ЗБІРНИК
задач з алгебри

частина 1

За редакцією І.О.Рокіцького

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Вінниця
2005

УДК 512 + 511
З – 41

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (Лист Міністерства освіти і науки України № 14/18.2–931 від 29.04.2002 р.)

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Панков О.А. і кандидат фізико-математичних наук, доцент Дереч В.Д.

Пропонований навчальний посібник є збірником задач з алгебри. Він повністю охоплює програму першого семестру з курсу "Алгебра і теорія чисел"для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів і містить понад 1700 задач та вправ.

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету ім.М.Коцюбинського, протокол № 3 від 28 листопада 2001 року.

КОЛЕКТИВ АВТОРІВ: В.С.Гарвацький, В.Т.Кулик, І.О.Рокіцький, Р.І.Рокіцький

Збірник задач з алгебри.Ч.1. [Навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету] За редакцією І.О.Рокіцького, Вінниця, 2005 – 208с.

ISBN 966–527–080–X
Вінниця: ДОВ "Вінниця"

Зміст

Передмова

Впродовж багатьох років студенти фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів на практичних заняттях з курсу "Алгебра і теорія чисел"широко використовують відомі посібники [5,6]. Однак в останній час вони вже стали бібліографічною рідкістю. Російськомовні видання подібних збірників [7–11] також малодоступні для нашого студента. Тому виникла гостра необхідність у виданні україномовного збірника з цього курсу. На першому етапі був виданий збірник задач з теорії чисел [12].

При написанні цього збірника автори заклали ідею розподілу задач кожного з основних параграфів за рубриками: задачі на ілюстрацію основних понять, задачі на техніку обчислень і перетворень, задачі на доведення, творчі задачі та олімпіадні задачі. Такий розподіл дозволить студенту при самостійній роботі поступово переходити від простих до складніших задач, керуючись самостійною оцінкою свого рівня підготовки. До більшості задач з перших двох рубрик у збірнику є відповіді. До задач з інших трьох рубрик іноді даються вказівки або розв'язки. Для їх розв'язування студент повинен добре володіти основними поняттями і теоремами теорії, проявити творче мислення, винахідливість та логічну стрункість в математичних доведеннях і перетвореннях. В окремих випадках такі задачі на дослідження можуть стати темами курсових робіт.

Кожен параграф розпочинається з посилання на літературу і містить короткі теоретичні відомості, а задачі мають свою нумерацію.

У всіх чотирьох розділах є додатковий параграф "Вибрані задачі". До таких параграфів включено задачі різної складності, частина з яких пропонувалися на математичних олімпіадах і конкурсах для студентів вищих навчальних закладів. Вони призначені для тих студентів, які хочуть більш глибоко освоїти матеріал даного розділу. До цих задач не дано вказівок і відповідей.

У збірнику в різних рубриках є ряд задач, які вчитель математики може використати в роботі з учнями на шкільному математичному гуртку.

Збірник містить чотири додатки: "Логічні закони"Закони алгебри множин"Комплексні числа" та "Алфавіти"(латинський і грецький). В них читач знайде основні формули, що стосуються цих питань.

У збірнику вміщено список основних позначень, які використовуються в книзі, та предметний показчик.

Розділ 1

Елементи математичної логіки та теорії множин

§ 1.1 Висловлення і логічні операції над ними

Література: [1] стор. 17 – 47; [3] стор. 5 – 17.

Теоретичні відомості

Висловлення - це розповідне стверджувальне речення, до якого можна поставити запитання істинне воно чи хибне.

Логічні операції над висловленнями мають такі назви і позначення: *заперечення* – " $\sim$ " (унарна операція), *кон'юнкція* – " $\wedge$ ", *диз'юнкція* – " $\vee$ ", *імплікація* – " $\to$ " та *еквіваленція* – " $\leftrightarrow$ " (бінарні операції).

Якщо p і q – деякі висловлення, то *істинностні значення висловлень* (1 – істина, 0 – хиба) $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ в залежності від істинностних значень висловлень p і q визначаються з таблиць, які часто називають *таблицями істинності логічних операцій*:

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

.

Множина всіх висловлень, яка розглядається разом з названими операціями і їх властивостями, називається *алгеброю (логікою) висловлень.*

Поняття *формули алгебри висловлень* визначимо індуктивно:

- будь-яке змінне висловлення $p, q, r, s, t, \ldots$ (замість цих змінних ми можемо підставляти будь-які висловлення) є формулою;
- якщо F, F_1, F_2 є формулами, то $\sim(F)$, $(F_1) \wedge (F_2)$, $(F_1) \vee (F_2)$, $(F_1) \rightarrow (F_2)$, $(F_1) \leftrightarrow (F_2)$ також є формулами;
- інших формул немає.

Використовуючи таблиці істинності логічних операцій, можна побудувати таблицю істинності будь-якої формули алгебри висловлень.

Формула алгебри висловлень, в останньому стовпці таблиці істинності якої містяться тільки одиниці, називається *тавтологією* або *логічним законом.* Якщо в останньому стовпці таблиці істинності формули міститься хоча б одна одиниця, то така формула називається *здійснимою або виконуваною*; якщо ж там містяться лише нулі, то формула називається *тотожно хибною* або *протиріччям.*

Дві формули F_1 і F_2 алгебри висловлень називаються *рівносильними,* якщо вони набувають однакові істинностні значення при будь-яких значеннях істинності змінних висловлень, які входять до них.

Формули F_1 і F_2 алгебри висловлень рівносильні тоді і тільки тоді, коли формула $F_1 \leftrightarrow F_2$ є тавтологією.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Які з наступних виразів є висловленнями:

а)	Сніг білий.	е)	$(2+3)\cdot\sqrt{2}$.
б)	Білий сніг.	є)	Мабуть завтра буде дощ.
в)	Я проживаю у Вінниці.	ж)	$x = y$.
г)	$2 < 3$.	з)	Слава Україні!
д)	$x < 3$.	і)	Яка відстань до Місяця?

2. Наступні складні речення розділити на прості і записати за допомогою логічної символіки:

   а) Даний чотирикутник є квадрат або ромб.

   б) Студент Романюк був сьогодні на лекції і ходив у кіно або на футбол чи танці.

   в) Число 12 є складеним тому і тільки тому, що 7 є простим числом.

   г) Якщо на вулиці мороз, то діти одягають пальто і рукавиці або взувають валянки.

д) Сьогодні на екзамені я одержав оцінку "відмінно" або "добре".
е) Натуральне число n ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 2 і на 3.

3. Нехай висловлення "Число a ділиться на 3 "Число b ділиться на 3" і "Сума $a+b$ ділиться на 3" позначено через p, q і r відповідно. Сформулювати висловлення, записані символічною мовою:
   а) $p \wedge q \rightarrow r$; д) $\sim p \rightarrow\sim q \vee \sim r$;
   б) $r \rightarrow p \wedge q$; е) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow\sim r)$;
   в) $p \wedge r \rightarrow q$; є) $(r \rightarrow q) \rightarrow p$;
   г) $\sim q \wedge r \rightarrow\sim p$; ж) $r \leftrightarrow p \vee q$.

4. Які з наступних виразів є формулами алгебри висловлень:
   а) $(\sim p_1 \wedge \sim p_2) \rightarrow (p_1 \vee p_2)$;
   б) $((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \leftarrow p_2)) \rightarrow\sim p_3$;
   в) $p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3) \sim\rightarrow p_3$;
   г) $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow ((p_1 \rightarrow\sim p_2) \rightarrow\sim p_1)$;
   д) $(p_1 \wedge (\rightarrow p_2)) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow\sim p_1)$;
   е) $(p_1 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_2 \rightarrow p_3) \rightarrow ((p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3))$;
   є) $(p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (\sim p_2 \rightarrow\sim p_1)$;
   ж) $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_1 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3))$;
   з) $((p_1 \wedge \sim p_2) \rightarrow (\sim\sim p_1 \vee \vee p_2)) \leftrightarrow (\vee p_1 \vee p_2)$;
   і) $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\sim p_1 \rightarrow\sim p_2)) \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)$?

5. Опустіть зайві дужки у наступних формулах:
   а) $((p \wedge q) \rightarrow ((r \vee s) \rightarrow (q \wedge r)))$;
   б) $((\sim p) \rightarrow (((q \wedge r) \wedge (\sim s)) \vee (q \vee r)))$;
   в) $((\sim p) \leftrightarrow (((q \wedge r) \wedge (\sim s)) \leftrightarrow (q \vee r)))$;
   г) $((\sim p)((q \rightarrow r) \rightarrow (s \rightarrow (p \vee (\sim r)))))$.

6. Нехай p_1 і p_2 – дані висловлення. За допомогою операцій $\sim$ і $\wedge$ побудувати з p_1 і p_2 таке складне висловлення p, що:
   а) p істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення p_1 і p_2 істинні;
   б) p істинне тоді і тільки тоді, коли p_1 істинне, а p_2 – хибне;
   в) p істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення p_1 і p_2 хибні;
   г) p хибне тоді і тільки тоді, коли висловлення p_1 і p_2 істинні.

7. Нехай p_1 і p_2 – дані висловлення. За допомогою операцій $\sim$ і $\rightarrow$ побудувати з p_1 і p_2 таке складне висловлення p, що:
   а) p істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення p_1 і p_2 істинні;
   б) p істинне тоді і тільки тоді, коли p_1 істинне, а p_2 – хибне;
   в) p істинне тоді і тільки тоді, коли висловлення p_1 і p_2 хибні;
   г) p хибне тоді і тільки тоді, коли висловлення p_1 і p_2 істинні.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Скласти таблицю істинності для формул:

а)	$\sim (p \to \sim p) \leftrightarrow p$;	д)	$p \to (q \to r)$;
б)	$(p \to q) \to (q \to p)$;	е)	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to q \wedge r)$;
в)	$(p \to q) \wedge p \to q \vee p$;	є)	$(q \to p \wedge r) \wedge \sim (p \vee r \to q)$;
г)	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow \sim p$;	ж)	$(p \to q) \wedge \sim q \to p$.

9. Що можна сказати про істинностне значення формули:
   а) $\sim p \wedge q \leftrightarrow p \vee q$, якщо формула $p \to q$ істинна;
   б) $p \to \sim t$, якщо формули $p \to q$, $\sim s \to \sim q$ та $t \to \sim s$ істинні;
   в) $p \to \sim s$, якщо $p \to q$ істинна, а $\sim s \to \sim q$ хибна формула;
   г) $p \to v$, якщо формули $p \vee q \to s \vee r$ і $s \vee r \to v$ істинні?

10. Встановити, чи є дані формули тавтологіями:

а) $(p \to q) \to (p \vee r \to q \vee r)$;	г) $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow) p \to (q \to r))$;
б) $(p \to q) \to ((p \wedge q) \to (q \wedge r))$;	д) $((p \vee q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q)$;
в) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$;	е) $((p \wedge q) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \to p)$.

11. Які з наступних формул є тавтологіями або протиріччями:
   а) $(p \to q) \vee (p \to r)) \to (p \to (q \vee r))$;
   б) $(p \to q) \to ((r \to q) \to ((p \wedge r) \to q))$;
   в) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$;
   г) $\sim ((\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q))$;
   д) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \to ((p \to (q \wedge r))$;
   е) $((p \to q) \wedge (p \to r)) \leftrightarrow (p \to r)$?

12. Які з наступних формул є рівносильними:

а)	$\sim (p \wedge q)$;	в)	$\sim p \wedge q$;	д)	$\sim p \vee \sim q$;
б)	$\sim p \wedge \sim q$;	г)	$p \wedge \sim q$;	е)	$\sim (p \vee q)$?

13. Спростити формули:

а)	$(p \wedge \sim q) \vee q$;	в)	$\sim ((p \to q) \wedge (q \to \sim p))$;
б)	$(p \to p) \to p$;	г)	$\sim p \wedge (p \vee q) \to q$.

14. Скільки можна задати різних унарних логічних операцій над висловленнями?

15. Скільки можна задати різних бінарних логічних операцій над висловленнями?

16. *Штрихом Шеффера двох висловлень p і q* називається висловлення $p \mid q$ (читають: p не сумісно з q), яке хибне тоді і тільки тоді, коли дані

висловлення істинні. Виразити штрих Шеффера через основні логічні операції над висловленнями.

17. *Штрихом Лукасевича двох висловлень* p *і* q називається висловлення $p \downarrow q$ (читають: ні p, ні q), яке істинне тоді і тільки тоді, коли дані висловлення хибні. Виразити штрих Лукасевича через основні логічні операції над висловленнями.

Задачі на доведення

18. Довести, що наступні формули є логічними законами:
    а) $p \vee \sim p$ – виключеного третього;
    б) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ – де Моргана;
    $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ – де Моргана;
    в) $(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$ – контрапозиції;
    г) $p \wedge (p \to q) \to q$ – відокремлення;
    $(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$ – відокремлення.

19. Довести, що основні логічні операції $(\sim, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow)$ можна виразити через:
    а) заперечення і кон'юнкцію;
    б) заперечення і диз'юнкцію;
    в) заперечення і імплікацію.

20. Довести, що операцію заперечення не можна виразити через операції $\wedge$, $\vee$, $\to$ і $\leftrightarrow$.

21. Довести рівносильність таких формул логіки висловлень:
    а) $(p \to q \wedge \sim q) \to \sim p \equiv r \vee \sim r$;
    б) $(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$;
    в) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p$;
    г) $p \to (q \to p \wedge q) \equiv r \vee \sim r$.

22. Довести, що всі основні логічні операції над висловленнями можна виразити через штрих Шеффера.

23. Довести, що всі основні логічні операції над висловленнями можна виразити через штрих Лукасевича.

Творчі задачі

24. З простих висловлень p, q і r побудувати складне висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли істинне лише одне (не має значення яке!) із даних висловлень.

25. Довести, що всі бінарні операції над висловленнями можна виразити через:
    а) заперечення і кон'юнкцію;
    б) заперечення і диз'юнкцію;
    в) заперечення і імплікацію.

26. Чи можна виразити основні логічні операції через:
    а) $\leftrightarrow$ і $\sim$; в) $\leftrightarrow$ і $\vee$;
    б) $\leftrightarrow$ і $\wedge$; г) $\leftrightarrow$ і $\to$?

27. Скільки є бінарних логічних операцій, через які виражаються всі інші логічні операції?

28. З простих висловлень p і q за допомогою логічних операцій можна побудувати безліч формул. Оцініть найбільше число нерівносильних формул, які можуть одночасно приймати істинне значення.

Задачі з олімпіад

29. При побудові формули логіки висловлень застосовуються тільки операції кон'юнкція і диз'юнкція. Чи може серед таких формул бути тавтологія або протиріччя?

30. На екзамені викладач пропонує п'ять тверджень, відносно яких потрібно відповісти, істині вони чи хибні. Студент знає, що завжди викладач дає істинних тверджень більше, ніж хибних, і ніколи не задає три запитання підряд, які вимагають однакової відповіді. Із змісту першого і останнього тверджень йому ясно, що відповіді на них повинні бути протилежними. Єдине питання, відповідь на яке він знає — друге. Це вже гарантує йому вірні відповіді на всі запитання. Якими повинні бути відповіді?

§ 1.2 Взаємно обернені теореми. Доведення від супротивного

Література: [1] стор.43 – 57; [3] стор.18 – 21.

Теоретичні відомості

Якщо p є *умовою теореми*, а q – *її висновком*, то, як правило, теорему можна записати у вигляді імплікації $p \to q$, яка є істинною.

Якщо обернена імплікація $q \to p$ є істинною, то її називають *оберненою теоремою до даної*. Якщо істинною є імплікація $\sim p \to \sim q$, то її називають *протилежною теоремою до даної*. Якщо ж істинною є імплікація $\sim q \to \sim p$, то її називають *протилежною теоремою до оберненої або оберненою до протилежної*.

Імплікації $p \to q$, $q \to p$, $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim p$ називають *системою спряжених висловлень*.

Якщо імплікація $p \to q$ є теоремою, то *умова q називається необхідною для умови p*, а *умова p називається достатньою для q*. Якщо істинною є еквіваленція $p \leftrightarrow q$ (тобто мають місце пряма $p \to q$ і обернена $q \to p$ теореми), то говорять, що *умова q необхідна і достатня для умови p*.

При доведенні теореми $p \to q$ *методом від супротивного* ми припускаємо, що мають місце одночасно висловлення p і $\sim q$. Якщо після деякого ланцюга міркувань ми прийдемо до висновку, що одночасно має місце деяке твердження t і його заперечення $\sim t$, то тоді ми отримали протиріччя з логічним законом $\sim (t \wedge \sim t)$. Це означає, що наше припущення про істинність висловлення $\sim q$ є хибним. Таким чином, має місце теорема $p \to q$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Нехай висловлення $p_1 \to p_2$ істинне. Які із спряжених до нього висловлень є істинними?

2. Сформулювати систему спряжених висловлень до тверджень:
   а) Якщо піраміда неправильна, то її ребра попарно різні.
   б) Якщо система двох лінійних рівнянь має розв'язок, то рівняння містять по три невідомих.

3. До твердження "Якщо сума протилежних кутів чотирикутника рівна 180^0, то навколо нього можна описати коло" сформулювати спряжені висловлення і з'ясувати, які з них істинні.

4. Привести всі можливі пари теорем, доведення яких забезпечує доведення критерію: "Для того, щоб навколо чотирикутника можна було описати коло, необхідно і достатньо, щоб сума його протилежних кутів була рівна 180^0". Логічно обгрунтувати відповіді.

5. Дано висловлення: "Якщо чотирикутник є прямокутником, то навколо нього можна описати коло". Побудувати три спряжених до нього висловлення. Які з них істинні?

6. Побудувати три обернених імплікації до теореми: "Якщо різниця цілих чисел ділиться на 3 і зменшуване ділиться на 3, то і від'ємник ділиться на 3". Які з них істинні?

7. Нехай задано такі висловлення:
   а) p – "чотирикутник є ромб q – "діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні r – "чотирикутник має вісь симетрії";
   б) p – "добуток двох натуральних чисел ділиться на 12 q – "один із множників ділиться на 12 r – "один із множників ділиться на 3".

   Що можна сказати про необхідність чи достатність одного з висловлень для інших?

8. Записати за допомогою логічної символіки такі речення:
   а) для того, щоб добуток двох чисел був рівний нулю, необхідно і достатньо, щоб один із співмножників був рівний нулю;
   б) для того, щоб сума двох цілих чисел ділилася на 5, необхідно, щоб обидва доданки ділилися на 5;
   в) якщо чотирикутник є квадратом, то всі його кути прямі, і навпаки;
   г) якщо дві прямі площини паралельні, то вони паралельні третій прямій цієї площини, і навпаки.

   Які з цих висловлень істинні?

9. Записати за допомогою логічної символіки такі речення:
   а) для того, щоб трикутник був рівностороннім, достатньо, щоб його кути були рівні;
   б) для того, щоб ціле число ділилося на 5, необхідно, щоб воно ділилося на 15.

10. Навести приклади доведень, що грунтуються на тавтологіях:
    а) $(\sim p_2 \to \sim p_1) \to (p_1 \to p_2)$;
    б) $(p_1 \to \sim p_2) \to (p_2 \to \sim p_1)$;
    в) $(\sim p_1 \to p_2) \to (\sim p_2 \to p_1)$;
    г) $(p_1 \to p_2) \to (\sim p_2 \to \sim p_1)$.

Як називаються такі доведення?

11. Навести приклад теореми, при доведенні якої використовується *закон зведення до протиріччя*, тобто $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q \to r \wedge \sim r)$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

12. Використовуючи лише закони алгебри висловлень, встановити, які з наведених нижче висловлень слідують із висловлення "Якщо ціле число n ділиться на 6, то n ділиться на 3":
   а) для того, щоб ціле число n ділилося на 3, достатньо, щоб воно ділилося на 6;
   б) для того, щоб ціле число n ділилося на 6, достатньо, щоб воно ділилося на 3;
   в) для того, щоб ціле число n ділилося на 3, необхідно, щоб воно не ділилося на 6;
   г) для того, щоб ціле число n не ділилося на 3, достатньо, щоб воно не ділилося на 6;
   д) ціле число n ділиться на 6 тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 3;
   е) ціле число n не ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли воно не ділиться на 6 .

   Записати всі приведені висловлення символічно.

13. Встановити на основі законів алгебри висловлень, які з наступних висловлень будуть істинними, якщо істинне висловлення "Рівні трикутники є подібними":
   а) рівність трикутників є необхідною умовою їх подібності;
   б) подібність трикутників є необхідною умовою їх рівності;
   в) рівність трикутників є достатньою умовою їх подібності;
   г) подібність трикутників є достатньою умовою їх рівності;
   д) подібність трикутників є необхідною і достатньою умовою їх рівності;
   е) трикутники не рівні тоді і тільки тоді, коли вони не подібні.

   Записати всі приведені висловлення символічно.

14. *Принцип повної диз'юнкції* виражається такою теоремою: "Нехай дано такі дві імплікації, що:
   а) умова хоча б однієї з них справджується;
   б) висновки їх несумісні.

   Тоді, якщо дані імплікації істинні, то й обернені до них імплікації також істинні".

Записати цю теорему мовою алгебри висловлень, для одержаної формули скласти таблицю істинності і навести приклади, які ілюструють сформульовану теорему.

Задачі на доведення

15. Використовуючи основні властивості нерівностей, довести теорему: "Якщо числа a і b задовольняють умовам $a > 0, b > 0, a > b$, то виконується нерівність $a^2 + c > b^2 + c$". Записати доведення за допомогою логічної символіки. Виписати тавтології алгебри висловлень, які при цьому використовуються.

16. Нехай висловлення $p \to q$ є істинним. Довести, що кожна необхідна умова для q є необхідною і для p, а кожна достатня умова для p є достатньою і для q.

17. Методом від супротивного довести, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Записати це доведення мовою математичної логіки.

18. Довести, що рівняння $x^2 - 3 = 0$ в множині $\mathbb{Q}$ раціональних чисел не має розв'язків. Записати це доведення мовою математичної логіки.

19. Довести методом від супротивного, що в множині простих чисел немає найбільшого числа, та проаналізувати доведення з точки зору математичної логіки.

20. Довести, що кожне натуральне число єдиним способом можна записати у вигляді добутку простих чисел, якщо не брати до уваги порядку розміщення множників, та проаналізувати доведення з точки зору математичної логіки.

21. Проаналізувати з точки зору математичної логіки доведеня відомих з шкільної математики ознак паралельності прямих:
а) якщо дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні третій прямій цієї площини, то вони паралельні між собою;
б) якщо при перетині двох прямих третьою внутрішні навхрест лежачі кути рівні, то прямі паралельні;
в) якщо при перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180^0, то прямі паралельні.

22. Проаналізувати з точки зору математичної логіки доведеня відомої з шкільної математики теореми: якщо площина паралельна до двох прямих, які перетинаються і лежать в іншій площині, то ці площини паралельні.

23. Довести єдиність оберненого числа до числа $a \neq 0$ в множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

24. Довести, що в множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел рівняння:
а) $ax = b$ $(a \neq 0)$; б) $a + x = b$
має єдиний розв'язок.

Творчі задачі

25. Чи можна принцип повної диз'юнкції (задача № 14) узагальнити на більше число імплікацій?

Задачі з олімпіад

26. Дехто А держить в руці (невідомо в правій чи лівій) монету. Відомо, що А завжди обманює або завжди говорить правду (але невідомо, що саме). Як за допомогою єдиного запитання дізнатися, в якій руці знаходиться монета?

§ 1.3 Предикати та операції над ними. Системи та сукупності рівнянь і нерівностей

Література: [1] стор.111 – 123, 231 – 240; [3] стор. 22 – 37.

Теоретичні відомості

Вираз $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, заданих на множинах $M_1, M_2, \dots, M_n$, називається *n-місним предикатом від цих змінних*, якщо він перетворюється у висловлення при підстановці замість змінних конкретних елементів із відповідних множин.

Якщо при підстановці в предикат $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ замість змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ будь-яких елементів із відповідних множин $M_1, M_2, \dots, M_n$ отримуємо:

- істинне висловлення, то такий предикат називається *тотожно істинним* або *тавтологією*;

- хибне висловлення, то такий предикат називається *тотожно хибним*.

Якщо існує хоча б один набір елементів із відповідних множин, при яких предикат $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перетворюється у істинне висловлення, то такий предикат називається *здійснимим або виконуваним*.

Множиною (областю) істинності предиката $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданого на множинах $M_1, M_2, \dots, M_n$, називається множина всіх наборів елементів $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $(a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n)$, при яких предикат $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перетворюється в істинне висловлення.

Нехай $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n-місткі предикати, задані на одних і тих же множинах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Тоді вирази
$\sim p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*заперечення предиката* $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$),
$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*кон'юнкція двох предикатів*),
$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*диз'юнкція двох предикатів*),
$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*імплікація двох предикатів*),
$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (*еквіваленція двох предикатів*)
також є n-місними предикатами від цих змінних, заданими на множинах $M_1, M_2, \dots, M_n$.

Крім операцій $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ над предикатами виконуються ще дві унарні операції, які називаються *операціями квантифікації або навішування квантора загальності* $(\forall x)$ *і квантора існування* $(\exists x)$.

Вираз $(\forall x)p(x)$ читається *"для будь-якого x має місце $p(x)$"* і є висловленням, яке істинне тоді і тільки тоді, коли предикат $p(x)$ є тотожно істинним.

Вираз $(\exists x)p(x)$ читається *"існує таке x, що має місце $p(x)$"* і є висловленням, яке істинне тоді і тільки тоді, коли предикат $p(x)$ є виконуваним.

Змінні предиката $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, до яких застосовано один із кванторів, називаються *зв'язаними*, а інші змінні називаються *вільними*. *Місність предиката* співпадає з кількістю вільних змінних.

Множина всіх предикатів з визначеними в ній операціями заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція та навішування кванторів називається *алгеброю (логікою) предикатів*.

Формулами логіки предикатів є:

- будь-які висловлення;
- будь-які предикати;
- якщо $F_1, F_2, F(x)$ – формули, то $(F_1) \wedge (F_2)$, $(F_1) \vee (F_2)$, $(F_1) \to (F_2)$, $(F_1) \leftrightarrow (F_2)$, $\sim F(x)$, $(\forall x)F(x)$, $(\exists x)F(x)$ також формули;
- інших формул немає.

Якщо при підстановці у формулу логіки предикатів замість предикатних змінних довільних предикатів відповідної місності завжди отримуємо тотожно істинний предикат, то така формула називається *тавтологією логіки предикатів*.

Формули логіки предикатів F_1 і F_2 від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданих на множинах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, називаються *рівносильними*, якщо формула $(F_1) \leftrightarrow (F_2)$ є тавтологією логіки предикатів. Якщо імплікація $(F_1) \to (F_2)$ є тавтологією, то F_2 називають *логічним наслідком* F_1.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Які з наступних виразів можна розглядати як предикати при певному виборі області змінних, що входять до них:

а)	$x^3 - x + 2 = 0$;	е)	$x = y$;
б)	x - істинне;	є)	x при діленні на y дає остачу z;
в)	$5 - 3 = 2$;	ж)	x і y лежать по різні сторони від z;
г)	x включається в y;	з)	$x^2 + y^2 - z^2$;
д)	площа x дорівнює y;	і)	$x^2 + y^2 \leqslant 0$?

2. Записати мовою символів такі висловлення:

а) "Кожне раціональне число є дійсним";
б) "Існують непарні прості числа";
в) "Кожне парне число, яке більше 3, є складеним";
г) "Деякі паралелограми є прямокутниками";
д) "Не кожний киянин є футбольним болільником";
е) "Для всіх цілих чисел a і b рівняння $a + x = b$ має єдиний розв'язок".

3. Нехай задано предикати:
$p(x)$ – "x – ціле число"; $q(x)$ – "x – додатне число";
$r(x)$ – "x – парне число"; $s(x)$ – "x – просте число";
$t(x)$ – "x – натуральне число"; $l(x, y)$ – "x ділиться на y".
Сформулювати звичайною мовою висловлення:
а) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x) \to t(x))$; г) $(\exists x)(r(x) \wedge (\forall y)(\sim r(y) \to \sim l(x, y)))$;
б) $(\forall x)(p(x) \to r(x) \vee s(x))$; д) $(\exists x)p(x) \wedge (\forall y)(p(y) \to l(y, x))$;
в) $(\forall x)(r(x) \to (\exists y)l(x, y))$; е) $(\forall x)(s(x) \to (\exists y)(r(y) \wedge l(y, x)))$.

4. Які з наступних виразів є формулами алгебри предикатів? В кожній формулі виділити вільні і зв'язані змінні:
а) $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\forall x)q(x))$;
б) $(\forall x)(p(x) \to \vee q) \to (\exists x)(p(x) \wedge q)$;
в) $\sim (\exists z)(p(x) \wedge q(y))$;
г) $((\forall x)p(x) \vee \sim (\exists x)p(x)) \to \sim q(y)$.

5. Для трьохмісного предиката $x + y = z$, визначеного на множині цілих чисел, побудувати за допомогою кванторів загальності і існування всі відповідні йому висловлення. Встановити, які з них істинні.

6. Нехай $p(x)$ - одномісний предикат, заданий на множині M. Записати з допомогою кванторів загальності і існування такі висловлення:
а) існує не менше одного елемента множини M, який задовольняє $p(x)$, тобто перетворює його в істинне висловлення;
б) існує не більше одного елемента множини M, який задовольняє $p(x)$;
в) існує принаймні два елементи множини M, які задовольняють $p(x)$;
г) існує не більше двох елементів множини M, які задовольняють $p(x)$.

7. Побудувати заперечення таких висловлень і прочитати їх словами, якщо $x, y, z \in \mathbb{R}$:

а) $(\forall x)(\forall y)(x > y \vee y > x)$;
б) $(\exists x)(\forall y)(x + y = y \wedge xy = x)$.
Встановити їх істинність.

8. Навести приклад двохмісного предиката, заданого на множині всіх натуральних чисел, який був би:
   а) тотожно істинним;
   б) тотожно хибним;
   в) здійснимим (але не тотожно істинним);
   г) логічним наслідком іншого двохмісного предиката.

9. Висловлення $(\exists x)p(x) \to (\forall x)p(x)$ є істинним на множині X при будь-якому виборі предиката $p(x)$. Що можна сказати про цю множину?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Знайти область істинності предиката:
    а) "$x^2 - x = 0$," заданого на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$;
    б) "x і y – прості числа, різниця яких дорівнює 2 (числа-близнята) де $x, y \in [1; 40]$;
    в) "x не ділиться на y заданого на множині $\{2, 3, 5\}$;
    г) "$(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 9)^2 = 0$ де $x, y \in \mathbb{R}$.

11. Які умови задовольняють множини істинності предикатів $p(x)$ і $q(x)$, визначених на множині M, якщо:
    а) $p(x) \wedge q(x)$ – тотожно істинний предикат;
    б) $p(x) \vee q(x)$ – тотожно істинний предикат;
    в) $p(x) \wedge q(x)$ – тотожно хибний предикат;
    г) $p(x) \vee q(x)$ – тотожно хибний предикат;
    д) $p(x) \to q(x)$ – тотожно хибний предикат;
    е) $p(x) \leftrightarrow q(x)$ – тотожно хибний предикат?

12. Яким умовам будуть задовольняти множини істинності предикатів $p(x)$ і $q(x)$, визначених на множині M, якщо істинні висловлення:
    а) $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \wedge (\exists x)(\sim p(x) \wedge q(x))$;
    б) $\sim (\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \wedge (\forall x)(p(x) \to q(x))$?

13. Знайти множини істинності предикатів, заданих на $\mathbb{R}$:
    а) $x > 0 \wedge y < 0$; в) $x > 0 \to y < 0$;
    б) $x > 0 \vee y < 0$; г) $x > 0 \leftrightarrow y < 0$.

14. Нехай $p(x, y, \cdots)$, $q(x, y, \cdots)$ – два n-місних предикати, визначених на одних і тих же множинах. Знайти:

а) множину істинності імплікації даних предикатів;
б) множину істинності еквіваленції даних предикатів.

15. Перевірити рівносильність формул логіки предикатів:
    а) $\sim ((\forall x)p(x))$ та $(\exists x) \sim (p(x))$;
    б) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$ та $(\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)$;
    в) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x))$ та $(\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$;
    г) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ та $(\forall x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x))$.

16. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x & = & 0, \\ x^2 + 2^{x-1} & = & 0. \end{cases}$

17. Розв'язати змішану систему: $\begin{cases} x^2 & \geqslant & y(2x-y), \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y-4} & = & 0. \end{cases}$

18. Розв'язати рівняння: $(2^x + 1)(3^x - 1) = 0$.

19. Розв'язати нерівність: а) $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-12} < 0$; б) $\frac{x^2-3x-2}{x^2-1} > 0$.
    Записати хід розв'язування за допомогою логічної символіки. Виписати тавтології алгебри предикатів, які при цьому використовуються.

Задачі на доведення

20. Нехай $p(x)$ і $q(x)$ – два одномісних предикати, визначених на множині M, такі, що висловлення $(\exists x)(p(x) \rightarrow \sim p(x) \vee \sim (\sim q(x) \rightarrow p(x)))$ істинне. Довести, що *універсальне висловлення* $(\forall x)p(x)$ - хибне.

21. Довести, що кон'юнкція тотожно істинного n-місного предиката з будь-яким іншим предикатом від тих самих змінних рівносильна останньому.

22. Довести, що кон'юнкція тотожно хибного n-місного предиката з будь-яким іншим предикатом від тих самих змінних є тотожно хибним предикатом.

23. Довести, що диз'юнкція тотожно істинного n-місного предиката з будь-яким іншим предикатом від тих самих змінних є тотожно істинним предикатом.

24. Довести, що диз'юнкція тотожно хибного n-місного предиката з будь-яким іншим предикатом від тих самих змінних рівносильна останньому предикату.

25. Довести, що:
    а) імплікація двох предикатів від тих самих змінних тотожно істинна, якщо її умова тотожно хибна або висновок тотожно істинний;
    б) імплікація двох предикатів від тих самих змінних з тотожно хибним висновком рівносильна запереченню її умови.

26. Довести, що еквіваленція двох предикатів від тих самих змінних:
    а) рівносильна одному з її членів тоді і тільки тоді, коли інший її член тотожно істинний;
    б) рівносильна запереченню одного з її членів тоді і тільки тоді, коли інший її член тотожно хибний.

27. Довести, що мають місце *закони де Моргана*:
    а) $\sim (\forall x)p(x) \leftrightarrow (\exists x) \sim p(x)$; б) $\sim (\exists x)p(x) \leftrightarrow (\forall x) \sim p(x)$.

28. Довести, що наступні формули є тавтологіями алгебри предикатів:
    а) $(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x)) \to ((\forall x)(p(x) \leftrightarrow (\forall x)q(x))$;
    б) $(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x)) \to ((\exists x)(p(x) \leftrightarrow (\exists x)q(x)))$;
    в) $(\exists x)(q \to p(x)) \leftrightarrow (q \to (\exists x)p(x))$;
    г) $(\exists x)(p(x) \to q) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to q)$;
    д) $(\exists x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\exists x)q(x))$.

29. Довести, що формула $(\exists x)(\forall y)p(x,y) \to (\forall y)(\exists x)p(x,y)$ є тавтологією, а обернена їй імплікація не є тавтологією.

30. Які з наступних формул є тавтологіями:
    а) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \to ((\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x))$;
    б) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x))$;
    в) $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)) \to (\forall x)(p(x) \vee q(x))$;
    г) $((\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$;
    д) $(\forall x)(p \to q(x)) \to (p \to (\forall x)q(x))$;
    е) $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\forall x)p(x) \to (\forall x)q(x))$;
    є) $(\exists x)(p(x) \to q(x)) \to ((\exists x)p(x) \to (\exists x)q(x))$;
    ж) $(\forall x)(p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\exists x)p(x) \to (\forall x)q(x))$?

Творчі задачі

31. На множині дійсних чисел задані одномісні предикати $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$, причому предикат $p(x)$ є алгебраїчним рівнянням. Відомо, що предикати $(p(x) \to q(x)) \to r(x)$ та $(q(x) \leftrightarrow r(x)) \to s(x)$ тотожно хибні. Довести, що рівняння $p(x)$ має парний степінь.

§ 1.4 Множина. Алгебра множин

Література: [1] стор. 58 – 75; [3] стор. 39 – 48.

Теоретичні відомості

Поняття множини (одне з основних понять сучасної математики) не означується. Множини часто позначають великими буквами $A, B, C, X, Y, \ldots$ латинського алфавіту, а їх елементи – малими буквами $a, b, c, x, y, t, \ldots$ цього алфавіту. Символ $a \in M$ означає, що *елемент a належить множині M* і $a \notin M$ – *елемент a не належить множині M*. Множину можна задати *переліком її елементів* (якщо вона скінченна), або *характеристичною властивістю її елементів* (одномісним предикатом). Множини називають *рівними*, якщо вони містять одні і ті ж самі елементи.

Серед всіх множин виділяють *порожню множину* $\varnothing$ (задається предикатом $x \neq x$) і *універсальну множину* U (задається предикатом $x = x$).

Якщо кожний елемент множини A належить множині B, то говорять, що A є *підмножиною* B (*A включається* в B,) і записують $A \subset B$. Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то множини A і B рівні.

Над множинами виконують операції $\cup$ *(об'єднання)*, $\cap$ *(перетину)* і $'$ *(доповнення до універсальної множини)*.

Якщо A і B – довільні множини, то

$A \cup B \overset{df}{=} \{x | x \in A \vee x \in B\}$ (читається: "множина всіх тих елементів x, які належать множині A або множині B");

$A \cap B \overset{df}{=} \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ (читається: "множина всіх тих елементів x, які належать обом множинам A і B");

$A' \overset{df}{=} \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$ (читається: "множина всіх тих елементів x, які не належать множині A").

Множина $\mathfrak{P}(U)$ всіх підмножин універсальної множини U(чи $\mathfrak{P}(A)$ довільної множини A), яка розглядається разом з операціями, заданими на ній, називається *алгеброю множин*. Властивості операцій над множинами називають *законами алгебри множин*. Їх можна доводити за допомогою відповідних законів алгебри предикатів.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Множину $A = \{-1, 1\}$, задану переліком елементів, задати за допомогою характеристичної властивості (предикату).

2. На множині $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел задано предикат:
   а) $p(x)$: $x^2 - 5x + 6 = 0$;
   б) $q(x)$: $(x-1)(x^3-1) = 0$.

   Вказати переліком елементів, яку множину він визначає.

3. Задана нескінченна арифметична прогресія з першим членом a_0 і різницею d. Задати множину членів цієї прогресії предикатом, визначеним на множині дійсних чисел.

4. Навести приклад таких множин A, B і C, щоб $A \in B, B \in C$ і $A \notin C$.

5. Навести приклад такої одноелементної множини B, що її елемент є одночасно підмножиною множини B.

6. Для кожного натурального $n > 1$ задати множину, яка містить n елементів, причому таких, що з двох різних її елементів один містить другий.

7. Які з тверджень справджуються для всіх множин A, B і C:
   а) Якщо $A \notin B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$;
   б) Якщо $A = B$ і $B \neq C$, то $A \neq C$;
   в) Якщо $A \in B$ і $B \not\subset C$, то $A \notin C$;
   г) Якщо $A \subset B$ і $B \in C$, то $A \notin C$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Нехай $M_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Знайти число всіх підмножин множини M_1, M_2, M_4 і M_n.

9. Обчислити число всіх k-елементних підмножин множини, яка містить n елементів.

10. Нехай M – множина всіх трикутників на площині, X_1 – множина рівнобедрених трикутників, X_2 – множина прямокутних трикутників. Знайти:
    а) $X_1 \cup X_2$; б) $X_1 \cap X_2$; в) $X_1 \cap X_2'$; г) $X_1' \cap X_2$.
    Нарисувати діаграми Ейлера-Венна для цих множин.

11. Нехай $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел, $n\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел, кратних n ($n \in \mathbb{N}$). Знайти:
    а) $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$; б) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$; в) $2\mathbb{Z} \cap (3\mathbb{Z})'$; г) $(2\mathbb{Z})' \cup (3\mathbb{Z})'$.

12. Нехай M – множина паралелограмів на площині, X_1 – множина квадратів, X_2 – множина прямокутників, X_3 – множина ромбів на площині. Знайти: а) $X_i \cup X_j$; б) $X_i \cap X_j$; в) $X_i \cap X_j'$.

13. Відомо, що із 100 студентів в секціях спортклубу брали участь: в гімнастичній секції – 28, в волейбольній – 42, в баскетбольній – 30, в волейбольній і баскетбольній – 5, в гімнастичній і волейбольній – 10, в гімнастичній і баскетбольній – 8, в усіх трьох секціях – 3. Знайти: а) скільки студентів беруть участь тільки в одній волейбольній секції; б) скільки студентів не беруть участі в жодній секції.

14. У звіті про вивчення студентами іноземних мов було написано, що: а) англійську, французьку і німецьку мови вивчають 5 студентів; б) англійську і німецьку – 10; в) англійську і французьку – 8; г) німецьку і французьку – 20; д) англійську – 30; е) німецьку – 23; є) французьку – 50. Знайти помилку в звіті.

15. (Задача Льюїса Керрола). У жорстокому бою 70 із 100 піратів втратили одне око, 75 – одне вухо, 80 – одну руку і 85 – одну ногу. Яке мінімальне число тих, хто втратив одночасно око, руку, вухо і ногу?

16. Кожна із 30 наречених красива, вихована чи розумна. Вихованих наречених – 21, красивих – 18, розумних – 15, красивих і вихованих – 11, розумних і вихованих – 9, розумних і красивих – 7. Яким може бути найбільше (найменше) число наречених, що мають всі три вказаних якості?

Задачі на доведення

17. Довести, що множини $\{\{a\},\{a,b\}\}$ і $\{\{c\},\{c,d\}\}$ рівні тоді і тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$.

18. Довести, що дві підмножини множини A рівні тоді і тільки тоді, коли їх об'єднання і перетин співпадають.

19. Нехай X_1, X_2 – підмножини універсальної множини U. Довести такі властивості операції доповнення (*закони де Моргана*):
    а) $(X_1 \cap X_2)' = X_1' \cup X_2'$; б) $(X_1 \cup X_2)' = X_1' \cap X_2'$.

20. Дано множину M і дві її підмножини X_1 і X_2. Довести, що:
    а) $X_1 = X_2 \leftrightarrow X_1' = X_2'$; б) $X_1 \subset X_2 \leftrightarrow X_2' \subset X_1'$.

21. Користуючись умовою рівності множин, довести *закони поглинання*:
    а) $X_1 \cup (X_1 \cap X_2) = X_1$; б) $X_1 \cap (X_1 \cup X_2) = X_1$.

22. Довести, що коли X_0 – підмножина множини M, то :
    а) $X_0 \cap M = X_0$; в) $X_0 \cap \varnothing = \varnothing$;
    б) $X_0 \cup M = M$; г) $X_0 \cup \varnothing = X_0$.

23. Довести, що для довільної множини M і будь-яких її підмножин X_1, X_2 мають місце такі еквіваленції:
    а) $X_1 \cup X_2 = M \leftrightarrow X_1' \subset X_2 \leftrightarrow X_2' \subset X_1$;
    б) $X_1 \cap X_2 = \varnothing \leftrightarrow X_1 \subset X_2' \leftrightarrow X_2 \subset X_1'$;
    в) $X_1 \cup X_2 = X_2 \leftrightarrow X_1 \subset X_2$;
    г) $X_1 \cap X_2 = X_2 \leftrightarrow X_2 \subset X_1$.

24. Дано множину M і чотири її підмножини X_1, X_2, X_3, X_4. Довести справедливість таких імплікацій:
    а) $(X_1 \subset X_2) \rightarrow ((X_1 \cup X_3) \subset (X_2 \cup X_3))$;
    б) $(X_1 \subset X_2) \rightarrow ((X_1 \cap X_3) \subset (X_2 \cap X_3))$;
    в) $(X_1 \subset X_2 \wedge X_3 \subset X_4) \rightarrow ((X_1 \cup X_3) \subset (X_2 \cup X_4))$;
    г) $(X_1 \subset X_2 \wedge X_3 \subset X_4) \rightarrow ((X_1 \cap X_3) \subset (X_2 \cap X_4))$.

25. *Різницею двох підмножин* X_1 *і* X_2 *множини* M (позначається $X_1 \setminus X_2$) називається сукупність всіх елементів множини M, що належать X_1 і не належать X_2. Виразити означення різниці двох підмножин формулою і довести такі властивості різниці:
    а) $X_1 \cap (X_2 \setminus X_3) = (X_1 \cap X_2) \setminus (X_1 \cap X_3)$;
    б) $(X_1 \cup X_2) \setminus X_3 = (X_1 \setminus X_3) \cup (X_2 \setminus X_3)$.

26. *Симетрична різниця двох підмножин* X_1 *і* X_2 *множини* M (позначається $X_1 \div X_2$) визначається рівністю: $X_1 \div X_2 = (X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \setminus X_1)$. Довести такі властивості симетричної різниці:
    а) $X_1 \div X_2 = (X_1 \cup X_2) \setminus (X_1 \cap X_2)$;
    б) $X_1 \div (X_2 \div X_3) = (X_1 \div X_2) \div X_3$.

27. Довести, що операція $\cap$ ліводистрибутивна відносно операції симетричної різниці, тобто, що має місце рівність:

$$X_1 \cap (X_2 \div X_3) = (X_1 \cap X_2) \div (X_1 \cap X_3).$$

28. Спростити вирази:
    а) $(X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_2)'$;
    б) $(X_1 \cap X_2) \cup (X_1' \cap X_2) \cup (X_1 \cap X_2')$.

Творчі задачі

29. *Принципом двоїстості в теорії множин* називається таке твердження: якщо в тотожності алгебри підмножин множини M(вірної рівності для підмножин цієї множини), що містить тільки знаки операцій доповнення, об'єднання і перетину, замінити: а) знаки $\cup$ і $\cap$ відповідно на $\cap$ і $\cup$; б) M на $\varnothing$ і $\varnothing$ на M, то одержимо нову тотожність (яка називається *двоїстою до вихідної*). Довести принцип двоїстості і навести приклади, що ілюструють його.

30. Нехай $(X_i)_{i\in I}$ – деяке сімейство підмножин множини M з множиною індексів I. *Об'єднанням даного сімейства* (позначається $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$) називається сукупність всіх елементів множини M, що належать принаймні одній із підмножин сімейства, тобто:

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x|(\exists i)(i \in I \wedge x \in X_i)\}.$$

Перетином даного сімейства (позначається $\bigcap\limits_{i\in I} X_i$) називається сукупність всіх елементів множини M, що належать кожній з підмножин сімейства, тобто:

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x|(\forall i)(i \in I \to x \in X_i)\}.$$

Узагальнити принцип двоїстості на тотожності алгебри підмножин, що містять, крім операцій доповнення, перетину і об'єднання, також знаки операцій об'єднання і перетину сімейства підмножин.

Задачі з олімпіад

31. Чи існує сімейство множин таке, що перетин будь-якого скінченного числа множин з нього є непорожньою множиною, а перетин всіх множин сімейства – порожня множина?

§ 1.5 Бінарні відношення та їх властивості

Література: [1] стор. 71–86; [3] стор. 48 – 54.

Теоретичні відомості

Основним поняттям теорії бінарних відношень є поняття упорядкованої пари елементів. В рамках теорії множин це поняття можна строго визначити. Ми ж під *упорядкованою парою елементів a і b* будемо розуміти новий об'єкт (позначається через (a, b) або $< a, b >$), утворений з цих елементів, в якому строго визначено місце кожного з них. Елемент a називають *першим елементом упорядкованої пари (координатою)* (a, b), а b – *її другим елементом (координатою)*. Будемо вважати, що
$(a, b) = (c, d) \overset{df}{\longleftrightarrow} a = c \wedge b = d$.

Упорядкована n-ка визначається через упорядковану пару так:
$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \overset{df}{=} ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

Декартовим (прямим) добутком множин A і B (позначається $A \times B$) називається множина всіх упорядкованих пар, перший елемент яких належить множині A, а другий – множині B.

Бінарним відношенням між елементами множин A і B називається кожна підмножина декартового добутку цих множин. Бінарні відношення, як правило, позначають буквами грецького алфавіту $\rho, \sigma, \delta, \varepsilon, \ldots$.

Зрізом бінарного відношення $\rho \subset A \times B$ через елемент $a \in A$ (позначається $\rho < a >$) називається множина всіх тих елементів множини B, які перебувають з елементом a у відношенні ρ.

Над бінарними відношеннями виконуються ті ж операції, що і над множинами. Крім того, визначаються ще бінарна операція $\circ$ (*множення або композиція відношень*) та унарна операція $^{-1}$ (*переходу до оберненого відношення*).

Нехай $\rho \subset A \times B$ і $\sigma \subset B \times C$. Тоді $\sigma \circ \rho \subset A \times C$, $\quad \rho^{-1} \subset B \times A$ $\quad$ і
$\sigma \circ \rho \overset{df}{=} \{(a, c) | (\exists b)((a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \sigma)\}, \quad \rho^{-1} \overset{df}{=} \{(b, a) | (a, b) \in \rho\}$.

Якщо $A = B$, то бінарне відношення $\rho \subset A \times B = A \times A$ називається *однорідним* і говорять, що воно задане на множині A.

Однорідне бінарне відношення $\rho \subset A \times A$ називається:
рефлексивним, якщо виконується умова $(\forall a)(a, a) \in \rho$;
антирефлексивним, якщо виконується умова $(\forall a)(a, a) \notin \rho$;
симетричним, якщо виконується умова $(\forall a, b)((a, b) \in \rho \to (b, a) \in \rho)$;
антисиметричним, якщо $(\forall a, b)((a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho \to a = b)$;
транзитивним, якщо $(\forall a, b, c)((a, b) \in \rho \wedge (b, c) \in \rho \to (a, c) \in \rho$;
досконалим, якщо $(\forall a, b)(a = b \vee (a, b) \in \rho \vee (b, a) \in \rho)$.

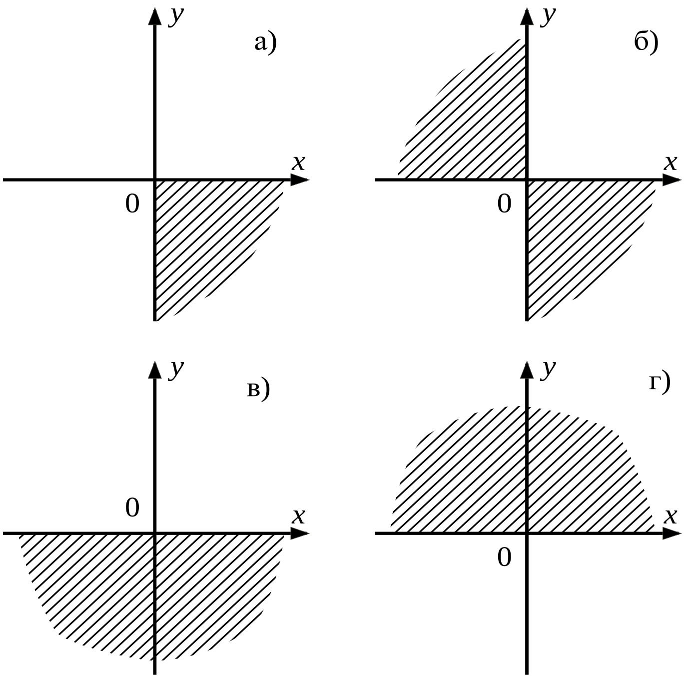
Рефлексивне, симетричне і транзитивне відношення називається *відношенням еквівалентності*. Рефлексивне, антисиметричне і транзитивне відношення називається *відношенням порядку (або нестрогого порядку)*. Антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне відношення називається *відношенням строгого порядку*. Відношення строгого (нестрогого) порядку називають *лінійним порядком*, якщо воно є досконалим.

Множина всіх бінарних відношень, заданих на множині A, яка розглядається разом з операціями над бінарними відношеннями, називається *алгеброю бінарних відношень*. Властивості операцій над бінарними відношеннями називають *законами алгебри бінарних відношень* і доводять їх при допомозі відповідних законів алгебри предикатів та алгебри множин.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Скільки є бінарних відношень між елементами множин: а) M_1; б) M_2; в) M_n?

2. Задати за допомогою предикатів бінарні відношення $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ ($\rho_i \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$) за їх відповідними графіками:



3. Нехай між множинами $N_1 = \{1, 3, 8\}$ і $N_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ відношення ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 визначаються так:
   $(n_1, n_2) \in \rho_1 \quad \longleftrightarrow \quad$ "n_1 – парне і n_2 – непарне";
   $(n_1, n_2) \in \rho_2 \quad \longleftrightarrow \quad$ "n_1 – парне і n_2 – парне";
   $(n_1, n_2) \in \rho_3 \quad \longleftrightarrow \quad$ "n_1 – непарне і n_2 – непарне";
   $(n_1, n_2) \in \rho_4 \quad \longleftrightarrow \quad$ "$n_1 > n_2$".
   Знайти прямий добуток $N_1 \times N_2$ і задати відношення ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4:
   а) переліком елементів; б) за допомогою графіків.

4. Задати бінарне відношення "x ділиться на y " на множині M_{10}:
   а) характеристичною властивістю;
   б) переліком елементів;
   в) графом;
   г) таблицею;
   д) графіком;
   е) стрілками.

5. Пояснити, які з властивостей – рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, антисиметричність, транзитивність і досконалість – має відношення:
   а) "x проживає в одному будинку з y" на множині всіх жителів м. Вінниці;
   б) "x – батько або мати y"на множині всіх людей;
   в) "x – сестра y "на множині всіх людей;
   г) "x – командир y "на множині військовослужбовців деякого підрозділу;
   д) "x більше y"на множині $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел;
   е) "x ділиться на y"на множині всіх цілих чисел;
   є) "x і y – числа однакової парності"на множині $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел;
   ж) "$x \parallel y$"на множині всіх прямих площини;
   з) "$x \perp y$"на множині всіх прямих площини;
   і) "x взаємно просте з y"на множині всіх натуральних чисел.

6. Чи можна доповнити бінарне відношення ρ між елементами множини M_3 до:
   а) рефлексивного відношення, якщо $\rho = \{(1, 2), (3, 3)\}$;
   б) антирефлексивного, якщо $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$;
   в) симетричного, якщо $\rho = \{(1, 3), (1, 2), (2, 2)\}$;
   г) антисиметричного, якщо $\rho = \{(1, 3), (1, 2), (2, 2)\}$;
   д) транзитивного, якщо $\rho = \{(1, 1), (1, 3), (3, 2)\}$;
   е) досконалого, якщо $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$?

7. Побудувати графік бінарного відношення
   $\rho = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 = y^2\}$. Які з основних властивостей (рефлексивність і антирефлексивність, симетричність і антисиметричність,

транзитивність) має задане відношення?

8. Знайти відношення, обернене до відношення:
   а) $\rho = \{(1,1),(2,4),(4,2),(4,4)\}$ на множині M_4;
   б) "x - брат y" на множині всіх людей;
   в) "x - командир y" на множині всіх військовослужбовців деякого підрозділу;
   г) $\rho = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z} \wedge "x-y$ ділиться на 5"$\}$.

9. Знайти перетин і об'єднання відношень:
   а) "x ділиться на y" і "x не перевищує y" на множині M_5;
   б) "x – батько y" і "x – мати y" на множині всіх людей.

10. Знайти композиції відношень, взятих в різному порядку і порівняти їх:
   а) $\rho = \{(1,1),(1,2),(2,3)\}$ та $\sigma = \{(1,2),(3,3)\}$ на множині M_3;
   б) $\|$ і $\perp$ на множині прямих площини;
   в) "x - батько y" і "x -мати y" на множині всіх людей;
   г) "x ділиться на y" і "x -дільник y заданих на множинах $\{0,1,2,3,4\}$ і $\{2,3,4\}$ відповідно.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

11. Обчислити число бінарних відношень між елементами двох скінченних множин, які містять m і n елементів відповідно.

12. Знайти число всіх бінарних відношень між елементами множини M_2, які мають властивість:
   а) рефлексивності; г) антисиметричності;
   б) антирефлексивності; д) транзитивності;
   в) симетричності; е) досконалості.

13. Обчислити кількість всіх бінарних відношень між елементами множини M_n, які є:
   а) рефлексивними; в) симетричними;
   б) антирефлексивними; г) антисиметричними.

14. Знайти число всіх бінарних відношень на множині M_n, які мають одночасно властивості симетричності і антисиметричності.

15. Знайти число всіх бінарних відношень між єлементами множини M_n, які не мають властивостей:
   а) рефлексивності; в) рефлексивності і антирефлексивності;
   б) симетричності; г) симетричності і антисиметричності.

Задачі на доведення

16. Довести, що операція прямого добутку множин має властивості ліво-дистрибутивності:
   а) $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$;
   б) $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$;
   в) $A \times (B \setminus C) = A \times B \setminus A \times C$;
   г) $A \times (B \div C) = A \times B \div A \times C$.
   Чи мають місце відповідні властивості праводистрибутивності?

17. Довести, що умови рефлексивності, антисиметричності і транзитивності незалежні, тобто жодна з них не слідує із останніх двох.

18. Доведемо, що кожне симетричне і транзитивне бінарне відношення є рефлексивним. Нехай $(a,b) \in \rho$. Тоді із симетричності ρ слідує, що $(b,a) \in \rho$ і, за транзитивністю ρ, маємо $(a,a) \in \rho$, тобто ρ – рефлексивне. Де помилка в доведенні?

19. Нехай ρ_1 і ρ_2 – бінарні відношення між елементами множин A і B. Довести, що мають місце імплікації:
   а) $\rho_1 \subset \rho_2 \to \rho_1^{-1} \subset \rho_2^{-1}$;
   б) $\rho_1 \subset \rho_2 \wedge \sigma_1 \subset \sigma_2 \to \sigma_1 \circ \rho_1 \subset \sigma_2 \circ \rho_2$.

20. Довести, що для довільних бінарних відношень $\rho, \sigma, \varepsilon$, заданих на множині M, справджуються співвідношення:
   а) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$;   д) $(\rho \cup \sigma) \circ \varepsilon = \rho \circ \varepsilon \cup \sigma \circ \varepsilon$;
   б) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$;   е) $\varepsilon \circ (\rho \cup \sigma) = \varepsilon \circ \rho \cup \varepsilon \circ \sigma$;
   в) $\varepsilon \circ (\rho \circ \sigma) = (\varepsilon \circ \rho) \circ \sigma$;   є) $(\rho \cap \sigma) \circ \varepsilon \subset \rho \circ \varepsilon \cap \sigma \circ \varepsilon$;
   г) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$;   ж) $\varepsilon \circ (\rho \cap \sigma) \subset \varepsilon \circ \rho \cap \varepsilon \circ \sigma$.

21. Довести, що операція множення бінарних відношень дистрибутивна відносно операцій об'єднання сімейств бінарних відношень, тобто
$$\left(\bigcup_{i \in I} \sigma_i\right) \circ \rho = \bigcup_{i \in I} \sigma_i \circ \rho \qquad \text{та} \qquad \sigma \circ \left(\bigcup_{i \in I} \rho_i\right) = \bigcup_{i \in I} \sigma \circ \rho_i.$$

22. Довести включення
$$\left(\bigcap_{i \in I} \sigma_i\right) \circ \rho \subset \bigcap_{i \in I} \sigma_i \circ \rho \qquad \text{та} \qquad \sigma \circ \left(\bigcap_{i \in I} \rho_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} \sigma \circ \rho_i.$$
   Показати, що включення не можна замінити на рівність.

23. Довести, що:
    а) об'єднання і перетин двох рефлексивних бінарних відношень між елементами однієї і тієї ж множини рефлексивне;
    б) добуток двох рефлексивних бінарних відношень між елементами однієї і тієї ж множини є рефлексивним бінарним відношенням.

24. Довести, що добуток двох симетричних бінарних відношень між елементами однієї і тієї ж множини є симетричне відношення тоді і тільки тоді, коли добуток не залежить від порядку співмножників.

25. Довести, що добуток двох транзитивних бінарних відношень буде транзитивним, якщо співмножники комутують.

Творчі задачі

26. Нехай на множині A визначено відношення ρ. *Глобальний зріз відношення ρ через підмножину B* множини A (позначається $\breve{\rho}(B)$) визначається рівністю

$$\breve{\rho}(B) = \{b|(\exists a)(a \in B \wedge (a,b) \in \rho)\}.$$

Цим самим визначається *глобальне відношення* $\breve{\rho} \subset \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(A))$, яке відповідає бінарному відношенню ρ:

$$\breve{\rho} = \{(B,C)|C = \breve{\rho}(B)\}.$$

Дослідити, як перетворюються найуживаніші властивості бінарних відношень при переході до глобального відношення. Наприклад, встановити, чи буде глобалізація транзитивного відношення також транзитивним відношенням?

§ 1.6 Відношення еквівалентності та фактор-множина

Література: [1] стор. 87 – 91; [3] стор. 65 – 71.

Теоретичні відомості

Нехай ε – відношення еквівалентності, задане на множині A. Зріз цього відношення через елемент $a \in A$ називається *класом еквівалентності з представником a за відношенням ε.*

Множина всіх класів еквівалентності за відношенням $\varepsilon \subset A \times A$ називається *фактор-множиною множини A за відношенням ε* (позначається A/ε).

Сукупність непорожніх підмножин $A_1, A_2, A_3, \ldots$ множини A називається *розбиттям цієї множини*, якщо виконуються умови:

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = A$;
- $(\forall i \neq j)(A_i \neq A_j \longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$.

Множина всіх класів еквівалентності за відношенням еквівалентності $\varepsilon \subset A \times A$ утворює розбиття множини A; навпаки, якщо задано деяке розбиття множини A, то на ній єдиним чином можна задати відношення еквівалентності так, що класи еквівалентності за цим відношенням будуть співпадати з підмножинами, які є елементами розбиття.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Які із перерахованих нижче бінарних відношень є відношеннями еквівалентності:
   а) відношення паралельності прямих, задане на множині всіх прямих площини;
   б) відношення включення підмножин множини A, задане на множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин множини A;
   в) відношення між точками прямої "лежати по одну сторону від даної точки цієї прямої (тобто множина пар точок прямої, що лежать по одну сторону від даної її точки)";
   г) відношення між точками площини "лежати по одну сторону від даної прямої площини";
   д) відношення подібності трикутників, задане на множині всіх трикутників площини;

е) відношення "x і y навчаються в одній групі задане на множині M всіх студентів навчального закладу;

є) відношення подільності ("x ділиться на y"), задане на множині $\mathbb{N}$;

ж) відношення рівності площ фігур площини?

Для кожного відношення еквівалентності вказати відповідну фактор-множину.

2. Перевірити, чи є відношення ε відношенням еквівалентності, якщо:
   а) $\varepsilon = \{(1,1),(2,1),(2,2),(1,2),(3,3)\}$ і $\varepsilon \subset M_3 \times M_3$;
   б) $\varepsilon = \{(1,1),(3,3),(3,1),(2,2)\}$ і $\varepsilon \subset M_3 \times M_3$;
   в) ε - відношення "x – брат або сестра y" на множині всіх людей;
   г) ε - відношення "x – родич y" на множині всіх людей.

3. Чи утворює розбиття:
   а) сукупність підмножин ромбів, прямокутників, квадратів, трапецій множини всіх чотирикутників площини;
   б) сукупність множин раціональних і ірраціональних чисел множини $\mathbb{R}$?

4. Чи утворює розбиття:
   а) сукупність підмножин $\mathfrak{A}_1 = \{1,2\}, \mathfrak{A}_2 = \{3,4\}, \mathfrak{A}_3 = \{5\}$ множини M_5;
   б) сукупність підмножин рівносторонніх, рівнобедрених, різносторонніх і прямокутних трикутників множини всіх трикутників площини;
   в) сукупність множин футболістів команд вищої ліги множини всіх футболістів країни;
   г) сукупність множин студентів, які проживають в одній кімнаті гуртожитку множини всіх студентів навчального закладу?

5. Вказати класи еквівалентності за відношенням ε, якщо:

$$\varepsilon = \Delta_{M_5} \cup \{(1,2),(2,1),(5,2),(1,5),(5,1),(2,5)\}.$$

6. За даним розбиттям $\mathfrak{M}$ деякої множини M знайти відповідне йому відношення еквівалентності, якщо:
   а) $\mathfrak{M}$ - множина всіх множин людей, що проживають в одній області України;
   б) $\mathfrak{M}$ містить два елементи – множину всіх парних цілих чисел і множину всіх непарних цілих чисел;
   в) $\mathfrak{M} = \{\{1,2,3\},\{4\},\{5\}\}$ і $M = M_5$;
   г) $\mathfrak{M} = \{\{3k|k \in \mathbb{Z}\},\{3k+1|k \in \mathbb{Z}\},\{3k+2|k \in \mathbb{Z}\}\}$ і $M = \mathbb{Z}$.

7. Побудувати фактор-множину A/ε, якщо:

   а) $A = \mathbb{Z}$ і $\varepsilon = \{(x,y)|(x-y)\vdots 3\}$;
   б) $A = M_5$ і $\varepsilon = \Delta_{M_5}$;
   в) $A \neq \varnothing$ і $\varepsilon = A \times A$;
   г) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ і $\varepsilon = \{(x,y)|x = (a,b) \wedge y = (c,d) \wedge ad = bc\}$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Перевірити, що Δ_A і $A \times A$ є відношенням еквівалентності на множині A.

9. Показати, що об'єднання двох відношень еквівалентності може не бути відношенням еквівалентності. А чи може так бути з перетином?

10. Скількома способами можна утворити розбиття множини M_3?

11. Скільки відношень еквівалентності можна задати на множині M_2, M_3, M_4?

12. На множині M_3 знайти всі пари відношень еквівалентності ε_1 та ε_2, для яких добуток $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$ також є відношенням еквівалентності.

13. На множині $\mathbb{N}$ задано бінарне відношення ρ так, що числа a, b перебувають у цьому відношенні тоді і тільки тоді, коли останні цифри у їх десятковому записі однакові. Перевірити, що ρ є відношенням еквівалентності, та знайти число елементів фактор-множини $\mathbb{N}/\rho$.

14. Нехай $f(x)$ – деякий многочлен з дійсними коефіцієнтами від однієї змінної та $\rho = \{(a,b)|f(a) = f(b), a, b \in \mathbb{R}\}$. Перевірити, що ρ є відношенням еквівалентності. Встановити, для яких многочленів всі класи еквівалентності містять тільки по одному елементу.

15. Нехай задано два розбиття $M_1 = \{A_1, \cdots, A_n\}$ і $M_2 = \{B_1, \cdots, B_k\}$ множини C. Перевірити, що множина всіх непорожніх підмножин $A_i \cap B_j$, де $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant k$ є розбиттям даної множини та побудувати відповідне йому відношення еквівалентності.

16. На множині дійсних чисел $[0,5]$ задано таке бінарне відношення ρ: "x має однакову цілу частину з y". Перевірити, що ρ є відношенням еквівалентності, знайти фактор-множину $[0,5]/\rho$ і накреслити графік відношення ρ.

Задачі на доведення

17. Довести, що коли ε – відношення еквівалентності, задане на множині A, то: а) $\Delta_A \subset \varepsilon$; б) $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$; в) $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$. Чи має місце обернене твердження?

18. Довести, що відношення, обернене до відношення еквівалентності, є відношенням еквівалентності.

19. Довести, що коли ε – відношення еквівалентності, то $\varepsilon^n = \varepsilon \circ \cdots \circ \varepsilon \circ \varepsilon$ також є відношенням еквівалентності для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

20. Довести, що добуток двох відношень еквівалентності, визначених на одній і тій же множині, буде відношенням еквівалентності тоді і тільки тоді, коли вони комутують.

21. Зріз відношення еквівалентності $\varepsilon \subset A \times A$ через підмножину $B \subset A$ визначається рівністю $\varepsilon(B) = \bigcup\limits_{a \in B} \varepsilon < a >$, де $\varepsilon < a >$ – клас еквівалентності з представником a.
Довести, що підмножина B множини А належить фактор-множині A/ε тоді і тільки тоді коли виконуються три умови:
1) B не порожня; 2) $B \times B \subset \varepsilon$; 3) $\varepsilon(B) \subset B$.

22. Довести, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\rho \cup \rho^{-1})^n \cup \Delta_A$ є найменшим відношенням еквівалентності, що містить дане бінарне відношення $\rho \subset A \times A$.

23. Довести, що коли для двох відношень еквівалентності $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, заданих на множині A, виконується рівність $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$, то $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ є відношенням еквівалентності. Чи буде ця умова необхідною?

Творчі задачі

24. Встановити, які з аксіом в означенні відношення еквівалентності є незалежними.

25. Вивести формулу для знаходження числа всіх відношень еквівалентності, заданих на множині $M_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.

26. В умовах задачі 14 встановити можливість існування многочленів, для яких всі класи еквівалентності містять не більше двох елементів, точно два елементи і т.д..

§ 1.7 Відношення порядку і упорядковані множини

Література: [1] стор. 91 – 96; [3] стор. 71 – 74.

Теоретичні відомості

Множина A, на якій задано відношення порядку (строгого порядку, лінійного порядку) ω, називається *упорядкованою (строго упорядкованою, лінійно упорядкованою) множиною* і позначається $(A;\omega)$.

Якщо $\omega \subset A \times A$ є відношенням порядку і $(a,b) \in \omega$, то *елемент* a *називають "меншим" за елемент* b, а *елемент* b *"більшим" за елемент* a. Елемент $a \in A$ упорядкованої множини $(A;\omega)$ називається *максимальним (мінімальним) елементом*, якщо в A не існує "більшого" ("меншого") за нього елемента.

Елемент $a \in A$ упорядкованої множини $(A;\omega)$ називається *найбільшим (найменшим) елементом*, якщо він "більший" ("менший") від будь-якого елемента цієї множини.

Нехай A_1 – підмножина упорядкованої множини $(A;\omega)$. Елемент $a \in A$ називається *верхньою (нижньою) межею підмножини* A_1, якщо він "більший" ("менший") від будь-якого елемента цієї підмножини.

Якщо існує найменша (найбільша) з усіх верхніх (нижніх) меж підмножини A_1, то її називають *точною верхньою (нижньою) межею цієї підмножини* і позначають $supA_1$ $(infA_1)$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи буде відношенням порядку (строгим або нестрогим):
   а) відношення включення підмножин множини A, задане на множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин цієї множини;
   б) відношення подільності, задане на множині $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел;
   в) відношення "не більше,"задане на множині $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел;
   г) відношення $"X\rho Y \longleftrightarrow |X| \leqslant |Y|"$ на множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин деякої скінченної множини A?

2. Чи буде відношенням лінійного порядку:
   а) відношення $"x > y$ задане на множині $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел;
   б) відношення подільності, задане на множині $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел;
   в) відношення подільності на множині $\{2^n | n \in \mathbb{N}\}$;
   г) відношення подільності на множині $5\mathbb{Z}$?

3. Доповнити відношення $\rho = \{(1,1),(2,1),(3,2),(1,5),(4,4)\}$, задане на множині M_5, до відношення порядку (строгого, нестрогого, лінійного).

4. Чи можна доповнити відношення $\rho = \{(1,2),(2,3),(2,1)\}$, задане на множині M_3, до відношення строгого порядку?

5. Чи можна доповнити відношення $\rho = \{(1,2),(2,3),(4,3)\}$, задане на множині M_4, до відношення лінійного порядку?

6. Знайти всі мінімальні і максимальні елементи множини M_{10}, упорядкованої відношенням "x ділиться на y".

7. Зобразити діаграмою відношення "x - дільник y задане на множині $M = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$. Нарисувати діаграму відношення "x ділиться на y заданого на цій же множині.

8. Нехай на множині $\mathfrak{P}(M_3)$ всіх підмножин множини M_3 задано відношення " $\subseteq$ ". Нарисувати діаграму цього відношення.

9. Чи існують верхня і нижня межі, $supX$ (точна верхня межа) та $infX$ (точна нижня межа) підмножини X множини всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$, упорядкованої відношенням " $\geqslant$ якщо
а) $X = \mathbb{N}$; б) $X = \mathbb{R}^-$?

Задачі на техніку обчислень

10. Нехай на множині M_7 задано бінарне відношення
$$\omega = \{(x,y) | x,y \in M_7 \wedge x - y \geqslant 0 \wedge (x-y) \vdots 2\}.$$
Встановити, що ω є відношенням порядку на M_7 та знайти мінімальні і максимальні елементи упорядкованої множини $(M_7; \omega)$.

11. Знайти всі однорідні бінарні відношення, задані на A, які є одночасно відношенням еквівалентності і відношенням порядку.

12. Встановити, для яких множин A множина $(\mathfrak{P}(A); \subset)$ є лінійно упорядкованою?

13. Скільки відношень порядку можна задати на двохелементній множині?

14. Скільки відношень строгого порядку можна задати на двохелементній множині?

15. Скільки бінарних відношень, заданих на множині M_3, є:
    а) відношеннями порядку;
    б) відношеннями строгого порядку?

16. Скільки відношень лінійного порядку можна задати на множині, яка містить n елементів?

17. Вказати різні за формою діаграми, які задають всі відношення строгого порядку на множині M_3.

18. Чи існують в множинах всіх рефлексивних, антирефлексивних, антисиметричних, транзитивних і зв'язних відношень між елементами множини M_4, упорядкованих відношенням включення:
    а) мінімальні та максимальні елементи;
    б) найменші та найбільші елементи?

    Якщо існують, то знайти їх.

19. Знайти всі верхні та нижні межі, $supA$ та $infA$ підмножини A множини M_{10}, упорядкованої відношенням "x ділиться на y якщо:
    а) $A = \{2, 3, 5\}$; б) $A = \{3, 4, 6\}$.

20. Рефлексивне і транзитивне відношення називається *відношенням квазіпорядку*. Для довільного бінарного відношення $\rho \subset A \times A$ вказати найменше відношення квазіпорядку, яке його містить.

Задачі на доведення

21. Довести, що відношення $(a, b)\omega(c, d) \overset{df}{\longleftrightarrow} a < c \vee (a = c \wedge b \leqslant d)$ є відношенням лінійного порядку на множині $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

22. Довести, що для кожного відношення порядку $\omega \subset A \times A$ має місце рівність $\omega \circ \omega = \omega$.

23. Довести, що об'єднання двох відношень порядку, заданих на одній множині, включається в їх добуток.

24. Довести, що будь-яке антирефлексивне і транзитивне бінарне відношення є антисиметричним.

25. Довести, що умови рефлексивності, антисиметричності і транзитивності є незалежними.

26. Довести, що для того, щоб відношення $\omega \subset A \times A$ було відношенням порядку, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:
а) $\Delta_A \subset \omega$; б) $\omega \cap \omega^{-1} \subset \Delta_A$; в) $\omega \circ \omega = \omega$.

27. Довести, що відношення, обернене до відношення порядку, є відношенням порядку.

28. Довести, що перетин двох відношень порядку є відношенням порядку.

29. Довести, що будь-яка упорядкована множина може мати не більше одного найбільшого і не більше одного найменшого елемента.

30. Довести, що в множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин множини A, упорядкованої відношенням "$\subset$", виконуються рівністі:
$inf\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\} = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$ та $sup\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2\} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$.

31. Нехай множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел упорядкована відношенням "x ділиться на y". Довести, що будь-яка двохелементна підмножина A множини $\mathbb{N}$ має $infA$ і $supA$.

32. Довести, що в будь-якій упорядкованій множині $(A;\omega)$ відношення порядку можна виразити так: $(a_1, a_2) \in \omega \longleftrightarrow inf\{a_1, a_2\} = a_1$ та $(a_1, a_2) \in \omega \longleftrightarrow sup\{a_1, a_2\} = a_2$.

33. Нехай $\omega \subset A \times A$ відношення порядку. Довести, що:
а) $\omega^{-1} < x_1 >= \omega^{-1} < x_2 > \quad \longleftrightarrow \quad x_1 = x_2$;
б) $(x_1, x_2) \in \omega \quad \longleftrightarrow \quad \omega^{-1} < x_1 > \subset \omega^{-1} < x_2 >$.

34. Довести, що в множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин множини A, упорядкованої відношенням "$\subset$", кожна її підмножина має точну верхню та точну нижню межі.

Творчі задачі

35. Множина $\mathfrak{P}_1(\mathbb{N})$ всіх непорожніх скінченних підмножин множини $\mathbb{N}$ упорядкована відношенням "$\subset$". Описати всі мінімальні і максимальні елементи цієї множини.

36. Нехай $(A;\omega)$ і $(\overline{A};\overline{\omega})$ – дві упорядковані множини. Відображення $f : A \to \overline{A}$ називається *ізотонним*, якщо виконується умова

$$(x_1, x_2) \in \omega \to (f(x_1), f(x_2)) \in \overline{\omega}.$$

Розглянемо множини $M_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ і $M_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ упорядковані відношенням "не більше". Скільки існує ізотонних відображень множини M_n в множину M_m?

§ 1.8 Відображення

Література: [1] стор. 96 – 111; [3] стор. 54 – 65.

Теоретичні відомості

Відображенням непорожньої множини A у множину B (або *функцією*, заданою на множині A, яка приймає значення в множині B), називається бінарне відношення $\rho \subset A \times B$ таке, що зріз $\rho < a >$ через кожний елемент $a \in A$ містить точно один елемент.

Іншими словами, відображенням непорожньої множини A у множину B називається відповідність, яка кожному елементу множини A співставляє єдиний елемент множини A. Елемент $b \in B$, який відображенням $f \subset A \times B$ співставляється елементу $a \in A$, позначають через $f(a)$ і називають *образом елемента a відносно f* (в свою чергу a називають *прообразом елемента b відносно f*).

Якщо f є відображенням множини A у множину B і $A_1 \subset A$, то множину всіх образів елементів підмножини A_1 називають її образом при цьому відображенні і позначають через $f(A_1)$.

Нехай відношення $f \subset A \times B$ є функцією. Якщо обернене бінарне відношення $f^{-1} \subset B \times A$ також є функцією, то f^{-1} називається *функцією, оберненою до f*. В цьому випадку говорять, що для функції f існує обернена функція.

Відображення $f \subset A \times B$ називається:

- *ін'єктивним* (взаємно однозначним відображенням A у множину B), якщо виконується $(\forall a_1)(\forall a_2)(a_1 \neq a_2 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$ (іншими словами: кожен елемент множини B має не більше одного прообраза);
- *сюр'єктивним* (відображенням A на B), якщо виконується умова $(\forall b)(\exists a) f(a) = b$ (іншими словами: кожен елемент множини B має прообраз).

Відображення $f \subset A \times B$, яке одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним (іншими словами: кожен елемент множини B має точно один прообраз), називається *бієктивним* (взаємно однозначним відображенням A на B).

Для того, щоб для відображення $f \subset A \times B$ існувало обернене відображення, необхідно і достатньо, щоб f було бієктивним.

Якщо бінарні відношення $f \subset A \times B$ і $g \subset B \times C$ є функціями, то відношення $g \circ f \subset A \times C$ також є функцією.

Якщо для функцій $f \subset A \times B$ і $g \subset B \times C$ існують обернені функції, то для функції $g \circ f$ також існує обернена функція.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи є відповідність ρ відображенням і якщо є, то яким, коли:
   а) $\rho \subset M_2 \times M_3$ і $\rho = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$;
   б) $\rho \subset M_3 \times M_2$ і $\rho = \{(1,2),(2,1),(3,2)\}$;
   в) $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ і $\rho = \{(x, 5+x)|x \in \mathbb{N}\}$;
   г) $\rho \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ і $\rho = \{(x, \frac{1}{x})|x \in \mathbb{R}\}$?

2. Які з наступних відношень є відображеннями (функціями):
   а) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{N} \wedge y = x^3\}$;
   б) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{N} \wedge x < y < x+1\}$;
   в) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z} \wedge y = x^3\}$;
   г) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z} \wedge$ "x – дільник y"$\}$;
   д) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z} \wedge y = |x|\}$;
   е) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z} \wedge x = y^2\}$?

3. Показати:
   а) якщо $m \geqslant n$, то існує відображення M_m на M_n;
   б) якщо $m \leqslant n$, то існує ін'єктивне відображення M_m у M_n;
   в) якщо $m = n$, то існує бієктивне відображення M_m на M_n.

4. Встановити взаємно однозначну відповідність між множинами:

а)	$\mathbb{R}^-$	і	$\mathbb{R}$;	г)	$[1,2]$	і	$[9,14]$;
б)	$\mathbb{Z}$	і	$2\mathbb{Z}$;	д)	$\mathbb{R}$	і	$\mathbb{R}^+$;
в)	$[0,1]$	і	$[0,3]$;	е)	$\mathbb{N}$	і	$\mathbb{Z}^-$.

5. Показати, що для будь-яких множин A, B і C існує:
   а) ін'єктивне відображення множини $A \times B$ на множину $B \times A$;
   б) ін'єктивне відображення множини $(A \times B) \times C$ на множину $A \times (B \times C)$.

Задачі на перевірку техніки обчислень

6. Скільки існує відображень множини M_2 в себе? Які з цих відображень ін'єктивні?

7. Скільки існує відображень множини M_3 в множину M_2?

8. Скільки існує відображень множини M_3 на множину M_2?

9. Нехай множини A і B містять відповідно m і n елементів. Скільки можна задати різних:

а) відображень A в B?
б) ін'єктивних відображень A в B?
в) сюр'єктивних відображень A на B, якщо $m \leqslant n$?
г) бієктивних відображень A на B?

10. Показати, що коли f є відображенням множини A в множину B, то $f \circ \Delta_A = f$ і $\Delta_B \circ f = f$.

Задачі на доведення

11. Довести, що добуток $g \circ f \subset A \times C$ двох відображень $f \subset A \times B$ і $g \subset B \times C$ є відображенням.

12. Довести, що коли для функцій $f : A \to B$ і $g : B \to C$ існують обернені, то для функції $g \circ f$ також існує обернена.

13. Довести, що коли $f \subset A \times B$ - бієктивне відображення, то $f^{-1} \subset B \times A$ також бієктивне відображення.

14. Довести, що операція множення функцій асоціативна, тобто має місце рівність $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$.

15. Довести, що добуток двох ін'єктивних відображень множини A в себе є ін'єктивним відображенням.

16. Довести, що добуток двох бієктивних відображень множини A на себе є бієктивним відображенням.

17. Нехай $\rho \subset A \times B$. Довести, що відношення ρ є бієктивним відображенням тоді і тільки тоді, коли $\rho \circ \rho^{-1} = \Delta_B$ і $\rho^{-1} \circ \rho = \Delta_A$.

18. Нехай A - скінченна множина. Бієктивне відображення множини A на себе називається *перестановкою множини* A. Довести, що коли f є перестановкою множини A, то f^{-1} також є перестановкою.

19. Нехай відношення $f \subset A \times B$ є функцією. Довести, що $f^{-1} \subset B \times A$ буде функцією тоді і тільки тоді, коли f є сюр'єктивним і ін'єктивним відображенням, тобто, коли виконуються умови:
а) $f(A) = B$; б) $(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$.

20. Довести, що коли відображення f множини A на себе задовольняє умові $f \circ f = f$, то $f = \Delta_A$.

21. Нехай f — відображення A в B. Довести, що для довільних підмножин A_1 і A_2 множини A виконується співвідношення
$A_1 \subseteq A_2 \rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

22. Довести, що для довільного відображення $f \subset A \times B$ і будь-яких підмножин A_1, A_2 множини A та підмножин B_1, B_2 множини B виконуються співвідношення:
а) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
б) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
в) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
г) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
Показати, що в останньому випадку обернене включення, взагалі кажучи, місця не має.

23. Нехай f — відображення A в B. Довести, що для довільних $A_1, A_2 \subset A$ рівність $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ має місце тоді і тільки тоді, коли f є бієктивним відображенням.

24. Позначимо через $\bar{r}$ множину всіх цілих чисел, які при діленні на 5 дають остачу r. Довести, що існує сюр'єктивне відображення f множини $\mathbb{Z}$ цілих чисел на множину $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

25. Довести, що для кожного відношення еквівалентності $\varepsilon \subset A \times A$ відношення $f_\varepsilon = \{(a, \varepsilon < a >) | a \in A\}$ є сюр'єктивним відображенням множини A на фактор-множину A/ε (його називають *природним або канонічним*).

26. Довести, що для кожної сюр'єкції $g : A \rightarrow B$ існує відношення еквівалентності ε_g на множині A таке, що відповідне йому відображення f_{ε_g} є бієкцією між A/ε_g і B.

Творчі задачі

27. Бінарне відношення $\rho \subset A \times B$ називається *однозначним*, якщо його зрізи через елементи множини A є підмножинами множини B, що містять не більше одного елемента. Однозначне бінарне відношення $\rho \subset A \times B$ називається *частковим відображенням множини A в множину B*. Встановити властивості часткових відображень множин.

§ 1.9 Вибрані задачі

1. Один із п'яти братів розбив вікно.
   – Це міг зробити тільки або Вітя, або Толя, – сказав Андрій.
   – Я вікно не розбивав, – заявили Вітя і Коля.
   – Ви обидва сказали неправду, – заявив Толя.
   – Ні, Толя, один з них сказав правду, а другий сказав неправду, – заперечив Діма.
   – Ти, Діма, неправий, – втрутився Коля.

   Їх батько, якому, звичайно, можна довіряти, впевнений, що троє братів сказали правду.

   Хто розбив вікно?

2. Шість студентів – А, Б, В, Г, Д, Е – брали участь в математичній олімпіаді. Задачу розв'язали двоє. На запитання, хто розв'язав задачу, одержано п'ять відповідей:

   - "Задачу розв'язали А і Б."
   - "Задача розв'язана тільки в роботах Б і Д."
   - "З задачею справились тільки Е і Б."
   - "Задачу розв'язали А і Е."
   - "Задачу розв'язали А і Г."

   Виявилося, що в чотирьох відповідях вірно названі прізвища не менше одного студента, а в одній відповіді обидва прізвища названі невірно. Хто із учасників олімпіади розв'язав задачу?

3. *Елементарною кон'юнкцією (диз'юнкцією)* називається кон'юнкція (диз'юнкція) формул, кожна з яких є змінним висловленням або його запереченням. *Диз'юнктивною нормальною формою* називається диз'юнкція елементарних кон'юнкцій. *Кон'юнктивною нормальною формою* називається кон'юнкція елементарних диз'юнкцій.

   Довести, що для будь-якої формули алгебри висловлень існує еквівалентна їй кон'юнктивна (диз'юнктивна) нормальна форма.

4. Диз'юнктивна (кон'юнктивна) нормальна форма називається *досконалою*, якщо кожна змінна формули входить в кожну елементарну кон'юнкцію (диз'юнкцію) рівно один раз з запереченням або без нього.

   Довести, що для будь-якої виконуваної формули алгебри висловлень (формули, яка не є тотожно хибною) існує еквівалентна їй досконала кон'юнктивна (диз'юнктивна) нормальна форма.

5. Довести, що для будь-якої тотожно хибної формули алгебри висловлень не існує еквівалентної їй досконалої диз'юнктивної нормальної форми.

6. Довести, що для будь-якої тотожно істиної формули алгебри висловлень не існує еквівалентної їй досконалої кон'юнктивної нормальної форми.

7. Довести, що будь-яка бінарна операція над множинами, визначена одномісним предикатом виду $x \in X$ за допомогою логічних операцій, може бути виражена через операції об'єднання, перетину і доповнення.

8. Визначити нові операції над множинами (відмінні від відомих перетину, об'єднання, віднімання, симетричного віднімання та доповнення) і вивчити їх властивості.

9. Нехай f – відображення A в B. Визначимо відображення
   $f_* : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow \mathfrak{P}(B)$ і $f^* : \mathfrak{P}(B) \longrightarrow \mathfrak{P}(A)$ так:
   а) якщо $X \subset A$, то $f_*(X) = \{f(x) | x \in X\}$;
   б) якщо $Y \subset B$, то $f^*(Y) = \{x | x \in A \wedge f(x) \in Y\}$.
   Яким повинно бути відображення f для того, щоб виконувалася рівність: а) $f^* \circ f_* = \Delta_{\mathfrak{P}(A)}$; б) $f_* \circ f^* = \Delta_{\mathfrak{P}(B)}$?

10. Нехай $\rho \subset A \times B, \sigma \subset B \times C, \tau \subset A \times C$. Довести співвідношення Дедекінда:
$$\sigma \circ \rho \cap \tau \subset (\sigma \cap \tau \circ \rho^{-1}) \circ (\rho \cap \sigma^{-1} \circ \tau).$$

11. Нехай $\rho \subset A \times B, \sigma \subset B \times C, \tau \subset A \times C$. Довести, що
$$\sigma \circ \rho \cap \tau^{-1} = \varnothing \longleftrightarrow \tau^{-1} \circ \sigma \cap \rho^{-1} = \varnothing \longleftrightarrow \rho \circ \tau^{-1} \cap \sigma^{-1} = \varnothing.$$

12. Нехай $\rho \subset A \times B, \sigma \subset B \times A$. Довести, що $\Delta_{pr_1(\rho \cap \sigma^{-1})} \subset \sigma \circ \rho$.

13. Відношення $\varepsilon_\rho = \{(x, y) | \rho < x >= \rho < y >\}$, де $\rho \subset A \times A$, називається *ядром відношення* ρ. Виразити ε_ρ через операцію множення бінарних відношень.

14. Бінарне відношення називається *квазіоднозначним*, якщо воно задовольняє умові $\rho \circ \rho^{-1} \circ \rho = \rho$. Довести, що перетин двох квазіоднозначних бінарних відношень є квазіоднозначним бінарним відношенням.

15. Довести, що об'єднання двох часткових відображень φ і ψ множини M у множину N є частковим відображенням M в N тоді і тільки тоді, коли виконується умова $(\forall x \in pr_1\varphi \cap pr_1\psi)(\varphi(x) = \psi(x))$.

16. Вивести формулу числа часткових відображень m-елементної множини A в n-елементну множину B.

17. Встановити зв'язок між основними теоретико-множинними операціями (перетин, об'єднання, віднімання) та операціями:

$$A \lhd B = \{x | x \in A | x \in B\} \quad A \rhd B = \{x | x \in A \downarrow x \in B\},$$

де $|$ – штрих Шеффера, а $\downarrow$ – штрих Лукасевича.

18. Дослідити розв'язування найпростіших теоретико-множинних рівнянь виду $A \cap X = B$, $\quad Y \cup A = B$, $\quad A \setminus X = B$, $\quad Y \setminus A = B$, $\quad A \div X = B$, $\quad Y \div A = B$, де X, Y – невідомі, а A, B – задані підмножини деякої універсальної множини U.

19. Розв'язати теоретико-множинні системи рівнянь:

а) $\begin{cases} A \cap X = B, \\ C \cup X = D; \end{cases}$ г) $\begin{cases} A \cap X = B, \\ C \setminus X = D; \end{cases}$ є) $\begin{cases} A \cup X = B, \\ C \setminus X = D; \end{cases}$

б) $\begin{cases} A \cap X = B, \\ C \div X = D; \end{cases}$ д) $\begin{cases} A \cup X = B, \\ C \div X = D; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ C \div X = D; \end{cases}$

в) $\begin{cases} A \cap X = B, \\ X \div C = D; \end{cases}$ е) $\begin{cases} A \cup X = B, \\ X \div C = D; \end{cases}$ з) $\begin{cases} A \setminus X = B, \\ X \div C = D, \end{cases}$

де X – невідома підмножина і A, B, C, D – задані підмножини деякої універсальної множини U такі, що кожний попарний їх перетин є непорожньою множиною.

20. Бінарне відношення $\varphi \subset A \times A$ називається *інволюцією на* A, якщо $\varphi \circ \varphi = \Delta_A$. Дослідити множину всіх інволюцій на множині A відносно відомих операцій над відношеннями.

21. Знайти число всіх інволюцій на скінченній множині.

22. Знайти число всіх відношень еквівалентності скінченній на множині.

23. Знайти число всіх відношень порядку на скінченній множині.

Розділ 2

Алгебри та основні числові системи

§ 2.1 Бінарні операції та їх властивості. Напівгрупа та група; їх ізоморфізм та гомоморфізм

Література: [1] стор. 148 – 162, 205 – 231; [3] стор. 75 – 82, 94 – 104.

Теоретичні відомості

Бінарною операцією, заданою на непорожній множині A, називається відповідність, яка кожній упорядкованій парі елементів цієї множини співставляє єдиний елемент цієї ж множини. Іншими словами – це відображення множини $A \times A$ в непорожню множину A. Для позначення бінарних операцій, як правило, замість букв використовують різні значки: $\circ, *, +, \cdot, \oplus, \triangleleft, \ldots$. Якщо для позначення бінарної операції вживають знак "$+$ то такий запис називають *адитивним*, а знак "$\cdot$" – *мультиплікативним*.

Бінарна операція на непорожній множині A задається тими ж способами, що і відображення. На скінченних множинах з невеликим числом елементів бінарні операції задають також за допомогою *таблиць Келі*. Якщо множина містить k елементів, то для цього будують таблицю в якій $(k+1)^2$ клітинок. В лівій верхній клітинці ставлять значок операції, а в першому рядку і першому стовпці записують елементи даної множини. Після цього для задання бінарної операції слід заповнити решту клітинок таблиці по одному елементу з даної множини.

Кожне відображення непорожньої множини A в себе називають *унарною операцією* в цій множині. Кожне відображення непорожньої множини A^n в множину A називають *n-нарною операцією в цій множині*, а число n – її *арністю* . Зокрема, при $n = 1$ маємо унарну, а при $n = 2$ – бінарну операцію.

Непорожня множина A, в якій задано декілька операцій називається *алгеброю* і тоді записують $(A; +, \cdot, *, {}^{-1})$. Непорожня множина A, в якій задано декілька операцій і відношень називається *алгебраїчною системою* і її позначають так: $(A;\ +, \cdot, *, {}'; \leqslant, \|)$.

Нехай $(A; *)$ – алгебра з одною бінарною операцією. Бінарна операція $*$, задана на множині A, називається *асоціативною*, якщо $a*(b*c) = (a*b)*c$ та *комутативною*, якщо $a * b = b * a$ для будь-яких її елементів.

Елемент $e \in A$ називається *нейтральним відносно бінарної операції* $*$, якщо $e * a = a * e = a$ для будь-якого елемента a з множини A. При адитивному записі його називають *нулем*, а при мультиплікативному – *одиницею*.

Якщо в алгебрі $(A; *)$ є нейтральний елемент e, то елемент $\overline{a} \in A$ називають *симетричним до* $a \in A$, якщо виконуються рівності $\overline{a}*a = a*\overline{a} = e$. При адитивному записі його називають *протилежним*, а при мультиплікативному – *оберненим*.

Нехай в алгебрі $(A; *, +)$ є дві бінарні операції. Говорять, що *операція* $*$ *дистрибутивна відносно операції* $+$, якщо виконуються умови

$$a * (b + c) = a * b + a * c, \quad (a + b) * c = a * c + b * c.$$

Алгебра $(A; *)$ з одною бінарною операцією називається *напівгрупою*, якщо операція має властивість асоціативності.

Напівгрупа $(A; *)$ називається *групою*, якщо в ній є нейтральний елемент і для кожного елемента існує симетричний. Якщо в групі $(A; *)$ операція комутативна, то групу називають *абелевою*.

Нехай $(A; *)$ і $(B; \circ)$ – напівгрупи. Відображення f множини A на(в) множину B називають *гомоморфізмом напівгрупи* $(A; *)$ *на(в) напівгрупу* $(B; \circ)$, якщо виконується умова

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) \circ f(a_2)$$

для всіх $a_1, a_2 \in A$. Взаємно однозначний гомоморфізм напівгруп називають *ізоморфізмом*.

Аналогічно визначаються поняття *гомоморфізму та ізоморфізму груп.*

Задачі на ілюстрацію понять

1. Перевірити, які з заданих відношень $\circ$ є операціями на множині A та визначити їх арність, якщо:
   а) $\circ = \{(a,b,c)|a,b,c \in A \wedge a = bc\}$ і $A = \mathbb{R}$;
   б) $\circ = \{(a,b)|a,b \in A \wedge a = b^3\}$ і $A = \mathbb{R}$;
   в) $\circ = \{(a,b)|a,b \in A \wedge b = \sqrt{a}\}$ і $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
   г) $\circ = \{(a,b,c)|a,b,c \in A \wedge |a+b| = |c|\}$ і $A = \mathbb{Z}$;
   д) $\circ = \{(a,1)|a \in A\}$ і $A = \mathbb{N}$;
   е) $\circ = \{(a,b)|a,b \in A \wedge ab = 1\}$ і $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

2. Чи є бінарними операціями на множині $A = \{0,1,2,3,-1,-2\}$ додавання, віднімання та множення чисел? Який вид мають для цих дій таблиці Келі? Чим відрізняється таблиця Келі від відомої з школи таблиці Піфагора?

3. Скласти таблицю Келі для операції $\oplus$, яка задана на множині $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ за правилом: $a \oplus b$ дорівнює остачі при діленні $a + b$ на 6. Встановити, чи має ця операція властивості асоціативності і комутативності та чи існує нейтральний елемент? Для яких елементів тут існує симетричний?

4. Навести приклади алгебраїчних систем з:
   а) двома бінарними і однією унарною операціями;
   б) двома бінарними відношеннями;
   в) трьома бінарними операціями і двома бінарними відношеннями;
   г) однією бінарною та унарною і двома нуль-арними операціями.

5. В скінченній множині бінарна операція задана таблицею Келі. Як по таблиці встановити:
   а) чи є в алгебрі лівий, правий та двосторонній нейтральний елемент?
   б) чи є в алгебрі лівий, правий та двосторонній нульовий елемент?
   в) чи має операція властивість комутативності?
   г) чи можна проводити скорочення відносно заданої операції?

6. Для яких елементів даних алгебр існує симетричний елемент:
   а) $(\mathbb{Z};+)$; в) $(\mathbb{Z};\cdot)$; д) $(\mathbb{Q}^+;+)$;
   б) $(\mathbb{N};\cdot)$; г) $(\mathbb{Q}^+;\cdot)$; е) $(\mathfrak{P}(A);\cup,\cap)$?

7. Які властивості мають операції кон'юнкції, диз'юнкції та імплікації в множині всіх висловлень? Відносно яких операцій в цій множині є нульовий та нейтральний елементи? Для яких висловлень існують симетричні елементи?

8. Нехай f – відображення напівгрупи $(\mathbb{N};\cdot)$ в себе, яке задано формулою: а) $f(n) = 2n$; б) $f(n) = n^2$. Чи буде дане відображення гомоморфізмом та ізоморфізмом?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Бінарна операція $*$ в множині G задана рівністю: $a*b = a$. Перевірити, чи є алгебра $(G;*)$ напівгрупою. Чи існує в цій алгебрі нейтральний елемент?

10. Які властивості мають операції перетину, об'єднання та віднімання множин в множині $\mathfrak{P}(A)$ всіх підмножин множини A? Відносно яких операцій в цій множині є нейтральні елементи?

11. Встановити, які з числових множин є напівгрупами та групами відносно вказаних операцій:
    а) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ відносно операції $+$;
    б) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ відносно операції $-$;
    в) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ відносно операції "$\cdot$";
    г) $n\mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Q}$, $n\mathbb{R}$ відносно операції "$\cdot$", де $n \in \mathbb{R}$;
    д) $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ відносно операції "$\cdot$" для фіксованого $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
    е) $\{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ відносно операції "$\cdot$" для фіксованого $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

12. Скласти таблицю Келі для операції:
    а) знаходження НСК на множині $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
    б) знаходження НСД на множині $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
    в) композиції самосуміщень ромба;
    г) композиції функцій $x, -x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{x+1}{x-1}, \frac{1-x}{1+x}, \frac{1+x}{1-x}$.

13. Задати гомоморфізм напівгрупи $(\mathbb{N};\cdot)$ на алгебру $(\{0,1\};\cdot)$, в якій "$\cdot$" є операцією множення чисел.

14. Задати гомоморфізм групи $(\mathbb{Z};+)$ на алгебру $(\{-1,1\};\cdot)$, в якій "$\cdot$" є операцією множення чисел.

15. Нехай алгебра $(G;\cdot)$ є групою і $a \in G$. Встановити, чи будуть гомоморфізмами та ізоморфізмами дані відображення групи G в себе:
    а) $f_{la}(x) = ax$; б) $f_{ra}(x) = xa$; в) $f_a(x) = a^{-1}xa$.

Задачі на доведення

16. У множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ задана операція:
   а) $m * n = \text{НСД}(m, n)$;
   б) $m \circ n = \text{НСК}(m, n)$.
   Довести, що задана операція має властивості асоціативності та комутативності. Чи існує нейтральний елемент?

17. Бінарна операція $*$ в множині A задовольняє умовам:
   а) $(\forall x, y, z \in A)((x * y = x * z \to y = z) \wedge (x * y = z * y \to x = z))$;
   б) $(\forall x, y, z \in A)(x * (y * z) = y * (z * x))$.
   Довести, що $(A; *)$ є комутативною напівгрупою.

18. В множині $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ задана операція $\oplus$:
$$(m, n) \oplus (k, l) = (m + k, n + l).$$
   Довести, що алгебра $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \oplus)$ є абелевою групою.

19. В множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ задано операції:
$$(m, n) \oplus (k, l) = (m + k, n + l),$$
$$(m, n) \odot (k, l) = (mk, ml + nk).$$
   Елементи цієї алгебри називають *дуальними числами*. Довести, що алгебра $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus)$ є абелевою групою, алгебра $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \odot)$ є абелевою напівгрупою і операція $\odot$ дистрибутивна відносно $\oplus$.

20. В множині $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ задано операції:
$$(m, n) \oplus (k, l) = (m + k, n + l),$$
$$(m, n) \circ (k, l) = (mk + nl, ml + nk).$$
   Елементи цієї алгебри називають *подвійними числами*. Довести, що алгебра $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \oplus)$ є абелевою групою, алгебра $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \circ)$ є абелевою напівгрупою і операція $\circ$ дистрибутивна відносно $\oplus$.

21. Довести, що множина $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ є групою відносно операції, заданої так:
$$(m, n) * (k, l) = (mk - 2nl, ml + nk).$$
   Чи є вона комутативною?

22. Довести, що алгебра $(\mathfrak{P}(A); \div)$ є абелевою групою відносно операції $\div$ симетричного віднімання.

23. Довести, що множина всіх поворотів кола навколо свого центра відносно композиції поворотів є абелевою групою.

24. Довести, що множина всіх векторів площини відносно операції додавання є абелевою групою.

25. Довести, що напівгрупи $(\mathbb{N};+)$ і $(2\mathbb{N};+)$ ізоморфні між собою.

26. Довести, що групи $(\mathbb{R};+)$ і $(\mathbb{R}^+;\cdot)$ ізоморфні.

27. Довести, що можна задати ізоморфізм адитивної групи $(\mathbb{Z};+)$ в групу $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z};\oplus)$ (задача 18).

Творчі задачі

28. Встановити, скільки k-арних операцій можна задати на множині, яка містить n елементів?

29. Побудувати таблицю Келі для групи D_n *самосуміщень правильного n-кутника* при $n=3,4,5$. Які закономірності ви замітили?

30. Дослідити, чи повинен бути в кожній скінченній напівгрупі *ідемпотент*, тобто такий елемент a, що $aa=a$.

31. Напівгрупа називається *моногенною*, якщо вона утворена з додатних степенів одного з своїх елементів, який називають *твірним*. Встановити:
    а) яка будова таких напівгруп?
    б) скільки твірних та ідемпотентів може мати така напівгрупа?
    в) як можна порівняти такі *нескінченні* та *скінченні напівгрупи*?

Задачі з олімпіад

32. На множині $\mathbb{Z}$ визначена бінарна операція:
    а) $a\star b=a+b+2$;
    б) $a\circ b=ab+a+b$.
    Які з властивостей групи має ця операція?

33. Нехай p,q,r – задані дійсні числа. В множині $\mathbb{R}$ визначена бінарна операція $x*y=px+qy+r$. Встановити, при яких p,q і r множина $\mathbb{R}$ є групою відносно операції $*$.

§ 2.2 Натуральні числа. Метод математичної індукції

Література: [1] стор. 127 – 140; [3] стор. 119 – 122.

Теоретичні відомості

Непорожня множина $\mathbb{N}$, в якій визначено бінарне відношення "b *слідує за* a"(елемент, який слідує за a часто позначають через a' і називають *наступним за* a) так, що виконуються умови:

1) існує елемент, який не слідує ні за яким іншим елементом (його називають *одиницею* і позначають символом 1);

2) за кожним елементом слідує деякий елемент і тільки один;

3) кожний елемент, крім одиниці, слідує за деяким елементом і тільки за одним;

4) будь-яка підмножина M множини $\mathbb{N}$, яка задовольняє умовам:

а) $1 \in M$ і

б) $(\forall a)(a \in M \to a' \in M)$, співпадає з множиною $\mathbb{N}$,

називається *множиною натуральних чисел*.

Умови 1 – 4 називають *аксіомами Пеано натуральних чисел*. Аксіому 4 називають *аксіомою індукції*.

На основі аксіоми індукції доводиться теорема, яка називається *основною формою принципу математичної індукції*. Вона стосується тверджень T_n, сформульованих для натуральної змінної n.

Якщо деяке твердження T_n істинне для $n = 1$ і якщо з припущення, що воно істинне для натурального числа $n = k$, випливає його істинність для наступного числа k', то твердження T_n істинне для будь-якого натурального числа n.

На цій теоремі грунтується *метод математичної індукції*, який широко вживається для доведення тверджень T_n, сформульованих для натуральної змінної n. Він полягає в тому, що для доведення істинності такого твердження слід поступити так:

а) довести (перевірити) істинність цього твердження для $n = 1$ (говорять: *створити базу індукції*);

б) з припущення про істинність даного твердження для $n = k$ довести істинність його для наступного числа k' (говорять: *здійснити крок індукції*).

Узагальненням основної форми принципу математичної індукції (*індукції, починаючи з* $k_0 \in \mathbb{N}$) є наступна теорема.

Якщо деяке твердження T_n істинне для натурального числа n_0 і якщо з припущення, що воно істинне для натурального числа $k \geqslant n_0$, випливає його істинність для наступного числа k', то твердження T_n істинне для будь-якого натурального числа $n \geqslant n_0$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. При розгляді многочлена $f(x) = x^2+x+41$ виявили, шо при підстановці замість x більше 25 послідовних чисел $0, 1, 2, 3, \cdots, 25$ отримують прості числа. На підставі цього було зроблено висновок про те, що так буде для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Говорять, що висновок зроблено на основі *неповної індукції*. Чи вірний він? Коли можна застосовувати метод неповної індукції?

2. Застосуйте метод *повної індукції* (загальний висновок робиться на основі розгляду всіх без винятку випадків) для доведення того, що будь-яке ціле число можна записати у виді суми п'яти кубів цілих чисел.

3. Записати мовою символів принцип математичної індукції.

4. Записати мовою символів узагальнення основної форми принципу математичної індукції (*індукції, починаючи з* $k_0 \in \mathbb{N}$) та довести його.

5. Записати мовою символів теорему *індукції, обмеженої інтервалом*: "Якщо про деяке твердження T_n, сформульоване для натурального числа n, відомо, що воно істинне для $n = a$, і з припущення про істинність його для всіх $k \in [a, b[$ випливає істинність для $n = k + 1$, то твердження є істинним для кожного $k \in [a, b]$."Довести цю теорему, застосувавши принцип математичної індукції.

6. Записати мовою символів і довести теорему, яку називають *індукцією спуску*: "Якщо про деяке твердження, сформульоване для натурального числа, відомо, що воно істинне для $n = b$, і з припущення про істинність його для всіх $k \in]a, b]$ випливає істинність для $n = k - 1$, то твердження є істинним для кожного $k \in [a, b]$."Довести цю теорему, застосувавши принцип математичної індукції.

7. Знайти помилку у міркуваннях: "Очевидно, що твердження "усі студентки мають однаковий вік" правильне для кожної окремо взятої студентки. Припустимо, що твердження істинне для довільного $k \geqslant 1$. Розглянемо множину $\{a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\}$, яка містить $k + 1$ студентку. За припущенням усі студентки з множин $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ і

$\{a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}\}$ мають однаковий вік, оскільки містять по k елементів. Проте елемент a_k є спільним. Це означає, що твердження правильне для $n = k+1$. Отже, згідно з принципом математичної індукції, всі студентки мають однаковий вік."

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Знайти число діагоналей у випуклому n-кутнику.

9. Послідовность $\{x_n\}$ задана рекурентно: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{n(n+1)}$. Знайти формулу для загального члена x_n.

10. Встановити, для яких натуральних n виконується нерівність $2n + 1 < 2^n$.

11. Знайти максимальне число частин, на яке розбивається площина за допомогою n кіл.

12. Чи можна монетами вартістю 2 коп і 5 коп розрахуватися за річ, яка коштує не менше 7 коп?

13. Знайти найбільше число частин, на які розбивається площина за допомогою n прямих.

14. Обчислити суму $1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}$.

15. Нехай a – ціле непарне число, x та y – корені рівняння $t^2 + at - 1 = 0$. Перевірити, що числа $x^4 + y^4$ та $x^5 + y^5$ є цілими і взаємно простими.

16. Встановити, для яких натуральних чисел n мають місце твердження:
   а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;
   б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (\frac{1}{2}n(n+1))^2$;
   в) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2}n(n+1)$;
   г) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;
   д) $6n < 4 \cdot 2^n$;
   е) $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}$;
   є) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$;
   ж) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$.

Задачі на доведення

17. Довести, що число $16^n - 15n - 1$ ділиться на 25 для будь-якого натурального числа n.

18. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність:
   а) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$;
   б) $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;
   в) $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}$;
   г) $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2+n}{4n+2}$.

19. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність:
   а) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$;
   б) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{5}{4}$;
   в) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}>n$ для деякого k;
   г) $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n}}\leqslant 3-\frac{2}{\sqrt{n}}$.

20. Довести, шо для довільного натурального n сума $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$ не є натуральним числом.

21. Довести, що $11^{n+1}+12^{2n-1}$ ділиться на 133 для довільного натурального n.

22. Дано декілька квадратів загальної площі 1. Довести, що їх можна розмістити без накладань всередині квадрата зі стороною 2.

23. На площині дано набір з n векторів, довжина кожного з яких не перевищує 1. Довести, що, замінивши деякі вектори цього набору на протилежні, можна одержати набір векторів, сума яких має довжину:
   а) яка не перевищує $\sqrt{n}$;
   б) яка не перевищує $\sqrt{2}$.

24. Дано n довільних квадратів. Довести, що їх можна розрізати на частини так, що із одержаних частин можна було б скласти один великий квадрат.

Творчі задачі

25. Обчислити суму $1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, де $k,n\in\mathbb{N}$, причому $k<n$.

26. Обчислити суму $i^k+(i+l)^k+(i+2l)^k+\cdots+(i+nl)^k$, де $i,l,k,n\in\mathbb{N}$, причому $k<n$.

27. На яке максимальне число ділять n площин трьохвимірний простір?

28. На площині проведено декілька прямих. Встановити залежність між числами: m – число точок перетину цих прямих, n – число частин площини, на які ці прямі розбили дану площину, та k – число частин цих прямих, на які розбилися прямі точками перетину.

29. Вказати послідовність чисел $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$, які задані формулою $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$, та показати, що для них виконуються нерівності:
    а) $a_n a_{n+1} < a_{n-1} a_{n+2}$, де $n > 1$;
    б) $a_{n-1} a_{n+1} < a_n^2$, де $n \in \mathbb{N}$.

30. Довести, що функція $T(x) = \cos(n \cdot arccosx)$ є ціла раціональна для будь-якого натурального n. Вказати рекурентну формулу для $T_n(x)$.

31. На скільки частин розбивають простір n сфер, кожні дві з яких перетинаються між собою?

Задачі з олімпіад

32. Знайти суму $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + \cdots + n)$.

33. Знайти суму n-ої групи чисел, на які розбито натуральний ряд:
    а) $1; (2, 3); (4, 5, 6); (7, 8, 9, 10); \cdots;$
    б) $1; (2, 3, 4); (5, 6, 7, 8, 9); (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16); \cdots.$

34. Довести, що для довільного натурального n виконується нерівність $(1 - x)^{n+1} + (1 + x)^{n+1} < 2^{n+1}$, де $|x| < 1$.

35. Обчислити суму $S_{2002} = 1 + 11 + 111 + \cdots + 11\cdots1$, де в записі останнього доданку є 2002 цифри – одиниці.

36. Довести, що число, яке записане в десятковій системі числення за допомогою 3^n одиниць, ділиться на 3^n.

37. Дійсне число x таке, що $x + \frac{1}{x}$ - ціле. Довести, що число $x^n + \frac{1}{x^n}$ є цілим для довільного натурального n.

38. Послідовність $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задана рекурентно:
    $x_1 = 0$ і $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Довести, що всі члени послідовності, починаючи з другого, є натуральними числами.

§ 2.3 Кільце, поле та упорядковане поле

Література: [1] стор. 162 – 181, 189 – 200; [3] стор. 104 – 111, 146 – 149.

Теоретичні відомості

Алгебра $(K;+,\cdot)$ з двома бінарними операціями називається *кільцем*, якщо $(K;+)$ є абелевою групою, а операція "$\cdot$" асоціативна і дистрибутивна відносно операції "$+$".

Якщо в кільці $(K;+,\cdot)$ операція "$\cdot$" комутативна, то кільце називається *комутативним*.

Комутативне кільце, яке містить принаймні один відмінний від нуля елемент, називається *полем*, якщо множина всіх відмінних від нуля елементів є групою відносно операції "$\cdot$".

Підмножина K' кільця K(поля P) називається його *підкільцем*(*підполем*), якщо вона є кільцем(полем) відносно операцій, заданих в $K(P)$.

Нехай $(K;+,\cdot)$ і $(K_1;\oplus,\odot)$ – два кільця. Відображення f множини K на(в) множину K_1 називають *гомоморфізмом* кільця $(K;+,\cdot)$ на(в) кільце $(K_1;\oplus,\odot)$, якщо виконуються умови

$$f(a_1+a_2)=f(a_1)\oplus f(a_2) \quad \text{і} \quad f(a_1\cdot a_2)=f(a_1)\odot f(a_2)$$

для всіх $a_1, a_2 \in A$.

Взаємно однозначний гомоморфізм кілець називають *ізоморфізмом*.

Поле $(P;\ +,\ \cdot)$, на основній множині P якого задано відношення порядку $\leqslant$, називається *упорядкованим полем*, якщо виконуються умови:

1) $(\forall a)(\forall b)(a\leqslant b \vee b\leqslant a)$;
2) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a\leqslant b \to a+c\leqslant b+c)$;
3) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a\leqslant b \wedge c\geqslant 0 \to a\cdot c\leqslant b\cdot c)$.

Аналогічно визначається поняття *гомоморфізму та ізоморфізму полів* та *упорядкованого кільця*.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Дослідити, які з заданих числових множин утворюють кільце відносно операцій додавання і множення чисел:

а)	$4\mathbb{Z}=\{4n \mid n\in\mathbb{Z}\}$;	д)	$\{8^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$;
б)	$\mathbb{Z}[\sqrt{5}]=\{m+n\sqrt{5} \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$;	е)	$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{x+y\sqrt{2} \mid x,y\in\mathbb{Q}\}$;
в)	$\mathbb{N}\cup\{0\}$;	є)	$\{x+y\sqrt[3]{2} \mid x,y\in\mathbb{Q}\}$;
г)	$\{\frac{m}{5^n} \mid m\in\mathbb{Z}\wedge n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$;	ж)	$\{x+y\sqrt[3]{2}+z\sqrt[3]{4} \mid x,y,z\in\mathbb{Q}\}$?

В яких кільцях є одиниця? Вказати такі пари кілець, в яких одне є підкільцем іншого.

2. Які з розглянутих в задачі 1 числових множин утворюють поле? Вказати такі пари полів, в яких одне є підполем іншого.

3. В множині F числових функцій визначені операції додавання і множення так: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$; $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. Які з наступних множин F є кільцями, якщо:
   а) F – множина всіх многочленів не вище першого степеня з цілими коефіцієнтами;
   б) F – множина всіх многочленів не вище другого степеня з дійсними коефіцієнтами;
   в) F – множина всіх функцій $y = \sin kx$, де $k \in \mathbb{R}$;
   г) F – множина всіх показникових функцій $y = a^x$, де $a \in \mathbb{R}$?

4. Що ви можете сказати про існування обернених елементів у кільцях задачі 1, які містять одиницю?

5. Чи є кільцем множина $\mathbb{Z}[x]$ всіх многочленів з цілими коефіцієнтами від однієї змінної x відносно відомих операцій додавання і множення?

6. Чи задають ізоморфізм відповідних кілець такі відображення:
   а) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ і $f(n) = -n$;
   б) $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ і $f(n + m\sqrt{2}) = n + m\sqrt{5}$;
   в) $f : \mathbb{Z} \to k\mathbb{Z}$ і $f(n) = kn$;
   г) $f : 4\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ і $f(n) = \frac{1}{2}n$?

7. Чи є упорядкованою алгебраїчна система $(\mathbb{Z};\ +,\ \cdot;\ \geqslant)$ цілих чисел?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Які з заданих множин утворюють кільце або поле відносно операцій додавання і множення чисел:
   а) $k\mathbb{Z} = \{kn | n \in \mathbb{Z}\}$;
   б) $\{\frac{m}{2n-1} | m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}$;
   в) $\{\frac{m}{2n} | m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}\}$;
   г) $\{\frac{m}{p^n} | m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge p -$ вибране просте число$\}$?

9. В адитивній групі $(\mathbb{R}; +)$ задано операцію множення так: $a * b = b$. Чи буде алгебра $(\mathbb{R}; +, *)$ кільцем?

10. Встановити, чи є упорядкованим кільце цілих чисел щодо відношення подільності цілих чисел.

11. Перевірити, чи є упорядкованим кільце $n\mathbb{Z}$ відносно відношення порядку " $\leqslant$ ".

12. На множині $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ задані операції додавання " $\oplus$ " і множення " $\otimes$ " за правилом: результатом виконання цих операцій над упорядкованою парою (a, b) є остача від ділення на 6 суми $a + b$ і добутку ab відповідно. Перевірити, чи утворює множина $\mathbb{Z}_6$ кільце або поле відносно визначених операцій. Скласти відповідні таблиці Келі.

13. Задати на множині $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ операції " $\oplus$" і " $\otimes$" за правилом попередньої задачі. Перевірити, чи утворює множина $\mathbb{Z}_5$ поле відносно визначених операцій. Скласти відповідні таблиці Келі.

14. На множині $\mathbb{Z}_2$ задано операції за правилом попередньої задачі. Скласти відповідні таблиці Келі та перевірити, чи утворює множина $\mathbb{Z}_2$ поле відносно визначених операцій.

15. Знайти всі підкільця та підполя алгебри, заданої в задачі 12.

16. Знайти всі підкільця та підполя алгебри, заданої в задачі 13.

17. Перевірити, чи утворюють поле дуальні та подвійні числа (дивись задачі § 2.1, № 19, 20).

18. Розв'язати в полі $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ рівняння:
    а) $x^2 - x - 3 = 0$; в) $x^2 - 2x + 1 - \sqrt{2} = 0$;
    б) $x^2 + (4 - 2\sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$; г) $x^2 - 2x - 5 + 4\sqrt{2} = 0$.

19. Задати ізоморфізм поля дійсних чисел в алгебру :
    а) дуальних чисел; б) подвійних чисел.

20. Задати гомоморфізм кільця цілих чисел $\mathbb{Z}$ на кільце $\mathbb{Z}_2$ з задачі 14.

21. Задати гомоморфізм кільця цілих чисел $\mathbb{Z}$ на кільця $\mathbb{Z}_5$ і $\mathbb{Z}_6$.

22. Задати гомоморфізм кільця $\mathbb{Z}[x]$ на кільце $\mathbb{Z}$.

Задачі на доведення

23. Довести, що в кільці K, яке містить n елементів, для кожного його елемента a виконується рівність $na = 0$, де 0 – його нуль.

24. Довести, що в комутативному кільці виконуються рівності:
    $x^m x^n = x^{m+n}$, $(x^m)^n = x^{mn}$, $(xy)^n = x^n y^n$, де $m, n \in \mathbb{N}$ та x, y – довільні елементи кільця.

25. Нехай в множині $\mathbb{Q}$ визначена операція $"*"$ так: $a * b = 2ab$. Довести, що алгебра $(\mathbb{Q}; +, *)$ є полем, ізоморфним полю $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$.

26. Довести, що алгебра, яка ізоморфна:
   а) кільцю, є кільцем; б) полю, є полем.

27. Довести, що числова множина $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] = \{x + y\sqrt{m} | x, y \in \mathbb{Q}\}$ є полем відносно арифметичних операцій для кожного $m \in \mathbb{Z}$.

28. Довести, що абелева група $(G; +)$ перетворюється в комутативне кільце, якщо в ній визначити операцію множення так: $ab = 0$, де 0 – нейтральний елемент відносно додавання.

29. Довести, що в комутативному кільці має місце *біноміальна теорема*: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$, a, b – довільні елементи кільця.

Творчі задачі

30. Вивчити властивості операцій, заданих в алгебрі $(\mathfrak{P}(A); \div, \cap)$.

31. Вивчити властивості операцій об'єднання та композиції відношень в алгебрі $(\mathfrak{P}(A \times A); \cup, \circ)$.

32. Встановити, для яких $n \in \mathbb{Z}$ множина $\mathbb{Q}^2$ є полем відносно операцій

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac + nbd, ad + bc).$$

33. Знайти умови, при яких рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має розв'язки в полі $\mathbb{Z}_5$.

34. Дослідити, при яких умовах є ізоморфними між собою кільця $\mathbb{Z}_{kl}$ і $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$.

Задачі з олімпіад

35. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ з визначеними в ній бінарними операціями $a \star b = a + b + 1$ та $a \circ b = ab + a + b$ є комутативним кільцем з одиницею.

36. В множині $\mathbb{Z}$ визначена бінарна операція додавання так: $a \oplus b = a + b + 3$. Чи можна визначити в множині $\mathbb{Z}$ операцію множення $\odot$ так, щоб алгебра $(\mathbb{Z}; \oplus, \odot)$ була кільцем?

§ 2.4 Поле комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа

Література: [1] стор. 205 – 214; [3] стор. 157 – 165.

Теоретичні відомості

Мінімальне поле, яке включає в себе поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел і містить такий елемент i, що $i^2 = -1$, називається *полем комплексних чисел*.

Якщо на множині $\mathbb{C}$ всіх упорядкованих пар дійсних чисел визначити операцію додавання і операцію множення рівностями

$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ та $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$,
то множина буде задовольняти умовам, що визначають поле комплексних чисел.

Кожне комплексне число $z = (a,b)$ можна подати *в алгебраїчній формі* так: $z = a + bi$, де $i = (0,1)$ та $i^2 = (-1,0)$. При цьому число $a = Re(z)$ називається *дійсною частиною*, bi – *уявною частиною* і $b = Im(z)$ – *коефіцієнтом при уявній частині комплексного числа* z. Комплексне число bi називають також *чисто уяним*.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі виконуються так:

якщо $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то

$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$, $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$;

якщо $z_2 \neq 0$, тобто $c^2 + d^2 \neq 0$, то

$z_2^{-1} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i$ та $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Якщо $z_1 = a + bi$, то комплексне число $\overline{z} = a - bi$ називається *спряженим до* z.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Обчислити $i^{52}; i^{66}; i^{165}; i^{279}; (-i)^{125}; (-i)^{30}; -i^{125}; -i^{164}$. Узагальнити результати для i^n, де $n \in \mathbb{Z}$.

2. Обчислити: а) $(1+i)^{2n}$; б) $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, де $n \in \mathbb{Z}$.

3. Знайти дійсну і уявну частини комплексного числа:

   а) $(2-3i)^4 + (2+3i)$; г) $\frac{(1+2i)^3-(1+3i)^2}{(3+i)^3+(1+5i)^2}$;

   б) $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$; д) $(\frac{1-i}{1+i})^{2000}$;

   в) $(\frac{i^7+2}{1+i^{11}})^2$; е) $\frac{(1-i)^{29}}{(1+i)^{27}}$.

4. Знайти значення функції $f(z) = z^4 + \frac{2+i}{z} + 3 + 20i$, якщо:
   а) $z = 1 - 2i$;   б) $z = 1 + 2i$.

5. Обчислити $(2i + 2z^2)(-3 + 2i^3z^2)$, якщо:
   а) $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$;   б) $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

6. Знайти множину всіх комплексних чисел, які спряжені самі до себе.

7. При яких умовах сума, різниця, добуток і частка двох комплексних чисел і є: а) дійсним числом; б) чисто уявним числом? Навести приклади.

8. При яких умовах сума, різниця, добуток і частка двох взаємно спряжених комплексних чисел є:
   а) дійсним числом; б) чисто уявним числом?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Обчислити вирази:
   а) $(2 + i)(3 - i) + (3 + 4i)(2 + 3i)$;   г) $(2 + i)^3 + (2 - i)^3$;
   б) $(3 + 7i)(2 + i) - (5 + 3i)(1 + 2i)$;   д) $(3 + i)^3 - (3 - i)^3$;
   в) $\frac{(5+7i)(7-6i)}{3+i}$;   е) $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$.

10. Знайти необхідні і достатні умови того, щоб число $\frac{z+2}{z-1}$ було:
    а) дійсним числом; б) чисто уявним числом.

11. Знайти дійсні розв'язки рівняння:
    а) $(2 + i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i$;
    б) $(3 + i)x + (1 + 3i)y = 4 - 9i$.

12. Розв'язати такі рівняння:
    а) $z + \bar{z} = 10$;   г) $z^2 - 2z\bar{z} - 3 - 3i = 0$;
    б) $3z + \bar{z} = 2i + 8$;   д) $z\bar{z} = 2iz - \frac{1+i}{2}$;
    в) $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$;   е) $z\bar{z} + 2i = 2\bar{z} + 4$.

13. Знайти всі комплексні числа, які спряжені до свого:
    а) квадрата; б) куба.

14. Розв'язати такі системи рівнянь:
    а) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i; \end{cases}$
    б) $\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i; \end{cases}$

в) $\begin{cases} z_1^5 z_2^7 & = & 1, \\ z_1^{13} z_2^{19} & = & 1, \\ z_1^2 + z_2^2 + 2 & = & 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} z_1 & + & 2z_2 & = & 1+i, \\ 3z_1 & + & iz_2 & = & 2-3i. \end{cases}$

15. Вивести формулу для добування квадратного кореня з комплексного числа, записаного в алгебраїчній формі.

16. Розв'язати рівняння:
   а) $z^2 + 5z + 5 - 3i = 0$; в) $(1+i)z^2 - z + 1 + 2i = 0$;
   б) $z^2 + 2z - 2 + 4i = 0$; г) $(1+i)z^2 + iz + 2 + 4i = 0$.

Задачі на доведення

17. Довести, що уявні числа z_1, z_2 задовольняють умову $z_1 - \bar{z}_2 = 0$, якщо $z_1 + z_2, z_1 z_2 \in \mathbb{R}$.

18. Довести, що комплексне число $\frac{z-1}{z+1}$ є чисто уявним тоді і тільки тоді, коли $z \neq -1$ і $|z| = 1$.

19. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$:
   а) $(1 \pm i)^{8n} = 16^n$; б) $(1 \pm i)^{4n} = (-1)^n 4^n$.

20. Довести, що:
   а) добуток двох комплексних чисел є дійсне число тоді і тільки тоді, коли одно з них відрізняється від спряженого до другого з них дійсним множником;
   б) добуток і сума двох комплексних чисел є дійсне число тоді і тільки тоді, коли ці числа спряжені між собою або обидва є дійсними.

21. Довести, що $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$, якщо $x + yi = (s + ti)^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

22. Довести, що для всіх $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ мають місце рівності:
   а) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; в) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; д) $z + \bar{z} = 2Re(z)$;
   б) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; г) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; е) $z - \bar{z} = 2iIm(z)$.

23. Довести, що $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, де $f(z)$ – довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами.

24. Довести, що поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ не можна упорядкувати так, щоб в полі $\mathbb{R}$ новий порядок співпадав з відомим відношенням $\geqslant$.

Творчі задачі

25. На множині $\mathbb{R}^2$ задано операції:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d); \quad (a,b)*(c,d)=(ac+3bd,ad+bc+2bd).$$

Довести, що алгебра $(\mathbb{R}^2;+,*)$ є полем. Чи існує в ньому підполе, ізоморфне полю дійсних чисел? Чи має в цьому полі розв'язок рівняння $x^2+1=0$?

26. Довести, що поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ ізоморфне полю, побудованому в попередній задачі. Як в цьому полі розв'язати рівняння $t^2+1=0$?

27. Довести, що комплексне число z можна подати у вигляді $z=\frac{a+bi}{a-bi}$, де $a,b\in\mathbb{R}$, тоді і тільки тоді, коли $|z|=1$.

28. Знайти необхідні і достатні умови того, щоб числа $(z+a)(z+b)$ та $\frac{z+c}{z+d}$, де $z\in\mathbb{C},a,b,c,d\in\mathbb{R}$, були:
а) дійсними числами; б) чисто уявними числами.

29. Обчислити для кожного цілого числа n:
а) $(1+i)^n+(1-i)^n$; в) $(\frac{1-i}{1+i})^n+(\frac{1+i}{1-i})^n$;
б) $(1+i)^n-(1-i)^n$; г) $(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^n-(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^n$.

30. На множині $\mathbb{R}^2$ визначені операції:

$$(a,b)+(c,d)=(a+\alpha c,b+\beta d); \quad (a,b)*(c,d)=(ac+\gamma bd,ad+bc+\delta bd),$$

де $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – фіксовані дійсні числа. Встановити, при яких $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ задана алгебра є полем. Як в ньому розв'язати рівняння $t^2+1=0$?

31. Обчислити вираз

$$z^{6n-3}+\frac{1}{z^{6n-3}}+z^{6n}+\frac{1}{z^{6n}},$$

якщо $z+\frac{1}{z}=1$, $n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}$.

32. На множині $\mathbb{R}^4$ визначені операції:

$$(a,b,c,d)+(a_1,b_1,c_1,d_1)=(a+a_1,b+b_1,c+c_1,d+d_1),$$

$(a,b,c,d)\cdot(a_1,b_1,c_1,d_1) = (aa_1-bb_1-cc_1-dd_1, ab_1+ba_1+cd_1-dc_1, ac_1+ca_1+db_1-bd_1, ad_1+da_1+bc_1-cb_1)$.
Отриману алгебру називають *алгеброю кватерніонів*. Встановити, які з аксіом поля ають місце в цій алгебрі. Чи можна задати ізоморфізм поля комплексних чисел $\mathbb{C}$ в цю алгебру?

Задачі з олімпіад

33. Нехай комплексні числа $z_1, z_2.z_3$ задовольняють умовам $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$. Довести, що иконується рівність

$$\left|\frac{z_1z_2+z_1z_3+z_3z_2}{z_1+z_2+z_3}\right| = r.$$

34. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)^4 = i$.

§ 2.5 Геометрична інтерпретація та тригонометрична форма комплексного числа

Література: [1] стор. 214 – 223; [3] стор. 164 – 169.

.

Теоретичні відомості

Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат xOy. Кожну точку $A(a, b)$ цієї координатної площини можна інтерпретувати як комплексне число $z = a + bi$. Тоді точкам координатної осі Ox відповідають дійсні числа, а точкам осі Oy – чисто уявні числа. Така інтерпретація наочна, але не дає доброї інтерпретації дій над комплексними числами.

Поставимо у відповідність кожному комплексному числу $z = a + bi$ *радіус-вектор* $\overrightarrow{OA}$ *точки* $A(a, b)$ (напрямлений відрізок, який з'єднує початок координат з цією точкою). Така відповідність є взаємно однозначною. При цьому сумі комплексних чисел відповідає сума відповідних радіус-векторів і це більше свідчить про те, що комплексні числа характеризують реальні обєкти. Крім того, така інтерпретація дозволяє розглянути ще одну форму запису комплексних чисел.

Візьмемо початок координат O декартової системи за полюс, а додатну піввісь за полярну вісь. Тоді декартові координати кінця радіус-вектора $\overrightarrow{OA}$ виражаються через полярні координати так: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, де r – довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OA}$, а φ – полярний кут (кут між додатним напрямом осі Ox та радіус-вектором $\overrightarrow{OA}$).

Подання відмінного від нуля комплексного числа $z = a + bi$ у виді $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, називається *тригонометричною формою комплексного числа*. При цьому число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ називається *модулем комплексного числа* z і позначається $|z|$, а φ – *його аргументом* і позначається $arg\, z$. Полярний кут φ визначається з системи рівнянь

$$\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{a}{r}, \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r}. \end{cases}$$

Зауважимо, що кожне відмінне від нуля число z однозначно записується у тригонометричній формі, а для числа 0 такої форми запису не існує.

Дії множення і ділення в тригонометричній формі виконують так. Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Для всіх цілих чисел n і комплексних $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ має місце *формула Муавра*: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Зобразити на координатній площині суму та різницю чисел z_1 і z_2, якщо: а) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$; б) $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 4 + 5i$.

2. Знайти модулі та аргументи комплексних чисел:
а) i; б) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; в) -5; г) $1 - i$; д) $-1 - i\sqrt{3}$; е) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

3. Побудувати точки, що зображають комплексні числа, та подати ці числа в тригонометричній формі:
а) 1; в) i; д) $1 + i$; є) $-1 - i$; з) $1 - i\sqrt{3}$;
б) -1; г) $-i$; е) $-1 + i$; ж) $1 - i$; і) $\sqrt{3} - i$.

4. Сформулювати геометричною мовою необхідні і достатні умови того, що виконуються рівності:
а) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$; б) $|z_1| + |z_2| = ||z_1| - |z_2||$.

5. З'ясувати геометричний зміст та побудувати в комплексній площині відповідні множини точок для таких співвідношень:
а) $1 \leqslant Re(z) \leqslant 2$; е) $\frac{\pi}{4} \leqslant arg(z) \leqslant \frac{\pi}{2}$;
б) $|Im(z)| \leqslant 1$; є) $\begin{cases} |z| = |z + \frac{3}{i}|, \\ |z| \leqslant 2; \end{cases}$
в) $1 \leqslant |z| \leqslant 3$; ж) $\log_{\frac{1}{2}} |z - 2| \geqslant \log_{\frac{1}{2}} |z|$;
г) $|z + 1| \geqslant 1$; з) $\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} \leqslant 2$;
д) $0 \leqslant |z - 2i| \leqslant 2$; і) $|z + 2i| \leqslant |z - i|$.

6. Дати геометричну інтерпретацію до таких співвідношень:
а) $|z| \geqslant |Re(z)|$; б) $|z| \geqslant |Im(z)|$; в) $|z| \leqslant |Re(z)| + |Im(z)|$.

7. Дати геометричну інтерпретацію до таких співвідношень та дослідити їх істинність:
а) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
б) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;
в) $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$;
г) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Записати у тригонометричній формі такі числа:
а) $-\sqrt{3} + i$; д) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^0 + i \sin 60^0)}$;
б) -1; е) $\frac{i - 1}{i(1 - \cos \frac{2\pi}{5}) + \sin \frac{2\pi}{5}}$;
в) $-\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}$; є) $-\operatorname{ctg} \alpha - i$, де $\pi < \alpha < 2\pi$;
г) $(4 - 3i)^8$; ж) $1 - i \operatorname{tg} \alpha$, де $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

9. Знайти межі зміни аргумента в розв'язках таких нерівностей:
   а) $|z+2i|<2$; в) $|z+2+2i|\leqslant\sqrt{2}$;
   б) $|z-3|<1$; г) $|z+2|<|z|$.

10. Обчислити:
   а) $\frac{2(-\sqrt{3}+i)(-\cos\alpha-i\sin\alpha)}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$; г) $(1-\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$;
   б) $\frac{(\operatorname{tg}30^0-i)^{15}(-\sin 30^0+i\cos 30^0)}{(-1+i)^{2000}}$; д) $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$;
   в) $\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)(\operatorname{ctg}\beta+i)(-\cos\alpha+i\sin\alpha)}{1+i\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$; е) $(-2+i\sqrt{12})^{2001}$.

11. Обчислити: а) $\frac{(\sqrt{3}+i)^{23}}{(-1-i)^{42}}+\frac{(\sqrt{3}-i)^{23}}{(-1+i)^{42}}$; б) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^{2001}-(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^{2001}$.

12. Знайти аргумент числа:
   а) $w=z^2-z$; б) $w=z^2+z$,
   якщо $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\quad 0\leqslant\alpha<2\pi$.

13. За допомогою нерівностей з комплексною змінною записати множину точок комплексної площини:
   а) півплощину, розташовану зліва від уявної осі;
   б) півплощину, розташовану в третім і четвертому квадранті;
   в) смугу ширини 2π, яка паралельна осі Oy;
   г) зовнішність одиничного кола з центром в точці, якій відповідає комплексне число i.

14. Розв'язати рівняння:
   а) $z-|z|+1+2i=0$; в) $z|z|-2z+i=0$;
   б) $z+|z+1|+i=0$; г) $z|z|-2iz^2+2i=0$.

15. Розв'язати системи рівнянь:
   а) $\begin{cases} |z| &= |z-2i|, \\ |z-1| &= |z-i|; \end{cases}$ в) $\begin{cases} z_1^3-z_2^7 &= 0, \\ z_1^5\cdot z_2^{11} &= 1; \end{cases}$
   б) $\begin{cases} |\frac{z-12}{z-8i}| &= \frac{5}{3}, \\ |\frac{z-4}{z-8}| &= 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} z_1^2-z_2^3 &= 1, \\ z_1^5\cdot z_2^7 &= 1. \end{cases}$

16. Подати в комплексній формі рівняння ліній:
   а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; в) $xy=a^2$;
   б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; г) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

Задачі на доведення

17. Довести рівності для будь-якого $k\in\mathbb{Z}$:
   а) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^{3k}=1$; б) $(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^{6k}=1$.

18. Довести рівності:
   а) $|z_1\bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 + 1) \cdot (|z_2|^2 + 1)$;
   б) $|z_1\bar{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1) \cdot (|z_2|^2 - 1)$;
   в) $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 - 2(|z_1\bar{z}_2| - Re(z_1\bar{z}_2))$;
   г) $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 + 2(|z_1\bar{z}_2| + Re(z_1\bar{z}_2))$.

19. Довести, що три різні точки, які відповідають числам z_1, z_2, z_3, лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}$.

20. Нехай $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Довести, що точки, які відповідають числам z_1, z_2, z_3, є вершинами правильного трикутника тоді і тільки тоді, коли $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Творчі задачі

21. Узагальнити попередню задачу на довільне $n > 3$, розглядаючи правильний n-кутник.

22. Числа z_1, z_2, z_3 відповідають трьом послідовним вершинам паралелограма. Виразити положення його четвертої вершини. Як виразити положення наступної четвертої вершини у випадку прямокутника, квадрата, довільного правильного n-кутника, де $n \geqslant 5$?

23. Дано три трикутники, вершинами яких є точки, що відповідають таким трійкам чисел: $0, 1, z_1$; $0, z_2, z_1z_2$; $0, z_2, \frac{z_2}{z_1}$. Показати, що ці трикутники подібні між собою. Вказати коефіцієнт подібності. Чи не можна цю задачу узагальнити на довільні n-кутники?

24. Вершинами випуклого многокутника на координатній площині є точки, які зображають комплексні числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Вказати множину всіх таких точок, які є зображеннями чисел виду $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_n z_n$, де $\lambda_i \in \mathbb{R}$ для всіх $1 \leqslant i \leqslant n$ та $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a$ для деякого фіксованого дійсного числа a.

25. Вивести формули для обчислення $\cos n\alpha$ та $\sin n\alpha$ через $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$.

26. Обчислити суми:
   а) $S_1 = \sin k\alpha + \sin(k + l)\alpha + \sin(k + 2l)\alpha + \cdots + \sin(k + ln)\alpha$;
   б) $S_2 = \cos k\alpha + \cos(k + l)\alpha + \cos(k + 2l)\alpha + \cdots + \cos(k + ln)\alpha$;
   в) $S_3 = \sin\alpha + C_n^1 \sin 2\alpha + C_n^2 \sin 3\alpha + \cdots + C_n^n \sin(n + 1)\alpha$;
   г) $S_4 = \cos\alpha + C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha + \cdots + C_n^n \cos(n + 1)\alpha$.

27. Обчислити суми:
    а) $S_1 = 1 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \cdots$;
    б) $S_2 = C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - 27C_n^7 + \cdots$;
    в) $S_3 = C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \cdots$;
    г) $S_4 = \sqrt{3^n} - \sqrt{3^{n-2}}C_n^2 + \sqrt{3^{n-4}}C_n^4 - \sqrt{3^{n-6}}C_n^6 + \cdots$.

Задачі з олімпіад

28. Розв'язати рівняння $(\frac{1-ix}{1+ix})^n = i$.

29. Обчислити:
    а) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}})^n + (\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i})^n$;
    б) $(\frac{1+i}{1-i})^n + (\frac{1-i}{1+i})^n$,

    для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$.

30. При яких дійсних значеннях a кожне комплексне число z, яке є розв'язком рівняння $|z - i\sqrt{2}| = (a+1)^2$, є також розв'язком нерівності $|z - \sqrt{2}| > a^2 - 4a$?

31. При яких дійсних значеннях a хоча б один розв'язок рівняння $|z - ai| = a + 4$ є також розв'язком нерівності $|z - 2| < 1$?

§ 2.6 Добування кореня з комплексного числа

Література: [1] стор. 223 – 231, 252 – 254; [3] стор. 169 – 172.

Теоретичні відомості

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $z \in \mathbb{C}$. *Коренем n-го степеня з комплексного числа z* називається таке число ω, що $\omega^n = z$ і позначається символом $\sqrt[n]{z}$.

Якщо $z = 0$, то існує єдине значення $\sqrt[n]{0} = 0$.

Існує два значення квадратного кореня з відмінного від нуля комплексного числа $z = a + bi$, які обчислюються за формулами:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \quad \text{якщо} \quad b > 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \quad \text{якщо} \quad b < 0.$$

Добути корінь степеня $n > 2$ з комплексного числа в алгебраїчній формі неможливо. Це можна зробити в тригонометричній формі.

Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – довільне відмінне від нуля комплексне число, записане у тригонометричній формі, то $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень, що визначаються формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2\pi k}{n}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Значення $\sqrt[n]{z}$, які дістаємо при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, позначимо через $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.

Корені n-го степеня з одиниці позначають через $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. При цьому $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Якщо z_0 – одне з значень $\sqrt[n]{z}$, то $z_0\varepsilon_0, z_0\varepsilon_1, \ldots, z_0\varepsilon_{n-1}$ вичерпують всі значення $\sqrt[n]{z}$.

Корінь n-го степеня з одиниці називається *первісним*, якщо він не є коренем з одиниці ніякого меншого степеня.

Корінь n-го степеня з одиниці $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ є первісним тоді і тільки тоді, коли числа k і n взаємно прості.

Якщо ε_k – первісний корінь n-го степеня з одиниці, то всі значення $\sqrt[n]{1}$ одержуються піднесенням ε_k до степенів $0, 1, \ldots, n-1$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Скільки значень має $\sqrt[n]{z}$ і як вони розміщені на координатній площині, якщо:

   а) $z = 1, n = 5$; в) $z = 64, n = 6$;

   б) $z = i, n = 4$; г) $z = -4, n = 4$?

2. Нехай ε_k та ε_{n-k} – корені n-го степеня з одиниці. Яка алгебраїчна та геометрична залежність між цими коренями?

3. Яка залежність існує між формулами для знаходження всіх коренів рівняннь: $z^n - 1 = 0$ і $z^n - 5 = 0$?

4. При яких z_0 множина розв'язків рівняння $z^n - z_0 = 0$ містить:
   а) дійсні корені;
   б) тільки дійсні корені;
   в) тільки уявні корені?

5. Перевірити, чи рівними є множини значень коренів:
   а) $\sqrt{i^4}$ та $(\sqrt{i})^4$; б) $\sqrt[3]{i^4}$ та $(\sqrt[3]{i})^4$.

6. Що можна сказати про істинність рівності $\sqrt[nk]{z^k} = \sqrt[n]{z}$ при $k > 1$?

7. Відомо, що одним із значень $\sqrt[4]{z}$ є $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Знайти всі значення $\sqrt[4]{z}$.

8. Знаючи, що $2 + i$ є одним із значень $\sqrt[6]{z}$, знайти всі значення $\sqrt[6]{z}$.

9. Скільки є первісних коренів 5-го та 6-го степенів з одиниці?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Знайти всі значення $\sqrt[n]{z}$ і зобразити їх геометрично, якщо:
    а) $z = -8, n = 3$; в) $z = -1, n = 7$;
    б) $z = 8, n = 6$; г) $z = -i, n = 8$.

11. Знайти всі значення кореня:
    а) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$; д) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$;
    б) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$; е) $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$;
    в) $\sqrt[4]{8i\sqrt{3}-8}$; є) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$;
    г) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; ж) $\sqrt[n]{2+2i}$.

12. Розв'язати двочленні рівняння:
    а) $z^3 = 2 + 2i$; в) $z^8 = 1 + i$;
    б) $(z - 2 + i)^3 = \sqrt{12} + 2i$; г) $(z - i)^4 = 1 + i$.

13. Знайшовши двома способами $\sqrt[5]{1}$, виразити в радикалах:
    а) $\cos\frac{2}{5}\pi$ та $\sin\frac{2}{5}\pi$; б) $\cos\frac{4}{5}\pi$ та $\sin\frac{4}{5}\pi$.

14. Розв'язати рівняння:
    а) $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$;
    б) $z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

15. Розв'язати рівняння для довільного $n \in \mathbb{N}$:
    а) $\bar{z} = z^{n-1}$; в) $(z+i)^n - (z-i)^n = 0$;
    б) $(z+1)^n = (z-1)^n$; г) $z^n - naz^{n-1} - C_n^2 a^2 z^{n-2} - \cdots - a^n = 0$.

16. Скласти таблицю Келі для мультиплікативної групи коренів 6-го степеня з одиниці.

17. Знайти суму та добуток всіх коренів n-го степеня з одиниці, якщо: а) $n = 6$; б) $n = 7$; в) $n = 15$; г) $n = k$.

18. Обчислити $z = \frac{1}{\varepsilon_1^n \varepsilon_2^n} + \frac{1}{\varepsilon_2^n \varepsilon_3^n} + \frac{1}{\varepsilon_3^n \varepsilon_1^n}$, якщо $n \in \mathbb{N}$ та $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – корені рівняння $z^3 - 1 = 0$.

19. Серед коренів 15-го степеня з одиниці знайти всі такі, які мають порядок: а) 2; б) 3; в) 5; г) 6.

20. Перевірити, що сума всіх первісних коренів n-го степеня з одиниці є дійсним числом.

21. Знайти суму та добуток всіх первісних коренів n-го степеня з одиниці, якщо: а) $n = 6$; б) $n = 7$; в) $n = 15$; г) $n = k$.

Задачі на доведення

22. Довести, що спряжене комплексне число до кореня n-го степеня з числа a є знову коренем n-го степеня з числа a.

23. Нехай $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ – множина всіх коренів n-го степеня з комплексного числа a. Довести, що $\{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n\}$ – множина всіх коренів n-степеня з комплексного числа $\bar{a}$.

24. Довести, що об'єднання множин всіх коренів n-го степеня з комплексних чисел a і $-a$ дає множину всіх коренів степеня $2n$ з числа a^2.

25. Довести, що множина всіх коренів n-го степеня з комплексного числа утворює геометричну прогресію.

26. Нехай $G_n = \{\varepsilon_k | \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad 0 \leqslant k < n\}$ – множина всіх коренів n-го степеня з одиниці. Показати, що:
    а) $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ для всіх $0 \leqslant k < n$;
    б) $\varepsilon_k \varepsilon_l = \begin{cases} \varepsilon_{k+l}, & \text{якщо} \quad k+l < n, \\ \varepsilon_{k+l-n}, & \text{якщо} \quad k+l \geqslant n; \end{cases}$
    в) G_n – мультиплікативна група;
    г) $\varepsilon_k^{-1} = \varepsilon_{n-k} = \bar{\varepsilon}_k$.

27. Довести, що коли ε – первісний корінь n-го степеня з одиниці, то:
    а) $\bar{\varepsilon}$ – первісний корінь n-го степеня з одиниці;
    б) $-\varepsilon$ – первісний корінь степеня $2n$ з одиниці.

28. Довести, що ε_k – первісний корінь n-го степеня з одиниці тоді і тільки тоді, коли n і k є взаємно простими числами.

29. Довести, що групи G_n і $\mathbb{Z}_n$ ізоморфні.

30. Довести, що коли числа m і n взаємно прості, то кожен корінь степеня mn з одиниці можна подати як добуток деяких коренів з одиниці степенів m і n.

Творчі задачі

31. Обчислити:
    а) $\varepsilon_1^k + \varepsilon_2^k + \cdots + \varepsilon_n^k$;
    б) $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}$;
    в) $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}$;
    г) $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \cdots + n^2\varepsilon^{n-1}$;

32. Розв'язати рівняння:
    а) $z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$;
    б) $z^n - z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}z + (-1)^n = 0$;
    в) $(z + z_0)^n - (z - z_0)^n = 0$;
    г) $(z + z_0)^n + (z - z_0)^n = 0$.

33. Знайти необхідні і достатні умови, при яких система рівнянь $\begin{cases} z^n - 1 = 0, \\ z^m - 1 = 0 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

34. Знайти умову, при якій кожний розв'язок рівняння $z^n - 1 = 0$ є розв'язком рівняння $z^m - 1 = 0$.

§ 2.7 Вибрані задачі

1. Придумайте на множині $\mathbb{N}$ операцію $*$ так, щоб алгебра $(\mathbb{N};*)$ була групою.

2. Довести, що кожна група, яка містить три або чотири елементи, є комутативною.

3. Нехай $(G;*)$ – група. Довести, що умова
$$(\forall x, y \in G)(\forall n \in \mathbb{N})\,((x*y)^n = x^n * y^n)$$
виконується тоді і тільки тоді, коли дана група є комутативною.

4. Нехай $(G;*)$ – група. Довести, що умова
$$(\forall x, y \in G)\left((x*y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}\right)$$
виконується тоді і тільки тоді, коли дана група є комутативною.

5. Чи існує гомоморфне відображення φ адитивної групи цілих чисел в себе, при якому: а) $\varphi(2) = 3$; б) $\varphi(2) = 4$?

6. Довести, що не існує сюр'єктивного гомоморфного відображення адитивної групи раціональних чисел на адитивну групу цілих чисел.

7. Чи існує гомоморфне відображення φ адитивної групи цілих чисел в адитивну групу раціональних чисел, при якому $\varphi(2) = 3$?

8. Нехай F – деяка геометрична фігура на площині і G – множина всіх рухів площини, які відображають F на себе. Довести, що G є групою відносно операції послідовного виконання рухів площини. Її називають *групою симетрій фігури* F.

9. Скласти таблицю Келі для *групи симетрій ромба*.

10. Скласти таблицю Келі для *групи симетрій квадрата*.

11. Довести, що група симетрій ромба і *група поворотів квадрата* не ізоморфні.

12. Нехай T – деяке геометричне тіло. Довести, що множина всіх рухів простору, які відображають T на себе, є групою відносно операції послідовного виконання рухів. Її називають *групою симетрій тіла* T.

13. Скласти таблицю Келі для *групи симетрій куба*.

14. Послідовність a_n для даного натурального m задана рекурентним способом: $a_1 = m$, $a_{n+1} = a_n + 2^{a_n}$. Довести, що серед членів цієї послідовності знайдеться безліч чисел, які діляться на 3.

15. Знайти натуральні числа a, b, c, які не діляться на 10 і такі, щоб при будь-якому натуральному k у чисел $a^k + b^k$ та c^k були однаковими дві останні цифри.

16. На площині дано $2n + 1$ точок ($n \in \mathbb{N}$). Побудувати $(2n + 1)$-кутник, для якого ці точки є серединами його сторін (дані точки є вершинами опуклого $(2n + 1)$-кутника).

17. Довести, що поле дійсних чисел $\mathbb{R}$ можна упорядкувати тільки одним способом.

18. Для даного дійсного λ зобразити множину точок площини, які відповідають комплексним числам z, що задовольняють рівності $\frac{z-1}{z-i} = \lambda$.

19. Нехай різним комплексним числам z_1, z_2, z_3, z_4 відповідають точки координатної площини, які не лежать на одній прямій. Довести, що ці точки лежать на одному колі тоді і тільки тоді, коли їх *подвійне відношення* $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ є дійсним числом.

20. При яких умовах число $\frac{z}{\bar{z}}$ є коренем n-го степеня з одиниці?

21. Знайти всі $n \leqslant 20$, для яких сума всіх первісних коренів n-го степеня з одиниці дорівнює:
    а) 0; б) 1;
    в) додатньому числу, відмінному від 1;
    г) від'ємному числу.

22. Довести, що для взаємно простих чисел r і s число ε є первісним коренем степеня rs з одиниці тоді і тільки тоді, коли ε є добутком первісного кореня степеня r і первісного кореня степеня s з одиниці.

23. Довести, що коли число ε є первісним коренем непарного степеня n з одиниці, то число $-\varepsilon$ є первісним коренем степеня $2n$.

24. Довести, що для довільного натурального $n > 1$ сума сум всіх первісних коренів степенів d, які є дільниками числа n, дорівнює нулю.

25. Довести, що:
   а) сума всіх первісних коренів простого степеня p дорівнює -1;
   б) сума всіх первісних коренів степеня p^k при $k > 1$ і простому p дорівнює 0;
   в) для взаємно простих чисел r і s сума всіх первісних коренів степеня rs дорівнює добутку сум всіх первісних коренів степеня r і степеня s;
   г) сума всіх первісних коренів степеня $n > 1$ дорівнює $(-1)^t$, якщо n є добутком t простих множників, і 0 – в решті випадків.

26. *Многочленом ділення кола (круговим многочленом)* називають добуток всіх множників $x - \varepsilon_k$, де ε_k – первісний корінь n-го степеня з одиниці, і позначають через $\Phi_n(x)$. Знайти многочлени ділення кола для чисел:
   а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 6; е) 12;
   є) p, де p – просте число;
   ж) p^k, де p – просте число і $k > 1$.

27. Довести такі властивості многочленів ділення кола:
   а) $\prod_{d|n} \Phi_d(x) = x^n - 1$, де $d|n$ – дільник числа n;
   б) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ при непарному $n > 1$;
   в) $\Phi_n(x) = \prod_{d|n}(x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$, де μ – *функція Мебіуса*;
   г) якщо k ділиться на будь-який простий дільник числа n, то $\Phi_n(x) = \Phi_k(x^{\frac{n}{k}})$;
   д) якщо n ділиться на просте число p і не ділиться на p^2, то $\Phi_n(x) = \Phi_{\frac{n}{p}}(x^p)(\Phi_{\frac{n}{p}}(x))^{-1}$.

28. Знайти многочлени ділення кола для чисел:
   а) 10; б) 30; в) 36; г) 100; д) 216; е) 1000.

29. Довести, що у будь-якого многочлена ділення кола:
   а) всі коефіцієнти є цілими числами;
   б) старший коефіцієнт дорівнює 1;
   в) вільний член дорівнює -1 при $n = 1$;
   г) вільний член дорівнює 1 при $n > 1$.

30. Знайти суму коефіцієнтів многочлена $\Phi_n(x)$.

Розділ 3

Системи лінійних рівнянь

§ 3.1 Системи лінійних рівнянь та їх елементарні перетворення. Поняття матриці. Метод Гаусса

Література: [1] стор. 254 – 279; [3] стор. 185 – 209.

Теоретичні відомості

Лінійним рівнянням з n невідомими над полем P називається рівняння виду $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – елементи поля P (їх називають *коефіцієнтами*), $b \in P$ – *вільний член*, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *невідомі*. Якщо $b = 0$, то таке рівняння називається *однорідним*.

Розв'язком даного лінійного рівняння називається упорядкована n-ка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ елементів поля P така, що при підстановці $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ ми одержуємо вірну рівність $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$.

Система m лінійних рівнянь з n невідомими над полем P *у загальному вигляді* записується так:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right.$$

де a_{ij} – коефіцієнти, а b_i – вільні члени. Якщо всі рівняння даної системи є однорідними, то вона називається *системою однорідних лінійних рівнянь* або *однорідною системою лінійних рівнянь*.

Розв'язком даної системи m лінійних рівнянь з n невідомими називається упорядкована n-ка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ елементів поля P, яка є розв'язком кожного рівняння системи.

Система лінійних рівнянь називається:

- *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок;
- *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку;
- *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок;
- *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

Якщо кожен розв'язок однієї системи лінійних рівнянь є розв'язком другої системи, то друга система називається *наслідком першої*.

Дві системи лінійних рівнянь називаються *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків однакові.

Наступні перетворення системи лінійних рівнянь називаються *елементарними*:

- перестановка рівнянь у системі;
- множення будь-якого рівняння системи на відмінний від нуля елемент поля P;
- додавання до будь-якого рівняння системи іншого її рівняння, помноженого на деякий елемент поля P;
- вилучення із системи рівняння виду $0 = 0$.

Після виконання елементарних перетворень над даною системою отримуємо систему, рівносильну даній.

Метод Гаусса (або метод послідовного виключення невідомих) розв'язування системи лінійних рівнянь грунтується на останньому твердженні. Він полягає в тому, що на першому етапі шляхом елементарних перетворень систему m лінійних рівнянь з n невідомими перетворюють так, щоб у першому рівнянні коефіцієнт при x_1 дорівнював одиниці. Далі перше рівняння залишають без зміни і, домножаючи на потрібні скаляри, додають його до всіх інших рівнянь так, щоб у них виключалося невідоме x_1. Якщо в одержаній системі є рівняння виду $0 = 1$, то система несумісна. Якщо ж такого рівняння немає, то здійснюють аналогічний крок зі всіма рівняннями системи, починаючи з другого та виключають невідоме x_2.

Якщо в результаті проведених перетворень виключилося також невідоме x_2 у всіх рівняннях, то виконують перестановку x_2 у всіх рівняннях системи з тим невідомим, яке залишилося у другому рівнянні. Після скінченного числа таких кроків ми приходимо до системи, у якій залишається n або менше ніж n рівнянь. У першому випадку останнє рівняння містить одне невідоме (говорять, що *систему звели до трикутного виду*) і знаходимо його. Поступово, переходячи від наступного до попереднього рівняння, ми знаходимо єдиний розв'язок даної системи.

Якщо в останній системі рівнянь менше ніж n, то система має безліч розв'язків (говорять, що *систему звели до трапецевидного виду*). Тоді в лівій частині останнього рівняння залишають одне невідоме, а всі інші переносять у всіх рівняннях у праву частину і називають їх *вільними*. Невідомі, які залишилися у лівих частинах всіх рівнянь системи називають *основними*. Після цього, як і в першому випадку, визначають основні невідомі через вільні, починаючи з останнього рівняння. Отримані вирази для основних невідомих через вільні називають *загальним розв'язком вихідної системи*.

Основною (головною) матрицею даної системи називається числова таблиця $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, яка складена з коефіцієнтів при невідомих даної системи. Якщо до стовпців останньої матриці дописати ще стовпець вільних членів, то одержимо матрицю, яка називається *розширеною матрицею цієї системи*.

При розв'язуванні систем методом Гаусса зручно виконувати аналогічні перетворення над матрицею системи і тільки на останньому етапі знову виписувати систему у загальному виді.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Над системою лінійних рівнянь виконано такі перетворення:
   а) друге рівняння помножили на число $\lambda = 0$;
   б) від третього рівняння відняли друге;
   в) до останього рівняння додали всі попередні;
   г) всі рівняння системи помножили на число $\lambda \neq 0$.

   Чи буде система, одержана в результаті кожного з цих перетворень, рівносильна вихідній системі?

2. В системі лінійних рівнянь перше рівняння є сумою другого і третього рівняння. Чи отримаємо рівносильну їй систему, якщо від даної системи відкинути перше рівняння?

3. Чи є рівняння $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3$ наслідком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1? \end{cases}$$

4. Чи є рівносильними такі системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1? \end{cases}$$

Задачі на техніку обчислень та перетворень

5. Розв'язати системи лінійних рівнянь у полі $\mathbb{R}$:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_3 = -2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 4x_1 - x_3 + 2x_4 = -3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

є) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -2, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 16x_4 + x_5 = 10; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ 2x^2 + y^2 - 2z^2 = -12, \\ x^2 - y^2 + 3z^2 = 24; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = -5, \\ x^2 + xy - y^2 = 5, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 49; \end{cases}$

л) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 23x_3 + 7x_5 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -2, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 16x_4 + x_5 = 10. \end{cases}$

6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \overline{1}, \\ \overline{2}x_1 + x_2 + x_3 = \overline{2}, \\ x_1 + \overline{2}x_2 + x_3 = \overline{0} \end{cases}$$

у скінченних полях $\mathbb{Z}_3$ і $\mathbb{Z}_5$ всіх остач від ділення цілих чисел на 3 і 5 відповідно (дивись задачу 13 з § 2.3).

7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \overline{3}x_1 + x_2 + \overline{2}x_3 = \overline{1}, \\ x_1 + \overline{2}x_2 + \overline{3}x_3 = \overline{1}, \\ \overline{4}x_1 + \overline{3}x_2 + \overline{2}x_3 = \overline{0} \end{cases}$$

у полях $\mathbb{Z}_5$ і $\mathbb{Z}_7$.

8. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \overline{2}x_1 + x_2 + \overline{2}x_3 = \overline{1}, \\ x_1 + \overline{2}x_2 + x_3 = \overline{0}, \\ \overline{2}x_1 + \overline{2}x_3 = \overline{2} \end{cases}$$

у полях $\mathbb{Z}_3$ і $\mathbb{Z}_7$.

9. Розв'язати систему рівнянь у полі $\mathbb{C}$:

а) $\begin{cases} (1+i)x_1 - x_2 + (1-i)x_3 = 2-4i, \\ 2ix_1 + (3-i)x_2 + ix_3 = 9i, \\ x_1 + (1+2i)x_2 + 4x_3 = 8+3i; \end{cases}$

б) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-i)x_1 & + & ix_2 & - & (1-2i)x_3 & = & 2+3i, \\ 6x_1 & + & (9-3i)x_2 & - & (6-9i)x_3 & = & 5+2i, \\ (4+i)x_1 & + & (9-4i)x_2 & - & (5-7i)x_3 & = & 3-4i. \end{array}\right.$

10. При яких дійсних значеннях параметра a система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & ax_2 & + & x_3 & = & 3, \\ 2x_1 & + & ax_2 & - & x_3 & = & -1, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

має єдиний розв'язок?

11. При яких дійсних значеннях параметра a система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2a, \\ -2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 4a^2, \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & & & = & a \end{array}\right.$$

має безліч розв'язків?

12. При яких дійсних значеннях параметра a система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & a, \\ ax_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

є несумісною?

13. Розв'язати систему рівнянь у полі $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda, \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda^2. \end{array}\right.$$

Задачі на доведення

14. Довести, що коли $x_1 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$, $x_2 = x_3 - x_4$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ є загальним розв'язком деякої системи лінійних рівнянь від 4-х змінних, то $x_3 = x_1 + \frac{1}{2}x_2$, $x_4 = x_1 - \frac{1}{2}x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, також є загальним розв'язком цієї ж системи.

15. Довести, що $x_1 = x_3 + 2x_4 + x_5$, $x_2 = x_3 + 2x_5$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ і $x_3 = x_2 - 2x_5$, $x_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_5)$, $x_1, x_2, x_5 \in \mathbb{R}$ є загальними розв'язками однієї і тієї ж системи лінійних рівнянь.

16. Довести, що при $a \neq b$ система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ bx_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 = c_2, \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 + ax_4 = c_3, \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + ax_4 = c_4 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок. Знайти його.

17. Довести, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$$

при $\lambda \neq 1$ і $\lambda \neq -3$ має єдиний розв'язок. Знайти його.

Творчі задачі

18. Дослідити систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = b, \\ x_1 + x_2 + cx_3 = c \end{cases}$$

і знайти загальний розв'язок в залежності від дійсних значень параметрів, що входять в коефіцієнти.

Задачі з олімпіад

19. Дослідити систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (3+2a)x_1 + (1+3a)x_2 + ax_3 + (a-1)x_4 = 3, \\ 3ax_1 + (3+2a)x_2 + ax_3 + (a-1)x_4 = 1, \\ 3ax_1 + 3ax_2 + 3x_3 + (a-1)x_4 = 1, \\ 3ax_1 + 3ax_2 + ax_3 + (a-1)x_4 = 1 \end{cases}$$

і знайти загальний розв'язок в залежності від дійсних значень параметра a, що входить в коефіцієнти.

§ 3.2 Арифметичний векторний простір. Лінійна залежність векторів

Література: [1] стор. 280 – 292; [3] стор. 174 – 180.

Теоретичні відомості

Нехай P – деяке поле, елементи якого будемо називати *скалярами*. Кожний елемент множини P^n називається *n-вимірним вектором над полем* P і позначається $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називаються його *координатами або компонентами*. З умови рівності упорядкованих n-нок слідує, що два вектори є рівними тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати.

На множині P^n всіх n-вимірних векторів над полем P визначимо *бінарну операцію додавання і зовнішню операцію множення векторів на скаляри з поля* P.

Сумою векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ і $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ називається вектор $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$.

Добутком скаляра $\lambda \in P$ *на вектор* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ називається вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$.

Множина P^n з визначеними в ній операціями додавання і множення на скаляри з поля P називається *арифметичним векторним простором над полем* P. Якщо $P = \mathbb{R}$, то такий арифметичний векторний простір називають *дійсним*, а у випадку коли $P = \mathbb{C}$ – *комплексним*.

У арифметичному векторному просторі P^n визначається операція скалярного множення векторів як відображення множини $P^n \times P^n$ у поле P. Результат цієї операції над векторами $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ та $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ записують у мультиплікативній формі і

$$\vec{a}\vec{b} \overset{df}{=} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

Вектор $\vec{b}$ називається *лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ простору P^n (або *лінійно виражається через ці вектори*), якщо існують скаляри $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ такі, що $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k$.

Система (або послідовність) векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ простору P^n називається *лінійно залежною*, якщо існують скаляри $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ з поля P, які не всі рівні нулю, і такі, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{o}.$$

Якщо ж остання рівність виконується лише при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ називається *лінійно незалежною*.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ простору P^n є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли хоча б один з її векторів є лінійною комбінацією решти векторів системи.

Якщо серед векторів системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ є нульовий вектор, то вона лінійно залежна; якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ містить лінійно залежну підсистему, то вона лінійно залежна; якщо кожний вектор системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ є лінійною комбінацією векторів системи $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{a}_m$ і $k > m$, то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ лінійно залежна; якщо кожний вектор системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ є лінійною комбінацією векторів системи $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{a}_m$ і остання система лінійно залежна, то і перша система лінійно залежна.

Нехай маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими над полем P

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають *вектором невідомих даної системи*. Позначимо через

- $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ – n-вимірні вектори, координати яких є коефіцієнтами при невідомих відповідних рівнянь системи (їх називають *вектор-рядками головної матриці системи*);

- $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ – m-вимірні вектори, координати яких є коефіцієнтами при невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системи (їх називають *вектор-стовпцями головної матриці системи*);

- $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ – вектор вільних членів рівнянь системи.

Тоді дану систему у векторній формі записують так:

$$x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots + x_n\vec{p}_n = \vec{b},$$

а у векторно-скалярній формі так: $\left\{\begin{array}{l} \vec{a}_1\vec{x} = b_1, \\ \vec{a}_2\vec{x} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{a}_m\vec{x} = b_m. \end{array}\right.$

Задачі на ілюстрацію понять

1. Скільки векторів є у 3-вимірному арифметичному векторному просторі над полем: а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_3$; в) $\mathbb{Z}_5$; г) $\mathbb{R}$?

2. Перевірити, що:
   а) алгебра $(p^n;+)$ є абелевою групою;
   б) $(\forall\lambda,\delta\in P)(\forall\vec{a},\vec{b}\in P^n)(\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\wedge(\lambda+\delta)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\delta\vec{a})$.

3. Перевірити, що операція скалярного множення векторів у арифметичному векторному просторі P^n має властивості:
   а) $(\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in P^n)(\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c})$;
   б) $(\forall\lambda\in P)(\forall\vec{a},\vec{b}\in P^n)(\lambda(\vec{a}\vec{b})=(\lambda\vec{a})\vec{b}=a(\overrightarrow{\lambda\vec{b}}))$.

4. Лінійно залежними чи лінійно незалежними є системи векторів:
   а) $\vec{a}_1=(1,2,3),\quad \vec{a}_2=(-2,-4,-6),\quad \vec{a}_3=(2,1,1)$;
   б) $\vec{a}_1=(1,4,1),\quad \vec{a}_2=(0,0,0),\quad \vec{a}_3=(1,1,1)$;
   в) $\vec{a}_1=(1,1,0,0),\quad \vec{a}_2=(0,1,1,0),\quad \vec{a}_3=(0,0,1,1)$;
   г) $\vec{a}_1=(0,0,1,1),\quad \vec{a}_2=(0,1,1,0),\quad \vec{a}_3=(1,1,0,0)$?

5. Що означає лінійна залежність (незалежність) системи:
   а) з одного геометричного вектора;
   б) з двох геометричних векторів;
   в) з трьох геометричних векторів;
   г) з чотирьох геометричних векторів?

6. Записати розширену матрицю даної системи рівнянь, її вектор-рядки, вектор-стовпці і вектор невідомих:

а) $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ 2x_1+x_2+3x_4=3,\\ x_1+x_3+x_4=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3=2;\end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1+x_3=0,\\ 3x_1+x_2-2x_3=0,\\ 4x_1-x_2=0,\\ 5x_1-2x_2+5x_3=0.\end{cases}$$

7. Записати у векторній та векторно-скалярній формах систему рівнянь:

а) $$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-1,\\ x_1+x_2+x_3=6,\\ 4x_1-3x_2-2x_3=-8;\end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-7x_4=5,\\ 6x_1-x_2+x_3-4x_4=-1,\\ 4x_1-2x_2-2x_3+4x_4=3.\end{cases}$$

8. Записати у загальній формі систему рівнянь:
   а) $x_1(-2,3)+x_2(-1,1)-2x_3(1,2)=(5,4)$;
   б) $x_1(1,3,0,5)+x_2(1,2,1,4)+x_3(1,1,2,3)=(5,-4,0,2)$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Знайти вектор $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, якщо:
   а) $\vec{a}=(1,2,3)$, $\quad \vec{b}=(2,5,7)$, $\quad \vec{c}=(3,7,11)$;
   б) $\vec{a}=(5,-3,2,1,10)$, $\quad \vec{b}=(1,8,1,-4,7)-(2,1,9,-3,6)$,
   $\vec{c}=(1,3,-5,9,11)$.

10. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо:
   а) $\vec{x}=3\vec{a}$, де $\vec{a}=(0,1,-\frac{1}{3})$;
   б) $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, де $\vec{a}=(1,2,3,0), \vec{b}=(-2,1,5,-1), \vec{c}=(\sqrt{2},-1,0,1)$;
   в) $-3\vec{a}-\vec{x}=2\vec{b}$, де $\vec{a}=(0,-2,1)$, $\quad \vec{b}=(1,-3,7)$;
   г) $2\vec{x}+3\vec{a}-4\vec{b}=\vec{0}$, де $\vec{a}=(\sin\alpha,0,-\cos\alpha)$, $\vec{b}=(\sin^3\alpha,\frac{1}{4},-\cos^3\alpha)$.

11. З'ясувати, чи може бути вектор $\vec{x}$ лінійного комбінацією векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, якщо:
   а) $\vec{x}=(-1,-4)$, $\quad \vec{a}=\vec{b}=(-2,-1)$, $\quad \vec{c}=(1,1)$, $\quad \vec{d}=(0,0)$;
   б) $\vec{x}=(1,1,-1)$, $\quad \vec{a}=(2,3,0)$, $\quad \vec{b}=(0,2,-1)$, $\quad \vec{c}=\vec{d}=(0,0,0)$;
   в) $\vec{x}=(5,12,-3,8,)$, $\quad \vec{a}=(-1,2,1,1)$, $\quad \vec{b}=(-3,1,1,-4)$,
   $\vec{c}=(6,-7,-2,3)$, $\quad \vec{d}=(-1,3,-4,-3)$;
   г) $\vec{x}=(4,1,0,3)$, $\quad \vec{a}=(4,3,3,5)$, $\quad \vec{b}=(3,-1,1,4)$,
   $\vec{c}=(-3,3,0,-2)$, $\quad \vec{d}=(-1,-2,-1,1)$.

12. З'ясувати, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:
   а) $\vec{a}_1=(-3,1,5)$, $\quad \vec{a}_2=(6,-2,-15)$;
   б) $\vec{a}_1=(1,-2,-3)$, $\quad \vec{a}_2=(2,3,4)$, $\quad \vec{a}_3=(3,5,7)$;
   в) $\vec{a}_1=(5,0,0)$, $\quad \vec{a}_2=(0,0,-3)$, $\quad \vec{a}_3=(1,2,0)$;
   г) $\vec{a}_1=(1,1,1,1)$, $\quad \vec{a}_2=(1,-1,-1,1)$, $\quad \vec{a}_3=(-1,3,3,-1)$.

13. Дано лінійно залежну систему векторів. Записати відповідну лінійну залежність між її векторами, якщо:
   а) $\vec{a}_1=(1,2)$, $\quad \vec{a}_2=(3,4)$, $\quad \vec{a}_3=(-1,2)$;
   б) $\vec{a}_1=(1,2,3)$, $\quad \vec{a}_2=(0,1,2)$, $\quad \vec{a}_3=(-1,-5,-9)$;
   в) $\vec{a}_1=(4,1,-2)$, $\quad \vec{a}_2=(-2,0,1)$, $\quad \vec{a}_3=(1,1,0)$, $\quad \vec{a}_4=(1,2,0)$;
   г) $\vec{a}_1=(1,-2,3,0,1)$, $\quad \vec{a}_2=(7,-6,7,2,-5)$, $\quad \vec{a}_3=(-2,0,1,-1,-1)$.

14. Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – лінійно незалежна система векторів. Чи є лінійно незалежними такі системи векторів:
    а) $\vec{a}_1,\ \vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3$; б) $\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{a}_2+\vec{a}_3,\ \vec{a}_1+\vec{a}_3$?

15. Знайти необхідну і достатню умову того, що вектори $\vec{a}_1 = (\alpha, \beta)$, $\vec{a}_2 = (\gamma, \delta)$ є лінійно залежними.

16. Знайти всі значення λ, при яких вектор $\vec{b}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:
    а) $\vec{a}_1 = (2,3,5)$, $\vec{a}_2 = (3,7,8)$, $\vec{a}_3 = (1,-6,1)$, $\vec{b} = (7,-2,\lambda)$;
    б) $\vec{a}_1 = (4,4,3)$, $\vec{a}_2 = (7,2,1)$, $\vec{a}_3 = (4,1,6)$, $\vec{b} = (5,9,\lambda)$;
    в) $\vec{a}_1 = (3,4,2)$, $\vec{a}_2 = (6,8,7)$, $\vec{b} = (9,12,\lambda)$;
    г) $\vec{a}_1 = (3,2,5)$, $\vec{a}_2 = (2,4,7)$, $\vec{a}_3 = (5,6,\lambda)$, $\vec{b} = (1,3,5)$.

17. Знайти максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів: $\vec{a}_1 = (4,-1,3,-2), \vec{a}_2 = (8,-2,6,-4), \vec{a}_3 = (3,-1,4-2), \vec{a}_4 = (1,3,5,1)$.

18. Скільки є лінійно незалежних систем векторів у арифметичному векторному просторі:
    а) $\mathbb{Z}_2^2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; в) $\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;
    б) $\mathbb{Z}_3^2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$; г) $\mathbb{Z}_5^2 = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$?

Задачі на доведення

19. Довести, що система з двох векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ над числовим полем P лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, тобто $\vec{b} = \gamma\vec{a}$ або $\vec{a} = \gamma\vec{b}$, де γ - деяке число.

20. Довести, що в лінійно незалежній системі векторів будь-яка підсистема також лінійно незалежна.

21. Довести, що лінійно незалежною є система числових векторів
    $\vec{a}_1 = (1,0,0,\ldots,0,0,\alpha_{11},\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1k})$,
    $\vec{a}_2 = (0,1,0,\ldots,0,0,\alpha_{21},\alpha_{22},\ldots,\alpha_{2k})$,
    ....
    $\vec{a}_m = (0,0,0,\ldots,0,1,\alpha_{m1},\alpha_{m2},\ldots,\alpha_{mk})$.

22. Довести, що система n-вимірних векторів
    $\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0,0)$,
    $\vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0,0)$,
    ....
    $\vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$,
    $\vec{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$,

де $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ – будь-які числа, лінійно залежна.

23. Довести, що система n-вимірних векторів
$\vec{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}),$
$\vec{a}_2 = (0, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}),$
....
$\vec{a}_k = (0, 0, \ldots, 0, \alpha_{kk}, \ldots, \alpha_{kn}),$
лінійно незалежна, якщо всі числа $\alpha_{ii} (i = 1, 2, \ldots, k)$ відмінні від нуля.

24. Нехай система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ лінійно незалежна, а система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{a}$ - лінійно залежна. Довести, що вектор $\vec{a}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

25. Нехай вектор $\vec{a}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ єдиним способом. Довести, що система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ лінійно незалежна.

26. Довести, що для будь-яких векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ і будь-яких чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ система векторів $\alpha_1\vec{a}_1 - \alpha_2\vec{a}_2, \alpha_3\vec{a}_2 - \alpha_1\vec{a}_3, \alpha_2\vec{a}_3 - \alpha_3\vec{a}_1$ лінійно залежна.

27. Довести, що система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ тоді і тільки тоді лінійно незалежна, коли жоден з її векторів не виражається лінійно через останні.

28. Довести, що коли три вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно залежні, а вектор $\vec{a}_3$ не виражається лінійно через $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, то вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ відрізняються між собою лише числовим множником.

Творчі задачі

29. Встановити, чи можна будь-яку лінійно незалежну підсистему даної системи векторів доповнити до максимальної лінійно незалежної підсистеми цієї системи векторів.

30. Вивчити питання про лінійну залежність та незалежність векторів арифметичного векторного простору $\mathbb{Z}_3^3 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Задачі з олімпіад

31. При яких α, β, γ система векторів $\vec{a}_1 = (1, \alpha, \alpha^2)$, $\vec{a}_2 = (1, \beta, \beta^2)$, $\vec{a}_3 = (1, \gamma, \gamma^2)$ є лінійно незалежною?

§ 3.3 Ранг і базис скінченної системи векторів. Ранг матриці

Література: [1] стор. 292 – 309; [3] стор. 182 – 184.

Теоретичні відомості

Базисом скінченної системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ арифметичного векторного простору P^n називається її лінійно незалежна підсистема, через вектори якої лінійно виражається кожний вектор системи.

Будь-які два базиси скінченної системи векторів містять однакову кількість векторів.

Кількість векторів базису системи векторів називається її *рангом*.

Елементарними перетвореннями системи векторів називають такі її перетворення:

- перестановка будь-яких двох векторів у записі системи;
- множення будь-якого вектора системи на відмінний від нуля елемент поля P;
- додавання до будь-якого вектора системи іншого її вектора, помноженого на деякий елемент поля P;
- вилучення із системи нульового вектора.

Елементарні перетворення системи векторів не змінюють її рангу.

Ранг системи векторів не зміниться, якщо приєднати вектор, який є їх лінійною комбінацією, або вилучити вектор, який є лінійною комбінацією інших векторів цієї системи.

Множина векторів $\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}, \ldots, a_{1n}) \\ \vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}, \ldots, a_{2n}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mm}, \ldots, a_{mn}) \end{array}$,

де $m \leqslant n$, називається *діагональною*, якщо

$a_{21} = a_{31} = a_{32} = \ldots = a_{m1} = \ldots = a_{m(m-1)} = 0$ і $a_{11}a_{22}\cdots a_{mm} \neq 0$.

Говорять, що *множина векторів має ступінчатий вид*, якщо $a_{1s}a_{2t}\cdots a_{mk} \neq 0$ і $a_{11} = \ldots = a_{1(s-1)} = a_{21} = \ldots = a_{2(t-1)} = \ldots = a_{m1} = \ldots = a_{m(k-1)} = 0$.

Якщо $m > n$, то діагональною (та ступінчатою відповідно) називають множину векторів, у якій нулі розміщуються зверху і справа від тих координат, добуток яких повинен бути відмінним від нуля.

Кожну скінченну систему векторів шляхом елементарних перетворень можна звести до діагонального або ступінчатого виду.

Кожна діагональна та ступінчата множина векторів є лінійно незалежною, тобто її ранг рівний числу векторів системи.

Для кожної числової прямокутної матриці, яку називають *матрицею*, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ можна розглядати дві множини векторів:

n-вимірні вектори $\begin{array}{c} \vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{array}$ – її *вектор-рядки*;

m-вимірні вектори $\begin{array}{c} \vec{p}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ \vec{p}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{p}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \end{array}$ – її *вектор-стовпці*.

Ранг множини вектор-рядків матриці називають *рядковим рангом*, а ранг множини вектор-стовпців – її *стовпцевим рангом*. Рядковий і стовпцевий ранг кожної матриці рівні.

Рангом матриці називають її рядковий або стовпцевий ранг.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Скільки векторів може містити базис системи $\vec{a}_1, \vec{a}_2\, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ двовимірних векторів?

2. Яким може бути ранг множини, яка містить 4 тривимірних вектори?

3. Чи може система векторів мати той самий базис, що і деяка її підсистема?

4. Дві системи векторів $\vec{a}_, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$ називаються *еквівалентними*, якщо всі вектори кожної з цих систем лінійно виражаються через вектори іншої. Чи будуть еквівалентними такі системи векторів:
   а) $\vec{a}_1 = (1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,0)$, $\vec{a}_3 = (0,0,1)$ і
   $\vec{b}_1 = (0,0,1)$, $\vec{b}_2 = (0,1,1)$, $\vec{b}_3 = (1,1,1)$;
   б) $\vec{a}_1 = (1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,0)$, $\vec{a}_3 = (0,0,1)$ і
   $\vec{b}_1 = (1,0,0)$, $\vec{b}_2 = (0,1,1)$, $\vec{b}_3 = (1,1,1)$?

5. Чи можна в кожній системі векторів $\vec{a}_, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, що містить хоча б один ненульовий вектор, вибрати еквівалентну їй лінійно незалежну підсистему?

6. Поставимо у відповідність кожній точці площини двовимірний вектор (α_1, α_2), де α_1, α_2 – координати точок. Що являє собою геометрично:
   а) множина векторів, пропорціональних ненульовому вектору;
   б) множина лінійних комбінацій двох лінійно незалежних векторів?

7. Поставимо у відповідність кожній точці простору тривимірний вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координати точки. Що являє собою геометрично:
   а) множина векторів, пропорціональних нульовому вектору;
   б) множина векторів пропорціональних ненульовому вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$;
   в) множина всіх лінійних комбінацій двох лінійно незалежних векторів $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ і $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$;
   г) множина всіх лінійних комбінацій трьох лінійно незалежних векторів?

8. Які системи векторів мають тільки один базис?

9. З точністю до перестановки векторів вказати всі базиси системи всіх векторів простору $\mathbb{Z}_2^2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Обчислити рядковий ранг матриць:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 19 & -37 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Обчислити стовпцевий ранг для матриць з попередньої задачі.

12. Обчислити ранг матриць методом елементарних перетворень

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 94 & 27 & 15 & 120 \\ 18 & 53 & 28 & 30 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 5 & -3 \\ 4 & -8 & -3 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 18 & 23 & 48 \\ 17 & 15 & 31 & -47 \\ 4 & 6 & 27 & -110 \\ 26 & 21 & 30 & 67 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix};$$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Чому дорівнює ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при різних значеннях λ?

14. Чому дорівнює ранг кожної із матриць в залежності від значень параметра λ:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$?

15. Знайти значення λ, при яких матриця $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ має найменший ранг. Чому рівний ранг матриці при знайдених значеннях λ і чому він рівний при інших значеннях λ?

16. Обчислити ранг системи векторів:
а) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (3, 4, 5)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 4, 7, 10)$, $\vec{a}_2 = (2, 5, 8, 12)$, $\vec{a}_3 = (3, 6, 9, 13)$;
в) $\vec{a}_1 = (-4, 2, 3, 1)$, $\vec{a}_2 = (5, 3, -4, 2)$, $\vec{a}_3 = (-3, -5, 8, 2)$, $\vec{a}_4 = (-14, 16, -9, 5)$;
г) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{a}_3 = (\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$;

17. Для кожної із наступних систем векторів знайти хоча б один базис:
а) $\vec{a}_1 = (-1, 4, -3, -2)$, $\vec{a}_2 = (3, -7, 5, 3)$, $\vec{a}_3 = (3, -2, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (-4, 1, 0, 1)$;
б) $\vec{a}_1 = (0, 2, -1)$, $\vec{a}_2 = (3, 7, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 0, 3)$, $\vec{a}_4 = (5, 1, 8)$;
в) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (2, 3, 1, 2)$;
г) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (4, 5, 6)$, $\vec{a}_3 = (7, 8, 9)$, $\vec{a}_4 = (10, 11, 12)$.

18. Дано дві системи векторів $\vec{a}_1 = (1, 1, 1), \vec{a}_2 = (1, 0, -1), \vec{a}_3 = (1, 3, 5)$ і $\vec{b}_1 = (1, 2, 3), \vec{b}_2 = (0, 1, 2), \vec{b}_3 = (3, 4, 5), \vec{b}_4 = (4, 6, 8)$. Визначити, чи буде система $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ лінійно виражатися через систему $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Чи будуть вказані системи еквівалентні?

19. Знайти один з базисів системи векторів і виразити всі її вектори, що не входять до знайденого базису, через цей базис:
   а) $\vec{a}_1 = (-2, 3)$, $\vec{a}_2 = (6, 1)$, $\vec{a}_3 = (-3, -4,)$, $\vec{a}_4 = (1, 2)$;
   б) $\vec{a}_1 = (4, 1, -2)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (2, 3, -5)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, 6)$;
   в) $\vec{a}_1 = (6, 5, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (4, 3, -1, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 1, -3, 3)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, 1, -1)$;
   г) $\vec{a}_1 = (1, -1, 3, -5, 6)$, $\vec{a}_2 = (2, 5, 6, 4, -2)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 3, -1, 2)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, 3, 3, -2)$.

Задачі на доведення

20. Дано систему векторів $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4), \vec{a}_2 = (0, 2, 3, 4), \vec{a}_3 = (0, 0, 3, 4), \vec{a}_4 = (0, 0, 0, 4), \vec{a}_5 = (5, 1, 4, 3), \vec{a}_6 = (7, 8, 1, 9), \vec{a}_7 = (5, 3, 5, 3)$. Довести, що підсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ є базисом заданої системи векторів.

21. Дано систему векторів $\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{b}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{b}_3 = (0, 1, 1, 0), \vec{b}_4 = (0, 1, 1, 1), \vec{b}_5 = (5, 6, 7, 8), \vec{b}_6 = (8, 7, 6, 5), \vec{b}_7 = (3, 3, 3, 3)$. Довести, що підсистема $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ є базисом заданої системи векторів.

22. Довести, що кожна лінійно незалежна підсистема r векторів системи векторів рангу r є базисом системи.

23. Довести, що дві еквівалентні лінійно незалежні системи містять однакову кількість векторів.

24. В системі векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$ вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$ лінійно виражаються через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. Довести, що система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$ еквівалентна системі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$.

25. Довести, що коли система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$, лінійно виражається через систему $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$, то ранг першої системи не більше рангу другої.

26. Довести, що еквівалентні системи векторів мають один і той же ранг. Чи вірне обернене твердження: всякі дві системи однакового рангу еквівалентні?

27. Довести, що коли дві системи векторів мають однаковий ранг і одна з цих систем лінійно виражається через іншу, то ці системи еквівалентні.

28. Довести, що коли лінійно незалежна підсистема векторів $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \dots, \vec{a}_{i_s}$ системи $\vec{a}_, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ не є базисом даної системи, то її можна доповнити до базису.

Творчі задачі

29. При якій необхідній і достатній умові система із m n-вимірних векторів рангу $m-1$ має єдиний базис?

30. При якій необхідній і достатній умові система m n-вимірних векторів рангу $r<m$ має єдиний базис?

31. Встановити, скільки існує різних базисів арифметичного векторного простору $\mathbb{Z}_p^k$ для різних простих чисел p і натуральних k.

Задачі з олімпіад

32. Скільки існує різних базисів арифметичного векторного простору:
а) $\mathbb{Z}_3^2 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$; б) $\mathbb{Z}_5^2 = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$; в) $\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

§ 3.4 Сумісність та визначеність системи лінійних рівнянь

Література: [1] стор. 309 – 314; [3] стор. 191 – 193.

Теоретичні відомості

Нехай маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими над полем P

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ і

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – її головна і розширена матриці.

Теорема Кронекера-Капеллі. Система лінійних рівнянь є сумісною тоді і тільки тоді, коли ранги головної і розширеної матриць однакові.

Система лінійних рівнянь є визначеною тоді і тільки тоді, коли ранги головної і розширеної матриць рівні числу невідомих n.

Система лінійних рівнянь є сумісною і невизначеною тоді і тільки тоді, коли ранги головної і розширеної матриць однакові та менші числа невідомих n.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Як пов'язані ранги основної і розширеної матриць системи в випадку: а) сумісної системи; б) несумісної системи?

2. Яким може бути число рівнянь, що залишаються в сумісній системі після перетворення її методом Гаусса?

3. При яких співвідношеннях між рангами головної і розширеної матриць система m лінійних рівнянь з n невідомими:
   а) не має розв'язків;
   б) має єдиний розв'язок;
   в) має нескінчену множину розв'язків?

4. Чи можуть вектори $\vec{x} = (x_2 + x_3, x_2, x_3, x_2 - x_3)$ і $\vec{y} = (x_1, \frac{x_1+x_4}{2}, \frac{x_1-x_4}{2}, x_4)$ бути загальними розв'язками однієї і тієї ж системи лінійних рівнянь з 4 невідомими?

5. При якій умові три прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$ та $a_3x + b_3y + c_3 = 0$:
   а) проходять через одну точку;
   б) перетинаються в одній точці?

6. При якій умові n прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \ldots,$ $a_nx + b_ny + c_n = 0$ проходять через одну точку?

7. При якій умові n площин $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$:
   а) проходять через одну точку;
   б) проходять через одну пряму?

8. Як пов'язана сумісність системи лінійних рівнянь з цілими коефіцієнтами над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$ та над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$?

9. Розв'язати систему рівнянь над полями $\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Z}_5, \quad \mathbb{Z}_2$ і кільцем $\mathbb{Z}$:

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Дослідити на сумісність і визначеність систему лінійних рівнянь:

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_4 + x_5 = -1; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 2; \end{cases}$$

д) $\begin{cases} (8-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + (9-\lambda)x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + (10-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0. \end{cases}$

11. Вказати, при яких значеннях λ наступні однорідні системи лінійних рівнянь мають ненульові розв'язки:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \lambda x_1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \lambda x_2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = \lambda x_3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = \lambda x_4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = \lambda x_1, \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = \lambda x_2, \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = \lambda x_3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = \lambda x_4. \end{cases}$

12. Дослідити систему лінійних рівнянь і знайти її загальний розв'язок залежно від дійсного значення λ:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$

13. Дослідити і розв'язати систему лінійних рівнянь при відповідних дійсних значеннях параметра λ:

а) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

14. Чи можуть системи рівностей

$$\begin{cases} x_1 = x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8, \\ x_2 = 2x_5 + 3x_6 + x_7 + 2x_8, \\ x_3 = x_5 + x_6 + x_7 - x_8, \\ x_4 = x_5 - x_7 - 6x_8, \end{cases} \quad \text{і}$$

$$\begin{cases} x_5 = 21x_1 - 6x_2 - 26x_3 + 17x_4, \\ x_6 = -17x_1 + 5x_2 + 20x_3 - 13x_4, \\ x_7 = -x_1 + 2x_3 - x_4, \\ x_8 = 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4, \end{cases}$$

описувати загальний розв'язок однієї і тієї ж системи лінійних рівнянь з 8 невідомими?

Задачі на доведення

15. Ранг матриці однорідної системи лінійних рівнянь на одиницю менший числа невідомих. Довести, що будь-які два розв'язки цієї системи пропорціональні.

16. Довести, що коли система лінійних рівнянь над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел не має розв'язків в $\mathbb{Q}$, то вона не має розв'язків в будь-якому числовому полі.

17. Довести, що для того, щоб неоднорідна система лінійних рівнянь, в якій число рівнянь рівне числу невідомих, була сумісною, достатньо, щоб відповідна їй однорідна система мала єдиний розв'язок.

18. Знайти необхідні і достатні умови для того, щоб:
    а) сума двох розв'язків системи лінійних рівнянь була її розв'язком;
    б) добуток довільного розв'язку на число $\lambda \neq 0$ був знову розв'язком тієї ж системи лінійних рівнянь.

19. Довести, що коли сума коефіцієнтів даної лінійної комбінації будь-яких розв'язків системи лінійних рівнянь дорівнює 1, то ця лінійна комбінація буде знову розв'язком цієї системи.

20. Довести, що для того, щоб у будь-якому розв'язку сумісної системи лінійних рівнянь невідоме x_k мало одне і те ж значення, необхідно і достатньо, щоб k-тий стовпець матриці системи не був лінійною комбінацією останніх стовпців цієї матриці.

21. Довести, що для того, щоб в будь-якому розв'язку системи лінійних рівнянь невідоме x_k було рівне нулю, необхідно і достатньо, щоб ранг

розширеної матриці системи при викреслюванні k-того стовпця зменшився на 1.

Творчі задачі

22. Розв'язати систему лінійних рівнянь над числовими полями та над полем $\mathbb{Z}_p$ для будь-якого простого числа p:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

23. Дослідити і розв'язати при відповідних значеннях параметрів систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} (c+a)y & + & (a+b)z & - & (b+c)x & = & a^3, \\ (a+b)z & + & (b+c)x & - & (c+a)y & = & b^3, \\ (b+c)x & + & (c+a)y & - & (a+b)z & = & c^3. \end{cases}$$

Задачі з олімпіад

24. Довести, що коли квадратна цілочислова система лінійних рівнянь є визначеною над полем $\mathbb{Z}_p$ для будь-якого простого числа p, то вона є визначеною і над полем $\mathbb{Q}$.

25. Довести, що цілочислова система лінійних рівнянь є сумісною над кільцем $\mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли вона має розв'язок над полем $\mathbb{Z}_p$ для будь-якого простого числа p.

§ 3.5 Властивості розв'язків однорідної та неоднорідної систем лінійних рівнянь

Література: [1] стор. 311 – 314; [3] стор. 203 – 206.

Теоретичні відомості

Нехай маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими над полем P

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

називається *відповідною до даної однорідною системою*.

Сума будь-яких двох розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь є знову її розв'язком.

Добуток будь-якого елемента поля P на довільний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь є знову її розв'язком.

Якщо ранг r головної матриці однорідної системи лінійних рівнянь менший числа невідомих n, то у множині її розв'язків існує підмножина, яка містить $n - r$ лінійно незалежних розв'язків і така, що всі розв'язки є їх лінійними комбінаціями. Таку множину називають *фундаментальною системою розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь*.

Різниця будь-яких двох розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь є розв'язком відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

Кожний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь можна подати у вигляді суми заданого її фіксованого розв'язку і деякого розв'язку відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь.

Якщо вектор $\vec{c}$ є *загальним розв'язком даної неоднорідної системи лінійних рівнянь* і $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{n-r}$ – фундаментальна система розв'язків відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь, то має місце рівність $\vec{c} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\vec{a}_{n-r}$, де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{n-r} \in P$. Якщо скалярам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{n-r} \in P$ надати конкретних значень, то отримаємо *частинний розв'язок даної неоднорідної системи лінійних рівнянь*.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чому всі фундаментальні системи розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь містять однакову кількість елементів?

2. Скільки розв'язків містить фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь?

3. Як пов'язані між собою множини розв'язків даної системи лінійних рівнянь і відповідної їй однорідної системи?

4. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:
   а) $\{\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0;$

   б) $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0. \end{array}\right.$

5. Скільки векторів містить фундаментальна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь, заданих над $\mathbb{Z}_2$?

6. Вектор $\vec{a}_1 = (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$ є одним із розв'язків системи лінійних рівнянь, заданих над полем $\mathbb{Z}_2$
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & \overline{0}, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & \overline{1}, \\ & & x_2 & + & x_3 & = & \overline{1}. \end{array}\right.$$
   Знайти всі інші розв'язки цієї системи.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь, заданих над полем $\mathbb{Z}_3$
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & \overline{0}, \\ \overline{2}x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & \overline{0}, \\ x_1 & + & \overline{2}x_2 & + & \overline{2}x_3 & = & \overline{0}. \end{array}\right.$$

8. Відомо, що вектор $\vec{a}_1 = (\overline{1}, \overline{1}, \overline{1})$ є розв'язком системи лінійних рівнянь
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & \overline{0}, \\ \overline{2}x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & \overline{0}, \\ x_1 & + & \overline{2}x_2 & + & \overline{2}x_3 & = & \overline{2}, \end{array}\right.$$
   заданих над полем $\mathbb{Z}_3$. Знайти інші розв'язки цієї системи.

9. Вектор $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$ є одним із розв'язків системи лінійних рівнянь з чотирма невідомими. Загальним її розв'язком є вектор $\vec{x}$. Вказати фундаментальну систему розв'язків відповідної їй однорідної системи, якщо $\vec{x} = (1 + x_3, 2x_3, x_3, -1 - x_3), x_3 \in \mathbb{R}$.

10. Навести приклад системи лінійних рівнянь з 4 невідомими, загальний розв'язок якої мав би вигляд $\vec{x} = (1 + x_3, 2x_3, x_3, -1 - x_3)$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

11. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$

є) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ 2\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + 4\lambda x_3 + 5\lambda x_4 = 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} -4x_1 + (2+2\lambda)x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 = 0, \\ \lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ \lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ -\lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 - \lambda x_3 + 22\lambda x_4 = 0. \end{cases}$

12. Відомо, що загальний розв'язок системи лінійних рівнянь має вигляд:
   а) $\vec{x} = \frac{1}{7}(-6+8\lambda, 1-13\lambda, 15-6\lambda, 7\lambda)$;
   б) $\vec{x} = (\alpha, \beta, 0, -\alpha - \frac{3}{2}\beta)$;
   в) $\vec{x} = (1-\lambda-\beta, \alpha, \beta, \lambda)$;
   г) $\vec{x} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$;

   Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної їй однорідної системи.

13. Знайти загальний розв'язок системи лінійних рівнянь, якщо $\vec{a} = (1, 0, -3, 2)$ є одним з її частинних розв'язків, а вектори $\vec{a}_1 = (2, 3, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, 0, 1)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи.

14. Знайти загальний та один частинний розв'язок системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 6x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 10, \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 + 2x_5 = -6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_5 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_4 - 4x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 2. \end{cases}$

15. Розв'язати систему рівнянь для кожного $\lambda \in \mathbb{R}$:

а) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1, \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = \lambda, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$

16. Знайти однорідну систему лінійних рівнянь, що містить:
   а) два рівняння;
   б) три рівняння,

   і для якої система векторів $\vec{a}_1 = (2,4,2,1), \vec{a}_2 = (3,7,1,1)$ є фундаментальною системою розв'язків.

Задачі на доведення

17. При розв'язуванні сумісної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

методом Гаусса знайшли вирази для змінних $x_1, x_2, \ldots, x_r$ через вільні змінні $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ такого виду

$$\begin{cases} x_1 = c_{10} + c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \cdots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_{20} + c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \cdots + c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = c_{r0} + c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \cdots + c_{rn}x_n. \end{cases}$$

Довести, що вектор $\vec{a} = (c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{r0}, 0, 0, \ldots, 0)$ є розв'язком вихідної системи, а вектори

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = (c_{11}, c_{21}, \cdots, c_{r1}, 1, 0, 0, \ldots, 0), \\ \vec{a}_2 = (c_{12}, c_{22}, \cdots, c_{r2}, 0, 1, 0, \ldots, 0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{a}_r = (c_{1,n-2}, c_{2,n-2}, \cdots, c_{r,n-2}, 0, 0, 0, \ldots, 1) \end{cases}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи.

18. Нехай вектори $\vec{a}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), \vec{a}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n})$, $\ldots, \vec{a}_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rn})$ утворюють фундаментальну систему розв'язків деякої однорідної системи. Довести, що вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такий, що
$$\begin{cases} x_1 = c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} + \cdots + c_r\alpha_{r1}, \\ x_2 = c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{22} + \cdots + c_r\alpha_{r2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + \cdots + c_r\alpha_{rn} \end{cases}$$
і $c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$, є загальним розв'язком цієї системи.

19. Довести, що для будь-якої однорідної невизначеної системи лінійних рівнянь з раціональними коефіцієнтами існує цілочислова фундаментальна система розв'язків.

20. Довести, що системи векторів
$$\vec{a}_1 = (1,1,0,1), \quad \vec{a}_2 = (1,0,1,1), \quad \vec{a}_3 = (1,1,1,0) \quad \text{і}$$
$$\vec{b}_1 = (1,0,2,-5), \quad \vec{b}_2 = (1,1,1,1), \quad \vec{b}_3 = (2,1,0,-1)$$
не можуть бути двома фундаментальними системами розв'язків деякої однорідної системи лінійних рівнянь.

21. Довести, що при розв'язуванні сумісної системи лінійних рівнянь
$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$
жодна з груп змінних x_1, x_3; x_1, x_5; x_2, x_4; x_3, x_5 не можуть бути вільними.

22. Довести, що четвертий вектор-рядок матриці
$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$
разом з першим і другим її рядками утворюють фундаментальну си-

стему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Творчі задачі

23. Чи утворюють рядки кожної з матриць

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -7 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0? \end{cases}$$

Задачі з олімпіад

24. В системі p рівнянь з $q = 2p$ невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

коефіцієнти $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Довести, що існує розв'язок $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ цієї системи такий, що всі $x_j (1 \leqslant j \leqslant q)$ – цілі числа, менші за q і, при цьому, не всі рівні нулю.

§ 3.6 Вибрані задачі

1. Нехай V_n є n-вимірним векторним простором над скінченним полем P, яке містить p елементів. Скільки векторів містить V_n?

2. Скільки матриць n-ного порядку можна утворити з елементів поля P, яке містить p елементів?

3. Скільки різних базисів існує у n-вимірному векторному просторі V_n над скінченним полем P, яке містить p елементів?

4. Скільки підпросторів розмірності m містить n-вимірний векторний простір V_n над скінченним полем P, яке містить p елементів ?

5. Дослідити на сумісність над полем $\mathbb{R}$ і знайти розв'язок системи рівнянь:
$$\begin{cases} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$$

6. Знайти умову, при якій деяка лінійна комбінація розв'язків неоднорідної системи лінійних рівнянь є також розв'язком цієї системи.

7. При яких умовах у кожному розв'язку сумісної системи лінійних рівнянь невідоме x_k має одне і те ж саме значення?

8. Вказати всі групи невідомих, які можуть бути взятими за вільні у системі рівнянь:
$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

9. Дослідити систему лінійних рівнянь
$$\begin{cases} -x_1 + (1+a)x_2 + (2-a)x_3 + ax_4 = 3, \\ ax_1 - x_2 + (2-a)x_3 + ax_4 = 2, \\ ax_1 + ax_2 + (2-a)x_3 + ax_4 = 2, \\ ax_1 + ax_2 + (2-a)x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$
і знайти її загальний розв'язок в залежності від дійсних значень параметра, що входить у коефіцієнти.

10. Перевірити, що у всіх розв'язках системи рівнянь
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 + 2x_5 = -6 \end{cases}$$
значення невідомих x_3 і x_5 постійні і дорівнюють відповідно 1 і 0. Пояснити ці факти в термінах лінійної залежності і лінійної незалежності стовпців розширеної матриці системи.

11. Довести, що коли цілочислові вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{Z}^n$ лінійно залежні над полем $\mathbb{Q}$, то знайдуться такі взаємно прості цілі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, що $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}$.

12. Довести, що коли система цілочислових векторів лінійно незалежна над полем $\mathbb{Z}_p$ для деякого простого числа p, то дана система векторів лінійно незалежна і над полем раціональних чисел.

13. Для даної системи цілочислових векторів:
$\vec{a}_1 = (0, 1, 1, 1), \quad \vec{a}_2 = (1, 0, 1, 1), \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 0, 1), \quad \vec{a}_4 = (1, 1, 1, 0)$
знайти всі прості числа p такі, що в полі $\mathbb{Z}_p$ ці вектори лінійно залежні.

14. Довести, що коли ранг матриці A не змінюється при приписуванні до неї будь-якого стовпця матриці B з тією ж кількістю рядків, то він не зміниться і при дописуванні до матриці A всіх стовпців матриці B.

15. Нехай A і B – матриці з дійсними елементами з однаковою кількістю рядків. Довести, що ранг матриці $\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & 3B \end{pmatrix}$ дорівнює сумі рангів матриць A і B.

Розділ 4

Матриці та визначники

§ 4.1 Операції над матрицями

Література: [1] стор. 370 – 381; [3] стор. 210 – 215.

Теоретичні відомості

Матрицею над полем P розмірності $m \times n$ називається прямокутна таблиця, яка містить m рядків і n стовпців, виду

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right),$$

де $a_{ij} (1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n)$ – елементи поля P. Скорочено матриці записують ще так: $A = (a_{ij}), (1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n)$ або $A = (a_{ij})$ – матриця розмірності $m \times n$ ($m \times n$-матриця). Множину всіх матриць розмірності $m \times n$ над полем P позначають через $M_{m \times n}(P)$.

У множині $M_{m \times n}(P)$ операція *додавання матриць* визначається так:

якщо $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, то $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Алгебра $(M_{m \times n}(P); +)$ є абелевою групою. Нейтральним елементом в цій групі є *нульова матриця O*, всі елементи якої є нулями поля P.

У множині $M_{m \times n}(P)$ операція *множення на елементи (часто говорять скаляри) з поля P* визначається так:

якщо $A = (a_{ij})$ і $\lambda \in P$, то $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Множина $M_{m\times n}(P)$ з визначеними в ній операціями додавання матриць і множення матриць на елементи з поля P є арифметичним векторним простором над полем P.

Нехай $A=(a_{ij})$ – $m\times n$-матриця і $B=(b_{st})$ – $n\times l$-матриця. *Добутком матриці A на матрицю B* називається $m\times l$-матриця $C=(c_{pq})$, всі елементи якої визначаються рівностями: $c_{pq}=a_{p1}b_{1q}+a_{p2}b_{2q}+\cdots+a_{pn}b_{nq}$. Добуток матриць позначають так $C=AB$.

Якщо в матриці однакове число рядків і стовпців рівне n, то її називають *матрицею n-го порядку*. Множину всіх матриць n-го порядку над полем P позначають через $M_n(P)$. У цій множині для будь-яких двох матриць можна однозначно знайти їх добуток. Відповідна бінарна операція називається *множенням матриць*. Для операції множення матриць вживають мультиплікативний запис.

Алгебра $(M_n(P);+,\cdot)$ є кільцем. Кільце $M_n(P)$ містить нейтральний елемент відносно операції множення. Ним є *одинична матриця E*, в якій всі a_{ii} *елементи головної діагоналі* рівні одиниці поля, а решта елементів є нулями поля P.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Вказати розмірність матриць $A+B$, λA і $A\cdot B$, якщо:
   а) A і B – $m\times m$-матриці;
   б) A – $m\times n$-матриця, B – $n\times p$-матриця;
   в) A – $m\times n$-матриця, B – $s\times p$-матриця і $n\neq s$;
   г) A – $1\times n$-матриця, B – $n\times 1$-матриця.

2. Виконати вказані дії:
   а) $-2A+B$, де $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;
   б) $3A-4B$, де $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Вказати всі матриці, які комутують з матрицею $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ відносно операції множення матриць.

4. Вказати всі матриці, які комутують з матрицею $E_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ відносно операції множення матриць.

5. Знайти добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$ і порівняти їх, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix};$

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

д) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

6. Обчислити $(AB)C$ та $A(BC)$, якщо
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ і } C = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

7. Обчислити $f(A)$, якщо $f(x) = x + 1$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Які з властивостей комутативного кільця виконуються у множині всіх матриць виду:
а) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$
над полем $\mathbb{R}$ відносно операцій додавання і множення матриць?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Обчислити $C = A - 3B$, якщо матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ розглядаються над полем: а) $\mathbb{Z}_5$; б) $\mathbb{Z}_7$.

10. Знайти добутки $A \cdot B$ та $B \cdot A$ і порівняти їх, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

11. Знайти добутки $((AB)C)D$, $(AB)(CD)$, $A((BC)D)$, $A(B(CD))$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 53 & 22 & -35 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

12. Знайти $f(A)$, якщо:

    а) $f(x) = x^2 - x - 3$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

    б) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Обчислити для довільного натурального числа n:

    а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$; в) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n$; г) $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}^n$;

    д) $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$; є) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n$;

    ж) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2n}$.

14. Знайти всі матриці, які комутують відносно операції множення з матрицею:

    а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Знайти всі матриці другого порядку над полем $\mathbb{R}$, квадрати яких дорівнюють: а) нульовій матриці; б) матриці $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Задачі на доведення

16. Довести, що суми елементів, які стоять на головних діагоналях матриць AB та BA, однакові.

17. Довести, що квадратна матриця A переставна з довільною матрицею того ж самого порядку відносно операції множення тоді і тільки тоді, коли A – *скалярна матриця*, тобто $A = \lambda E$, де E – одинична матриця.

18. Довести, що множина всіх *діагональних матриць* n-го порядку над полем $\mathbb{R}$ (всі елементи таких матриць поза головною діагоналлю дорівнюють нулю) є комутативним кільцем з одиницею відносно операцій додавання та множення матриць.

19. Довести, що множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} a & bi \\ 0 & a \end{pmatrix}$, де $a, b \in \mathbb{R}$, є комутативним кільцем з одиницею відносно операцій додавання та множення матриць.

20. Довести, що множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{Q}$ є комутативним кільцем з одиницею відносно операцій додавання та множення матриць.

21. Довести, що множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{R}$ є групою відносно операції множення матриць, яка ізоморфна адитивній групі дійсних чисел.

22. Довести, що множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$, де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, є кільцем з одиницею відносно операцій додавання та множення матриць.

23. Нехай A – діагональна матриця, всі діагональні елементи якої попарно різні. Довести, що будь-яка матриця, яка комутує відносно операції множення з матрицею A, є діагональною.

24. Квадратна матриця A над числовим полем P з невід'ємними елементами називається *стохастичною,* якщо сума елементів, які стоять в кожному її рядку дорівнює одиниці. Якщо при цьому і в кожному стовпці сума елементів рівна одиниці, то матриця називається *двічі стохастичною.* Довести, що:

    а) добуток стохастичних матриць є стохастична матриця;

    б) добуток двічі стохастичних матриць є двічі стохастична матриця.

Творчі задачі

25. Знайти всі числа a, b, c такі, щоб для деякого натурального n виконувалася рівність $E = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n$.

26. Встановити, для якого натурального n знайдеться матриця A порядку 2001 така, що $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2001 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1999 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

27. Нехай $m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant n$ і $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix}$ – матриця n-го порядку. Знайти суму елементів першого рядка матриці A^m. Який вигляд прийме ця сума, якщо $m > n$?

Задачі з олімпіад

28. Нехай $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$. Знайти A^{2002}.

29. Обчислити: а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2001}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{2001}$.

30. Обчислити A^k, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 2001 \\ 0 & 0 & \ldots & 2001 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2001 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ і $k \in \mathbb{N}$.

31. Знайти всі матриці другого порядку A такі, що їх квадрат є одиничною матрицею, тобто $A^2 = E$.

32. Довести, що будь-які матриці A та B, які комутативні з матрицею $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ комутативні між собою, тобто $AB = BA$.

§ 4.2 Оборотні матриці. Елементарні матриці та їх застосування

Література: [1] стор. 381 – 389; [3] стор. 215 – 221.

Теоретичні відомості

Нехай маємо алгебру $(M_n(P);+,\cdot)$. Матриця A з кільця $M_n(P)$ називається *оборотною*, якщо існує матриця $B\in M_n(P)$ така, що $AB=BA=E$. Якщо така матриця B існує, то її називають *оберненою до* A, вона єдина і її позначають через A^{-1}.

Для того, щоб існувала обернена матриця до матриці $A\in M_n(P)$, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A був рівний n.

Множина $M_n^*(P)$ всіх оборотних матриць з кільця $M_n(P)$ є групою відносно операції множення матриць.

Матриця n-го порядку називається *елементарною*, якщо вона одержана з відповідної одиничної матриці шляхом одного з таких її *елементарних перетворень*:

- перестановки місцями будь-яких двох рядків (стовпців) матриці;
- множення будь-якого рядка (стовпця) матриці на відмінний від нуля елемент поля P;
- додавання до будь-якого рядка (стовпця) матриці іншого її рядка (стовпця), помноженого на деякий елемент поля P.

Виконання елементарного перетворення над рядками (стовпцями) матриці n-го порядку рівносильне множенню даної матриці зліва (справа) на відповідну елементарну матрицю.

Кожну *невироджену(неособливу) матрицю n-го порядку* (її ранг рівний n) шляхом елементарних перетворень можна звести до одиничної матриці.

Ці твердження є теоретичною основою способу елементарних перетворень для обчислення оберненої матриці. Він полягає в тому, що над даною матрицею A і одиничною матрицею n-го порядку виконують однакові елементарні перетворення. Якщо при цьому дану матрицю A перетворили в одиничну, то одинична матриця перетвориться в обернену до A, тобто в A^{-1}.

Нехай маємо *матричне рівняння* $AX=B$. Якщо матриця A оборотна, то таке рівняння має єдиний розв'язок $X=A^{-1}B$. Цей метод розв'язування матричних рівнянь можна застосовувати до розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими, головна матриця якої є невиродженою.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи є оборотними матриці:
   а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;
   б) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$; г) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$?

2. Чи буде існувати обернена матриця до матриці, яка одержується із оборотної матриці:
   а) перестановкою двох довільних рядків;
   б) множенням одного із рядків на число $\lambda \neq 0$;
   в) множенням одного з рядків на число $\lambda = 0$;
   г) транспонуванням?

3. Рядки матриці A лінійно залежні. Чи буде матриця A оборотна?

4. Чи буде оборотною матрицею добуток двох оборотних матриць?

5. Чи буде оборотною матрицею добуток трьох оборотних матриць?

6. Яка перепона виникне, якщо спосіб елементарних перетворень знаходження оберненої матриці застосувати до виродженої матриці?

7. Чи утворює мультиплікативну групу множина:
   а) всіх квадратних матриць другого порядку над полем $\mathbb{R}$ виду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, де $a_{11}a_{22} \neq 0$;
   б) всіх квадратних матриць другого порядку над полем $\mathbb{R}$ виду $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, де $a_{11}a_{22} \neq 0$;
   в) всіх квадратних матриць другого порядку над полем $\mathbb{R}$ виду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, де $a_{11}a_{22} \neq 0$;
   г) всіх квадратних матриць другого порядку над полем $\mathbb{R}$ виду $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$, де $a_{12}a_{21} \neq 0$?

8. Знайти обернену матрицю до матриці:
   а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;
   б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, де $ad - bc \neq 0$.

9. Як зміниться матриця четвертого порядку, якщо її помножити зліва, справа на одну із елементарних матриць:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

10. Як виразити перетворення квадратної матриці n-го порядку "до першого рядка (стовпця) додати всі інші рядки (стовпці)" через множення її на деяку допоміжну матрицю?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

11. Встановити, чи утворює мультиплікативну групу множина всіх:
    а) елементарних квадратних матриць n-го порядку над полем $\mathbb{Q}$;
    б) ненульових квадратних матриць n-го порядку над полем $\mathbb{Q}$.

12. Знайти матрицю, обернену до матриці:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{г) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

13. Розв'язати матричні рівняння:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2;$$

$$\text{е) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

14. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 12x_3 = -16, \\ 2x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 14, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$

15. Обчислити $f(A)$, якщо:

а) $(X - 2E) \cdot f(X) = X + 2E$ та $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $(X + E) \cdot f(X) = X^2 - X + 2E$ та $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задачі на доведення

16. Матриця A називається *трикутною*, якщо всі її елементи по одну сторону від *головної* або *побічної* діагоналі рівні нулю, а елементи головної (відповідно побічної) діагоналі відмінні від нуля. Довести, що для кожної трикутної матриці існує обернена матриця і вона теж трикутна.

17. Довести, що множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, де $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, є мультиплікативною групою.

18. Довести, що множина всіх ненульових матриць виду $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{Q}$ є мультиплікативною групою.

19. Довести, що множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{Q}$ є полем відносно додавання та множення матриць.

20. Довести, що множина всіх матриць виду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{R}$ є полем відносно додавання та множення матриць, ізоморфним $\mathbb{R}$.

21. Довести, що поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел і алгебра матриць виду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ над полем $\mathbb{R}$ ізоморфні між собою.

Творчі задачі

22. Знайти обернену матрицю до даної матриці n-го порядку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ 0 & a & b & \dots & b \\ 0 & 0 & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a \\ a & 0 & a & \dots & a \\ a & a & 0 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; і) $\begin{pmatrix} 0 & a & a & \dots & a \\ a & 0 & a & \dots & a \\ a & a & 0 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Задачі з олімпіад

23. Матриця називається *циклічною*, якщо всі її рядки отримуються з першого рядка круговою підстановкою, що зміщує елементи вправо. Показати, що множина всіх таких матриць n-го порядку утворює мультиплікативну групу.

24. Розв'язати матричне рівняння
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2001 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2000 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1999 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Довести, що матриця $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, де $ad-bc \neq 0$, задовольняє рівняння $X-(a+d)E+(ad-bc)X^{-1}=0$. Встановити, скільки розв'язків має це рівняння.

26. Розв'язати систему матричних рівнянь:

а) $$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

27. Знайти обернену матрицю до матриці:

а) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2001 \\ 2001 & 1 & 3 & \dots & 1999 \\ 1999 & 2001 & 1 & \dots & 1997 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 5 & 7 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

б) $$A = \begin{pmatrix} 2001 & 2000 & 1999 & \dots & 2 & 1 \\ 2000 & 2000 & 1999 & \dots & 2 & 1 \\ 1999 & 1999 & 1999 & \dots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 4.3 Перестановки і підстановки. Визначники другого і третього порядку та їх застосування

Література: [1] стор. 314 – 330; [3] стор. 221 – 226.

Теоретичні відомості

Нехай множина A містить n елементів. *Перестановкою з n елементів* називається будь-яке упорядкування цієї множини. Число перестановок з n елементів рівне $n!$.

Розглянемо перестановку $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ з перших n натуральних чисел. Ситуацію в цій перестановці, коли більше число стоїть перед меншим, називають *інверсією*. Перестановку називають *парною*, якщо в ній парне число інверсій, і *непарною* – в протилежному випадку.

Перетворення перестановки, при якому переставляються місцями тільки два її елементи називається *транспозицією*. Від однієї транспозиції парність перестановки змінюється на протилежну.

Взаємно однозначне відображення φ множини перших n натуральних чисел на себе називається *підстановкою n-го степеня*. Її прийнято записувати за допомогою двох перестановок так: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$. Множина S_n всіх підстановок n-ого степеня є групою відносно операції множення підстановок. Її називають симетричною групою n-ого степеня.

Підстановка φ називається *парною*, якщо парною є сума інверсій у обох її перестановках, і *непарною* – в протилежному випадку. Множина всіх парних підстановок n-го степеня є групою порядку $\frac{1}{2}n!$ відносно операції множення. Ця група називається *знакозмінною групою n-го степеня* і позначається A_n.

Визначником другого порядку, який відповідає даній матриці другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ над полем P, називається елемент $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ поля P. Його позначають $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ або через Δ.

Визначником третього порядку, який відповідає даній матриці третього порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ над полем P, називається елемент $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$ поля P. Його позначають аналогічно до визначника другого порядку.

Поняття визначника другого і третього порядку застосовуються до розв'язування систем лінійних рівнянь у випадку, коли визначник Δ головної матриці системи відмінний від нуля. Для цього, у випадку системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими, обчислюють 3 *допоміжних визначники* $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, які утворюються з визначника Δ головної матриці системи шляхом заміни відповідних стовпців на стовпець вільних членів.

Теорема Крамера. Якщо визначник Δ головної матриці системи лінійних рівнянь $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$ відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який обчислюють за формулами:
$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$

Задачі на ілюстрацію понять

1. Скільки інверсій в перестановках:
   а) $5, 1, 4, 3, 6, 2$; б) $3, 7, 5, 2, 8, 1, 4, 6$?

2. Скільки інверсій в перестановках букв:
   а) вирок; б) ривок, якщо за вихідну перестановку вважати ту, в який порядок розміщення букв є алфавітним?

3. Підібрати i та k так, щоб перестановка:
   а) $1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9$ була парною;
   б) $1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7$ була непарною.

4. Знайти всі непарні перестановки з чисел: а) 1, 2, 3; б) 1, 2, 3, 4.

5. Визначити парність підстановки та знайти обернену до неї:
   а) $\varphi = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 7 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Записати знакозмінну групу третього степеня.

7. Записати композицію підстановок φ і ψ, якщо:
   а) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;
   б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

8. Обчислити визначники другого порядку:
   а) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_2 5 \\ \log_5 4 & \log_3 2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1-3i & 2i \\ 4i^3 & 1+3i \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2^5 & 2^7 \\ 3^7 & 3^5 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & \sin\alpha \\ 2 & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

9. Розв'язати рівняння: а) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = 0$.

10. Чи зміниться визначник другого порядку, якщо до елементів одного з його рядків (стовпців) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на якесь число?

11. Розвя'зати за допомогою визначників систему лінійних рівняннь:
   а) $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ 3x+7y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+7y+13=0, \\ 5x+8y+14=0. \end{cases}$

12. Знайти умову, при якій визначник другого порядку дорівнює нулю.

13. Як зміниться визначник третього порядку, якщо:
   а) замінити місцями два стовпці;
   б) до третього рядка додати другий;
   в) замінити всі рядки на відповідні стовпці;
   г) замінити комплексні числа визначника на спряжені?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

14. Знайти кількість інверсій в перестановках:
   а) $1, 3, 5, \ldots, (2n-1), 2n, \ldots, 4, 2$;
   б) $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, (2n-1)$;
   в) $1, 2, 4, 5, \ldots, (3n-2), (3n-1), 3, 6, \ldots, 3n$;
   г) $2, 5, 8, \ldots, (3n-1), 1, 4, 7, \ldots (3n-2), 3, 6, 9, \ldots, 3n$.

15. Знайти множину всіх чисел, які можуть дорівнювати числу інверсій у перестановці чисел $1, 2, 3, \ldots, n$.

16. Скласти таблицю Келі для симетричної групи третього степеня S_3.

17. Обчислити визначники третього порядку:
   а) $\begin{vmatrix} 25 & 16 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos\alpha & 1+\cos 2\alpha & 1 \\ \operatorname{tg}\alpha & 2\sin\alpha & 1 \end{vmatrix}$;
   б) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 6 & -12 & -9 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ -1 & \varepsilon & -1 \end{vmatrix}$,
   де $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

18. Розвя'зати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & -2 \end{vmatrix} = 0;$ б) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc.$

19. Розв'язати за допомогою визначників систему лінійних рівняннь:

а) $\begin{cases} 3x+2y=-6, \\ 29x+31y=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-3y-z=0, \\ x+5y-3z=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (1+i)x-2iy=2, \\ (2-3i)x+(1-i)y=2+i; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+2y-4z=0, \\ 4x-3y-5z=0. \end{cases}$

20. Розв'язати за допомогою визначників систему лінійних рівняннь:

а) $\begin{cases} 2x+4y+4z=6, \\ 2x+3y+5z=10, \\ 3x+7y+4z=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-3y+2z+4=0, \\ 5x-3y+z+2=0, \\ 6x-3y+2z+2=0. \end{cases}$

21. Перевірити, що площа трикутника $\triangle A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1(x_1;y_1), A_2(x_2;y_2), A_3(x_3;y_3)$ дорівнює половині модуля визначника третього порядку $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

22. Обчислити площу трикутника з вершинами:

а) $A_1(-1;-1)$,$A_2(2;0)$, $A_3(-1;4)$;

б) $A_1(0;1)$, $_2(2;-3)$, $A_3(-4;-1)$.

23. Встановити, які значення може приймати визначник другого порядку, всі елементи якого рівні: а) ±1; б) 0 або 1; в) 0 або i.

24. Встановити, які значення може приймати визначник третього порядку, всі елементи якого рівні: а) ±1; б) 0 або 1; в) 0 або i.

Задачі на доведення

25. Довести, що квадратний тричлен ax^2+bx+c є повним квадратом тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 0.$

26. Довести, що значення дробу $\frac{ax+b}{cx+d}$, де $c^2+d^2 \neq 0$, не залежить від змінної x тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$

27. *Визначником Грама для векторів* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, де $n \geqslant 2$, називають визначник третього порядку $\begin{vmatrix} \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{b}\vec{a} & \vec{b}\vec{b} & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{c}\vec{a} & \vec{c}\vec{b} & \vec{c}\vec{c} \end{vmatrix}$ ($\vec{x}\vec{y}$ – скалярний добуток).
Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли їх визначник Грама дорівнює нулю.

28. Довести, що коли вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ лінійно незалежні, то їх визначник Грама є додатним числом.

29. Довести, що вектори:
 а) $\vec{a} = (4, -2, 12, 8)$, $\vec{b} = (-6, 12, 9, -3)$, $\vec{c} = (-10, 5, -30, -20)$ лінійно залежні;
 б) $\vec{a} = (14, -27, -49, 113)$, $\vec{b} = (43, -82, -145, 340)$, $\vec{c} = (-1, 1, -3, -3)$ лінійно незалежні.

30. Довести, що об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ як на ребрах, дорівнює модулю визначника третього порядку $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Творчі задачі

31. Встановити критерій того, щоб транспозиція двох несусідніх чисел в перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ збільшувала (зменшувала) число інверсій на задане число k, де $1 \leqslant k \leqslant n$.

32. Дослідити, скільки перестановок з чисел $1, 2, \ldots, n$ мають k інверсій.

Задачі з олімпіад

33. Знайти визначник третього порядку, елементами якого є числа ± 1 і він має найбільше значення.

34. Обчислити визначники третього порядку:
 а) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ 1 & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ 1 & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$.

35. Дослідити систему лінійних рівнянь:
 а) $\left\{ \begin{array}{l} (2-\lambda)x + 6y = 1, \\ 6x + (2-\lambda)y + 5z = 1; \end{array} \right.$ б) $\left\{ \begin{array}{l} 5x + 5y = 4 + \lambda x, \\ 7x + 3y = 1 + \lambda y. \end{array} \right.$

§ 4.4 Визначник n-ого порядку та його властивості

Література: [1] стор. 331 – 338; [3] стор. 226 – 232.

Теоретичні відомості

Нехай A – матриця n-ого порядку над числовим полем P. *Визначником (детермінантом) n-ого порядку, який відповідає даній матриці A*, називається алгебраїчна сума $n!$ членів, кожний з яких є добутком елементів, узятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці A; знак кожного члена визначається множником $(-1)^t$, де t – число інверсій у перестановці других індексів даного члена, якщо перші розміщені в порядку зростання. Визначник матриці A позначають $|A|$ або Δ_n (індекс вказує на порядок визначника) і замість круглих дужок ставлять вертикальні риски:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Елементи, рядки і стовпці матриці A називаються *елементами, рядками і стовпцями визначника*. Перетворення матриці A, при якому всі її рядки замінюються на стовпці з тими самими номерами, називається її *транспонуванням*. Транспоновану матрицю до A позначають A^t. Аналогічно визначається *транспонування визначника*.

Важливими властивостями визначників n-ого порядку є такі.

При транспонуванні визначник не змінюється, тобто $|A| = |A^t|$. Цю властивість називають *рівноправністю рядків і стовпців*.

Якщо у визначнику n-ого порядку поміняти місцями два рядки (стовпці), то детермінант змінить знак, а його абсолютна величина не зміниться.

Якщо у визначнику n-ого порядку всі його елементи одного з рядків (стовпців) помножити на число λ, то новий визначник буде рівний добутку цього числа на даний визначник.

Якщо всі елементи i-ого рядка (стовпця) визначника є сумами двох доданків, то цей визначник рівний сумі двох визначників, всі елементи яких, крім i-ого рядка (стовпця), такі ж, як у даного визначника, а i-ий рядок (стовпець) першого визначника складено з перших доданків і другого – з других доданків i-ого рядка (стовпця) даного визначника.

Задачі на ілюстрацію понять

1. З яким знаком входять добутки $a_{14}a_{45}a_{23}a_{52}a_{31}$ та $a_{42}a_{15}a_{31}a_{54}a_{23}$ у визначник 5-го порядку?

2. Встановити, які із добутків:

   а) $a_{34}a_{12}a_{45}a_{23}a_{51}$; г) $a_{18}a_{82}a_{46}a_{63}a_{35}a_{71}a_{84}a_{27}$;

   б) $a_{13}a_{21}a_{32}a_{47}a_{54}a_{65}a_{76}$; д) $a_{21}a_{32}\ldots a_{n,n-1}a_{1n}$;

   в) $a_{61}a_{52}a_{33}a_{41}a_{26}a_{15}a_{77}$; е) $a_{2n}a_{3,n-1}\ldots a_{n2}a_{11}$

   є членами визначника деякого порядку. Вказати для таких добутків порядок визначника та знак, з яким входить цей добуток у визначник.

3. Вказати всі члени визначника 4-го порядку, які містять елемент a_{32} і входять у визначник із знаком плюс.

4. Знайти члени визначника 4-го порядку $\begin{vmatrix} 5a & 1 & 2 & 3 \\ a & a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a & 3 \\ a & 1 & 2 & 2a \end{vmatrix}$, які містять елемент a^4 та a^3.

5. Вказати такі i, j, k, щоб добуток:

   а) $a_{i7}a_{63}a_{4j}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$; б) $a_{21}a_{32}a_{1j}a_{i6}a_{45}a_{78}a_{8k}a_{64}$

   був членом деякого визначника та входив до нього із знаком мінус.

6. Знайти елемент визначника n-го порядку, який симетричний до елемента a_{ij} відносно: а) побічної діагоналі; б) "центра визначника".

7. Елемент a_{ij} визначника n-го порядку займає парне або непарне місце в залежності від того, парним чи непарним є число $i+j$. Знайти число k елементів з парними місцями і число l елементів з непарними місцями.

8. З яким знаком входить у визначник n-го порядку добуток елементів:

   а) головної діагоналі; б) побічної діагоналі?

9. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо:

   а) у всіх його елементів змінити знак на протилежний;

   б) кожен його елемент a_{ij} помножити на c^{i-j}, де $c \neq 0$;

   в) кожен його елемент a_{ij} помножити на c^{ij}, де $c \neq 0$;

   г) кожен його елемент a_{ij} замінити симетричним елементом відносно побічної діагоналі елементом;

   д) кожен його елемент a_{ij} замінити симетричним елементом відносно "центра визначника";

   е) кожен його елемент a_{ij} замінити комплексно-спряженим числом?

10. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо його матрицю:
    а) транспонувати;
    б) повернути на 90^0 проти годинникової стрілки;
    в) симетрично відобразити відносно головної діагоналі;
    г) симетрично відобразити відносно побічної діагоналі?

11. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо:
    а) його перший стовпець (рядок) поставити на останнє місце, а інші стовпці (рядки) зсунути вліво (вверх) , зберігаючи їх розташування;
    б) його рядки (стовпці) записати в оберненому порядку;
    в) його рядки (стовпці) з парними номерами записати в оберненому порядку;
    г) його рядки (стовпці) з непарними номерами записати в оберненому порядку?

12. Як зміниться визначник n-го порядку, якщо:
    а) до кожного стовпця (рядка), починаючи з другого, додати попередній стовпець (рядок);
    б) до кожного стовпця (рядка), починаючи з другого, додати всі попередні стовпці (рядки);
    в) з кожного стовпця (рядка),крім останнього, відняти наступний стовпець (рядок), а з останнього стовпця (рядка) відняти початковий перший стовпець (рядок);
    г) до кожного стовпця (рядка), починаючи з другого, додати попередній стовпець (рядок), а до першого стовпця (рядка) додати початковий останній стовпець (рядок)?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

13. Скільки максимально елементів визначника 5-го порядку може дорівнювати нулю, якщо сам визначник відмінний від нуля?

14. Скільки відмінних від нуля членів має визначник n-го порядку, якщо:
    а) $a_{ij} = 0$, а всі інші елементи відмінні від нуля;
    б) $a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1j} = 0$, де $j < n$?

15. Використовуючи тільки означення визначника, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \ldots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$;

є) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{vmatrix}$; ж)

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 0 & \ldots & 0 & \log_b a \\ 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & 0 \\ \log_a b & 0 & \ldots & 0 & \operatorname{ctg}\alpha \end{vmatrix}.$$

16. Не обчислюючи визначника, розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x & 4 \\ 4 & 9 & x^2 & 16 \\ 8 & -27 & x^3 & 64 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ x+1 & -1 & -2 & x+2 \\ 3 & 4 & -3 & -4 \\ 3 & x^2-5 & 6-x^2 & -4 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & x & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & x & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & x & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & x \\ 2 & -4 & 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix} = 0$;

г) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ a_1+x-1 & a_2 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ a_1 & a_2+x-2 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n+x-n & a_{n+1} \end{vmatrix} = 0$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$;

є) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix} = 0;$

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & n \\ x & 2 & 3 & \dots & (n-1) & n \\ 1 & x & 3 & \dots & (n-1) & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x & n \end{vmatrix} = 0.$

17. Використовуючи властивості визначника, обчислити:

а) $\begin{vmatrix} 43 & 70 & 53 \\ 43 & 68 & 52 \\ 7 & 11 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & b & a & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 3a & 2a & -a & -4a \\ 3b & 2b & -b & -4b \\ -2c & -3c & 3c & 2c \\ -2d & -3d & 3d & 2d \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

18. За допомогою властивостей обчислити визначник n-го порядку, якщо кожний його елемент має вигляд:
а) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$; б) $a_{ij} = -1$, якщо $i > j$, і $a_{ij} = 1$, якщо $i \leqslant j$.

19. Для матриць $A, B \in M_n(P)$ перевірити виконання рівностей:
а) $(A^t)^t = A$; б) $(A+B)^t = A^t + B^t$; в) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$; г) $(AB)^t = B^t A^t$.

Задачі на доведення

20. Довести, що коли у визначнику n-го порядку на перетині деяких k рядків і l стовпців стоять нулі, причому $k + l > n$, то такий визначник дорівнює нулю.

21. На основі властивостей визначника довести подільність:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$ на 13; б) $\begin{vmatrix} 12 & 3 & 5 & 0 \\ 21 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 27 & -2 & -3 & 18 \end{vmatrix}$ на 30.

22. На основі властивостей визначника довести, що наступні визначники n-го порядку при $n \geqslant 3$ рівні нулю, якщо кожен їх елемент a_{ij} матиме вигляд:
а) $a_{ij} = i - j$; б) $a_{ij} = \frac{i}{j}$; в) $a_{ij} = n(i-1) + j$; г) $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$.

23. Довести, що коли у визначнику n-го порядку всі діагональні елементи рівні нулю, а всі інші елементи відмінні від нуля, то число всіх відмінних від нуля членів цього визначника обчислюється за формулою $n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$.

24. Не розгортаючи визначників, довести наступні тотожності:

а) $\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{bc} \\ 1 & \mathrm{b} & \mathrm{ca} \\ 1 & \mathrm{c} & \mathrm{ab} \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

в) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{a} & a^2 \\ 1 & \mathrm{b} & b^2 \\ 1 & \mathrm{c} & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

д) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Творчі задачі

25. Довести, що $\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$, де $f_i(x)$ – много-

член степеня не вище $n-2$; $1 \leqslant i \leqslant n$; $n > 1$.

26. Знайти суму визначників $\begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \dots & a_{2k_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \dots & a_{nk_n} \end{vmatrix}$, де $k_1, k_2, \dots, k_n$ – усі можливі перестановки індексів $1, 2, \dots, n$.

27. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 2\cos 2\varphi & 2\sin 2\varphi \\ \cos 3\varphi & \sin 3\varphi & 3\cos 3\varphi & 3\sin 3\varphi \\ \cos 4\varphi & \sin 4\varphi & 4\cos 4\varphi & 4\sin 4\varphi \end{vmatrix}$.

28. Довести, що визначник n-го порядку D з елементами $a_{ij} = \pm 1$ при $n \leqslant 3$ задовольняє умову $|D| \leqslant (n-1)!(n-1)$.

Задачі з олімпіад

29. У визначнику $\begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$ двоє учнів по черзі вписують замість зірочок числа. Довести, що учень, який почав вписування, завжди може досягти того, що визначник буде рівним наперед вказаному числу.

30. Знайти найбільше значення визначника третього порядку, всі елементи якого рівні: а) ± 1; б) 1 або 0.

31. Не обчислюючи визначників, довести тотожність
$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ac) \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{a} & a^2 \\ 1 & \mathrm{b} & b^2 \\ 1 & \mathrm{c} & c^2 \end{vmatrix}.$$

32. Довести, що
$$\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 & c\sin\beta & a\sin\beta \\ c\sin\beta & 1 & \cos\beta \\ a\sin\beta & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} =$$
$= \begin{vmatrix} c^2 & a\sin\gamma & b\sin\gamma \\ a\sin\gamma & 1 & \cos\gamma \\ b\sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$, де a, b, c – довжини сторін трикутника, а α, β, γ – його кути, які лежать проти сторін a, b, c відповідно.

33. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a+d & 3a & b+2a & b+d \\ 2b & d+b & c-b & c-d \\ a+c & c-2d & d & a+3d \\ b-d & c-d & a+c & a+b \end{vmatrix}$.

34. Нехай $a \in \mathbb{R}$ і A – матриця n-го порядку, елементи якої мають вид $a_{ij} = a + n(i-1) + j - 1$. Обчислити визначник цієї матриці.

§ 4.5 Мінори і алгебраїчні доповнення та їх зв'язок з рангом матриці

Література: [1] стор. 339 – 350, 358 – 362; [3] стор. 232 – 240.

Теоретичні відомості

Нехай A – матриця n-ого порядку над числовим полем P. *Мінором M_{ij} матриці A* називається визначник $(n-1)$-ого порядку, який відповідає матриці $(n-1)$-ого порядку, що залишається після викреслювання у даній матриці i-ого рядка та j-ого стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається мінор M_{ij}, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Визначник n-ого порядку дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка або стовпця на їх відповідні алгебраїчні доповнення. Таке подання визначника називають його *розкладом за елементами рядка або стовпця*.

Сума добутків всіх елементів довільного рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) цього визначника рівна нулю.

Мінором k-ого порядку матриці n-ого порядку A називається визначник k-ого порядку, який відповідає матриці k-ого порядку, елементи якої стоять на перетині довільних k рядків і k стовпців даної матриці.

При викреслюванні вибраних k рядків і k стовпців даної матриці залишаються елементи, які утворюють квадратну матрицю $(n-k)$-ого порядку, визначник якої називається *доповняльним мінором до вибраного мінора k-ого порядку*.

Ранг квадратної матриці співпадає з найвищим порядком її відмінного від нуля мінора.

Говорять, що мінор k-ого порядку окантовує мінор $(k-1)$-ого порядку у даній матриці n-ого порядку A, якщо він отриманий з попереднього мінора дописуванням елементів ще одного рядка і стовпця цієї матриці.

Метод окантування мінорів для знаходження рангу матриці полягає в поетапному знаходженні відмінних від нуля мінорів даної матриці як можна вищих порядків. В ролі мінора першого порядку можна взяти будь-який відмінний від нуля елемент матриці. Якщо при цьому виявиться, що всі мінори k-ого порядку, які окантовують відмінний від нуля мінор $(k-1)$-ого порядку у даній матриці, рівні нулю, то ранг матриці дорівнює $k-1$.

Для матриць n-ого порядку A і B має місце рівність $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Обчислити всі мінори 2-го порядку визначника $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

2. У визначнику 6-го порядку записати доповняльний мінор до мінора $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{26} \\ a_{53} & a_{56} \end{vmatrix}$.

3. Скільки мінорів 3-го порядку можна скласти з елементів визначника 4-го порядку?

4. Скільки мінорів 2-го порядку можна скласти з елементів вибраних трьох стовпців визначника 5-го порядку?

5. Знайти число мінорів 3-го порядку, які можна скласти з елементів, що стоять на перетині рядків і стовпців з однаковими номерами визначника 5-го порядку?

6. Скільки мінорів k-го порядку можна скласти з елементів визначника n-го порядку?

7. Обчислити алгебраїчні доповнення елементів:

   а) другого рядка визначника $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ a & b & c \\ -6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$;

   б) третього стовпця визначника $\begin{vmatrix} 4 & 1 & a & -5 \\ 3 & 2 & b & 1 \\ 2 & -3 & c & 4 \\ -1 & 1 & d & 3 \end{vmatrix}$.

8. Розкласти визначник за елементами першого стовпця і обчислити його:

   а) $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 2 & 1 & 1 \\ c & 1 & 2 & 1 \\ d & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

9. Многочлен $f(x)$ записаний у вигляді визначника $f(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}+x \end{vmatrix}$. Виразити його через мінори та ал-

гебраїчні доповнення визначника $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Скласти визначник 4-го порядку та обчислити його, якщо задано такі його мінори:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad M_{41} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$M_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad M_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

11. Обчислити коефіцієнт елемента a у визначнику:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & a & -9 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -7 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ a & 19 & 5 & a & -7 \\ 3 & 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

12. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 199 & 101 & 203 & 107 \\ 251 & 217 & 245 & 207 \\ 316 & 311 & 316 & 311 \\ 193 & 188 & 193 & 188 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & -1 & 7 \\ 2 & -6 & -6 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

13. Знайти суму алгебраїчних доповнень всіх елементів визначника :

а) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} a & a & a & \dots & a \\ 0 & a & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a \\ a & a & \dots & a & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

14. Знайти ранг матриці методом окантування мінорів:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 13 & 10 \\ 2 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & -5 \\ -7 & 5 & -1 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 7 & 3 & 11 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

15. Методом окантування мінорів встановити ранги наступних матриць в залежності від дійсних значень параметра a, що входить до матриці:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a+1 \\ a+1 & a & 2a+3 \end{pmatrix}$.

16. Обчислити добуток визначників:

а) $\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 7 & 6 & -9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Задачі на доведення

17. Довести, що сума алгебраїчних доповнень всіх елементів визначника D рівна $\frac{D}{a}$, якщо всі елементи його i-ого рядка (стовпця) рівні $a \neq 0$.

18. Довести тотожності:

    а) $\begin{vmatrix} \cos(\alpha-\gamma) & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos(\beta-\gamma) & \sin\beta & \cos\beta \\ -1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix} = 2\sin(\alpha-\beta)$;

    б) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

19. Нехай A, B – матриці n-го порядку рангів r і s відповідно. Довести, що $rang(AB) \geqslant r+s-n$.

20. Нехай A – неособлива матриця n-го порядку. Довести, що для довільної матриці n-го порядку B ранги матриць B, AB, BA рівні.

21. Нехай A, B, C – матриці одного і того ж порядку. Довести, що $\begin{vmatrix} A & O \\ B & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|$, де O – нульова матриця того ж порядку.

22. Нехай A – квадратна матриця. Довести, що $|A^n| = |A|^n$ для всякого натурального n. Показати, що коли матриця A неособлива, то ця рівність справедлива для довільного цілого n.

Творчі задачі

23. Встановити зв'язок між визначником матриці n-го порядку A та визначником матриці $2n$-го порядку:

    а) $\begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$;

    б) $\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 5A \end{pmatrix}$.

24. Знайти всі натуральні n, для яких має місце рівність
$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = 0 \text{ для всіх } x_i, y_i \in \mathbb{R}.$$

25. Довести, що
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$
$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)$, де $f(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}$ та $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – всі значення кореня n-го степеня з одиниці.

26. Обчислити визначник $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \dots & \alpha^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Задачі з олімпіад

27. Обчислити визначник
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \dots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$
де $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

§ 4.6 Обчислення визначників n-го порядку

Література: [1] стор. 351 – 358.

Теоретичні відомості

Обчислення визначників n-го порядку в загальному вигляді є досить складною обчислювальною задачею. Виділяють кілька порівняно простих способів, які дозволяють спростити такі обчислення.

Спосіб розкладу визначника за елементами його рядка або стовпця грунтується на відповідній теоремі і зводить обчислення визначника n-го порядку до обчислення n визначників $(n-1)$-го порядку.

Спосіб нулів грунтується на властивості визначників: якщо до елементів якогось рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число, то визначник не зміниться. Шляхом застосування цієї властивості декілька раз перетворюють визначник так, щоб всі елементи одного рядка (стовпця), крім одного, були рівні 0. Знайдений визначник дорівнює добутку цього ненульового елемента на його алгебраічне доповнення.

Спосіб зведення визначника до трикутного виду полягає в тому, що шляхом багаторазового застосування вказаної вище властивості та інших властивостей намагаються звести даний визначник до трикутного виду, тобто до такого визначника, у якого всі елементи під або над головною діагоналлю рівні 0. Останній визначник рівний добутку елементів, які стоять на головній діагоналі.

Спосіб математичної індукції застосовують у тих випадках, коли вдається сформулювати гіпотезу про результат обчислення в залежності від порядку визначника.

Спосіб подання визначника у виді суми визначників полягає у можливому застосуванні відповідної властивості визначників.

Спосіб виділення лінійних множників грунтується на властивості про винесення спільного множника всіх елементів рядка (стовпця) за знак визначника.

Спосіб рекурентних співвідношень полягає в тому, що вдається встановити залежність (формулу) між визначником n-го порядку і визначниками того самого типу, але менших порядків. Тоді шляхом спуску до визначників другого і третього порядку обчислюють даний визначник. Зокрема, таким способом обчислюють *визначник Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1}1 & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

Спосіб зведення до визначника Вандермонда полягає в перетворенні визначника шляхом застосування різних властивостей і теорем до виду визначника Вандермонда, який обчислюють за записаною вище формулою.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Запишіть всі визначники n-го порядку, які мають трикутну форму, та обчисліть кожний з них.

2. Які властивості визначників найчастіше використовуються при зведенні їх до трикутної форми?

3. Які властивості визначників найчастіше використовуються при розкладанні їх на суми визначників?

4. Які властивості визначників найчастіше використовуються при обчисленні їх методом рекурентних співвідношень?

5. Які властивості визначників найчастіше використовуються при обчисленні їх методом виділення лінійних множників?

6. Навести приклад визначника, при обчисленні якого зручно застосувати метод математичної індукції.

7. Як зміниться визначник, якщо до кожного попереднього рядка (стовпця) додати або відняти наступний, а до останнього – перший? Розглянути два випадки перетворень:
   а) послідовні перетворення; б) одночасні перетворення.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Обчислити визначник методом зведення до трикутної форми:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 4 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+2 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & a_2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} a_1 & a & a & \dots & a \\ a & a_2 & a & \dots & a \\ a & a & a_3 & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & a_n \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+a_n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -b & b^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b^2 & b^3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b^n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

9. Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

а) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \end{vmatrix}$.

10. Обчислити визначник методом математичної індукції:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\alpha \end{vmatrix}; \text{ г)} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ -y & x & \dots & 0 \\ 0 & -y & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}; \text{ д)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 8 \end{vmatrix}; \text{ е)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

11. Обчислити визначник методом виділення лінійних множників:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+a & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+a & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+a \end{vmatrix}; \text{ г)} \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a \end{vmatrix}; \text{ д)} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x \end{vmatrix}; \text{ е)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

12. Обчислити визначник методом розкладу його на суму визначників:

а) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+1 & x & \dots & x \\ x & x & x+1 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+1 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_1+x_2 & \dots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & a_2+x_2 & \dots & a_2+x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \dots & a_n+x_n \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} c_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & c_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & c_n \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_1+2b_2 & \dots & a_1+2b_n \\ a_2+2b_1 & a_2+2b_2 & \dots & a_2+2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+2b_1 & a_n+2b_2 & \dots & a_n+2b_n \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

13. Обчислити визначник шляхом зведення його до визначника Вандермонда:

а) $\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha_1 & \dots & \cos^n\alpha_1 \\ 1 & \cos\alpha_2 & \dots & \cos^n\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos\alpha_n & \dots & \cos^n\alpha_n \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$;г) $\begin{vmatrix} x_1-1 & x_1^2-1 & \dots & x_1^n-1 \\ x_2-1 & x_2^2-1 & \dots & x_2^n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n-1 & x_n^2-1 & \dots & x_n^n-1 \end{vmatrix}$.

14. Обчислити визначник одним з відомих методів:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & \dots & 3 & 1 \\ 3 & 3 & \dots & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & n-1 & \dots & 3 & 3 \\ n & 3 & \dots & 3 & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 & \dots & a+n-1 \\ -a & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & \dots & x \\ x & x & x+4 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{2n-1} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}$.

Задачі на доведення

15. Довести, що при $n > 2$ виконується тотожність:
$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix} = 0.$$

16. Не обчислюючи визначника
$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$, показати, що він дорівнює нулю.

17. Довести рівність
$\begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = D + x\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ij}$, де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

18. Довести тотожності:

а) $$\begin{vmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & \dots & a+n \\ a+2 & a+3 & a+4 & \dots & a+1 \\ a+3 & a+4 & a+5 & \dots & a+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+n & a+1 & a+2 & \dots & a+n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-1}(a+\tfrac{n+1}{2});$$

б) $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n+1} (a_ib_j - a_jb_i);$$

в) $$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a_0 - a_1 + \dots + (-1)^n a_n);$$

г) $$\begin{vmatrix} c & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & c & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c \end{vmatrix} = c^n - C_{n-1}^1 c^{n-2}ab + C_{n-2}^2 x^{n-4}a^2b^2 -$$

$\dots = \frac{(c+t)^{n+1}-(c-t)^{n+1}}{2^{n+1}t}$, де $t = \sqrt{c^2-4ab}$.

Творчі задачі

19. Обчислити визначник n-го порядку, елементи a_{ij} якого мають вид:

а)	$a_{ij} = i + j$;	г)	$a_{ij} = \frac{i}{j}$;	є)	$a_{ij} = max\{i, j\}$;
б)	$a_{ij} = i - j$;	д)	$a_{ij} = i^j$;	ж)	$a_{ij} = \|i - j\|$;
в)	$a_{ij} = ij$;	е)	$a_{ij} = min\{i, j\}$;	з)	$a_{ij} = i^2 - j^2$.

20. Обчислити визначник:

а) $$\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \dots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \dots & (a_1+b_n)^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \dots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix};$$

в) $\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_{n-1}(x_1) \\ 1 & \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$,
де $\varphi_i(x) = x^i + a_{i1}x^{i-1} + a_{i2}x^{i-2} + \dots + a_{ii}$.

21. Знайти максимальне значення визначника 3-го порядку, якщо серед його елементів два елементи рівні a^2, а інші рівні ± 1.

Задачі з олімпіад

22. Обчислити визначник $|A - \lambda E|$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Знайти максимальне значення визначника 3-го порядку, у якого два елементи рівні 5, а інші рівні ± 1.

24. Знайти суму всіх визначників n-го порядку, в кожному з яких в кожному рядку і в кожному стовпці один елемент дорівнює одиниці, а решта рівні нулю. Скільки є всіх таких визначників?

25. Довести, що $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 2000 & 2001 \\ 2^2 & 3^2 & \dots & 2001^2 & 2002^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2001^{2001} & 2002^{2001} & \dots & 2002^{2001} & 2002^{2001} \end{vmatrix} \neq 0.$

26. Нехай D – визначник n-го порядку, в якому всі елементи рівні ± 1, причому $n \geqslant 3$. Довести, що $|D| \leqslant (n-1)(n-1)!$.

27. Показати, що визначник, елементами a_{ij} якого є числа $a_{ij} = r_i^{j-1}$, де $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$, ділиться на число $\prod\limits_{k=1}^{n-1} k!$.

28. Обчислити визначник n-го порядку, елементами якого є числа:
а) $a_{ij} = \text{НСД}(i, j)$; б) $a_{ij} = \text{НСК}(i, j)$.

§ 4.7 Розв'язування систем рівнянь за правилом Крамера

Література: [1] стор. 362 – 370, 381 – 383; [3] стор. 240 – 244.

Теоретичні відомості

Нехай маємо систему n лінійних рівнянь з n невідомими і A – головна матриця цієї системи. Позначимо через $\Delta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ визначники n-ого порядку, які отримані з визначника $|A| = \Delta$ головної матриці системи шляхом заміни i-ого стовпця на стовпець вільних членів рівнянь системи.

Теорема Крамера. Якщо головний визначник Δ системи n лінійних рівнянь з n невідомими відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Теорему Крамера можна застосовувати також до розв'язування сумісних систем m лінійних рівнянь з n невідомими. В такій системі ранги головної і розширеної матриць системи рівні і не перевищують числа невідомих n.

Нехай мінор найвищого r-ого порядку відмінний від нуля у головній матриці системи знаходиться у лівому верхньому куті цієї матриці (цього завжди можна досягти шляхом перестановки рівнянь і перепозначення невідомих). Дана система рівносильна системі з цих перших r рівнянь. Тоді будемо вважати перші r невідомих основними, а решту – вільними (коефіцієнти біля яких не ввійшли у цей мінор). Перенесемо їх у праву частину перших r рівнянь. Ми отримали систему r лінійних рівнянь з r невідомими, головний визначник якої відмінний від нуля, і можна застосовувати теорему Крамера.

Для того, щоб до квадратної матриці A існувала обернена матриця A^{-1}, необхідно і достатньо, щоб визначник матриці A був відмінний від нуля.

Якщо визначник $|A|$ матриці n-ого порядку A відмінний від нуля, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} даної матриці.

Систему n лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, головною матрицею A і вільними членами $b_1, b_2, \ldots, b_n$ у *матричній формі* записують так $AX = B$, де X – матриця-стовпець невідомих, а B – матриця-стовпець вільних членів.

Якщо визначник $|A| \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $X = A^{-1}B$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Який зв'язок між оборотністю квадратної матриці, її рангом і визначником?

2. Нехай A – трикутна оборотна матриця. Який вигляд матиме відповідна обернена матриця?

3. Відомо, що матриця A і обернена до неї матриця A^{-1} є цілочисловими. Що можна сказати про визначник матриці A?

4. Одним з розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 7x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
є $x_1 = 2$, $x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = 1$. Що можна сказати про головний визначник цієї системи?

5. Як записати за допомогою визначників умову того, що дві прямі на площині перетинаються?

6. Як записати за допомогою визначників умову того, що три площини перетинаються в одній точці?

7. Як записати за допомогою визначників умову того, що три площини паралельні?

8. Чи можна застосувати правило Крамера до розв'язування систем лінійних рівнянь, які мають безліч розв'язків?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Обчислити обернену матрицю до даної:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ 3+i & 5+4i \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 62 & -79 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 183 & 201 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

є) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Розв'язати матричне рівняння:

а) $X \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -i & i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2+i \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1-i & 3-2i \\ 3+2i & 1+i \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

г) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

11. Розв'язати систему матричних рівнянь:

а) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ -4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$

12. Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 19, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11, \\ 10x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 34; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -1, \\ 11x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - x_5 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = -2, \\ 2x_2 - x_3 - x_5 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -9, \\ - x_2 - 2x_3 + x_5 = 6, \\ 2x_2 - 3x_3 + 4x_5 = 14. \end{cases}$

13. При яких дійсних значеннях a система лінійних рівнянь
$\begin{cases} x + y + az = 0, \\ x + ay + z = 0, \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$ має ненульовий розв'язок?

Задачі на доведення

14. Довести, що матричне рівняння:
а) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
не має розв'язків.

15. Довести, що для будь-якої квадратної матриці A матриця виду $\begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}$ необоротна.

16. Відомо, що система рівнянь
$\begin{cases} bx + ay = c, \\ cx + az = b, \\ cy + bz = a \end{cases}$
має єдиний розв'язок. Довести, що $abc \neq 0$, і знайти розв'язок системи.

17. Показати, шо система рівнянь
$$\begin{cases} ax+by+bz &= 0, \\ bx+ay+bz &= 0, \\ bx+by+az &= 0 \end{cases}$$
має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли $a=b$ або $a+2b=0$.

18. Довести, що наступні системи рівнянь несумісні:
$$\text{а)} \begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ x + 3y - z = 2, \\ x - 9y + 8z = 1; \end{cases}$$
$$\text{б)} \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 +3 x_3 + x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

19. Довести, що наступні системи рівнянь мають єдиний розв'язок:
$$\text{а)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = a_1, \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n = a_2, \\ (n-1)x_1 + nx_2 + x_3 + \cdots + (n-2)x_n = a_3, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \cdots + x_n = a_n; \end{cases}$$
$$\text{б)} \begin{cases} ax_1 + bx_2 + \cdots + bx_n = c_1, \\ bx_1 + ax_2 + \cdots + bx_n = c_2, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ bx_1 + bx_2 + \cdots + ax_n = c_n; \end{cases}$$
$$\text{в)} \begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1, \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_n = 2, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} = n; \end{cases}$$
$$\text{г)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n = 1, \\ bx_1 + ax_2 + ax_3 + \cdots + ax_n = c_2, \\ bx_1 + bx_2 + ax_3 + \cdots + ax_n = c_3, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = c_n. \end{cases}$$

Творчі задачі

20. Знайти всі матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ такі, щоб для деякого $k \in \mathbb{R}$ виконувалася рівність $A^{-1} = kA$.

21. Відомо, що матричні рівняння $AY = C$ та $ZB = C$ мають розв'язок. Встановити, чи має розв'язок рівняння $AXB = C$.

22. Знайти необхідні і достатні умови того, щоб:
а) три точки площини лежали на одній прямій;
б) чотири точки простору лежали на одній площині.

23. Знайти необхідні і достатні умови того, щоб:
а) n точок площини лежали на одній прямій;
б) n точок простору лежали на одній площині.

24. Знайти необхідні і достатні умови того, щоб чотири точки площини лежали на:
а) одному колі;
б) одній параболі;
в) одній гіперболі.

25. Знайти необхідні і достатні умови того, щоб п'ять точок простору лежали на одній сфері.

Задачі з олімпіад

26. Розвязати систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1, \\ x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & + & x_n & = & n-1, \\ x_n & + & x_1 & = & n; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 1, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 2, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \cdots & + & 2x_n & = & 3, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & nx_n & = & n; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & \cdots & + & 2x_{100} & = & 1, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & \cdots & + & 4x_{100} & = & 2, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & \cdots & + & 6x_{100} & = & 3, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & \cdots & + & 199x_{100} & = & 100; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & a_1, \\ x_3 & + & x_4 & + & \cdots & + & x_1 & = & a_2, \\ x_4 & + & x_5 & + & \cdots & + & x_2 & = & a_3, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_{n-1} & = & a_n. \end{cases}$$

27. За круглим столом сидять 7 гномів і перед кожним з них є чашка. В деякі з цих чашок налито молоко. Один з гномів розливає все своє молоко порівну іншим гномам в їх чашки. Далі його сусід справа робить те саме і т.д.. Коли останній сьомий гном розлив своє молоко іншим, то в кожній чашці виявилося стільки ж молока, скільки було з самого початку. Скільки молока було спочатку в кожній чашці, якщо у всіх чашках разом 3л молока?

28. Певна кількість грошей розкладена на n купок. Після цього з першої купки переклали у другу $\frac{1}{n}$-ну частину тих грошей, що в першій купці. Далі з другої купки переклали у третю $\frac{1}{n}$-ну частину тих грошей, що стала у другій купці і т.д.. Нарешті, з n-ої купки переклали у першу $\frac{1}{n}$-ну частину тих грошей, що стала у n-ій купці. В результаті в кожній купці стало a гривень. Скільки грошей було у кожній купці до перекладання?

29. Є певна сума грошей в гривнях. Кільком особам слід видати певну суму з цих грошей. Перша особа має отримати a гривень і ще $\frac{1}{n}$-ну частину того, що залишається після цієї видачі. Після цього друга особа має отримати $2a$ гривень і ще $\frac{1}{n}$-ну частину залишку. Далі третя особа має отримати $3a$ гривень і ще $\frac{1}{n}$-ну частину залишку. Нарешті, остання m-та особа отримає ma гривень. В результаті всі особи отримали однакові суми грошей. Скільки було осіб і яка була початкова сума грошей?

§ 4.8 Вибрані задачі

1. Обчислити для довільного натурального числа n:

а) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$.

2. Нехай A – матриця n-го порядку. Обчислити A^k для довільного натурального числа k:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} a & a & \dots & a & a \\ a & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & a & a \end{pmatrix}$.

3. Довести, що для даного натурального числа k і для довільного натурального числа n завжди знайдеться матриця A така, що

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ 0 & 1 & 2 & \dots & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & k-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Нехай $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n$. Підстановку $\varphi \in S_n$ називають *циклом,* якщо $\varphi(i_1) = i_2, \varphi(i_2) = i_3, \ldots, \varphi(i_{k-1}) = i_k$, а на решті чисел φ діє тотожно, тобто $\varphi(j) = j$. Цикл φ позначають через $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, а число k називають *довжиною циклу.* Два цикли називають *незалежними,* якщо у них немає спільного числа. Записати підстановку φ у вигляді композиції незалежних циклів:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Довести, що будь-яку підстановку можна подати у виді композиції попарно незалежних циклів. Довести, що незалежні цикли можна переставляти.

6. Довести, що для циклу φ довжини k число k є найменшим, для якого φ^k є тотожною підстановкою.

7. Довести, що будь-яку підстановку степеня $n > 1$ можна подати у виді композиції:
   а) транспозицій, тобто циклів довжини 2;
   б) транспозицій виду $(1s)$;
   в) транспозицій виду $(s(s+1))$.

8. Довести, що будь-яку парну підстановку степеня $n > 1$ можна подати у виді композиції:
   а) циклів довжини 3;
   б) циклів виду $(123), (124), \dots, (12n)$.

9. Розкласти на цикли композицію підстановок
   $\varphi_1 = (12)(34)\dots((2n-1)2n)$ і
   $\varphi_2 = (13)(25)(47)\dots((2n-4)(2n-1))((2n-2)2n)$.

10. Детермінант n-го порядку має вид:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Знайти характеристичну властивість членів числової послідовності:

$$D_1, D_2, D_3, D_4, \dots, D_n, \dots.$$

11. Позначимо через $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ детермінант n-го порядку

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Обчислити визначники $D_1, D_2, D_3, D_4, \ldots, D_n$.

12. Довести, що

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC,$$

де A, B, C, D – визначники 3-го порядку, утворені з матриці $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ викреслюванням відповідно першого, другого, третього і четвертого стовпців.

13. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – корені рівняння $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

14. Довести тотожності:

а) $$\begin{vmatrix} a & x & \ldots & x \\ x & a & \ldots & x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & \ldots & a \end{vmatrix} = ((n-1)x + a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a-x & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & a-x \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} a_1^2 - 1 & a_1a_2 & \ldots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 - 1 & \ldots & a_2a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1a_n & a_2a_n & \ldots & a_n^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ 1 & a_2^2 - 1 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

$(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1)$.

15. Знайти ранг матриці методом окантування мінорів:

а) $$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix};$$ б) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ -7 & 5 & 6 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

16. Методом окантування мінорів встановити ранги наступних матриць в залежності від дійсних значень параметрів, що входять до матриці:

а) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & c \\ 1 & 1 & a & d \end{pmatrix}$.

17. Довести, що $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{2n-1,2n-1} & a_{2n-1,2n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} a_{2n-1,2n-1} & a_{2n-1,2n} \\ a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}.$$

18. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -5 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ x_0 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$; є) $\begin{vmatrix} x & y & y & \dots & y & y \\ z & x & y & \dots & y & y \\ z & z & x & \dots & y & y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z & z & z & \dots & z & x \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} y_1+x_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_{n-1} & y_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$.

19. Довести, що система рівнянь з цілими коефіцієнтами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & \frac{1}{2}x_1, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & \frac{1}{2}x_n \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

20. Нехай дійсні функції $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ визначені на відрізку $[a, b]$ та лінійно незалежні над полем $\mathbb{R}$. Довести, що на відрізку $[a, b]$ знайдуться точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такі, що

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

21. Нехай $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. Відомо, що рівняння $AX = B$:
   а) має єдиний розв'язок;
   б) має безліч розв'язків;
   в) не має розв'язків.

   Що можна сказати про розв'язок рівняння $YA = B$?

22. Довести, що коли матриця A оборотна, то транспонована до неї матриця також оборотна і $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

23. При умові існування обернених матриць до A та B перевірити виконання рівностей:
   а) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$;
   б) $(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$;
   в) $(A + BB^t)^{-1}B = A^{-1}B(I + B^t A^{-1}B)^{-1}$;
   г) $(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}(B^{-1} - A^{-1})A^{-1}$.

24. Матриця $A \in M_n(P)$ називається *симетричною*, якщо $a_{ij} = a_{ji}$ ($A^t = A$)і *кососиметричною*, якщо $a_{ij} = -a_{ji}$ для всіх $i \neq j$ ($A^t = -A$). Довести, що кожну квадратну матрицю можна єдиним чином подати у виді суми деяких симетричної і кососиметричної матриць.

25. Довести, що добуток:
    а) двох симетричних або кососиметричних матриць є симетричною матрицею тоді і тільки тоді, коли вони комутативні;
    б) симетричної і кососиметричної матриць є кососиметричною матрицею тоді і тільки тоді, коли вони комутативні.

26. Довести, що обернена матриця до симетричної матриці є симетричною.

27. Довести, що обернена матриця до кососиметричної матриці є кососиметричною.

28. Матриця $A \in M_n(P)$ називається *ортогональною*, якщо $A^{-1} = A^t$. Довести, що коли матриці A і B ортогональні, то матриці A^{-1} і AB також ортогональні.

29. Знайти всі симетричні ортогональні матриці другого порядку.

30. Знайти всі кососиметричні ортогональні матриці другого порядку.

31. Матриця $A \in M_n(\mathbb{C})$ називається *ермітовою*, якщо $A = \overline{A}^t$, де матриця $\overline{A}$ отримана з матриці A шляхом заміни всіх її елементів на спряжені комплексні числа. Знайти умову, при якій добуток ермітових матриць є ермітовою матрицею.

32. Довести, що для кожної квадратної матриці $A \in M_n(\mathbb{C})$ існує матриця $B \in M_n(\mathbb{C})$ така, що $ABA = A$ і $BAB = B$, причому матриці AB і BA є ермітовими.

33. Матриця $A \in M_n(\mathbb{C})$ називається *унітарною*, якщо $A^{-1} = \overline{A}^t$, де матриця $\overline{A}$ отримана з матриці A шляхом заміни всіх її елементів на спряжені комплексні числа. Довести, що коли матриці A і B унітарні, то матриці A^{-1} і AB також унітарні.

Відповіді. Вказівки. Розв'язки

Розділ 1: Елементи математичної логіки та теорії множин

§ 1.1. Висловлення і логічні операції над ними

1. а) Так; б) ні; в) так; г) так; д) ні; е) ні; є) ні; ж) ні; з) ні; і) ні. **2.** а) Введемо позначення: p – "даний чотирикутник є квадрат" та q – "даний чотирикутник є ромб". Тоді перше речення запишеться так: $p \vee q$. Аналогічно записуються і інші речення. **3.** а) Якщо число a ділиться на 3 і число b ділиться на 3, то їх сума $a+b$ ділиться на 3. Аналогічно формулюються інші висловлення. **4.** Вирази б), в), д), з) не є формулами. Зокрема, наприклад, в д) вираз $\rightarrow q$ не формула, оскільки операція імплікація виконується над двома висловленнями.

6. а) $p_1 \wedge p_2$; б) $p_1 \wedge \sim p_2$; в) $\sim p_1 \wedge \sim p_2$; г) $\sim (p_1 \wedge p_2)$.

7. а) $\sim (p_1 \rightarrow \sim p_2)$; б) $\sim (p_1 \rightarrow p_2)$; в) $\sim (\sim p_1 \rightarrow p_2)$; г) $p_1 \rightarrow \sim p_2$.

8. Складемо, наприклад, таблицю істинності для формули є):

$(q$	$\rightarrow$	p	$\wedge$	$r)$	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\vee$	r	$\rightarrow$	$q)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
	2		1		6	5		3		4	

10. а), в), д) – тавтології. **13.** а) $p \vee q$; б) р; в) р. **14.** 4. **15.** 16. **16.** $p \mid q \equiv \sim (p \wedge q)$. **17.** $p \downarrow q \equiv \sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q)$.

19. а) $p \vee q \equiv \sim (\sim p \wedge \sim q)$; $p \rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$;
$p \leftrightarrow q \equiv (\sim (p \wedge \sim q)) \wedge (\sim (q \wedge \sim p))$.

24. $(p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$.

30. Істина, хиба, істина, істина, хиба.

§ 1.2. Взаємно обернені теореми. Доведення від супротивного

1. $\sim p_2 \rightarrow \sim p_1$. **2.** Наприклад, а): "якщо ребра піраміди попарно різні, то вона неправильна"; "якщо піраміда правильна, то її ребра не попарно різні"; "якщо ребра піраміди не попарно різні, то вона – правильна".

3. "Якщо сума протилежних кутів чотирикутника не рівна 180^0, то навколо нього не можна описати коло". "Якщо навколо чотирикутника можна описати коло, то сума його протилежних кутів рівна 180^0". "Якщо навколо чотирикутника не можна описати коло, то сума його протилежних кутів не рівна 180^0". Всі вони істинні. **6.** Оскільки

$$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r) \equiv q \to (p \to r),$$

то є такі три обернених імплікації.

Якщо від'ємник ділиться на 3, то на 3 ділиться різниця цих цілих чисел і зменшуване. Якщо з подільності на 3 зменшуваного слідує подільність на 3 від'ємника, то різниця цих чисел ділиться на 3. Якщо з подільності на 3 різниці двох чисел слідує подільність на 3 від'ємника, то зменшуване ділиться на 3. Перша імплікація є хибною, а дві інші – істинними.

7. а) p є достатним для q і r, q і r є необхідним для p; б) q є достатним для p і r, p і r є необхідним для q.

9. При позначеннях: а) p – "кути трикутника рівні q – "трикутник рівносторонній" будемо мати: $p \to q$; б) p – "ціле число ділиться на 5 q – "ціле число ділиться на 15" будемо мати: $p \to q$.

14. $(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r) \wedge \sim (q \wedge s) \to (q \to p) \wedge (s \to r)$.
"Якщо дискримінант квадратного рівняння невід'ємний, то рівняння має розв'язки в полі дійсних чисел". "Якщо дискримінант квадратного рівняння від'ємний, то рівняння не має розв'язків у полі дійсних чисел".

17. Припустимо, що існує раціональне число $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ – нескоротний дріб), квадрат якого рівний 2. Тоді $\frac{a^2}{b^2} = 2$ і $a^2 = 2b^2$. З останньої рівності маємо $a = 2n$ і $b^2 = 2n^2$. Тоді аналогічно одержуємо $b = 2m$. Отже, $\frac{a}{b}$ – скоротний дріб, що протирічить умові. Тому не існує раціонального числа $\frac{a}{b}$, квадрат якого рівний 2.

Нехай p – "$\frac{a}{b}$ – нескоротний дріб"і q – "$\frac{a^2}{b^2} \neq 2$". Тоді нам потрібно було би довести теорему: $p \to q$. Ми ж довели теорему: $p \wedge \sim q \to \sim p$. Тому, на підставі рівносильності формул $p \to q \equiv p \wedge \sim q \to \sim p$, істинною також є перша формула, тобто доведена дана теорема.

23. Припустимо, що до дійсного числа $a \neq 0$ існує два обернених a_1 і a_2, тобто $a_1 a = a a_1 = 1$ і $a_2 a = a a_2 = 1$. Розглянемо число $a_1 a a_2$. З однієї сторони $a_1 a a_2 = (a_1 a) a_2 = 1 \cdot a_2 = a_2$, а з другої – $a_1 a a_2 = a_1(a a_2) = a_1 \cdot 1 = a_1$. Отже, $a_1 = a_2$.

24. а) Розв'язком рівняння $ax = b$ є $x = a^{-1}b$. Далі, як і при доведенні попередньої задачі, показуємо, що будь-який розв'язок цього рівняння співпадає з $a^{-1}b$.

26. Це можна зробити за допомогою запитання: "Чи правда, що те, що монета перебуває у правій руці, еквівалентно тому, що Ви правдива людина?"

§ 1.3. Предикати та операції над ними. Системи та сукупності рівнянь і нерівностей

1. а) Так; б) ні; г) так; д) так; е) так; є) так; ж) так; з) ні; і) так. **2.** а) $(\forall x)(x \in \mathbb{Q} \to x \in \mathbb{R})$;
б) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$, де $p(x)$ – "x – непарне число" і $q(x)$ – "x – просте число"; в) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x) \to r(x))$, де $p(x)$ – "x – парне число $q(x)$ – предикат "$x > 3$ $r(x)$ – "x – складене число"; г) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$, де $p(x)$ – "x – паралелограм $q(x)$ – "x – прямокутник"; д) $\sim (\forall x)(p(x) \to q(x))$, де $p(x)$ – "x – киянин $q(x)$ – "x – футбольний болільник";
е) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{Z})(a + x = b \wedge (\forall y \in \mathbb{Z})(a + y = b \to x = y)$.

3. а) Кожне ціле додатне число є натуральним; б) кожне ціле число є парним або простим; в) кожне парне число ділиться на деяке число; г) існує парне число, яке не ділиться на жодне непарне число; д) існує ціле число, на яке ділиться кожне ціле число; е) кожне просте число є дільником деякого парного числа. **4.** б) і в) не є формулами. **5.** Наприклад, $(\exists x, y, z)(x+y = z)$ – істинне висловлення і т.д. **6.** а) $(\exists x)p(x)$;
б) $(\exists x)(p(x) \wedge (\forall y)(p(y) \to x = y)$; в) $(\exists x)(\exists y)(p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y)$;
г) $(\exists x)(\exists y)(p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y) \wedge (\forall z)(p(z) \to z = x \vee z = y)$;
7. а) $(\exists x)(\exists y)(x \leqslant y \wedge y \leqslant x)$; б) $(\forall x)(\exists y)(x + y \neq y \vee xy \neq x)$.

9. Множина X містить лише один елемент. **10.** а) $\{1\}$;
б) $\{(3,5), (5,7), (11,13), \cdots\}$; в) $\{(2,3), (2,5), (3,2), (3,5), (5,2), (5,3)\}$;
г) $\{(2,3), (-2,3), (2,-3), (-2,-3)\}$. **11.** а) $M_p = M_q = M$; б) $M_p \cup M_q = M$; в) $M_p \cap M_q = \varnothing$; г) $M_p \cup M_q = \varnothing$; д) $M_p = M, M_q = \varnothing$; е) $M_p \cap M_q = \varnothing$ і $M_p \cup M_q = M$, або $M'_p \cap M'_q = \varnothing$ і $M_p \cap M_q = \varnothing$, де M_p, M_q – множини істинності предикатів $p(x)$ і $q(x)$ відповідно. **12.** а) $M_p \subset M_q \wedge M_p \neq M_q$; б) $M_p = \varnothing$.

13. в) Множина точок другої, третьої і четвертої координатних четвертей; г) множина точок другої і четвертої координатних четвертей. **14.** а) $M'_p \cup M_q$; б) $(M_p \cup M'_q) \cap (M'_p \cup M_q)$ (Вказівка: виразити імплікацію через диз'юнкцію і заперечення). **16.** Система розв'язків не має. **17.** $x = 2, y = 4$. **18.** $x = 0$. **31.** Вказівка: показати, що рівняння $p(x)$ не має дійсних коренів.

§ 1.4. Множина. Алгебра множин

1. $A = \{x | x = -1 \vee x = 1\} = \{x || x| = 1\}$. **2.** $\{2,3\}; \{1\}$. **3.** $M = \{x | (\exists n \in \mathbb{N})(x = a_0 + d(n-1))\}$. **4.** Наприклад, $A = \{1\}, B = \{a, \{1\}\}, C = \{\{a, \{1\}\}\}$. **5.** $\{\varnothing\}$. **6.** Якщо $n = 3$, то такою множиною, наприклад, є $\{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$. **7.** а) хибне; б) істинне; в) хибне; г) хибне. **8.** $2, 2^2, 2^4, 2^n$. **9.** C_n^k.

10. а) Множина трикутників площини, які є рівнобедреними або прямокутними; б) множина рівнобедрених прямокутних трикутників; в) множина рівнобедрених непрямокутних трикутників; г) множина прямокутних трикутників, які не є рівнобедреними. **11.** а) Множина цілих чисел, які діляться на 2 або на 3; б) $\mathbb{Z}_6$; в) множина парних цілих чисел, які не діляться на 3; г) множина цілих чисел, які не діляться на 2 або на 3. **12.** Наприклад: а) $X_1 \cup X_2 = X_2$; б) $X_1 \cap X_3 = X_1$; в) $X_1 \cap X_3' = \varnothing$. **13.** а) 30; б) 20 . **15.** Не менше 10.

16. Найбільше – 7, найменше – 1. **17.** Достатність умови є очевидною. Необхідність. Якщо $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, то $\{a\} = \{c\}$ і $\{a, b\} = \{c, d\}$, або $\{a\} = \{c, d\}$ і $\{a, b\} = \{c\}$. В першому випадку теорема вірна. Другий випадок при $a \neq b$ або $c \neq d$ неможливий. Якщо ж $a = b$ і $c = d$, то $\{a\} = \{c\}$ і $\{b\} = \{d\}$. Отже, $a = b = c = d$.

18. Перевірити, що коли дві підмножини не рівні, то їх об'єднання відрізняється від їх перетину. **19.** Вказівка. При розв'язуванні цієї задачі і задач 20-27 використати відповідні закони алгебри предикатів. **25.** $X_1 \setminus X_2 = X_1 \cap X_2'$. **28.** а) U; б) $X_1 \cup X_2$.

29. Якщо $\Phi \equiv \Psi$ – тотожність алгебри підмножин, то $\Phi' \equiv \Psi'$ також тотожність. Знаходимо Φ' і Ψ' за законами де Моргана і в одержаній після цього тотожності замінюємо доповнення кожної підмножини самою підмножиною. Це і буде двоїстою тотожністю для $\Phi \equiv \Psi$. **30.** Показати, що для операцій об'єднання і перетину сімейств підмножин мають місце закони де Моргана, і використати задачу 29.

§ 1.5. Бінарні відношення та їх властивості

1. а) 2; б) 2^4; в) 2^{n^2}. **2.** $\rho_1 = \{(x, y) | x \geqslant 0 \wedge y \leqslant 0\}$; $\rho_2 = \{(x, y) | xy \leqslant 0\}$; $\rho_3 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \leqslant 0\}$; $\rho_4 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \geqslant 0\}$. **3.** а) $\rho_1 = \{(8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7), (8, 9)\}$. **4.** а) $\{(x, y) | x, y \in M_{10} \wedge (\exists n \in M_{10})(x = yn)\}$;
б) $\Delta_{M_{10}} \cup \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1), (10, 1), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (10, 2), (6, 3), (9, 3), (10, 5)\}$. **6.** а) Так; б) ні; в) так; г) так; д) так; е) так. **7.** Рефлексивне, симетричне і транзитивне.

8. а) $\rho^{-1} = \rho$; б) "x – брат або сестра y"; в) "x – підлеглий y"; г) $\rho^{-1} = \rho$. **9.** а) Δ_{M_5} і $\Delta_{M_5} \cup \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (4, 2)\} \cup \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$; б) $\varnothing$ і "x батько або мати y". **10.** а) $\rho \circ \sigma = \{(1, 3)\}$, $\sigma \circ \rho = \{(1, 2), (2, 3)\}$; б) $\perp \circ \| = \| \circ \perp = \perp$; в) "$x$ – дідусь y" і "x – бабуся y"; г) $\{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$ і $\{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$. **11.** Декартів добуток двох скінченних множин, що містять m і n різних елементів відповідно, містить

mn упорядкованих пар. Тому число бінарних відношень між елементами цих множин буде $C^0_{mn}+C^1_{mn}+\cdots+C^{mn}_{mn}=2^{mn}$. **12.** а) 4; б) 4; в) 8; г) 8; д) 13; е) 12. **13.** а) 2^{n^2-n}; б) 2^{n^2-n}; в) $2^{\frac{n^2+n}{2}}$; г) $2^{\frac{n^2+n}{2}}$. **14.** 2^n. **15.** а) $2^{n^2-n}(2^n-1)$; б) $2^{n^2}-2^{\frac{n^2+2n}{2}}$; в) 2^{n^2-n}; г) $2^{n^2}-2^n$.

17. Для доведення достатньо вказати бінарні відношення, що мають кожні дві із даних властивостей, але не мають третьої. **19.** При розв'язуванні цієї задачі (та задач 5.20, 5.21, 5.22) потрібно застосувати відповідні закони алгебри предикатів. **24.** Якщо $\rho^{-1}=\rho$ і $\sigma^{-1}=\sigma$ і $\sigma\circ\rho$ – симетричне, то з однієї сторони $(\sigma\circ\rho)^{-1}=\sigma\circ\rho$, а з іншої $(\sigma\circ\rho)^{-1}=\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}=\rho\circ\sigma$. Тому $\sigma\circ\rho=\rho\circ\sigma$. Навпаки, якщо $\rho^{-1}=\rho$, $\sigma^{-1}=\sigma$ і $\sigma\circ\rho=\rho\circ\sigma$, то $(\sigma\circ\rho)^{-1}=\rho^{-1}\circ\sigma^{-1}=\rho\circ\sigma=\sigma\circ\rho$. Це говорить про те, що $\sigma\circ\rho$ є симетричним.

§ 1.6. Відношення еквівалентності та фактор-множина

1. а) Ні; б) ні; в) так; г) так; д) так; е) так; є) ні; ж) так. **2.** а) Так; в) ні; в) ні; г) так. **3.** а) Ні; б) так. **4.** а) Так; б) ні; в) ні; г) ні. **5.** $\{1,2,5\},\{3\},\{4\}$. **6.** б) $(a,b)\in\varepsilon\leftrightarrow(a-b)\,\vdots\,2$; в) $\varepsilon=\Delta_{M_5}\cup\{(1,2),(1,5),(2,5),(2,1),(5,1),(5,2)\}$; г) $(a,b)\in\varepsilon\leftrightarrow(a-b)\,\vdots\,3$. **7.** а) $A/\varepsilon=\{\{3k|k\in\mathbb{Z}\},\{3k+1|k\in\mathbb{Z}\},\{3k+2|k\in\mathbb{Z}\}\}$; б) $A/\varepsilon=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$; в) $A/\varepsilon=\{A\}$; г) $A/\varepsilon=\{[\frac{m}{n}]|\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\}$ і $[\frac{m}{n}]$ - множина всіх дробів, кожний з яких дорівнює числу $\frac{m}{n}$. **9.** Навести приклад. **10.** 5. **11.** 2, 5, 15. **17.** а) $\Delta\subset\varepsilon$, оскільки ε - рефлексивне. б) З того, що $\varepsilon^{-1}\subset\varepsilon$, маємо $(\varepsilon^{-1})^{-1}\subset\varepsilon^{-1}$, або $\varepsilon\subset\varepsilon^{-1}$. В результаті $\varepsilon^{-1}=\varepsilon$. в) Маємо $\varepsilon\circ\varepsilon\subset\varepsilon$ (умова транзитивності ε). Але $\varepsilon\circ\varepsilon=\varepsilon\circ(\varepsilon\cup\Delta_A)=\varepsilon\circ\varepsilon\cup\varepsilon\circ\Delta_A=\varepsilon\circ\varepsilon\cup\varepsilon$. Тому $\varepsilon\subset\varepsilon\circ\varepsilon$. В результаті $\varepsilon\circ\varepsilon=\varepsilon$. **18.** Використати задачу 17. **19.** Використати задачу 17. **21.** Необхідність: 1) Нехай $B=\varepsilon<a>\in A/\varepsilon$. Тоді $a\in B$. Отже, $B\neq\varnothing$; 2) $B\times B=\varepsilon<a>\times\varepsilon<a>=\{(x,x')|x\in\varepsilon<a>\wedge x'\in\varepsilon<a>\}=$
$=\{(x,x')|(a,x)\in\varepsilon\wedge(a,x')\in\varepsilon\}=\{(x,x')|(x,a)\in\varepsilon\wedge(a,x')\in\varepsilon\}\subset$
$\subset\{(x,x')|(x,x')\in\varepsilon\}=\varepsilon$; 3) $\varepsilon(B)=\varepsilon(\varepsilon<a>)=(\varepsilon\circ\varepsilon)<a>\subset\varepsilon<a>$.

Достатність. Нехай для B виконуються всі три умови. Тоді існує елемент a, що належить B . Доведемо, що $B=\varepsilon<a>$. По-перше, $\varepsilon<a>\subset B$. По-друге, $B\times B\subset\varepsilon\to[(B\times B)<a>\subset\varepsilon<a>]\to B\subset\varepsilon<a>$, бо $(B\times B)<a>=B$. Отже, $B=\varepsilon<a>$.

22. Врахувати те, що $\rho\cup\rho^{-1}$ є найменшим симетричним бінарним відношенням, яке містить ρ, а $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\rho\cup\rho^{-1})^n$ найменше симетричне і транзитивне бінарне відношення, що містить ρ. **23.** Якщо $\varepsilon_2\cup\varepsilon_1=\varepsilon_2\circ\varepsilon_1$, то

$\varepsilon_2 \cup \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$, тому $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \circ \varepsilon_2$. Дальше дивись задачу 19. Умова $\varepsilon_2 \cup \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$ буде і необхідною.

25. Якщо через L_k позначити число всіх розбиттів n-елементної множини, кожне з яких містить точно k підмножин, то число N_0 всіх розбиттів множини M_n, а, отже, і число всіх відношень еквівалентності, заданих на цій множині, обчислиться за формулою $N_0 = \sum_{k=1}^{n} L_k$, де

$$L_k = \frac{\overline{A}_k^n - C_k^1\overline{A}_{k-1}^n + C_k^2\overline{A}_{k-2}^n - C_k^3\overline{A}_{k-3}^n + \cdots + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}\overline{A}_1^n}{k!},$$

$\overline{A}_k^n$ – число розміщень з повтореннями із k елементів по n, C_k^s – число комбінацій з k елементів по s.

§ 1.7. Відношення порядку і впорядковані множини

1. а) Так; б) так; в) так; г) ні. **2.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **3.** $\omega = \rho \cup \{(2,2),(3,3),(5,5),(2,5),(3,1)\}$. **4.** Ні. **6.** Мінімальні елементи 5,6,7,8,9,10; максимальний – 1. **9.** а) Нижні межі існують, верхньої межі немає; б) верхні межі існують, нижньої межі немає. **10.** $\omega = \Delta_{M_7} \cup \{(3,1),(4,2),(5,1),(5,3),(6,2),(6,4),(7,1),(7,3),(7,5)\}$; максимальні епементи – 1,2; мінімальні – 6,7. **11.** Δ_A. **12.** Множина повинна містити не більше одного елемента. **13.** 3. **14.** 3. **15.** а) 19; б) 19. **16.** $n!$.

18. Серед рефлексивних відношень є один мінімальний елемент (він же і найменший) – Δ_{M_4} і один максимальний (він же і найбільший) – $M_4 \times M_4$.

20. $\Delta_A \cup \rho^n$. **22.** $\omega \circ \omega = (\Delta_A \cup \omega) \circ \omega = \Delta_A \circ \omega \cup \omega \circ \omega = \omega \cup \omega \circ \omega$. Тому $\omega \subset \omega \circ \omega$; із транзитивності відношення маємо $\omega \circ \omega \subset \omega$ і $\omega \circ \omega = \omega$. **23.** Використайте закон $(\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho = \rho_1 \circ \rho \cup \rho_2 \circ \rho$. **24.** Якщо припустити, що $(a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho$, то $(a,a) \in \rho$. Це неможливо. Тому $(a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho$ є хиба. Отже, умова антисиметричності виконується.

31. $\inf(n_1,n_2) =$ НСК(n_1,n_2); $\sup(n_1,n_2) =$ НСД(n_1,n_2). **33.** а) Доведемо, наприклад, істинність імплікації $\omega^{-1} < x_1 >= \omega^{-1} < x_2 > \rightarrow x_1 = x_2$ (обернена імплікація очевидна). Оскільки $x_1 \in \omega^{-1} < x_1 >$, то із умови слідує $x_1 \in \omega^{-1} < x_2 >$. Звідки $(x_2,x_1) \in \omega^{-1}$, або $(x_1,x_2) \in \omega$. Аналогічно із $x_2 \in \omega^{-1} < x_2 >$ слідує $x_2 \in \omega^{-1} < x_1 >$. Отже, $(x_1,x_2) \in \omega^{-1}$, або $(x_2,x_1) \in \omega$. З антисиметричності ω слідує, що $x_1 = x_2$. б) доводиться аналогічно. **34.** $\inf(\mathfrak{A}_i)_{i\in I} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i$, $\quad sup(\mathfrak{A}_i)_{i\in I} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. **36.** C_{m+n-1}^n.

§ 1.8. Відображення

1. а) Ні; б) так, сюр'єкція; в) так, ін'єкція; г) ні. **2.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні; д) так; е) ні. **4.** а) $f(x) = lg(-x)$; б)$f(a) = 2a$; в) $f(x) = 3x$;

г) $f(x) = 9 + 5(x-1)$; д) $f(x) = 2^x$; е) $f(n) = -n$. **6.** 4; Δ_{M_2} і $f(1) = 2, f(2) = 1$. **7.** 2^3. **8.** 6. **9.** а) n^m; б) якщо $m = n$, то їх $m!$; якщо $m < n$, то їх $\frac{n!}{(m-n)!}$; якщо $m > n$, то не існує жодного; в) якщо $m < n$, то не існує жодного; якщо $m = n$, то $m!$; г) якщо $m = n$, то $m!$; якщо $m \neq n$, то 0.

12. Застосуйте закон $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ алгебри бінарних відношень і задачу 11. **14.** Слідує з асоціативності операції множення бінарних відношень і задачі 11. **20.** Нехай $(a,b) \in f$; оскільки f - відображення A на A, то знайдеться x такий, що $(x,a) \in f$. Тоді з рівності $f \circ f = f$ маємо $(x,b) \in f$, а з $(x,a) \in f$ і $(x,b) \in f$ слідує, що $a = b$. **22.** Нехай, наприклад, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x^2$ і $A_1 = \{-1, 0\}, A_2 = \{0, 1\}$. Тоді $f(A_1) = \{1, 0\}, f(A_2) = \{1, 0\}, A_1 \cap A_2 = \{0\}, f(A_1 \cap A_2) = \{0\}, f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 0\}$.

Розділ 2: Алгебри та основні числові системи

§ 2.1. Бінарні операції та їх властивості. Напівгрупа та група; їх ізоморфізм та гомоморфізм

1. а) Бінарна операція множення дійсних чисел; б) унарна операція піднесення до кубу; в) унарна операція добування квадратного кореня; г) не є операцією; д) нульарна операція виділення одиниці; е) унарна операція взяття оберненого числа. **2.** Наприклад, для додавання:

$+$	0	1	2	3	-1	-2
0	0	1	2	3	-1	-2
1	1	2	3		0	-1
2	2	3			1	0
3	3				2	1
-1	-1	0	1	2	-2	
-2	-2	-1	0	1		

3.

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

4. а) алгебра висловлень з операціями $\wedge, \vee, \sim$; б) $(\mathbb{N}; <, \vdots)$; в) $(\mathbb{Z}; +, -, \cdot; >, \vdots)$; г) множина $\mathbb{Q}$ з операціями множення, взяття протилежного числа, виділення нуля і одиниці.

8. а) не гомоморфізм; б) ізоморфізм. **9.** Напівгрупа без нульового та нейтрального елементів. **10.** Дивись §1.4. **11.** а) Напівгрупа, група, група, група; б) не напівгрупа у всіх випадках; в) напівгрупа, напівгрупа, група, група; г) напівгрупа у всіх випадках; д) напівгрупа; е) група.

13. $f(1) = 1, f(n) = 0$, якщо $n > 1$. **14.** $f(n)1$ для парного n і $f(n) = -1$ для непарного n. **15.** а), б) – не гомоморфізми, якщо елемент $a \in G$ не є нейтральним; в) f_a - ізоморфізм. **16.** а) 1 - нульовий лемент; б) 1 - нейтральний елемент.

§ 2.2. Натуральні числа. Метод математичної індукції

1. Висновок невірний. Метод неповної індукції доцільно застосовувати на етапі вироблення гіпотези.

2. Врахуйте, що $6n = (n+1)^3 + (-n)^3 + (n-1)^3 + (-n)^3$.

3. $(T_1 \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(T_k \to T_{k+1})) \to (\forall n \in \mathbb{N})T_n$.

4. $(T_{k_0} \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(k_0 \leqslant k \wedge T_k \to T_{k+1})) \to (\forall n \in \mathbb{N})(k_0 \leqslant n \to T_n)$.

5. $(T_a \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(a \leqslant k < b \wedge T_k \to T_{k+1})) \to (\forall n \in \mathbb{N})(a \leqslant n \leqslant b \to T_n)$.

6. $(T_b \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(a \leqslant k < b \wedge T_{k+1} \to T_k)) \to (\forall n \in \mathbb{N})(a \leqslant n \leqslant b \to T_n)$.

7. Перехід від $k = 1$ до $k = 2$ неможливо здійснити. **8.** $\frac{n(n-3)}{2}$.

9. $x_n = \frac{1}{n}$. **10.** $n \geqslant 3$. **11.** $n^2 - n + 2$. **12.** При здійсненні кроку індукції розгляньте можливі варіанти оплати вартості, що рівна n.

13. $\frac{n^2+n+2}{2}$. **14.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **28.** $m+n-k = 1$. **29.** $0, 1, 1, 2, 3, 5, \cdots$. **30.** $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ і $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

31. Розв'яжіть послідовно такі задачі: 1) На скільки частин ділять пряму n пар точок? (їх $2n + 1$). 2) На скільки частин ділять коло n пар точок, які розташовані на ньому? (їх $2n$). 3) На скільки частин ділять площину n кіл, кожні два з яких перетинаються і розташовані на ній? (їх $n^2 - n + 2$). 4) На скільки частин ділять сферу n кіл, кожні два з яких перетинаються і розташовані на ній? (їх $n^2 - n + 2$). Остаточна відповідь $\frac{n(n^2-3n+8)}{3}$.

32. $\frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$. **33.** а) $\frac{n(n^2+1)}{2}$; б) $(2n - 1)(n^2 - n + 1)$.

§ 2.3. Кільце, поле та упорядковане поле

1. Кільцями є: а), б), г), е), ж). Одиниця є в б), г), е), ж). **2.** Полями є е) та ж). **3.** а), б), в),г) – не кільця. **4.** а) В кільці немає одиниці; б), г) – обернені елементи існують тільки для 1 і -1; е), ж) – обернені елементи існують для всіх відмінних від нуля чисел. **7.** Перевірте виконання властивостей монотонності дадавання і множення. **9.** Ні. **12.** Кільце, але не поле. **13.** Поле. **14.** Найменше поле.

17. Кільця, але не поля. **18.** а)$\varnothing$; б) -1 та $-3 + 2\sqrt{2}$; в) $\varnothing$; г) $3 - \sqrt{2}$ та $-1 + \sqrt{2}$. **19.** а) $f(x) = (x, 0)$; б) $f(x) = (x, 0)$. **20.** $f(0) = 0$ і $f(a) = 1$ для всіх відмінних від 0 чисел. **21.** Якщо $n = 5q + r$, то $f(n) = \bar{r}$. Якщо $n = 6q + r$, то $f(n) = \bar{r}$. **22.** Поставте у відповідність кожному многочлену його вільний член. **34.** Числа k і l повинні бути взаємно простими.

§ 2.4. Поле комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа

1. 1; -1; i; -i; -i; -1; -i; -1. Якщо $n = 4q + r$, і $0 \leqslant r < 4$, то $i^n = i^r$. **2.** а) $(2i)^n$; б) $2i^{n-1}$. **3.** а) $-238, \frac{14}{5}$; б) $0, \frac{14}{5}$; в) $2, \frac{3}{2}$; г) $\frac{1}{2}, 0$; д) 1, 0; е) 2, 0. **4.** а) $-4+i$; б) $-4-i$. **5.** а) $-4i$; б) $4i$. **6.** $\mathbb{R}$. **7.** а) $Im(z_1)+Im(z_2)=0$, $Im(z_1)-Im(z_2)=0$, $Im(z_1)\cdot Re(z_2)+Re(z_1)\cdot Im(z_2)=0$, $\frac{Re(z_1)}{Im(z_1)} = \frac{Re(z_2)}{Im(z_2)}$; б) $Re(z_1)+Re(z_2)=0$, $Re(z_1)-Re(z_2)=0$, $\frac{Re(z_1)}{Im(z_1)} = \frac{Im(z_2)}{Re(z_2)}$ та $z_1z_2 \neq 0, Re(z_1)\cdot Re(z_2)+Im(z_1)\cdot Im(z_2)=0$ та $z_1z_2 \neq 0$.

8. а) Сума і добуток – завжди; різниця тоді, коли $Im(z)=0$; частка тоді, коли $Re(z)\cdot Im(z)=0$; б) сума і добуток – ніколи; різниця тоді, коли $Im(z)\neq 0$; частка тоді, коли $Re(z)\cdot Im(z)\neq 0$.

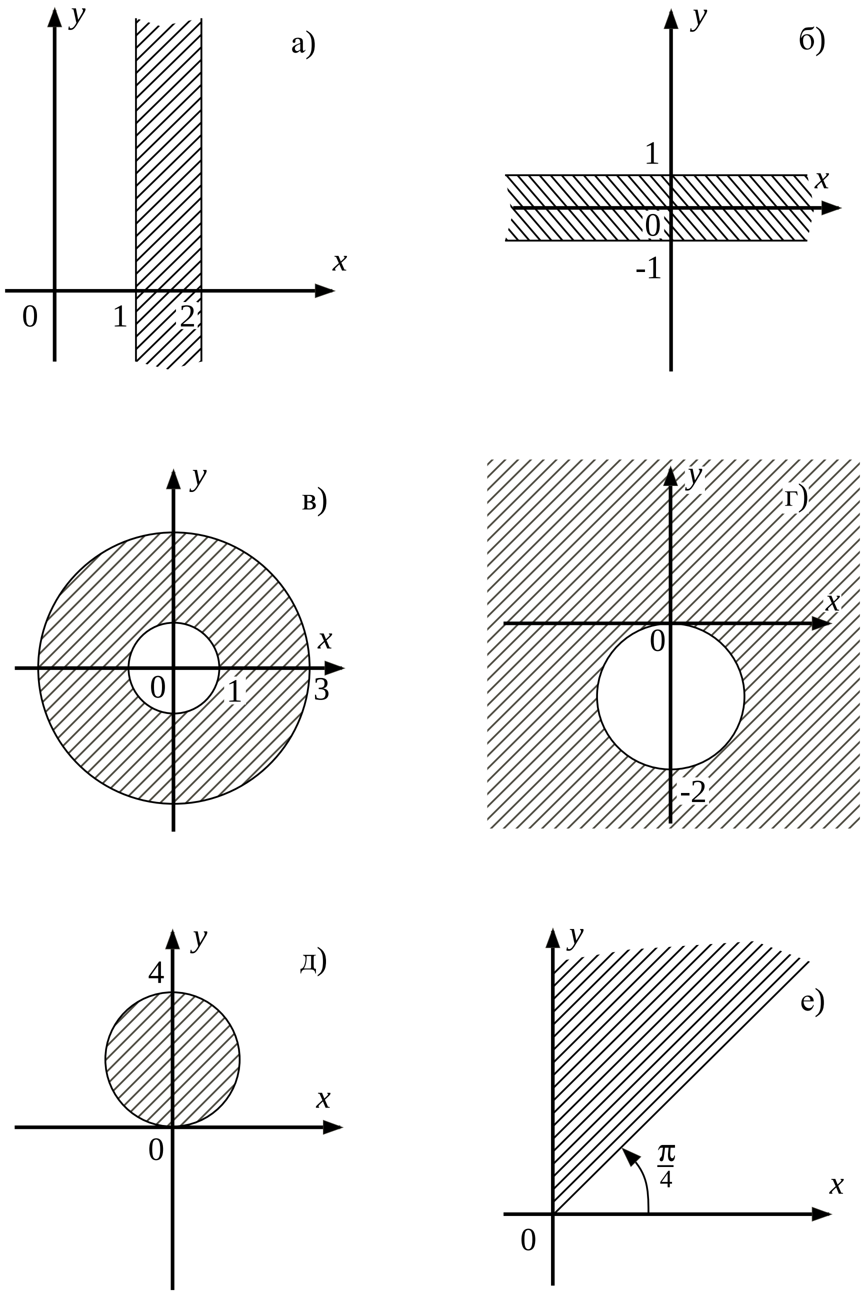
9. а) $1+18i$; б) $4i$; в) $10-11i$; г) 4; д) $52i$; е) $\frac{13-i}{2}$. **10.** а) $Im(z)=0$; б) $|z|=2-Re(z)$. **11.** а) (2,-3); б) (3,-5). **12.** а) $z=5+Im(z)i$; б) $z=2+i$; в) $z=-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$; г) $\varnothing$; д) $z_{1,2}=\frac{1}{4}(1+(-4\pm\sqrt{7})i)$; е) $z_1=-1-i$, $z_2=3-i$. **13.** а) $0, 1, -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $0, \pm 1, \pm i$. **14.** а) $z_1=i$, $z_2=1+i$; б) $z_1=2$, $z_2=1-i$; в) $z_1=z_2=i$, $z_1=z_2=-i$; г) $z_1=1-i$, $z_2=i$.

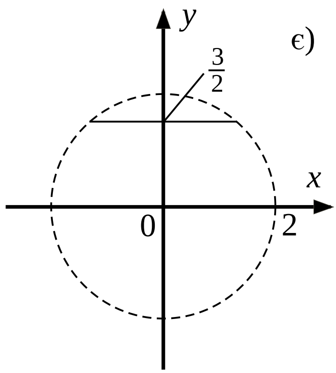
15. $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$, якщо $b>0$; $\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$, якщо $b<0$. **16.** а)$-1+i, -4-i$; б) $1-i, -3+i$; в) $\frac{3-7i}{8}, \frac{1+3i}{8}$; г) $-2i, \frac{-1+3i}{2}$. **25.** $t_1=(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $t_2=(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

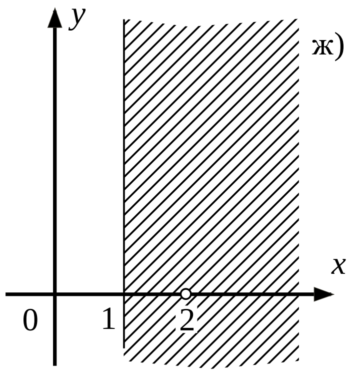
26. $f(x+yi)=(x,0)+(y,0)*(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. **31.** $z^3+1=0$. **32.** Не виконується тільки комутативність операції "$\cdot$".

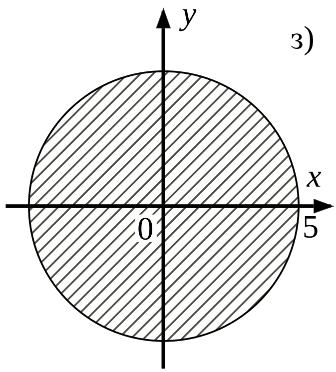
§ 2.5. Геометрична інтерпретація та тригонометрична форма комплексного числа

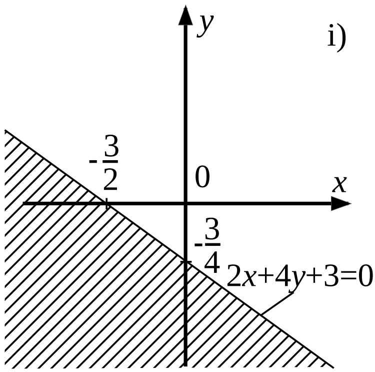
1. а),б) – в обох випадках сума та різниця чисел зобразяться діагоналями квадрата, утвореного радіусами-векторами точок, які зображають числа z_1 і z_2. **2.** а) $1, \frac{\pi}{2}$; б) $1, \frac{11\pi}{6}$; в) $5, \pi$; г) $\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}$; д) $2, \frac{4\pi}{3}$; е) $1, \frac{3\pi}{4}$. **4.** а) Вектори, що зображають числа z_1 і z_2, мають однаковий напрям; б) вектори, що зображають числа z_1 і z_2, мають протилежний напрям. **5.**


а)
y
x
0
1
2
б)
y
x
1
0
-1
в)
y
x
0
1
3
г)
y
x
0
-2
д)
y
x
4
0
е)
y
x
0
$\frac{\pi}{4}$









6. а),б) – В прямокутному трикутнику гіпотенуза не менша за катет; в) в прямокутному трикутнику гіпотенуза не більша за суму катетів.

7. а) Сторона трикутника не менша за різницю двох інших сторін та не більша за їх суму; б) сума квадратів діагоналей паралелограма рівна сумі квадратів його сторін; в) квадрат однієї сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох його інших сторін; г) діагоналі паралелограма рівні.

8. в) $\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}$; г) $5^8(\cos 8\alpha+i\sin 8\alpha)$, де $\alpha=-\arccos\frac{3}{5}$; д) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}}(\cos\frac{11\pi}{20}+i\sin\frac{11\pi}{20})$; є) $-\frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$; ж) $-\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$. **9.** а) $arg(z)\in(\pi,2\pi)$; б) $arg(z)\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$; в) $arg(z)\in(\pi+\frac{\pi}{12},\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12})$; г) $arg(z)\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$.

10. а) $2(\cos(\frac{\pi}{12}+\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{12}+\alpha))$; б) $-\frac{3^8}{2^{971}\sqrt{3}}(-1+i\sqrt{3})$; в) $-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta}(\cos(2\beta-\theta)+i\sin(2\beta-\theta))$; г) $2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}(\cos n(\frac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin n(\frac{\pi}{2}-\alpha))$; д) $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos n\frac{\alpha}{2}+i\sin n\frac{\alpha}{2})$; е) 4^{2001}. **11.** а) -4; б) 2. **12.** а) Якщо $\alpha\neq 0$, то $arg(w)=\frac{\pi}{2}+\frac{3\alpha}{2}$; при $\alpha=0$ аргумент невизначений; б) якщо $0\leqslant\alpha<\pi$, то $arg(w)=\frac{3\alpha}{2}$; якщо $\pi<\alpha<2\pi$, то $arg(w)=\frac{3\alpha}{2}+\pi$; при $\alpha=\pi$ аргумент невизначений.

13. а) $Re(z) < 0$; б) $Re(z) < 0$ та $Im(z) < 0$; в) $x_0 < Re(z) < x_0 + 2\pi$, де $x_0 \in \mathbb{R}$; г) $|z - i| > 1$. **14.** а) $\frac{3}{2} - 2i$; б) $-1 - i$; в) і; г) розв'язків немає. **15.** а) $1+i$; б) $6+8i, 6+17i$; в) $(-i, -i), (i, i)$; г) $(1, 1)$. **16.** а) $|z+c|+|z-c| = 2a$, де $c^2 = a^2 - b^2, a > b$; б) $|z+c|-|z-c| = 2a$, де $c^2 = a^2 + b^2$; в) $z^2 - \bar{z}^2 = 4a^2 i$; г) $|z - a||z + a| = a^2$.

17. а), б) – застосуйте метод математичної індукції або подайте вираз в дужках в тригонометричній формі. **18.** Запишіть комплексні числа в алгебраїчній формі. **25.** Використати формули Муавра та бінома Ньютона для обчислення числа $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$. **26.** а) і б) зручно обчислювати одночасно, використавши вираз виду $S_2 + iS_1$; аналогічно поступити з в) і г). **27.** При обчисленні даних сум пропонуємо застосувати формули Муавра та бінома Ньютона для обчислення степеня комплексного числа. Наприклад, для а) і б) зручно взяти число $z = 1 + i\sqrt{3}$.

§ 2.6. Добування кореня з комплексного числа

1. а) 5; на одиничному колі, в вершинах правильного п'ятикутника, одна з яких в точці $(1, 0)$; б) 4; на одиничному колі, в вершинах квадрата; в) 6; на колі радіуса 2 з центром в початку координат, в вершинах правильного шестикутника, одна з яких в точці $(2, 0)$; г) 4; на колі радіуса $\sqrt{2}$ з центром в початку координат, в вершинах квадрата, одна з яких в точці $(1, 1)$. **2.** $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_{n-k} = 1$; лежать симетрично відносно осі Ox на одиничному колі. **3.** Кожен корінь n-го степеня з числа 5 дорівнює добутку дійсного числа $\sqrt[n]{5}$ на один із коренів n-го степеня з одиниці. **4.** а) $z_0 \in \mathbb{R}$; б) $z_0 = 0$ або $z_0 > 0, n = 1$ або $z_0 > 0, n = 2$; в) $z_0 \notin \mathbb{R}$. **5.** а) Ні; б) так. **6.** Хибна.

7. $z \in \{\pm(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}), \pm(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})\}$.

8. $z \in \{(2 + i)\varepsilon_k | \varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}, 0 \leqslant k \leqslant 5\}$. **9.** 4 – п'ятого і 2 – шостого степеня.

10. а) $\{-2(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2})\}$; б) $\{\pm\sqrt{2}, \sqrt{2}(\pm 1 \pm \sqrt{3}\})$; в) $z_k = -\varepsilon_k$, де ε_k корінь 7-го степеня з одиниці; г) $z_k = \cos\frac{3\pi+4k\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi+4k\pi}{16}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 7$.

11. а) $z_k = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}(\cos\frac{17\pi+24k\pi}{36} + i\sin\frac{17\pi+24k\pi}{36}), \quad 0 \leqslant k \leqslant 2$;

б) $\{\pm(3 - i\sqrt{3}), \pm(\sqrt{3} + 3i)\}$; в) $\{\pm(\sqrt{3} + i), \pm(1 - i\sqrt{3})\}$;

г) $z_k = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}(\cos\frac{19\pi+24k\pi}{72} + i\sin\frac{19\pi+24k\pi}{72}), \quad 0 \leqslant k \leqslant 5$;

д) $z_k = \frac{1}{\sqrt[16]{2}}(\cos\frac{5\pi+24k\pi}{96} + i\sin\frac{5\pi+24k\pi}{96}), \quad 0 \leqslant k \leqslant 7$;

е) $z_k = \sqrt{2}(\cos\frac{(8k-1)\pi}{32} + i\sin\frac{(8k-1)\pi}{32}), \quad 0 \leqslant k \leqslant 7$;

є) $z_k = 2(\cos\frac{(6k-1)\pi}{30} + i\sin\frac{(6k-1)\pi}{30}), \quad 0 \leqslant k \leqslant 9$;

ж) $z_k = \sqrt[n]{2}(\cos\frac{(8k+1)\pi}{4n} + i\sin\frac{(8k+1)\pi}{4n}), 0 \leqslant k \leqslant n$.

12. а) $\{-1+i, \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i, \frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\}$;
б) $\{2-i+\sqrt[3]{4}(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18})\varepsilon_1^k | \varepsilon_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 0\leqslant k\leqslant 2\}$;
в) $\{\sqrt[16]{2}(\cos\frac{\pi}{32}+i\sin\frac{\pi}{32})\varepsilon_1^k | \varepsilon_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad 0\leqslant k\leqslant 7\}$;
г) $\{i+\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16})\varepsilon_1^k | \varepsilon_1=i, \quad 0\leqslant k\leqslant 3\}$.

13. а) $\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1), \quad \sin\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;
б) $\cos\frac{4}{5}\pi=-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1), \quad \sin\frac{4}{5}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

14. а) $z_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{7}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, \quad 0\leqslant k\leqslant 6$;
б) $z_k=\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}, \quad 0\leqslant k\leqslant 7$.

15. а) Якщо $n=1$, то $z=1$; якщо $n=2$, то $z\in\mathbb{R}$; якщо $n>2$, то $z_k=2(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}), \quad 0\leqslant k\leqslant n-1$; б) $z_k=i\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}, \quad 0\leqslant k\leqslant n-1$; в) $z_k=\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}, \quad 0\leqslant k\leqslant n-1$; г) $z_k=\frac{a}{\sqrt{2}(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n})-1}, \quad 0\leqslant k\leqslant n-1$.

16.

$\cdot$	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_0	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_0
ε_2	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_0	ε_1
ε_3	ε_3	ε_4	ε_5	ε_0	ε_1	ε_2
ε_4	ε_4	ε_5	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3
ε_5	ε_5	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4

17. а) 0; -1; б) 0; 1; в) 0; 1; г) 0; $(-1)^{k-1}$. **18.** $z=3$, якщо $n\,\vdots\,3$ і $z=0$ – в противному випадку. **19.** а) Немає; б) $\varepsilon_5, \varepsilon_{10}$; в) $\varepsilon_3, \varepsilon_6, \varepsilon_9, \varepsilon_{12}$; г) немає. **21.** а) 1; 1; б) -1; 1;
в) $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{8\pi}{15}+\cos\frac{14\pi}{15}+\cos\frac{16\pi}{15}+\cos\frac{22\pi}{15}+\cos\frac{26\pi}{15}+\cos\frac{28\pi}{15}$; 1;
г) $\sum\cos\frac{2k\pi}{n}$, де $(k,n)=1$ і $0\leqslant k\leqslant n-1$; 1.

31. а) 0, якщо $k \not\vdots\, n$ і n, якщо $k\,\vdots\, n$; б) $\frac{2}{1-\varepsilon}$; в) $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, якщо $\varepsilon\neq 1$, і $\frac{n(n+1)}{2}$, якщо $\varepsilon=1$; г) $-\frac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$, якщо $\varepsilon\neq 1$, і $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, якщо $\varepsilon=1$.

Розділ 3: Сиситеми лінійних рівнянь

§ 3.1. Системи лінійних рівнянь та їх елементарні перетворення. Поняття матриці. Метод Гаусса

1. а) Ні; б) так; в) так; г) так. **2.** Так. **3.** Так. **4.** Так.

5. а) $x_1=1, \quad x_2=-1, \quad x_3=3$; б) $x_3=2x_2-x_1, \quad x_4=1, x_1,x_2\in\mathbb{R}$; в) $x_1=2-x_4, \quad x_2=-3+x_4, \quad x_3=1-x_4, \quad x_4\in\mathbb{R}$; г) $x_1=1, \quad x_2=2, \quad x_3=-2$; д) система несумісна; е) $x_1=x_2=x_3=x_4=0$; є) $x_1=\frac{7}{6}x_5-x_3, \quad x_2=\frac{5}{6}x_5+x_3, \quad x_4=\frac{x_5}{3}, \quad x_3,x_5\in\mathbb{R}$; ж) $x_1=14-\frac{79}{4}x_4-\frac{9}{4}x_3, \quad x_2=12-\frac{69}{4}-\frac{7}{4}x_3, \quad x_5=-4+6x_4, \quad x_3,x_4\in\mathbb{R}$; з) $x\in$

$\{1,-1\}$, $y \in \{2,-2\}$, $z \in \{3,-3\}$; к) $x_1 = 3$, $y_1 = 4$; $x_2 = -3$, $y_2 = -4$; л) $x_1 = 16 - \frac{83}{4}x_4$, $x_2 = 12 - \frac{69}{4}x_4$, $x_3 = 0$, $x_4 \in \mathbb{R}$, $x_5 = 6x_4 - 4$.

6. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ – у полі $\mathbb{Z}_3$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$ – у полі $\mathbb{Z}_5$. **7.** Система несумісна у полі $\mathbb{Z}_5$; $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 3$ – у полі $\mathbb{Z}_7$. **8.** Система несумісна як в полі $\mathbb{Z}_3$, так і в полі $\mathbb{Z}_7$.

9. а) $x_1 = i$, $x_2 = 2i$, $x_3 = 3$; б) система несумісна. **10.** $a \neq -1$. **11.** $a \in \{-\frac{1}{4}, 0\}$. **12.** $a = 5$. **13.** Якщо $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \neq 0$, то $x_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda+2}$, $x_2 = \frac{1}{\lambda+2}$, $x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$; якщо $\lambda = 1$, то загальним розв'язком системи буде $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, де $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$; якщо $\lambda = -1$, то система розв'язків не має. **16.** $x_1 = \frac{a-c_2}{a-b}$, $x_2 = \frac{c_2-c_3}{a-b}$, $x_3 = \frac{c_3-c_1}{a-b}$, $x_4 = \frac{c_4-b}{a-b}$. Від 2-го, 3-го, 4-го рівнянь відняти 1-ше рівняння помножене на b.

17. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$. До першого рівняння додати останні і перетворене перше рівняння відняти від 2-го, 3-го, 4-го рівнянь, помножених на $\lambda + 3$ (послідовно).

18. Наприклад, якщо $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок: $x_1 = \frac{abc-2bc+b+c-a}{D}$, $x_2 = \frac{abc-2ac+a+c-b}{D}$, $x_3 = \frac{abc-2ab+a+b-c}{D}$.

§ 3.2. Арифметичний векторний простір. Лінійна залежність векторів

1. а) 8; б) 27; в) 125; г) нескінченна множина. **2.** а) Лінійно залежна; б) лінійно залежна; в) лінійно незалежна; г) лінійно незалежна. **3.** а) вектор є нульовим (ненульовим); б) вектори колінеарні (неколінеарні); в) вектори компланарні (некомпланарні); г) хоча б три вектори лежать в одній площині або один з векторів колінеарний до суми трьох інших (таких векторів немає). **4.** а) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$;

$\vec{a}_1 = (1,1,1,1), \vec{a}_2 = (2,1,0,3), \vec{a}_3 = (1,0,1,1), \vec{a}_4 = (3,2,1,0)$;
$\vec{p}_1 = (1,2,1,3), \vec{p}_2 = (1,1,0,2), \vec{p}_3 = (1,0,1,1), \vec{p}_4 = (1,3,1,0), \vec{b} = (1,3,0,2)$;
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

б) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$;

$\vec{a}_1 = (2,0,1), \vec{a}_2 = (3,1,-2), \vec{a}_3 = (4,-1,0), \vec{a}_4 = (5,-2,5)$,
$\vec{p}_1 = (2,3,4,5), \vec{p}_2 = (0,1,-1,-2), \vec{p}_3 = (1,-2,0,5), \vec{b} = (0,0,0,0)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

5. а) $x_1(2,1,4) + x_2(-3,1,-3) + x_3(1,1,-2) = (-1,6,-8)$;
б) $x_1(2,6,4) + x_2(-1,-1,-2) + x_3(3,1,-2) + x_4(-7,-4,4) = (5,-1,3)$.

6. а) $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$

7. а) $\vec{x} = (0,0,-1)$; б) $\vec{x} = (3,1,-1,-9,0)$. **8.** а) $\vec{x} = (0,3,-1)$; б) $\vec{x} = (8+\sqrt{2},0,-9,4)$; в) $\vec{x} = (-2,12,-17)$; г) $\vec{x} = (\frac{1}{2}\sin 3\alpha, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\cos 3\alpha)$. **9.** а) Так; б) ні; в) ні; г) ні. **10.** а) Лінійно незалежна; б) лінійно залежна; в) лінійно незалежна; г) лінійно залежна. **11.** а) $-5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{o}$; б) $\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{o}$; в) $\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \vec{o}$; г) $-3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = \vec{o}$.

12. а) Так; б) так. **13.** $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. **14.** а) $\lambda = 15$; б) $\lambda \in \mathbb{R}$; в) $\lambda \in \mathbb{R}$; г) $\lambda \neq 12$. **15.** $\vec{a}_1, \vec{a}_2; \vec{a}_1, \vec{a}_4; \vec{a}_2, \vec{a}_3; \vec{a}_2, \vec{a}_4$. **16.** а) 6; б) 32; в) 56; г) 264.

23. Припустимо, що існує єдиний набір коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ таких, що $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k$ і система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ лінійно залежна. Тоді $\vec{a}_i$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_k$. Отже, $\vec{a}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_k$, що суперечить умові.

24. Має місце рівність $\alpha_3(\alpha_1\vec{a}_1 - \alpha_2\vec{a}_2) + \alpha_2(\alpha_3\vec{a}_2 - \alpha_1\vec{a}_3) + \alpha_1(\alpha_2\vec{a}_3 - \alpha_3\vec{a}_1) = \vec{o}$.

§ 3.3. Ранг і базис скінченної системи векторів. Ранг матриці

1. 0,1,2. **2.** 1,2,3. **3.** Так. **4.** а) Так; б) ні. **5.** Так. **6.** а) Пряма, що проходить через початок координат і точку (α_1, α_2); б) всі точки площини.

7. а) Точка O (початок координат); б) пряма, що проходить через початок координат і точку $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; в) площина, що проходить через початок координат і точки $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$; г) всі точки простору.

9. $\vec{a}_1, \vec{a}_2$; $\vec{a}_1, \vec{a}_3$; $\vec{a}_2, \vec{a}_3$, де $\vec{a}_1 = (0,1)$, $\vec{a}_2 = (1,0)$, $\vec{a}_3 = (1,1)$.

12. а) 3; б) 4; в) 4; г) 2; д) 4; е) якщо $\lambda = 0$, то ранг дорівнює 3; якщо $\lambda \neq 0$, то ранг дорівнює 4 .

13. Якщо $\lambda = 3$, то ранг дорівнює 2; при $\lambda \neq 3$ ранг рівний 3.

14. а) При $\lambda = \pm 3$ ранг рівний 3; при решті значень λ ранг рівний 4; б) при $\lambda = 1$ ранг рівний 1; при решті значень λ ранг рівний 4.

15. Якщо $\lambda = 0$, то ранг дорівнює 2; якщо $\lambda \neq 0$, то ранг дорівнює 3.

16. а) 2; б) 3; в) 4; г) Якщо $\alpha = \beta = \gamma$, то ранг дорівнює 1; якщо з трьох чисел α, β, γ тільки два числа рівні між собою, то ранг рівний 2; якщо всі три числа α, β, γ попарно різні, то ранг рівний 3.

17. Наприклад, а) $\vec{a}_1, \vec{a}_2$; б) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$. **18.** Так; так.

19. а) Базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2,\quad -\vec{a}_3 = \frac{21}{20}\vec{a}_1 + \frac{17}{20}\vec{a}_2,\quad \vec{a}_4 = \frac{11}{20}\vec{a}_1 + \frac{7}{20}\vec{a}_2$; б) базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,\quad \vec{a}_4 = \frac{17}{31}\vec{a}_1 + \frac{77}{31}\vec{a}_2 - \frac{20}{31}\vec{a}_3$; в) базис $\vec{a}_3, \vec{a}_4,\quad \vec{a}_1 = \vec{a}_3 + \vec{a}_4,\quad \vec{a}_2 = \vec{a}_3 + 2\vec{a}_4$; г) базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2,\quad \vec{a}_3 = \frac{3}{7}\vec{a}_1 + \frac{2}{7}\vec{a}_2,\quad \vec{a}_4 = \frac{1}{4}\vec{a}_1 + \vec{a}_2$. **26.** Ні.

29. Один вектор системи нульовий, а останні лінійно незалежні. **30.** Підсистема r векторів лінійно незалежна, а останні вектори системи нульові.

§ 3.4. Сумісність та визначеність системи лінійних рівнянь

1. а) Ранги рівні; б) ранг розширеної матриці більший за ранг основної. **2.** Ранг матриці системи. **3.** а) Ранг розширеної матриці більший за ранг основної матриці системи; б) ранг основної і розширеної матриці рівний числу невідомих; в) ранг основної і розширеної матриці рівний деякому числу, яке менше числа невідомих. **4.** Так. Тут по дві вільних змінних та залежність між вільними і основними змінними однакова.

5. а) Тільки тоді, коли ранг матриці $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ менший 3; б) ранг $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$ рівний рангу $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ і рівний 2.

6. Тільки тоді, коли коли ранг матриці $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ менший 3.

7. а) Тільки тоді, коли ранг матриці $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{pmatrix}$ менший 4; б) тільки тоді, коли ранг цієї ж матриці менший 3.

9. а) В $\mathbb{Q} : x_1 = x_3 = \frac{1}{2}, x_2 = 0$; в $\mathbb{Z}_5 : x_1 = x_3 = 3, x_2 = 0$; в $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}$: розв'язків немає; б) в $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z} : x_1 = 1, x_3 = x_2 = 0$; в $\mathbb{Z}_2 : x_1 = 1 + x_3 + x_2$, де $x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_2$.

10. а) Система сумісна, визначена; б) сумісна, визначена; в) сумісна, невизначена; г) несумісна; д) сумісна, невизначена, якщо $\lambda \in \{0, 7\}$; сумісна визначена, якщо $\lambda \notin \{0, 7\}$.

11. а) При $\lambda \in \{2, -2\}$; б) при $\lambda \in \{2, 6\}$.

12. а) Система сумісна при будь-якому значенні λ. При $\lambda = 8$ загальний розв'язок має вигляд $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4,\quad x_3 = 3 - 2x_4$, де x_1, x_4 - довільні змінні. При $\lambda \neq 8$ загальний розв'язок має вигляд $x_1 = 0,\quad x_2 = 4 - 2x_4,\quad x_3 = 3 - 2x_4$, де x_4 - вільна змінна. б) При $\lambda = 1$

система несумісна. При $\lambda \notin \{0, 1\}$ система сумісна і її загальний розв'язок $x_1 = \frac{43-8\lambda}{8-8\lambda} - \frac{9}{8}x_3, \quad x_2 = \frac{9\lambda-16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_3, \quad x_4 = \frac{1}{\lambda}$, де x_3 – вільна змінна. При $\lambda = 0$ система сумісна, невизначена: $x_1 = \frac{15-9x_3}{8}, \quad x_2 = \frac{1+x_3}{4}, \quad x_4 = -1$, де x_3 – вільна змінна.

13. а) При $\lambda = 1$ система сумісна, невизначена: $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, де x_2, x_3 – вільні змінні. При $\lambda = -2$ система несумісна. При $\lambda \notin \{1, -2\}$ система сумісна, визначена: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}$. б) При $\lambda = 1$ система сумісна, невизначена;загальний розв'язок $x_1 = -x_2 - x_3$, де x_2, x_3 – вільні змінні; при $\lambda = -2$ система сумісна, невизначена;загальний розв'язок $x_1 = x_3, x_2 = x_3$, де x_3 – вільна змінна. При $\lambda \notin \{1, -2\}$ система сумісна і має єдиний нульовий розв'язок. в) При $\lambda \notin \{1, -3\}$ система має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$. При $\lambda = 1$ система сумісна, невизначена; її загальний розв'язок має вигляд $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, де x_2, x_3, x_4 – вільні змінні. При $\lambda = -3$ система несумісна. г) При $\lambda = 0$ система несумісна. При $\lambda = 1$ система сумісна, невизначена; загальний розв'язок $x_1 = -4 - x_4, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$, де x_4 – вільна змінна. При $\lambda \notin \{0, 1\}$ система визначена і $x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{\lambda}, \quad x_3 = \frac{3}{\lambda}, \quad x_4 = \frac{\lambda-5}{\lambda}$.

14. Ні, системи рівностей не рівносильні. **18.** В обох випадках необхідною і достатньою умовою є вимога, щоб система була однорідною. **22.** а) Якщо $p = 2$, то система несумісна; якщо $p \neq 2$, то система має єдиний розв'язок; б) якщо $p = 3$, то система несумісна; якщо $p \neq 3$, то система має єдиний розв'язок.

§ 3.5. Властивості розв'язків однорідної та неоднорідної систем лінійних рівнянь

1. Тому, що кожна з них є базисом підпростору розв'язків даної системи рівнянь. **2.** Містить $n - r$ лінійно незалежних розв'язків, де n – число невідомих системи, r – ранг її матриці. **3.** $\vec{x} = \vec{a} + \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\vec{a}_{n-r}$, де $\vec{a}$ – один із розв'язків даної системи, $\vec{x}$ – її загальний розв'язок, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-r}$ – фундаментальна система розв'язків відповідної однорідної системи, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}$, n – число невідомих системи, r – ранг її матриці.

4. а) $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ де $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$;

б) $\vec{x} = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$, $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (-1, 0, 0, 1)$.

5. Один. **6.** $\vec{a}_2 = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0})$. **7.** $\vec{a} = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{1})$. **8.** $\vec{a}_2 = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{2})$, $\vec{a}_2 = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0})$.

9. $\vec{a} = (1, 2, 1, -1)$. **10.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

11. а) $\vec{x} = (\lambda_1, \lambda_2, -3\lambda_1 - 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 2\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (1, 0, -3, 2)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, -3, 2)$; б) $\vec{x} = (17\lambda, -25\lambda, 5\lambda, 18\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $\vec{a} = (17, -25, 5, 18)$; в) $\vec{x} = (2x_3 + 8x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4)$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (2, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (8, -2, 0, 1)$; г) $\vec{x} = (8x_3 - 7x_4, -6x_3 + 5x_4, x_3, x_4)$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (8, -6, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (-7, 5, 0, 1)$; д) фундаментальної системи не існує, система має лише один нульовий розв'язок; е) $\vec{x} = (x_2, x_2, -x_2, x_2)$, $x_2 \in \mathbb{R}$; $\vec{a} = (1, 1, -1, 1)$; є) $\vec{x} = (x_3 + x_4 + 5x_5, -2x_3 - 2x_4 - 6x_5, x_3, x_4, x_5)$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, -2, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (5, 6, 0, 0, 1)$; ж) якщо $\lambda = 0$, то $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$; якщо ж $\lambda \neq 0$, то $\vec{x} = (-3x_3 - 4x_4, -2x_3 - 2x_4, x_3, x_4)$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (-3, -2, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (-4, -3, 0, 1)$; з) якщо $\lambda = -1$, то $\vec{x} = (0, x_2, 0, 0)$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $\vec{a} = (0, 1, 0, 0)$; якщо $\lambda = -2$, то $\vec{x} = (x_1, -2x_1 - 2x_3 - 2x_4, x_3, x_4)$, $x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a}_1 = (1, -2, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, -2, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, -2, 0, 1)$; якщо $\lambda \notin \{-1, -2\}$, то фундаментальної системи розв'язків не існує.

12. а) $\vec{a} = (-8, 13, 6, -7)$; б) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, -\frac{3}{2})$; в) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 0, 1)$; г) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$.

13. $\vec{x} = (1 + 2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1, -3 + \lambda_1, 2 + \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ або $\vec{y} = (\frac{2}{3}x_2 - x_4 + 3, x_2, \frac{1}{3}x_2, x_4)$, $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

14. а) $\vec{x} = \frac{1}{11}(9x_4 + 20, 17x_4 - 6, 19x_4 - 8, x_4)$, $x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a} = \frac{1}{11}(20, -6, -8, 0)$; б) $\vec{x} = (3x_4 - 2, 3 - 2x_4, 1, x_4, 0)$, $\vec{a} = (1, 1, 1, 1, 0)$; в) $\vec{x} = (-1 + x_3 + 2x_4, -3 + x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$; $\vec{a} = (0, -2, 1, 0)$; г) $\vec{x} = \frac{1}{4}(4 - 9x_3 - x_4 - 13x_5, 4 - 7x_3 - 3x_4 - 11x_5, 4x_3, 4x_4, 4x_5)$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$; $\vec{a} = (1, 1, 0, 0, 0)$.

15. а) Якщо $\lambda = -3$, то система несумісна; якщо $\lambda \neq -3$, то $\vec{a} = (-\frac{1}{\lambda+3}, \frac{4\lambda+11}{3(\lambda+3)}, -\frac{\lambda+11}{3(\lambda+3)})$; б) якщо $\lambda = 1$, то система несумісна; якщо $\lambda = -2$, то $\vec{x} = (-1 + x_3, -1 + x_3, x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R}$; якщо $\lambda \notin \{1, -2\}$, то $\vec{a} = (-\frac{1}{\lambda-1}, -\frac{1}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1})$;

в) якщо $\lambda \neq 4$, то система несумісна; якщо $\lambda = 4$, то $\vec{x} = (x_1, 3x_1 - 27x_4 + 1, 9x_4 - 7, x_4)$, $x_1, x_4 \in \mathbb{R}$; г) якщо $\lambda = 3$, то система несумісна; якщо $\lambda = 1$, то $\vec{x} = (1 - x_2 - x_3, x_2, x_3)$, $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$; якщо $\lambda \notin \{1, 3\}$, то $\vec{a} = (-1, \frac{\lambda-4}{\lambda-3}, -\frac{1}{\lambda-3})$.

16. а) Наприклад, $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$ Щоб отримати відповідь б), потрібно до приведеної системи приписати ще одне рівняння, яке є лінійною комбінацією рівнянь названої системи.

20. Показати, що ці системи не еквівалентні. **23.** Рядки матриці A не утворюють, рядки матриці B утворюють.

Розділ 4: Матриці та визначники

§ 4.1. Операції над матрицями

1. а) $A+B, \lambda A$ і $A \cdot B$ – $m \times m$-матриці; б) λA – $m \times n$-матриця; $A \cdot B$ – $m \times p$-матриця; $A+B$ – не існує; в) λA – $m \times n$-матриця; $A \cdot B$ і $A+B$ – не існують; г) λA – $1 \times n$-матриця; $A+B$ – не існує; $A \cdot B$ є 1×1-матриця.
2. а) $\begin{pmatrix} -1 & -9 & -10 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -9 & 8 & -9 \end{pmatrix}$. **3.** Всі квадратні матриці другого порядку. **4.** Всі квадратні матриці виду $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$.
5. а) $AB = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $AB = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -14 & -16 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 22 & -33 \end{pmatrix}$; в) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; г) $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; д) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 13 \end{pmatrix}$. **6.** $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} -210 \\ -12 \\ 11 \end{pmatrix}$. **7.** $f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

8. а), б) – Обидві множини є комутативними кільцями з одиницею; в) відносно додавання – абелева група, а відносно множення дана множина не є замкнутою і тому всі властивості кільця, пов'язані з множенням, не мають місця; г) некомутативне кільце без одиниці.

9. а) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

10. а) $AB = BA = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$; б) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 28 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. **11.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 12 & -18 & -6 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

12. а) $f(A) = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 10 \\ 6 & 5 & 11 \\ 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}$; б) $f(A) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -8 \\ -5 & 3 & 10 \\ 11 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

13. а) $\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} a^n & na^n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$;
д) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n \\ 0 & a^n & 0 \\ 2^n & 0 & 0 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$;
ж) $(\frac{\sin 2\alpha}{2})^n \cdot E$. **14.** а) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$; г)
$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$. **15.** а) $X = \begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}$; б) $X_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} a & \frac{2-a^2}{b} \\ b & -a \end{pmatrix}$, де $a, b \in \mathbb{R}$.

§ 4.2. Оборотні матриці. Елементарні матриці та їх застосування

1. а) Так; б) так; в) ні; г) так. **2.** а) Так; б) так; в) ні; г) так. **3.** Ні. **4.** Так. **5.** Так. **7.** а) Ні; б) так; в) так; г) ні.

8. а) $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$;
в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; г) $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

9. а) Всі елементи другого рядка помножаться на 3; всі елементи другого стовпця помножаться на 3; б) до другого рядка додасться четвертий, помножений на 5; до четвертого стовпця додасться другий, помножений на 5.
10. Потрібно дану матрицю помножити зліва (справа) на матрицю
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. **11.**
а) Так; б) ні. **12.** а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 25 & -14 & 12 & -16 \\ -19 & 10 & -8 & 12 \end{pmatrix}$.

13. а) $X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) розв'язку немає; в) $X = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$;

г) $X = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -13 \end{pmatrix}$; д) $X = \begin{pmatrix} 35 & 32 & 49 \\ 15 & 14 & 22 \\ 31 & 29 & 48 \end{pmatrix}$;

е) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. **14.** а) $\vec{x} = (1, -2, 3)$; б) $\vec{x} = (-1, 1, 2)$;

в) $\vec{x} = (1, 2, 2, 0)$; г) $\vec{x} = (1, 2, 3, 4)$. **15.** а) $f(A) = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 7 & 28 & 8 \\ 20 & 23 & 12 \\ 4 & 16 & -9 \end{pmatrix}$;

б) $f(A) = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \\ -4 & 13 & -11 \end{pmatrix}$. **22.**

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2^{n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 2^{n-3} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2^{n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} n & (n-1) & (n-2) & \dots & 2 & 1 \\ (n-1) & (n-1) & (n-2) & \dots & 2 & 1 \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \dots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $\frac{1}{a^n}\begin{pmatrix} a^{n-1} & -ba^{n-2} & -b(a-b)a^{n-3} & \dots & -b(a-b)a^{n-2} \\ 0 & a^{n-1} & a^{n-2} & \dots & -ba(a-b)a^{n-3} \\ 0 & 0 & a^{n-1} & \dots & -ba^2(a-b)a^{n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{n-1} \end{pmatrix}$;

є) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & \dots & -a & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & \dots & (-a)^{n-1} \\ 0 & 1 & -a & \dots & (-a)^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; з) $\frac{1}{a}\begin{pmatrix} (2-n) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$;

і) $\frac{1}{(n-1)a}\begin{pmatrix} (2-n) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (2-n) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & (2-n) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (2-n) \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. **26.** а) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **27.** б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

§ 4.3. Підстановки. Визначники другого і третього порядку та їх застосування

1. а) 8; б) 14. **2.** а) 3; б) 6. **3.** а) $i = 8, k = 3$; б) $i = 3, k = 6$. **4.** а) три перестановки: 132, 213, 321; б) 12 перестановок: $2134, 1324, 1243, \dots, 4231$. **5.** а) парна; $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) парна; $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **6.** $A_3 = \left\{e, \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. **7.**

а) $\psi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\psi \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\varphi \circ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

8. а) 6; б) 2; в) -1; г) $-35\cdot 6^5$; д) a^2+b^2; е) $-\sin\alpha$. **9.** а) $x=\pm 2$; б) $x=y=0$. **10.** Ні. **11.** а) $x=3, y=-1$; б) $x=2, y=-3$.

13. а) Змінить тільки знак на протилежний; б), в) – не зміниться; г) стане спряженим до попереднього. **14.** а) $n(n-1)$; б) $\frac{n(n+1)}{2}$; в) $n(n-1)$; г) $\frac{3n^2-n}{2}$. **15.** $\{0,1,2,\ldots,\frac{n(n-1)}{2}\}$. **16.** $S_3 = A_3 \cup \left\{\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$.

$\circ$	e	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
e	e	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_1	φ_1	φ_2	e	φ_5	φ_3	φ_4
φ_2	φ_2	e	φ_1	φ_4	φ_5	φ_3
φ_3	φ_3	φ_4	φ_5	e	φ_1	φ_2
φ_4	φ_4	φ_5	φ_3	φ_2	e	φ_1
φ_5	φ_5	φ_3	φ_4	φ_1	φ_2	e

17. а) 2; б) 0; в) 8; г) 672; д) 0; е) $-\frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})$. **18.** а) $\{1, -\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})\}$; б) якщо $ab+bc+ac\neq 0$, то $x=0$; якщо $ab+bc+ac=0$, то x – довільне число.

19. а) $x=-\frac{38}{7}$, $y=\frac{36}{7}$; б) $x=\frac{1+2i}{10}$, $y=\frac{3}{20}(1+7i)$; в) $x_1=14\alpha$, $x_2=5\alpha$, $x_3=13\alpha$; г) $x_1=2\alpha$, $x_2=\alpha$, $x_3=\alpha$, де $\alpha\in\mathbb{R}$. **20.** а) $x=3$, $y=-2, z=2$; б) $x=1, y=2, z=-1$. **22.** а) $S=\frac{15}{2}$; б) $S=2$. **23.** а) $0,\pm 2$; б) $0,\pm 1$; в) $0,\pm 2$. **24.** а) Якщо всі елементи рівні тільки 1 або тільки -1, то визначник рівний 0. Нехай серед елементів визначника є 1 та -1. Тоді визначник буде рівним одному з чисел $0,\pm 4$. б) $0,\pm 1,\pm 2$; в) $0,\pm i,\pm 2i$. **33.** а) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$; б) 0.

34. а) Якщо $\lambda\notin\{-4,8\}$, то система має єдиний розв'язок $x=-\frac{1}{\lambda-8}=y$; якщо $\lambda=8$, то система розв'язків не має; якщо $\lambda=-4$, то система має безліч розв'язків; б) якщо $\lambda\notin\{-2,10\}$, то система має єдиний розв'язок $x=\frac{7-4\lambda}{(\lambda-2)(\lambda-10)}$, $y=\frac{-\lambda-23}{(\lambda-2)(\lambda-10)}$; якщо $\lambda\in\{-2,10\}$, то система розв'язків не має.

§ 4.4. Визначник n-ого порядку та його властивості

1. плюс, плюс. **2.** а) 5, плюс; б) 7, плюс; д) $n, (-1)^{n-1}$; е) $n, (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$. **3.** $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$; $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$; $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$. **4.** $10a^4; -5a^3$. **5.** а) $i=1, j=6, k=2$; б) $i=5, j=3, k=7$. **6.** а) $a_{n-j+1,n-i+1}$; б) $a_{n-i+1,n-j+1}$. **7.** Якщо n парне, то $k=\frac{n^2}{2}, l=\frac{n^2}{2}$; якщо n непарне, то $k=\frac{n^2+1}{2}, l=\frac{n^2-1}{2}$. **8.** а) плюс; б) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **9.** а) помножиться на $(-1)^n$; б) не зміниться; в) збільшиться в $(n!)^2$ раз; г) не зміниться; д) не зміниться; е) стане комплексно-спряженим до даного. **10.** а), в), г) – не зміниться; б) помножиться на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **11.** а) помножиться на

$(-1)^{n-1}$; б) помножиться на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **12.** а), б) не зміниться; в) стане рівним нулю; г) при парному n стане рівним нулю, а при непарному n - подвоїться.

13. 20. **14.** а) $(n-1)!(n-1)$; б) $(n-1)!(n-j)$. **15.** а) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}2^n$; б) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$; в) 0; г) 60; д) 23; е) 0; є) $n!$; ж) 0. **16.** а) $\{2,-3,4\}$; б) $\{0,3,-3\}$; в) $\{-2,3,4,5\}$; г) $\{1,2,\dots,n\}$; д) $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$; е) $\{0,1,\dots,n-1\}$; є) $\{a_1,a_2,\dots,a_{n-1}\}$; ж) $\{1,2,\dots,n-1\}$. **17.** а) 37; б) 35; в) 0; г) 0; д) 0; е) 4!; є) 665; ж) 1875. **18.** а) 0; б) 2^{n-1}. **26.** 0.

27. $4\sin^4\varphi$. **30.** а) 4; б) 2.

§ 4.5. Мінори і алгебраїчні доповнення та їх зв'язок з рангом матриці

1. $M_{11}=12$; $M_{12}=8$; $M_{13}=8$; $M_{21}=-5$; $M_{22}=2$; $M_{33}=2$; $M_{23}=-2$; $M_{31}=-3$. **2.** $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{61} & a_{62} & a_{64} & a_{65} \end{pmatrix}$. **3.** 16. **4.** 30. **5.** 10. **6.** $\left(C_n^k\right)^2$. **7.** а) $A_{21}=13$, $A_{22}=10$, $A_{23}=14$; б) $A_{13}=-60$, $A_{23}=57$, $A_{33}=-15$, $A_{43}=-99$. **8.** а) $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$; б) $4a-b-c-d$.

9. $f(x)=a_{11}x^3+(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix})x^2+(A_{22}+A_{33}+A_{44})x+D$. **10.** 160. **11.** а) 239; б) 10. **12.** а) 633; б) 40; в) 124; г) 106; д) 2460; е) -13; є) -2420; ж) 64. **13.** а) na^{n-1}; б) a^{n-1}; в) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}na^{n-1}$; г) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^{n-1}$. **14.** а) 2; б) 2; в) 3; г) 2; д) 4; е) 3. **15.** а) якщо $a=0$, то $r=2$; якщо $a\neq 0$, то $r=3$; б) якщо $a=1$, то $r=1$; якщо $a\neq 1$, то $r=3$; в) якщо $a=1$, то $r=1$; якщо $a=-3$, то $r=3$; якщо $a\neq 1$ і $a\neq -3$, то $r=4$; г) якщо $a=0$, то $r=2$; якщо $a\neq 0$, то $r=3$. **16.** а) -384; б) 270.

23. а) $2^n\cdot|A|^2$; б) 0; в) $|A|^2$; г) $(-1)^n|A|^2$. **24.** Вказівка: подайте даний визначник у вигляді добутку визначників $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & 0 \end{vmatrix}$ та $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; $n>2$. **26.** Вказівка: використайте попередню задачу і тотожність $(1-\alpha\varepsilon_1)(1-\alpha\varepsilon_2)\cdots(1-\alpha\varepsilon_n)=1-\alpha^n$, де $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ – всі значення кореня n-го степеня з одиниці; $(1-\alpha^n)^{n-1}$. **27.** Вказівка: Обчисліть $D^2=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^n$. Тоді $D=i^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n^{\frac{n}{2}}$.

§ 4.6. Обчислення визначників

8. а) 2^{n-1}; б) якщо $a_i = a_j$ для деяких $i \neq j$, то визначник рівний нулю, оскільки у нього 2 рядки однакові; якщо для деякого $1 \leqslant i \leqslant n$ виконується рівність $a_i = a$, то $(a_1 - 1)\cdots(a_{i-1} - 1)a(a_{i+1} - 1)\cdots(a_n - 1)$; якщо всі елементи a_i та a попарно різні, то $a(a_1 - a)\cdots(a_n - a)(\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1 - a} + \cdots + \frac{1}{a_n - a})$; Вказівка: Спочатку відніміть перший рядок від кожного з решти рядків, потім винесіть з кожного з стовпців починаючи з першого $a - a_1, a_2 - a, a_3 - a, \ldots, a_n - a$ відповідно і нарешті відніміть від першого стовпця всі інші стовпці. Після цього отримаємо визначник трикутної форми. в) $-c_1 \cdots c_n(\frac{a_1 b_1}{c_1} + \cdots + \frac{a_n b_n}{c_n})$; г) $b_1 b_2 \cdots b_n$; д) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1(a_2 - 2)\cdots(a_2 - n)$; е) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_1 \cdots a_n$; є) $b^{\frac{n(n-1)}{2}}(a_1 b^{n-1} + a_2 b^{n-2} + \cdots + a_n)$; ж) $a_1 a_2 \cdots a_n(1 + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n})$.

9. а) $\frac{6^{n+1} - 1}{5}$; Вказівка: Спочатку розкладіть визначник за елементами першого стовпця. Отримаємо $\Delta_n = 7\Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}$ або $\Delta_n - 6\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - 6\Delta_{n-2}$. Оскільки $\Delta_2 - 6\Delta_1 = 1$, то $\Delta_n = 6\Delta_{n-1} + 1$. Далі неважко встановити, що $\Delta_n = 6^n + 6^{n-1} + \cdots + 6 + 1$. б) $x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + (n-1)x + n$; в) $(n-1)!$; г) $4^{n+1} - 3^{n+1}$; д) $x_0 x_1 \cdots x_n(\frac{a_0}{x_0} - \frac{a_1}{x_1} + \cdots + (-1)^n \frac{a_n}{x_n})$; е) $b_1 \cdots b_n(\frac{a_1^2}{b_1^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n^2})$.

10. а) $\cos n\alpha$; б) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$; в) $\frac{5^{n+1} - 3^{n+1}}{2}$; г) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y$; д) $3^{n+1} - 2^{n+1}$; е) $3^n(n+1)$.

11. а) $(x+a-2)(x+a-3)\cdots(x+a-n)$; б) $a_1(x+a-a_2)(x+a-a_3)\cdots(x+a-a_n)$; в) $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$; г) $(x+a_1+\cdots+a_n)(x-a_1)\cdots(x-a_n)$; д) $a_0 \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x - a_i)$; е) $\prod\limits_{0<j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$. Вказівка: відніміть спочатку від останнього стовпця передостанній і винесіть за знак детермінанта добуток $x_n - x_{n-1}$. аналогічно ви зможете винести добутки $x_n - x_{n-2}, \ldots, x_n - x_1$. Потім аналогічно від передостаннього стовпця відніміть третій від кінця і т.д. Нарешті віднімаючи від другого стовпця перший ви винесете $x_2 - x_1$.

12. а) $(1 + x + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x}{n})n!$; б) $x^{n-1}(x + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i)$; в) $\prod\limits_{i=1}^{n}(c_i - a_i b_i)(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i - a_i b_i})$; г) 0 при $n > 2$; д) $\prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_i)(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x - a_i})$; е), є) 0 при $n > 2$; ж) $\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i - a_i})$.

13. а) $x_1 x_2 \cdots x_n \prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$; б) $((x_1 - 1)x_2 \cdots x_n + \prod\limits_{i=2}^{n}(x_i - 1)) \cdot \prod\limits_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$; в) $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod\limits_{i<j}(\sin\frac{\alpha_i + \alpha_j}{2} \cdot \sin\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2})$; г) $\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i - 1)\prod\limits_{i>j}(x_i -$

$x_j)$.

14. а) $-6(n-3)!$; б) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+x(2-\frac{1}{2^n}))$; в) $x_1\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-a_{i-1,i})$; г) $a^n-(-b)^n$; д) $\frac{na^{n-1}}{2}(2a+n-1)$; е) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$; є) 0; ж) $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_ia_{2n+1-i}-b_ib_{2n+1-i})$.

15. Подайте визначник у вигляді добутку двох визначників.

19. а) при $n\leqslant 2$ визначник рівний 2, а при $n>2$ – нулю; б),в),г) 0 при $n\geqslant 3$; д) $n!\prod\limits_{i>j}(i-j)$; е) 1; є) $n(-1)^{n-1}$; ж) $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. **20.** а) $C_n^1C_n^2\cdots C_n^n\prod\limits_{0\leqslant j<i\leqslant n}(a_j-a_i)(b_i-b_j)$; б) $\frac{3\prod\limits_{i=1}^{n-1}i!}{\prod\limits_{i=n}^{2n-1}i!}$; в) $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$.

21. $(a^2+1)^2$. **22.** $(-\lambda)^n-(-1)^nba^{n-1}$. **23.** $\begin{vmatrix}5&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&5\end{vmatrix}=36$. **24.** 0; всіх визначників $n!$.

§ 4.7. Розв'язування систем рівнянь за правилом Крамера

1. Матриця n-го порядку є оборотною тоді і тільки тоді, коли її ранг дорівнює n, а її визначник відмінний від нуля. **2.** Також є трикутною. **3.** $|A|=\pm1$. **4.** 0. **5.** Визначник, складений з коефіцієнтів при невідомих у рівняннях даних прямих, відмінний від нуля. **6.** Визначник, складений з коефіцієнтів при невідомих у рівняннях даних площин, відмінний від нуля. **7.** У визначнику, складеному з коефіцієнтів при невідомих у рівняннях даних площин, всі три рядки є пропорційними. **8.** Так. **9.** а) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9&-6\\-8&5\end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{18-5i}\begin{pmatrix}5+4i&-3-i\\-1+i&2-3i\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&-2&7\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$; г) $-\frac{1}{34}\begin{pmatrix}-42&-15&-58\\24&11&-38\\22&3&-32\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}1&-3&11&-38\\0&1&-2&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$;
е) $\begin{pmatrix}-5&1909&-4&-1162\\-6&-2265&5&1329\\0&-4&0&3\\0&3&0&-2\end{pmatrix}$; є) $-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&-i&1&-i\\-1&1&-1&1\\-1&-i&1&i\end{pmatrix}$;
ж) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$. **10.** а) $X=\frac{1}{43}\begin{pmatrix}-8&57\\-7&23\end{pmatrix}$;

б) $X = \begin{pmatrix} (-1+2\sqrt{2})+(3-3\sqrt{2})i & (-4+\sqrt{2})+(7-\sqrt{2})i \\ (2-\sqrt{2})-(3-\sqrt{2})i & (1-2\sqrt{2})-(1-2\sqrt{2})i \end{pmatrix}$;
в) $X = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} -39 & -6 & -54 \\ 78 & 6 & 80 \\ -39 & 2 & -34 \end{pmatrix}$; г) $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. **11.** а) $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $Y = 2X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbb{R})$. **12.** а) $(3,0,2)$; б) $(0,0,0)$; в) $(2,0,2,2)$; г) $(2,-\frac{37}{2},2,-\frac{9}{2})$; д) $(-1,0,2,-1,0)$; е) $(1,0,-2,-1,2)$. **13.** $a \in \{-2,1\}$.

16. $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, y = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, z = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab},$.

24. а) $\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} y_1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ y_4 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$;
в) $\begin{vmatrix} y_1x_1 & y_1 & x_1 & 1 \\ y_2x_2 & y_2 & x_2 & 1 \\ y_3x_3 & y_3 & x_3 & 1 \\ y_4x_4 & y_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. **26.** а) Якщо $n = 2k$, то система невизначена; якщо $n = 2k+1$, то система має єдиний розв'язок; б) $x_1 = x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 1, x_2 = 2-n$; в) $x_i = (-1)^i, 1 \leqslant i \leqslant 100$; г) $x_i = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}{n-1} - a_i, 1 \leqslant a_i \leqslant n$. **27.** $\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, 0$. **28.** $x_1 = \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}a, x_2 = \frac{n^2-2n+2}{(n-1)^2}a, x_3 = x_4 = \ldots = x_n = a$. **29.** Осіб було $m = n-1$, а початкова сума грошей рівна $(n-1)^2 a$ гривень.

§ 4.8. Вибрані задачі

13. 0. **15.** а) 5; б) 4. **16.** а) Якщо $a = 1, b = \frac{1}{2}$, то $r = 2$; у всіх інших випадках $r = 3$; б) якщо $a = 1, b = c = d$, то $r = 1$; у всіх інших випадках $r = 3$. **18.** а) $\frac{(-1)^n(4^{n+1}-1)}{3}$; б) $n!$; в) якщо $a = b$, то $a^n(n-1)$; якщо $a \neq b$, то $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$; г) $1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cdots+\cos^n\alpha$; д) $\sum\limits_{i=0}^{n}((-1)^i a_i \prod\limits_{j=0}^{i} x_j)$; е) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$; є) $\frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}$; ж) $(\prod\limits_{i-1}^{n} x_i)(1+\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i})$.

Логічні закони

$\overline{(\overline{p})} \longleftrightarrow p$	– подвійного заперечення
$\overline{p \wedge \overline{p}}$	– протиріччя
$p \vee \overline{p}$	– виключеного третього
$p \wedge p \longleftrightarrow p$	– ідемпотентності кон'юнкції
$p \vee p \longleftrightarrow p$	– ідемпотентності диз'юнкції
$p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$	– комутативності кон'юнкції
$p \vee q \longleftrightarrow q \vee p$	– комутативності диз'юнкції
$(p \wedge q) \wedge r \longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	– асоціативності кон'юнкції
$(p \vee q) \vee r \longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$	– асоціативності диз'юнкції
$(p \wedge q) \vee r \longleftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	– дистрибутивності диз'юнкції відносно кон'юнкції
$(p \vee q) \wedge r \longleftrightarrow p \wedge r \vee q \wedge r$	– дистрибутивності кон'юнкції відносно диз'юнкції
$\overline{p \wedge q} \longleftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$	– де Моргана
$\overline{p \vee q} \longleftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$	– де Моргана
$p \longrightarrow q \longleftrightarrow \overline{q} \longrightarrow \overline{p}$	– контрапозиції
$(p \longrightarrow q) \wedge p \longrightarrow q$	– відокремлення
$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$	– силогізму
$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge \overline{q} \longrightarrow q)$	– протиріччя з припущенням
$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge \overline{q} \longrightarrow \overline{p})$	– протиріччя з умовою
$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (p \wedge \overline{q} \longrightarrow r \wedge \overline{r})$	– протиріччя з раніше відомим фактом або аксіомою
$\overline{(\forall x)p(x)} \longleftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}$	– заперечення квантора загальності
$\overline{(\exists x)p(x)} \longleftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}$	– заперечення квантора існування
$(\forall x)(\forall y)p(x,y) \longleftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$	– комутативність кванторів загальності
$(\exists x)(\exists y)p(x,y) \longleftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x,y)$	– комутативність кванторів існування
$(\exists x)(\forall y)p(x,y) \longrightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$	– некомутативність кванторів існування та загальності

$$(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \longleftrightarrow (\forall x)p(x) \wedge (\forall x)q(x)$$
$$(\exists x)(p(x) \vee q(x)) \longleftrightarrow (\exists x)p(x) \vee (\exists x)q(x)$$
$$(\forall x)(p(x) \longrightarrow q(x)) \longrightarrow ((\forall x)p(x) \longrightarrow (\forall x)q(x))$$
$$(\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \longrightarrow (\exists x)p(x) \wedge (\exists x)q(x)$$
$$(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \longrightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$$

Закони алгебри множин

$\varnothing \subset A \subset U$	$A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup U = U$	$A \cap U = A$
$A \setminus A = \varnothing$	$A \setminus \varnothing = A$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A' \overset{df}{=} U \setminus A$	$\varnothing' = U, \quad U' = \varnothing, \quad (A')' = A$
$A \cap A' = \varnothing$	$A \cup A' = U$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$(a,b) \overset{df}{=} \{a, \{a,b\}\}$	$A \times B \overset{df}{=} \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
$A \neq B \longrightarrow A \setminus B \neq B \setminus A$	$A \neq B \longrightarrow A \times B \neq B \times A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
$A \div B \overset{df}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	$(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$
$A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$	$(B \cup C) \times A = B \times A \cup C \times A$
$A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$	$(B \cap C) \times A = B \times A \cap C \times A$
$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$	$(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$

Комплексні числа

$$(a+bi)+(c+di) \stackrel{df}{=} (a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)\cdot(c+di) \stackrel{df}{=} (ad+bc)+(ac-bd)i$$

$$(a+bi)^n = (a^n - C_n^2 a^{n-2} + C_n^4 a^{n-4} b^4 - \ldots) + (C_n^1 a^{n-1} b - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots)i$$

$$\tfrac{a+bi}{c+di} = \tfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \tfrac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$
$$z = a+bi \longrightarrow \overline{z} \stackrel{df}{=} a-bi \wedge z+\overline{z} = 2a \wedge z\cdot\overline{z} = a^2+b^2$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}, \quad \overline{\left(\tfrac{z_1}{z_2}\right)} = \tfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\tfrac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \tfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}), \quad 0 \leqslant k < n.$$

Алфавіти

Латинський алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
Aa	а	Nn	ен
Bb	бе	Oo	о
Cc	це	Pp	пе
Dd	де	Qq	ку
Ee	е	Rr	ер
Ff	еф	Ss	ес
Gg	же	Tt	те
Hh	аш	Uu	у
Ii	і	Vv	ве(фау)
Jj	йот	Ww	ве
Kk	ка	Xx	ікс
Ll	ель	Yy	ігрек
Mm	ем	Zz	зет(цет)

Грецький алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
$A\alpha$	альфа	$N\nu$	ні
$B\beta$	бета	$\Xi\xi$	ксі
$\Gamma\gamma$	гама	Oo	омікрон
$\Delta\delta$	дельта	$\Pi\pi$	пі
$E\varepsilon$	епсилон	$P\rho$	ро
$Z\zeta$	дзета	$\Sigma\sigma$	сигма
$H\eta$	ета	$T\tau$	тау
$\Theta\theta$	тета	$\Upsilon\upsilon$	іпсилон
$I\iota$	йота	$\Phi\varphi$	фі
$K\kappa$	капа	$X\chi$	хі
$\Lambda\lambda$	ламбда	$\Psi\psi$	псі
$M\mu$	мі	$\Omega\omega$	омега

Основні позначення

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множина всіх натуральних чисел
$\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел
$\mathbb{Z}^+$ — множина всіх цілих додатних чисел
$n\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, які діляться на натуральне n
$\mathbb{Z}_n$ — множина всіх остач від ділення цілих чисел на n
$\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних чисел
$\mathbb{Q}^+$ — множина всіх додатних раціональних чисел
$\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел
$\mathbb{R}^-$ — множина всіх від'ємних дійсних чисел
$\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел
$p, q, r, s, t, \ldots$ — висловлення
$p(x), q(x), r(x), \ldots$ — одномісні предикати від змінної x
$p(x, y), q(x, y), r(x, y), \ldots$ — двомісні предикати від змінних x, y
$\bar{\ }$ або $\sim$ — операція заперечення
$\wedge$ — операція кон'юнкція
$\vee$ — операція диз'юнкція
$\rightarrow$ — операція імплікація
$\leftrightarrow$ — операція еквіваленція
$|$ — операція штрих Шеффера
$\downarrow$ — операція штрих Лукасевича
$\forall$ — квантор загальності
$\exists$ — квантор існування
$\exists!$ — квантор існування і єдиності
$\equiv$ — відношення рівносильності логічних формул
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — задання множини переліком її елементів
$A = \{x | f(x)\}$ — задання множини характеристичною властивістю f її елементів
$\varnothing$ — порожня множина
$M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множина перших n натуральних чисел
$\in$ — відношення належності елемента множині
$\notin$ — заперечення відношення належності
$\subset$ — відношення нестрогого включення
$\not\subset$ — заперечення відношення строгого включення
$\mathfrak{P}(A)$ — множина всіх підмножин множини A
$\cup$ — операція об'єднання множин
$\cap$ — операція перетину множин
$'$ — операція доповнення множини
$\setminus$ — операція віднімання множин

$\div$ — операція симетричного віднімання множин
$\times$ — операція декартового (прямого) добутку множин
(a, b) — упорядкована пара елементів
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — упорядкована n-ка елементів
$A \times B$ — декартів (прямий) добуток множин A і B
A^n — декартів n-ий степінь множини A
$\rho, \sigma, \varepsilon, \ldots$ — бінарні відношення
Δ_A — тотожне відношення на множині A
$^{-1}$— операція взяття оберненого відношення або оберненого елемента
$\circ$ — операція множення (композиція) бінарних відношень
$pr_1\rho$ — перша проекція бінарного відношення ρ
$pr_2\rho$ — друга проекція бінарного відношення ρ
$supA$ — точна верхня межа підмножини A упорядкованої множини B
$infA$ — точна нижня межа підмножини A упорядкованої множини B
$\varepsilon < a >$ — клас еквівалентності ε з представником a
A/ε — фактор-множина множини A за відношенням еквівалентності ε
$f : A \longrightarrow B$ — відображення множини A в множину B
$f(a)$ — образ елемента $a \in A$ при відображенні $f : A \longrightarrow B$
ε_f — ядро відображення f
$\vdots$ — відношення подільності цілих чисел
C_n^k — число комбінацій з n елементів по k елементів
A_n^k — число розміщень з n елементів по k елементів
P_n — число перестановок з n елементів
$n!$ — n-факторіал (добуток перших n натуральних чисел)
$(A; +, \cdot)$ — алгебра з двома операціями
$(A; +; \leqslant)$ — алгебраїчна система з операцією $+$ і відношенням $\leqslant$
G — загальне позначення групи
G_n — група коренів n-го степеня з одиниці
D_n — група діедра (група самосуміщень правильного n-кутника)
S_n — симетрична група n-го степеня (група всіх підстановок множини M_n)
K — загальне позначення кільця
P — загальне позначення поля
$\mathbb{Z}[x]$ — множина всіх многочленів від змінної x з цілими коефіцієнтами
$a + bi$ — алгебраїчна форма комплексного числа
i — уявна одиниця
$Re(z)$ — дійсна частина комплексного числа z
$Im(z)$ — коефіцієнт уявної частини комплексного числа z
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрична форма комплексного числа

$arg(z)$ — аргумент комплексного числа z

$|z|$ — модуль комплексного числа z

$\overline{z}$ — спряжене число до комплексного числа z

$\sqrt[n]{z}$ — корінь n-го степеня з комплексного числа z

ε_k — k-тий корінь n-го степеня з одиниці

μ — функція Мебіуса

$\Phi_n(x)$ — многочлен ділення кола

$\mathbb{R}^n$ — арифметичний n-вимірний дійсний векторний простір

$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — n-вимірний вектор з координатами $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — сума елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ — добуток елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$ — загальна форма запису системи m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} \vec{a}_1\vec{x} = b_1, \\ \vec{a}_2\vec{x} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{a}_m\vec{x} = b_m, \end{cases}$$ — векторно-скалярна форма запису системи m лінійних рівнянь з n невідомими

$x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots + x_n\vec{p}_n = \vec{b}$ — векторна форма запису системи m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ — $m \times n$-матриця

$M_{m\times n}(P)$ — множина всіх $m \times n$-матриць над полем P

$M_n(P)$ — множина всіх матриць n-го порядку над полем P

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$ — одинична матриця n-го порядку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ — визначник n-го порядку

A^t — транспонована матриця до матриці A

M_{ij} — мінор $(n-1)$-го порядку даного визначника n-го порядку

A_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника n-го порядку

Предметний показчик

Література

[1] Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1974.– Ч.1.– 464 с.

[2] Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1976.–Ч. 2.– 402 с.

[3] Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел.– М.: Высшая школа, 1979.-559с.

[4] Кулик В.Т., Рокіцький І.О.. Алгебра. Оглядові лекції до державних екзаменів.– Вінниця: педуніверситет, 1999.– 249 с.

[5] Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О.. Алгебра і теорія чисел. Практикум.– К.: Вища школа, 1983.–Ч. 1.– 232 с.

[6] Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. – К.: Вища школа, 1986.– Ч. 2.–264 с.

[7] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре.– М.: Просвещение, 1993. – 288 с.

[8] Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел.– Минск: Вышейшая школа, 1982.– 233 с.

[9] Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре.– М.: Факториал, 1995.– 454с.

[10] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.– 288 с.

[11] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.– М.: Наука, 1974.– 384 с.

[12] Збірник задач з теорії чисел. За редакцією Рокіцького І.О..– Вінниця: ВДПУ, 2001.– 116 с.

Гарвацький Володимир Сергійович

Кулик Володимир Тихонович

Рокіцький Іван Олександрович

Рокіцький Ростислав Іванович

ЗБІРНИК
задач з алгебри
частина 1

Виготовлено з оригінал-макету в Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського, 21100, м. Вінниця, вул. Острозького, 32.

Замовлення № 4 Тираж 300