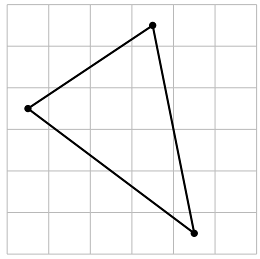
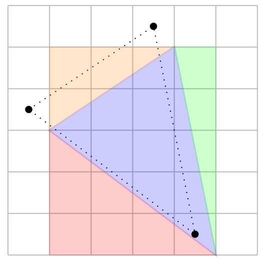
8–9 класи

1. ***(5 балів)*** На рисунку зображено трикутник, вершини якого знаходяться у центрах одиничних клітинок координатної сітки. Знайдіть площу цього трикутника.



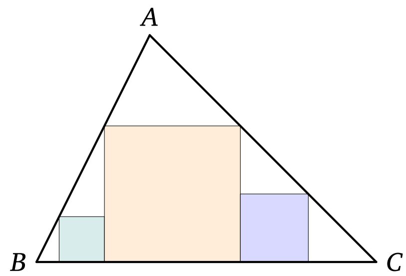
Розв'язання.

Змістимо трикутник на пів клітинки по горизонталі і пів клітинки по вектикалі так, щоб його вершини потрапили у вузли координатної сітки (див. рис.). Зрозуміло, що при такому перетворенні його площа не зміниться. Площа трикутника може бути обчислена, наприклад, ось так: якщо від площі прямокутника зі сторонами 5 та 4, який містить одержаний трикутник, відняти площі трьох прямокутних трикутників з катетами 2 і 3, 1 і 5, 3 і 4: $20 - 3 - 2{,}5 - 6 = 8{,}5$ (кв. од.).



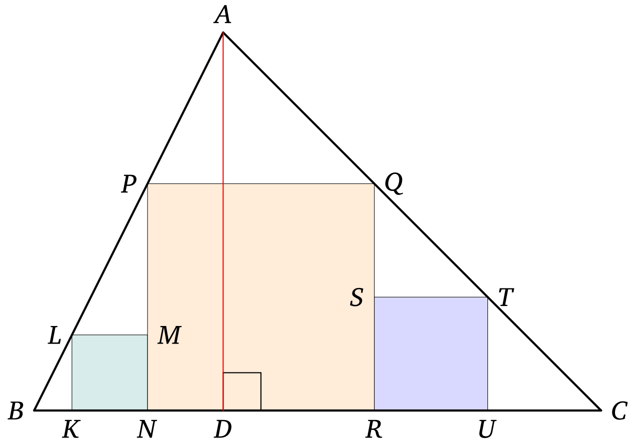
Відповідь. 8,5 кв. од.

2. ***(5 балів)*** Три квадрати з площами 4, 36 та 9 вписано у трикутник ABC так, як показано на рисунку. Чому дорівнює висота цього трикутника, яку опущено з вершини A?



Розв'язання. Нехай $KLMN$, $NPQR$, $RSTU$ — задані квадрати з площами відповідно 4, 36 та 9 кв. од. (див. рис.) і нехай AD — шукана висота трикутника.

Оскільки $KL = LM = 2$, $NP = 6$, то $PM = 6 - 2 = 4$. З подібності трикутників BKL та LMP випливає, що $BK = 1$.



Оскільки $UT = ST = 3$, $RQ = 6$, то $SQ = 6 - 3 = 3$. Тоді трикутники QST та TUC рівні за двома катетами і $UC = 3$. Більше того, $\angle C = 45°$.

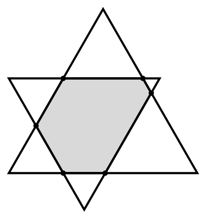
Нехай $ND = x$, тоді $DR = 6 - x$. З подібності трикутників BDA і BKL випливає, що $AD = 2BD = 2(1 + 2 + x) = 6 + 2x$. З іншого боку, так як трикутник ADC рівнобедрений, то $AD = DC = (6 - x) + 3 + 3 = 12 - x$. Тоді

$$6 + 2x = 12 - x,$$

звідки $x = 2$, а $AD = 12 - x = 12 - 2 = 10$.

Відповідь. 10.

3. ***(7 балів)*** Два рівносторонніх трикутники з периметрами 15 см і 12 см розташовані так, що їх сторони відповідно паралельні (див. рисунок). Знайдіть периметр виділеного шестикутника.



Розв'язання. Трикутники, що утворилися зовні шестикутника, є рівносторонніми, бо у кожного з них будь-який їх кут дорівнює (це випливає із того, що задані трикутники мають лише такі кути і з рівності відповідних кутів при паралельних прямих). Тоді, довжина ламаної, що складається із трьох сусідніх сторін шестикутника дорівнює стороні одного із даних трикутників, а довжина ламаної, що залишилася, — довжині сторони другого. Таким чином, периметр шестикутника дорівнює $\frac{12}{3} + \frac{15}{3} = 9$ (см).

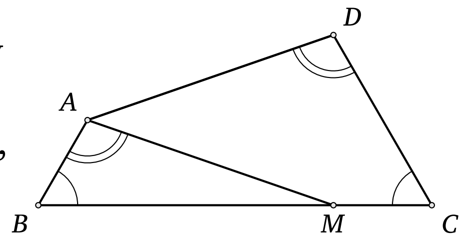
Відповідь. 9 см.

4. ***(7 балів)*** В трапеції $ABCD$ з основами AB і CD бісектриса кута B перетинає відрізок AD в точці M. Відомо, що $AB = 4$, $BC = 9$ і $CD = 3$. В якому відношенні точка M ділить відрізок AD?

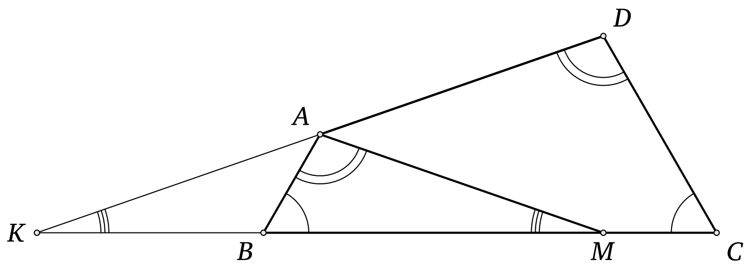
Розв'язання. *Відповідь.* $DM : MA = 3 : 2$.

Продовжимо BM до перетину з прямою CD у точці F. Тоді $\angle CBF = \angle FBA$, бо BM — бісектриса кута B трапеції. Далі, $\angle FBA = \angle BFC$ як внутрішні різносторонні, а тому $\angle CBF = \angle BFC$ і трикутник BCF — рівнобедрений. Тоді $CF = CB = 9$, $DF = 6$. Трикутники FMD і BMA — подібні (за двома кутами). Отже, їх відповідні сторони пропорційні: $DM : MA = DF : AB = 6 : 4 = 3 : 2$, що і треба було знайти.

5. ***(9 балів)*** В опуклому чотирикутнику $ABCD$ виконуються рівності $\angle B = \angle C$ і $CD = 2AB$. На стороні BC відмітили таку точку M, що $\angle BAM = \angle CDA$. Доведіть, що $AM = AD$.



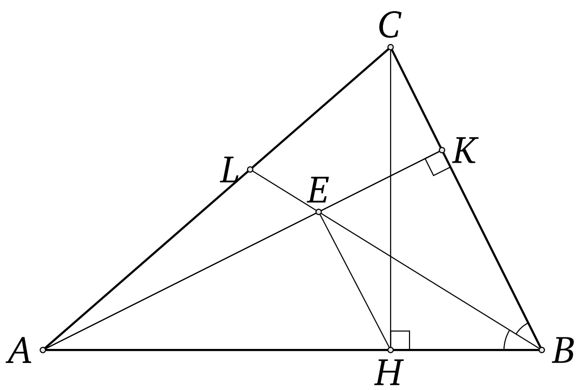
Розв'язання. Нехай K — точка перетину прямих AD і BC (вона існує, адже в іншому випадку чотирикутник $ABCD$ мав би бути рівнобедреною трапецією з $AB = CD$, що протирічить умові).



Трикутники BAM і CDK подібні за двома кутами. Тоді, по-перше, $\angle BMA = \angle CKD$, і, по-друге, $AM : DK = BA : CD = 1 : 2$. Значить, трикутник KAM — рівнобедрений, $AM = AK$. Це означає, що $KA = AD = AM$, що і потрібно було довести.

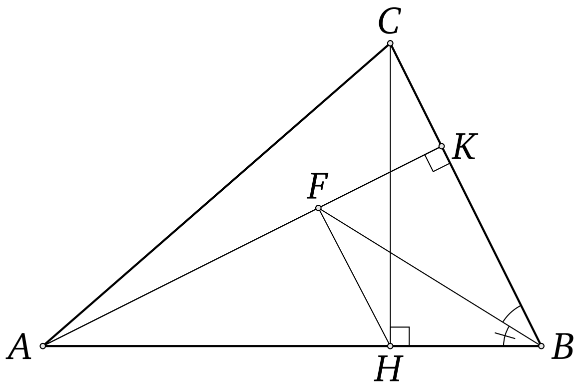
6. ***(9 балів)*** В гострокутному трикутнику ABC провели висоти AK і CH, та бісектрису BL. Відомо, що $AH = BC$. Доведіть, що пряма, яка проходить через H і паралельна до BC, проходить через точку перетину AK і BL.

Розв'язання. Зробимо рисунок, що відповідає умові задачі.



Нехай E — точка перетину AK і BL. Потрібно довести, що $HE \parallel BC$. Застосуємо *реверсний* метод розв'язування.

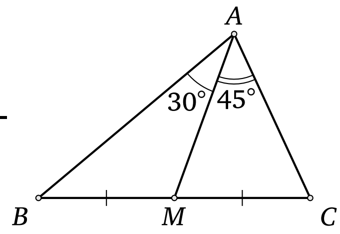
Нехай пряма, яка проходить через точку H і паралельна до BC, перетинає AK в точці F. Доведемо, що BF — бісектриса кута $\angle B$, тобто що $\angle ABF = \angle CBF$.



Зауважимо, що $HF \perp AF$ і $\Delta AFH = \Delta CHB$ за гіпотенузою і гострим кутом: $AH = CB$ і $\angle FAH = \angle HCB$, як кути з перпендикулярними сторонами. З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних сторін, тобто $HF = HB$. Це означає, що трикутник BHF — рівнобедрений. Тоді кути при його основі рівні: $\angle HBF = \angle HFB$. Оскільки $HF \parallel BK$, то $\angle HBF = \angle FBK$ як внутрішні різносторонні при паралельних, що перетнуті третьою прямою. Отже, $\angle HBF = \angle HFB = \angle KFB$, що і треба було довести.

10–11 класи

1. ***(5 балів)*** Медіана трикутника утворює кути 30° та 45° зі сторонами, між якими вона проведена. Знайдіть відношення цих сторін.



Розв'язання. Нехай $BM = CM = m$. За теоремою синусів у трикутниках ABM і ACM:

$$\frac{BM}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin\angle AMB}, \qquad \frac{CM}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin\angle AMC}.$$

Оскільки $BM = CM$ і $\sin\angle AMB = \sin\angle AMC$ (суміжні кути), то $AB\cdot\sin 30^\circ = AC\cdot\sin 45^\circ$, звідки

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = \sqrt{2}.$$

Відповідь. $AB : AC = \sqrt{2} : 1$.

2. ***(5 балів)*** Відомо, що довжини сторін трикутника ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$) задовольняють співвідношення

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} = 1.$$

Знайдіть величину кута C трикутника ABC.

Розв'язання. Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} = 1;$$
$$\frac{a(a+c)+b(b+c)}{(b+c)(a+c)} = 1;$$
$$a^2 + ac + b^2 + bc = ba + bc + ca + c^2;$$
$$a^2 + b^2 - ab = c^2.$$

За теоремою косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C.$$

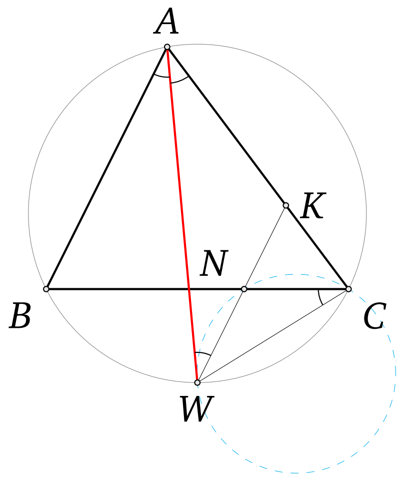
Тоді $2\cos\angle C = 1$, звідки $\cos\angle C = \frac{1}{2}$, $\angle C = 60^\circ$.

Відповідь. 60°.

3. ***(7 балів)*** Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає його описане коло в точці W (при продовженні). Точка K на стороні AC така, що $WK \parallel AB$. Відрізок WK перетинає BC в точці N. Доведіть, що AW є дотичною до кола, описаного навколо трикутника CNW.

(*Сергій Яковлєв*)

Розв'язання.



З'єднаємо точки C і W.

$$\angle BAW = \angle BCW = \frac{\angle A}{2}$$

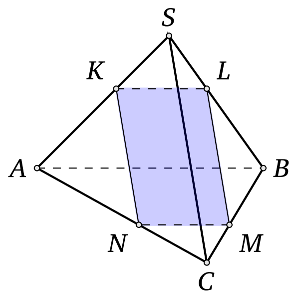
як вписані, що спираються на одну дугу.

$$\angle ABW = \angle AWK = \frac{\angle A}{2}$$

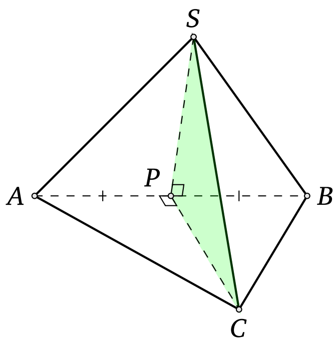
як внутрішні різносторонні при перетині паралельних прямих KW і AB січною AW.

Оскільки $\angle AWK = \angle NCW$, то кут між прямою AW хордою NW дорівнює половині градусної міри дуги NW, а це і означає, що AW — дотична до описаного кола трикутника CNW, що і потрібно було довести.

4. ***(7 балів)*** Відомо, що переріз правильної трикутної піраміди площиною — це ромб зі стороною a. Знайдіть площу цього перерізу.



Розв'язання. Розглянемо правильну трикутну піраміду $SABC$, її основа — правильний трикутник ABC, SA, SB, SC — її бічні ребра. Нехай $KLMN$ — ромб, який є перерізом піраміди площиною.



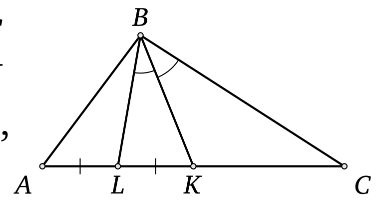
Оскільки $KL \parallel MN$ то площини (SAB) і (ABC) перетинаються по прямій AB, яка паралельна цим паралельним прямим. Аналогічно доводиться паралельність прямих $ML \parallel KN \parallel SC$.

Використаємо той факт, що у правильній трикутній піраміді $SABC$: $AB \perp SC$. Справді, розглянемо площину (SPC), де P — середина AB. Оскільки трикутник ASB рівнобедрений, то $AB \perp SP$. Також $AB \perp CP$, оскільки трикутник ABC рівносторонній. Тоді $AB \perp (SPC)$, а тому $AB \perp SC$.

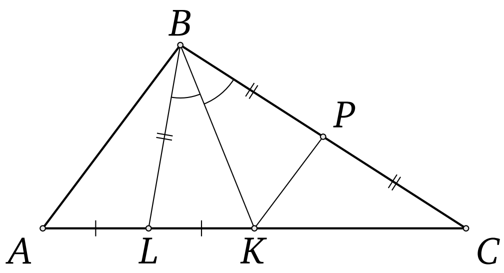
Оскільки $AB \perp SC$, то і $KL \perp ML$, а тому ромб $KLMN$ — квадрат. Оскільки його сторона дорівнює a, то його площа дорівнює a^2.

Відповідь. a^2.

5. ***(9 балів)*** На стороні AC трикутника ABC знайшлися точки K і L такі, що L – середина AK і BK — бісектриса кута LBC. Крім цього, відомо, що $BC = 2BL$. Доведіть, що $KC = AB$.



Розв'язання. Нехай P — середина BC.

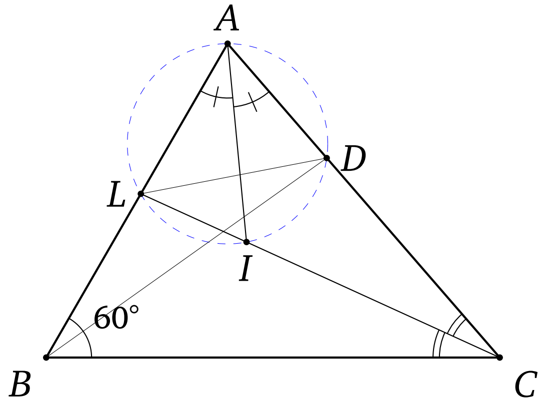


Тоді $BP = PC = BL$ і трикутники BKL і BKP рівні за двома сторонами і кутом між ними. З рівності цих трикутників випливає, що $KP = PL = LA$ і $\angle BLK = \angle BPK$. Із останньої рівності випливає, що $\angle BLA = \angle CPK$ (як зовнішні до рівних кутів). Тоді трикутники ABL і KCP рівні за двома сторонами і кутом між ними. Отже, $AB = KC$, що і треба було довести.

6. ***(9 балів)*** В трикутнику ABC з кутом при вершині B, рівним $60°$, проведено бісектрису CL. Нехай I — центр вписаного кола трикутника ABC. Описане коло трикутника ALI перетинає сторону AC в точці D. Доведіть, що точки B, L, D і C лежать на одному колі.

Розв'язання. Оскільки I — центр вписаного кола трикутника ABC, то прямі AI і CI — бісектриси кутів BAC і BCA. Тому

$$\angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) = 60°.$$



Отже, $\angle LIA = 60°$ як зовнішній кут трикутника AIC. Оскільки точки A, L, I, D лежать на одному колі, то $\angle LDA = \angle LIA = 60°$ (як вписані кути, що спираються на одну і ту саму дугу). Звідки $\angle CDL = 120°$ (як суміжний кут до кута LDA). Таким чином, $\angle LBC + \angle LDC = 60° + 120° = 180°$, тобто чотирикутник $BLDC$ — вписаний, що і треба було довести.