент має елементарні знання та вміння. Виконання окремих методичних дій відбувається неусвідомлено, у більшості випадків неправильно, навчально-пізнавальна активність проявляється лише у ситуаціях зовнішнього примусу	F неприйнятно 0-8 балів

Критерії оцінювання відповіді студента

Характеристики критеріїв оцінювання знань	Оцінка ЄКТС	Оцінка за розширеною шкалою	Мінімальний бал для отримання позитивної оцінки – 50, максимальний - 100
Студент володіє узагальненими знаннями з предмета, аргументовано використовує їх у нестандартних ситуаціях; вміє застосовувати вивчений матеріал для внесення власних аргументованих суджень у практичній педагогічній діяльності.	**A**	**відмінно**	**90-100**
Студент вільно володіє вивченим матеріалом, зокрема, застосовує його на практиці; вміє аналізувати і систематизувати наукову та методичну інформацію. Використовує загальновідомі доводи у власній аргументації, здатен до самостійного опрацювання навчального матеріалу; виконує дослідницькі завдання, але потребує консультації викладача.	**B**	**дуже добре**	**80-89**
Студент може зіставити, узагальнити, систематизувати інформацію під керівництвом викладача; знання є достатньо повними; вільно застосовує вивчений матеріал у стандартних педагогічних ситуаціях. Відповідь його повна, логічна, обґрунтована, але з деякими неточностями. Здатен на реакцію відповіді іншого студента, опрацювати матеріал самостійно, вміє підготувати реферат і захистити його найважливіші положення.	**C**	**добре**	**75-79**
Студент володіє матеріалом на початковому рівні (значну частину матеріалу засвоює на репродуктивному рівні). З допомогою викладача здатен відтворювати логіку наукових положень; має фрагментарні навички в роботі з підручником, науковими джерелами; має стійкі навички роботи з конспектом, може самостійно оволодіти більшою частиною навчального матеріалу. Може аналізувати навчальний матеріал, порівнювати і робити висновки; відповідь його правильна, але недостатньо осмислена	**D**	**задовільно**	**60-74**
Студент володіє навчальним матеріалом на рівні окремих фрагментів; виявляє здатність елементарно викласти думку, з допомогою викладача виконує елементарні завдання; контролює свою відповідь з декількох простих речень; здатний усно відтворити окремі частини теми; має фрагментарні уявлення про роботу з науково-методичним джерелом, відсутні сформовані уміння та навички	**E**	**достатньо**	**50-59**
Незнання значної частини навчального матеріалу, суттєві помилки у відповідях на питання, невміння застосувати теоретичні положення при розв'язанні практичних задач.	**FX**	**незадовільно**	**35-49**
Незнання значної частини навчального матеріалу, суттєві помилки у відповідях на питання, невміння орієнтуватися при розв'язанні практичних задач, незнання основних фундаментальних положень.	**F**	**неприйнятно**	**1-34**

4. ЗРАЗОК КОМПЛЕКСНОГО КВАЛІФІКАЦІЙНОГО ЗАВДАННЯ

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

Ступінь вищої освіти: БАКАЛАВР
Предметна спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)
Комплексний екзамен з математики

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 1

1. Числові ряди з дійсними членами. Основні поняття. Геометрична прогресія та гармонійний ряд. Властивості збіжних рядів.
2. Побудова поля комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа.

Дії над комплексними числами.

3. Канонічні рівняння поверхонь 2-го порядку: еліпсоїд, гіперболоїди і параболоїди.
4. Задача з математичного аналізу.

Затверджено за засіданні кафедри **<u>алгебри і методики навчання математики</u>**
Протокол №________від 202__ року
Зав. кафедрою алгебри і
методики навчання математики ___________ **доц. Коношевський О. Л.**
Екзаменатор ___________ доц. Панасенко О. Б.
Екзаменатор ___________ проф. Бак С. М.
Екзаменатор ___________ доц.Тютюн Л. А.

5. ЗРАЗКИ ВІДПОВІДЕЙ НА КОМПЛЕКСНІ КВАЛІФІКАЦІЙНІ ЗАВДАННЯ

1. Відповідь на перше питання («Математичний аналіз») Числові ряди з дійсними членами. Основні поняття. Геометрична прогресія та гармонійний ряд. Властивості збіжних рядів.

Візьмемо деяку послідовність ($u_n u_n$) дійсних чисел.

Означення 1. *Символ виду* $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$(1) *називається числовим рядом. Числа* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *називаються членами ряду, відповідно першим, другим,…,* $n - n -$*им (або загальним).*

Для числового ряду (1) побудуємо послідовність сум $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots,$ $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots,$ (2), де
$S_1 = u_1,$ $S_2 = u_1 + u_2,$ $S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$ ……………………….
$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$
…………………………..…………………………….. (3)

Означення 2. *Суми (3) називаються частинними сумами ряду (1), а послідовність (2) називається послідовністю частинних сум. Якщо в ряді (1) відкинути перших* nn *членів, то ряд*
$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$
$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ (4) *називається залишком ряду (1).*

Означення 3. *Якщо послідовність частинних сум* ($S_n S_n$) *ряду (1) збіжна, то і ряд (1) називається збіжним, а границя послідовності (* S_n S_n *) називається сумою ряду*:
$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots += S$
$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots += S$ *Якщо послідовність* (S_n) (S_n) *розбіжна, то і ряд (15.1) називається розбіжним.*

Приклад. Дослідити на збіжність ряд (геометрична прогресія)

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

Розв'язання.

$$\boldsymbol{S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}};$$

$$\boldsymbol{S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \begin{cases}\frac{a}{1-q}, |q|<1,\\ \infty, |q|\geq 1.\end{cases}$$

Властивості збіжних числових рядів визначаються теоремами.

Теорема.1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *- збіжний* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Cu_n, C\in\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Cu_n, C\in\mathbb{R}$*- збіжний, причому* $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

тобто сталий множник можна виносити за знак збіжного ряду.

Доведення. Позначимо частинні суми рядів $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, S_n{}' = \sum_{k=1}^{n} Cu_k \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, S_n{}' = \sum_{k=1}^{n} Cu_k$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim_{n\to\infty} S_n = S \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Знайдемо границю послідовності (S_n') (S_n') :

$\lim_{n\to\infty} S_n' = \quad \lim_{n\to\infty} S_n' = \quad = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} Cu_k = C\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = C\lim_{n\to\infty} S_n = CS$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} Cu_k = C\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = C\lim_{n\to\infty} S_n = CS$. Отже ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n \sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ збіжний згідно з означенням і має місце рівність $S' = CS. S' = CS.$ ■

Теорема.2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *– збіжні* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n) \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ *- збіжний, причому* $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *тобто збіжні ряди можна почленно додавати.*

Теорема 3. $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *- збіжний* $\Leftrightarrow \Leftrightarrow$ *залишок* $R_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n R_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ *збіжний, причому* $S = S_m + R_m S = S_m + R_m$.

Наслідок. *Якщо ряд збіжний, то його залишок прямує до нуля (є нескінченно малою величиною).*

Теорема 4*(необхідна умова збіжності). Якщо ряд збіжний, то границя його загального члена дорівнює нулю при* $n\to\infty n\to\infty$: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доведення. Позначимо частинну суму ряду:

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$

$\Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1}. \Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1}.$ Тоді

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

Наслідок.*Якщо* $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ *то ряд розбіжний.*

Теорема .5. *Для того, щоб числовий ряд був збіжний, необхідно і достатньо, щоб*

$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 i \forall p\in\mathbb{N}: |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$

$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 i \forall p\in\mathbb{N}: |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$

Доведення. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - збіжний $\overset{df}{\Leftrightarrow} (S_n) \quad \overset{df}{\Leftrightarrow} (S_n)$ збіжна $\overset{Кр.Коші}{\Leftrightarrow} (S_n) \quad \overset{Кр.Коші}{\Leftrightarrow} (S_n)$ - фундаментальна

$\overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 i \forall p\in N: |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$\overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0 \exists n_0, \forall n > n_0 i \forall p\in N: |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, але

$$|S_{n+p} - S_n| = |(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)| = |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

$|S_{n+p} - S_n| = |(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)| = |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$

Приклад. Дослідити на збіжність гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$ тобто необхідна умова збіжності ряду виконується. Однак цей ряд є розбіжним. Дійсно, запишемо $2n\, 2n$-частинну суму ряду:

$$S_{2n} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}_{S_n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n},$$

тоді

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ разів}} = \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2},$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ разів}} = \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2},$$ або

$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2} S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}.$

Якби гармонійний ряд був збіжний, то існувала б скінченна границя послідовності частинних сум: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Отже, перейшовши в нерівності до границі при $n \to \infty\, n \to \infty$, отримали б: $S - S \geq \frac{1}{2} S - S \geq \frac{1}{2}$, або $0 \geq \frac{1}{2} 0 \geq \frac{1}{2}$, а це є неправильна нерівність.

Ми прийшли до суперечності, тобто наше припущення про збіжність гармонійного ряду неправильне, отже гармонійний ряд розбіжний.

2. Відповідь на друге питання («Алгебра») Побудова поля комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами.

У полі $R\, R$ дійсних чисел рівняння $x^2 + 1 = 0\, x^2 + 1 = 0$ розв'язків не має. Виникає питання: чи можна побудувати розширення поля $R R$ таке, щоб це рівняння в цьому розширенні мало розв'язок? Отже, таке розширення повинно містити елемент $i i$ такий, що $i^2 + 1 = 0 i^2 + 1 = 0$ або $i^2 = -1 i^2 = -1$. Таким розширенням і є поле комплексних чисел.

Для його побудови використовують впорядковані пари дійсних чисел. На це наштовхують такі міркування: між точками на числовій прямій і дійсними числами існує взаємно однозначна відповідність. Для побудови поля комплексних чисел встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками площини і шуканим розширенням поля $R\, R$. Відомо, що між точками на площини і парами дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність (кожній точці на площині відповідає пара її координат і навпаки). Тому природньо за множину комплексних чисел взяти множину всіх впорядкованих пар дійсних чисел.

Далі на цій множині $R \times R R \times R$ введемо дві операції + і ‥ за таким правилом:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Можна показати, що множина $C = R \times R C = R \times R$ з введеними операціями є полем. Його і називають полем комплексних чисел.

Можна довести, що поле $C C$ вміщує поле $R R$. Для цього потрібно встановити ізоморфізм між множиною $R R$ дійсних чисел і множиною $C * C *$ тих чисел із множини $C C$, у яких друга компонента дорівнює 0. Оскільки в алгебрі структури вивчаються з точністю до ізоморфізму, то множину $C * C *$ можна ототожнити із множиною $R R$.

Число $i i$ зображається як $(0,1)(0,1)$, оскільки

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

Кожне комплексне число $z = (a,b) z = (a,b)$ може бути представлене в так званій алгебраїчній формі $a + bi a + bi$, оскільки

$$z = (a,b) = (a,0) + (b,0) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + bi$$

$$z = (a,b) = (a,0) + (b,0) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + bi.$$

Тоді правила додавання і множення чисел в алгебраїчній формі записуються так:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Отже, точці $M(a,b) M(a,b)$ на координатній площині відповідає комплексне число $z = a + bi\ z = a + bi$. Якщо перейти до полярних координат, тобто позначити $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа, $\varphi \in 0; 2\pi) \varphi \in 0; 2\pi)$ – аргумент, тобто кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OM} \overrightarrow{OM}$ із додатним напрямом очі $Ox Ox$, то отримаємо так звану тригонометричну форму комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ де } r = |z| r = |z|.$$

Наприклад, комплексному числу $z = 1 + i z = 1 + i$ на площині відповідає точка $(1,1)\ (1,1)$, $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4} \varphi = \frac{\pi}{4}$, тому його тригонометрична форма $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

В тригонометричній формі зручно проводити множення і ділення комплексних чисел. Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\quad z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то легко бачити, що

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Якщо ж $z_2 \neq 0\ z_2 \neq 0$, то до $z_2\ z_2$ існує обернене комплексне число $z_2^{-1} = \frac{1}{r_2}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))\quad z_2^{-1} = \frac{1}{r_2}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$ і тоді отримуємо формулу ділення комплексних чисел в тригонометричній формі:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Піднесення до натурального степеня $n n$ відбувається відповідно до так званої формули Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

яку легко довести методом математичної індукції.

Крім того, існує точно $n n$ різних значень кореня $n n$ -го степеня із комплексного числа. Ці числа $w_0, w_1, \dots, w_{n-1} w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ визначаються формулами:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \quad w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

$k = 0,1,\dots,n-1 k = 0,1,\dots,n-1.$

3. Відповідь на третє питання («Геометрія») Канонічні рівняння поверхонь 2-го порядку: еліпсоїд, гіперболоїди і параболоїди.

Означення 1. *Еліпсоїдом* називається поверхня, яка в деякій ПДСК задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

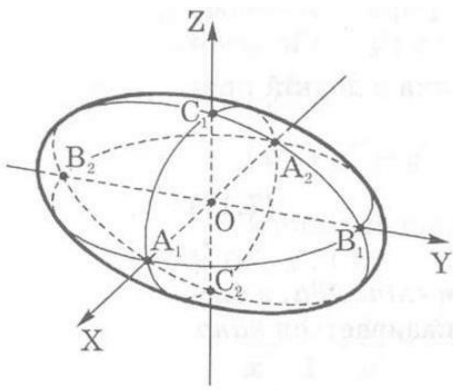

Рис. 1

Властивості еліпсоїда:

1. Не проходить через початок координат, оскільки координати точки $O(0;0;0) O(0;0;0)$ не задовольняють рівняння (1).

2. Перетинає кожну із координатних осей у двох точках, симетричних відносно початку координат, а саме: вісь $\mathrm{OX}\ \mathrm{OX}$ у точках $A_1(a;0;0)\ A_1(a;0;0)$ і $\mathrm{A_2(-a;0;0)}\ \mathrm{A_2(-a;0;0)}$, вісь $\mathrm{OY}\ \mathrm{OY}$ $B_1(0;b;0)\ B_1(0;b;0)$ і $\mathrm{B_2(0;-b;0)}\ \mathrm{B_2(0;-b;0)}$, вісь $\mathrm{OZ}\ \mathrm{OZ}$ $C_1(0;0;c)\ C_1(0;0;c)$ і $\mathrm{C_2(0;0;-c) C_2(0;0;-c)}$. Ці точки називаються *вершинами*, $A_1A_2 = 2a A_1A_2 = 2a$, $\mathrm{B_1B_2 = 2b B_1B_2 = 2b}$, $\mathrm{C_1C_2 = 2c C_1C_2 = 2c}$ – *осями*, числа $\mathrm{a, b, c a, b, c}$ – *півосями*.

3. Симетричний відносно всіх координатних площин, осей і початку координат, оскільки всі змінні входять у його рівняння в парних степенях.

4. Із (1) випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \le 1 \frac{x^2}{a^2} \le 1$, $\frac{y^2}{b^2} \le 1 \frac{y^2}{b^2} \le 1$, $\frac{z^2}{c^2} \le 1 \frac{z^2}{c^2} \le 1$, тобто $|x| \le a\ |x| \le a$, $|y| \le b\ |y| \le b$, $|z| \le c\ |z| \le c$, або $-a \le x \le a\ -a \le x \le a$, $-b \le y \le b\ -b \le y \le b$, $-c \le z \le c -c \le z \le c$. Це означає, що він є обмеженою поверхнею, яка міститься всередині прямокутного паралелепіпеда, обмеженого пл. $\mathrm{x = \pm a\ \ x = \pm a}$, $\mathrm{y = \pm b y = \pm b}$, $\mathrm{z = \pm c z = \pm c}$.

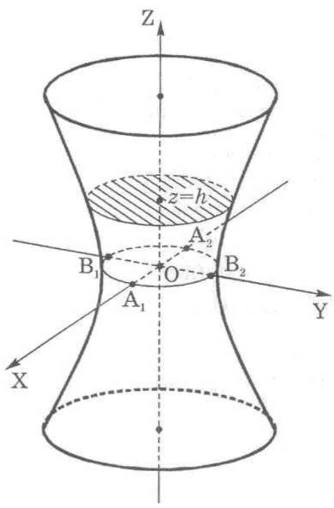

Рис. 3

5. Якщо його перетнути площиною $\mathrm{z = h\ z = h}$ $\mathrm{(|h| < c)\ (|h| < c)}$, паралельною $\mathrm{OXY\ \ OXY}$, то утвориться еліпс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$. Розміри цього еліпса збільшуються зі зменшенням $|h|\ |h|$ і зменшуються зі збільшенням $|h|\ |h|$. Аналогічно при перетині площини, паралельними до інших координатних площин. Якщо в (1) два параметри рівні між собою, наприклад, $a = b\ a = b$, то дістанемо поверхню обертання – еліпсоїд обертання: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, або $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Ця поверхня

утворена внаслідок обертання еліпса з півосями a, c a, c навколо осі OZ OZ. Якщо ж $a = b = c$ $a = b = c$, то із (1) матимемо: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, або $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Це рівняння сфери з центром у початку координат. Отже, сфера є частковим випадком еліпсоїда.

Означення 2.*Однопорожнинним гіперболоїдом* наз. поверхня, яка в деякій ПДСК задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (2)$$

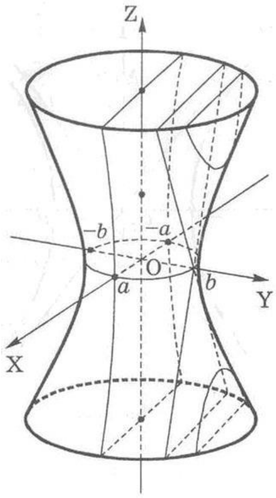

Рис.4

Властивості:

1. Не проходить через початок координат.

2. Не перетинає вісь OZ OZ, а дві інші осі перетинає в точках, симетричних відносно поч. коор., а саме: вісь OX OX у точках $A_1(a;0;0)$ $A_1(a;0;0)$, $A_2(-a;0;0)$ $A_2(-a;0;0)$, вісь OY OY $B_1(0;b;0)$ $B_1(0;b;0)$, $B_2(0;-b;0)$ $B_2(0;-b;0)$. Ці точки наз. *вершинами*, а $A_1A_2 = 2a$ $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ $B_1B_2 = 2b$ – *дійсними осями*. Відрізок $2c$ $2c$ наз. його *уявною віссю,* a, b a, b – *дійсними півосями,* c c – *уявною піввіссю.*

3. Симетричний відносно всіх координатних площин, осей і поч. коор., оскільки всі змінні входять у його рівняння в парних степенях. Вісь OZ OZ наз. *головною віссю*.

4. Якщо дану поверхню перетнути пл. $z = h$ $z = h$, паралельними до OXY, OXY, то в перерізі утворяться еліпси: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2 x^2}{c^2 a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$. Розміри яких зростають зі збільшенням $|h|$ $|h|$. Еліпс найменших розмірів утворюється при $h = 0$ $h = 0$, тобто при перетині його пл. OXY OXY. Рівняння цього еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Він *наз. горловим еліпсом* (рис. 3). Якщо його перетнути пл. $y = h$, $y = h$, де $|h| \neq b$, $|h| \neq b$, то в перерізі утвориться гіпербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$. Якщо $|h| < b$ $|h| < b$, то уявною віссю такої гіперболи є вісь OZ OZ. Якщо $|h| > b$ $|h| > b$, то уявною віссю є вісь OX OX. Якщо $|h| = b$ $|h| = b$, то в перерізі утворяться дві прямі, що перетинаються: $z = \pm\frac{c}{a}x$ $z = \pm\frac{c}{a}x$ (рис. 4). Аналогічні перерізи утворюються і при перетині його пл., паралельними до OYZ OYZ.

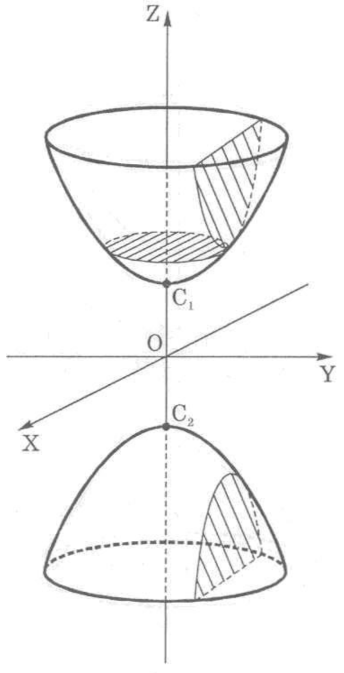

Рис. 7

Озн. 3.*Двопорожнинним гіперболоїдом* наз. поверхня, яка в деякій ПДСК задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (3)$$

Властивості.

1. Не проходить через початок координат.

2. Не перетинається з координатними осями OX OX і OY OY а вісь OZ OZ перетинає в двох точках $C_1(0;0;c)$ $C_1(0;0;c)$,

$C_2(0;0;-c)\,C_2(0;0;-c)$, симетричних відносно початку координат. Ці точки наз. *вершинами*, а $C_1C_2 = 2cC_1C_2 = 2c$ – його *дійсною віссю.*

3. Симетричний відносно всіх координатних площин, осей і початку координат, оскільки всі змінні входять у його рівняння в парних степенях.

4. З рівняння (3) випливає, що $\frac{z^2}{c^2} \geq 1\,\frac{z^2}{c^2} \geq 1$, тобто $|z| \geq c\;|z| \geq c$, або $\left[\begin{array}{l} z \geq c, \\ z \leq -c. \end{array}\right.\left[\begin{array}{l} z \geq c, \\ z \leq -c. \end{array}\right.$ Отже, (3) розміщений зовні смуги, обмеженої пл. $z = \pm cz = \pm c$, і складається з двох симетричних частин (рис. 7).

5. Якщо його перетнути пл. $z = hz = h$, $|h| > c|h| > c$, то в перерізі утвориться еліпс $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h, \end{cases}\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h, \end{cases}$ розміри якого збільшуються разом із збільшенням $|h||h|$. Якщо перетнути пл. $y = hy = h$, паралельними до $OXZOXZ$, то утворяться гіперболи: $\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}$ уявні осі яких паралельні до осі $OX\,OX$ (рис.7). Аналогічною, коли поверхню перетнути пл., паралельними до $OYZOYZ$.

<u>Озн. 4.</u> *Еліптичним параболоїдом*наз. поверхня, яка в деякій ПДСК задається рівнянням

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{5}$$

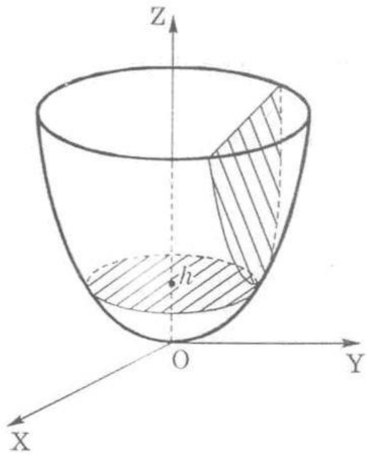

Рис. 9

В*ластивості*:

1. Проходить через початок координат, і це єдина точка, в якій він перетинає координатні осі.

2. Симетричний відносно координатних пл. $OXZOXZ$, $OYZOYZ$, оскільки разом із точкою $(x;y;z)(x;y;z)$ його рівняння задовольняють точки $(x;-y;z)\;(x;-y;z)$, $(-x;y;z)\;(-x;y;z)$ симетричні відносно цих пл.. Симетричний відносно осі $OZ\,OZ$, бо ця вісь є лінією перетину його пл. симетрії. Вісь $OZOZ$наз. *віссю,* а точка, в якій він перетинає цю вісь, – *вершиною.*

3. Якщо його перетнути пл. $z = h, z = h, h > 0 h > 0$ паралельними до $OXYOXY$, то в перетині утворяться еліпси: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h, \end{cases}$, розміри яких збільшуються зі збільшенням h h (рис.9). Якщо перетнути пл. $y = h, y = h$, паралельними до $OXZOXZ$, то в перетині утворяться параболи $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}$ $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}$ осі яких паралельні до осі $OZOZ$. Якщо перетнути площинами $x = hx = h$, паралельними до

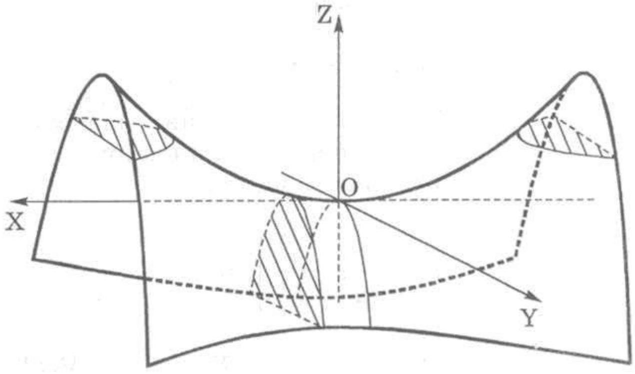

*Рис.*13

OYZ OYZ, то в перетині утворяться параболи $\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h, \end{cases}$ $\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h, \end{cases}$ осі яких паралельні до осі OZ OZ. Зокрема, в перерізі з пл. OYZ OYZ утвориться парабола $\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2}, \\ x = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2}, \\ x = 0, \end{cases}$

<u>Озн. 5</u>. *Гіперболічним параболоїдом* наз. поверхня, яка в деякій ПДСК задається рівнянням

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{8}$$

Властивості:

1. Проходить через початок координат, і це єдина точка, в якій він перетинає координатні осі.

2. Симетричний відносно координатних площини OXZ OXZ, OYZ OYZ. Тому він симетричний і відносно осі $OZOZ$, яка називається його *віссю.* Точка, в якій ця вісь перетинає гіперболічний параболоїд, називається його *вершиною.*

3. Якщо перетнути площину $z = hz = h$, паралельною до площини $OXYOXY$, то в перетині утвориться гіпербола $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 h} - \frac{y^2}{b^2 h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 h} - \frac{y^2}{b^2 h} = 1, \\ z = h. \end{cases}$ уявна вісь якої буде паралельною до осі $OYOY$, якщо $h > 0h > 0$, і до осі $OXOX$, якщо $h < 0h < 0$ (рис. 13). Якщо ж $h = 0$ $h = 0$, то перетином буде пара прямих, що перетинаються: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ Якщо перетнути площину $x = h$ $x = h$,паралельною до $OYZOYZ$,то в перетині утвориться парабола $\begin{cases} z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h, \end{cases}$ $\begin{cases} z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h, \end{cases}$ вітки якої напрямлені вниз (рис. 13). Якщо перетнути площиною $y = h$ $y = h$, паралельно до OXZ OXZ, то в перетині утвориться парабола $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}$ $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h, \end{cases}$ вітки якої напрямлені вгору.

4.Відповідь на четверте питання (Задача). *Обчислити інтеграл* $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки функції $\sin x$ $\sin x$ і $\cos x$ $\cos x$ стоять у невеликих степенях, то зручно використати універсальну тригонометричну підстановку.

$$I=\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\left|\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, -\pi<x<\pi, dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix}\right|=$$

$$=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{(t-2)^2}=-\frac{1}{t-2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}-2}+C.$$