ЗБІРНИК

задач з алгебри

частина 2

За редакцією І.О.Рокіцького

посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів

Вінниця
2006

УДК 512 + 511
З – 41

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів спеціальності "Педагогіка і методика середньої освіти. Математика "(Лист Міністерства освіти і науки України № 14/18.2–2517 від 01.12.2004 р.).

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Кузенний М.Ф. (Інститут математики НАН України), кандидат фізико-математичних наук, доцент Требенко Д.Я. (НПУ імені М.П.Драгоманова) і кандидат фізико-математичних наук, доцент Дереч В.Д. (ВДТУ)

Пропонований навчальний посібник є збірником задач з алгебри. Він повністю охоплює програму другого семестру з курсу алгебра і теорія чисел для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів і містить понад 1000 задач та вправ.

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету ім.М.Коцюбинського, протокол № 6 від 21 січня 2003 року.

КОЛЕКТИВ АВТОРІВ: В.С.Гарвацький, В.Т.Кулик, І.О.Рокіцький, Р.І.Рокіцький

Збірник задач з алгебри.Ч.2. [Навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету] За редакцією І.О.Рокіцького, Вінниця, 2006 – 200 с.
ISBN 966–527–102–4
Вінниця: ДОВ "Вінниця"

Зміст

Передмова

Пропонований збірник продовжує серію з кількох україномовних збірників (дивись [13,14]), написаних одним колективом авторів для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів.

При написанні цього збірника автори зберегли ідею розподілу задач кожного з основних параграфів за рубриками: задачі на ілюстрацію основних понять, задачі на техніку обчислень і перетворень, задачі на доведення, творчі задачі та олімпіадні задачі. Такий розподіл дозволить студенту при самостійній роботі поступово переходити від простих до складніших задач, керуючись самостійною оцінкою свого рівня підготовки. До більшості задач з перших двох рубрик у збірнику є відповіді. До задач з інших трьох рубрик іноді даються вказівки або розв'язки. Для їх розв'язування студент повинен добре володіти основними поняттями і теоремами теорії, проявити творче мислення, винахідливість та логічну стрункість в математичних доведеннях і перетвореннях. В окремих випадках такі задачі на дослідження можуть стати темами курсових робіт.

Кожен параграф розпочинається з посилання на літературу і містить короткі теоретичні відомості.

У всіх чотирьох розділах є додатковий параграф "Вибрані задачі". До таких параграфів включено задачі різної складності, частина з яких пропонувалися на математичних олімпіадах і конкурсах для студентів вищих навчальних закладів. Вони призначені для тих студентів, які хочуть більш глибоко освоїти матеріал даного розділу. До цих задач не дано вказівок і відповідей.

Нумерація задач у кожному параграфі розпочинається з № 1. Тому при посиланні на певну задачу в межах параграфа вказується тільки її номер, з іншого параграфа цього розділу – ще й номер параграфа, а для задач з іншого розділу вказується також номер розділу та параграф.

У збірнику в різних рубриках є задачі, які вчитель математики може використати в роботі з учнями на шкільному математичному гуртку.

Збірник містить шість додатків: "Групи порядку від 1 до 20", "Групи самосуміщень", "Векторні простори", "Лінійні оператори ", "Нерівності" та "Алфавіти" (латинський і грецький). В них читач знайде основні формули, що стосуються цих питань та деякі порівняння з іншими посібниками.

У збірнику вміщено список основних позначень, які використовуються в книзі, та предметний показчик.

Розділ 1

Групи

§ 1.1 Півгрупи та їх властивості

Література: [1] стор. 149 – 155; [3] стор. 346 – 349.

Теоретичні відомості

Алгебра $(G;*)$ з бінарною операцією " $*$ " називається *півгрупою,* якщо операція має властивість асоціативності.

У кожній півгрупі $(G;*)$ для будь-якої послідовності її елементів $g_1, g_2, \ldots, g_n$ результат виконання операції не залежить від порядку розстановки дужок, тобто для $1 < k < n$

$$((\ldots(g_1 * g_2) * g_3) * \ldots) * g_n = (g_1 * \ldots * g_k) * (g_{k+1} * \ldots * g_n).$$

Півгрупа $(G;*)$ називається *комутативною* або *абелевою,* якщо операція має властивість комутативності.

Елемент півгрупи $(G;*)$ називається *ідемпотентом,* якщо $g * g = g$. Півгрупа G називається *ідемпотентною,* якщо всі її елементи є ідемпотентами.

Елемент e півгрупи $(G;*)$ називається *лівим (правим) нейтральним,* якщо $e * g = g$ $(g * e = g)$ для всіх $g \in G$. Елемент e називається *нейтральним,* якщо він є лівим і правим нейтральним в півгрупі G. Нейтральний елемент при мультиплікативному записі операції називають *одиницею,* а при адитивному – *нулем.*

Нехай $(G;*)$ – півгрупа з нейтральним елементом e. Елемент b півгрупи G називається *симетричним до a,* якщо $b*a = a*b = e$. При мультиплікативному записі операції елемент b називають *оберненим до a,* а при адитивному – *протилежним.*

Підмножина H півгрупи $(G;*)$ називається *підпівгрупою,* якщо вона є півгрупою відносно операції, заданої в G. Непорожня підмножина H півгрупи $(G;*)$ є її підпівгрупою тоді і тільки тоді, коли разом з будь-якими своїми елементами x, y вона містить елемент $x*y$.

Непорожня підмножина $L(R)$ півгрупи $(G;*)$ називається її *лівим (правим) ідеалом,* якщо для всіх $g \in G$ і $x \in L(y \in R)$ елемент $g*x(y*g)$ міститься в $L(R)$. Підмножина I півгрупи G називається її *ідеалом,* якщо вона є лівим і правим ідеалом. Кожний лівий і правий ідел півгрупи G є її підпівгрупою.

Нехай H – непорожня підмножина півгрупи $(G;*)$. Найменша підпівгрупа $[H]$ півгрупи G, яка містить підмножину H, називається *породженою цією підмножиною,* а H – *системою твірних* для $[H]$. Підпівгрупа $[a]$, яка породжена одноелементною підмножиною $H = \{a\}$, називається *моногенною* або *циклічною.*

Задачі на ілюстрацію понять

1. Скількома способами можна розставити дужки у послідовності a, b, c, d елементів півгрупи $(G;*)$ для того, щоб знайти результат операції $*$ над цими елементами? Перевірити, що в півгрупі G виконуються рівності
$$((a*b)*c)*d = (a*b)*(c*d) = a*(b*(c*d)).$$

2. Встановити, чи є півгрупою алгебра:

а)	$(Q^+; :)$;	д)	$(M_3(\mathbb{R}); \times)$;
б)	$(\mathbb{Z}; -)$;	е)	$(M_3(\mathbb{R}); +)$;
в)	$(\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}; \cdot)$;	є)	$(\mathfrak{P}(A); \cup), A \neq \varnothing$;
г)	$([-2002, +\infty); +)$;	ж)	$(\mathfrak{P}(A); \div), A \neq \varnothing$.

3. Встановити, чи є півгрупою відносно операції композиція відношень множина всіх:

а) бінарних відношень на множині A;	в) сюр'єкцій множини A на A;
б) відображень множини A в A;	г) ін'єкцій множини A в A.

4. У непорожній множині $A \times A$ бінарна операція визначена рівністю: $(x, y) \star (z, t) = (x, t)$. Чи є алгебра $(A \times A; \star)$ півгрупою? Чи існує в даній алгебрі нейтральний елемент?

5. Нехай $(G;*)$ – півгрупа і $e \notin G$. Визначимо у множині $G_1 = G \cup \{e\}$ операцію $\circ$ так: $x \circ y = x * y$, $e \circ x = x \circ e = x$ для всіх $x, y \in G$ та $e \circ e = e$. Чи є алгебра $(G_1; \circ)$ півгрупою? Яку роль виконує в ній e?

6. Чи є мультиплікативною півгрупою множина всіх матриць над полем дійсних чисел виду:

   а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ 2a & -a & -a \\ 3a & -2a & -a \end{pmatrix}$;

   б) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$?

   У якій з цих півгруп є нейтральний елемент?

7. Чи є ідеалом в півгрупі $(\mathbb{Z}; \cdot)$ множина всіх:
   а) додатних цілих чисел; б) цілих чисел, які діляться на 5?

8. Чи є циклічною адитивна півгрупа всіх натуральних чисел?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Перевірити, що наступна операція, задана на множині $\{a, b, c, d, e\}$ таблицею Келі, має властивість асоціативності:

   а)

*	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	e
b	b	b	b	b	e
c	c	c	c	c	e
d	a	a	a	a	e
e	e	e	e	e	e

   ; б)

∘	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	a	e
c	a	c	b	b	e
d	c	c	c	c	c
e	e	e	e	e	e

   .

10. У множині $\mathbb{R}$ задана операція $\star$: $a \star b = pa + qb + r$, де p, q, r – фіксовані цілі числа. При яких значеннях p, q, r алгебра $(\mathbb{R}; \star)$ є півгрупою?

11. На множині M задана бінарна операція $*$. Розглянемо множину $A = \{a | (\forall x, y \in M)(x * a) * y = x * (a * y)\}$. Перевірити, чи є алгебра $(A; *)$ півгрупою.

12. Нехай $(G;*)$ – півгрупа і $g \in G$. Перевірити, чи є підмножина $H = \{g^n | n \in \mathbb{N}\}$ циклічною підпівгрупою в G.

13. Нехай f є гомоморфізмом півгрупи $(A;*)$ на півгрупу $(B;\circ)$ з ідемпотентом $i \in B$. Встановити, чи є підпівгрупою множина $f^{-1}(i)$.

14. Задати з точністю до ізоморфізму всі півгрупи, які містять два елементи.

15. В півгрупі $(M_3(\mathbb{R}); \times)$ знайти підпівгрупу, твірним елементом якої є матриця: а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Знайти мінімальну систему твірних елементів:
а) адитивної півгрупи натуральних чисел;
б) мультиплікативної півгрупи натуральних чисел.

Задачі на доведення

17. Довести, що множина H всіх матриць n-го порядку, кожен рядок і стовпець яких містить не більше однієї одиниці, а решта елементів дорівнює нулю, є підпівгрупою в $(M_n(\mathbb{R}); \times)$.

18. У множині $M = \{o, a_1, a_2 \ldots, a_n, b_{12}, \ldots, b_{nn}\}$ операція $*$ задана так:
$x * y = \begin{cases} b_{ij}, & \text{якщо } x = a_i, y = a_j; \\ o & \text{в інших випадках.} \end{cases}$
Довести, що алгебра $(M; *)$ є півгрупою.

19. Довести, що алгебра $(Z^4; *)$ з операцією $(a, b, c, d) * (x, y, z, t) = (a, b, z, t)$ є ідемпотентною півгрупою.

20. Довести, що для кожного елемента g півгрупи $(G; \cdot)$ і довільних $n, m \in \mathbb{N}$ виконуються рівності:
а) $g^m g^n = g^{m+n}$; б) $(g^m)^n = g^{mn}$.
Як запишуться аналогічні рівності для адитивної півгрупи?

21. Довести, що непорожній перетин двох підпівгруп даної півгрупи є її підпівгрупою.

22. Довести, що перетин двох ідеалів даної півгрупи є її ідеалом.

23. Нехай I_1 і I_2 є ідеалами півгрупи $(G; \cdot)$. Добутком ідеалів I_1 та I_2 називають множину $I_1 \cdot I_2 = \{x \cdot y | x \in I_1 \wedge y \in I_2\}$. Довести, що добуток $I_1 \cdot I_2$ є ідеалом в G.

24. Довести, що коли I_1 і I_2 – ідеали півгрупи G, то $I_1 I_2 \cup I_2 I_1 \subset I_1 \cap I_2$.

25. Довести, що циклічна півгрупа є скінченною тоді і тільки тоді, коли вона містить ідемпотент.

26. Нехай $(G;*)$ – півгрупа, $g \in G$ і відображення $l_g : G \longrightarrow G$ визначається рівністю $l_g(x) = g * x$. Його називають *лівим зсувом півгрупи G, який визначається елементом g.* Довести, що множина $\Lambda(G)$ всіх лівих зсувів для елементів півгрупи G є півгрупою відносно операції композиція відношень.

27. Нехай $(G;*)$ – півгрупа, $g \in G$ і відображення $r_g : G \longrightarrow G$ визначається рівністю $r_g(x) = x * g$. Його називають *правим зсувом півгрупи G, який визначається елементом g.* Довести, що множина $\Pi(G)$ всіх правих зсувів для елементів півгрупи G є півгрупою відносно операції композиція відношень.

28. Довести, що півгрупа $(G;*)$ з нейтральним елементом ізоморфна півгрупі $(\Pi(G);\circ)$.

29. Довести, що всі нескінченні циклічні півгрупи ізоморфні між собою.

30. Елемент g півгрупи G називається *регулярним*, якщо існує $h \in G$ такий, що $ghg = g$. Довести, що для кожного регулярного елемента g півгрупи G існує елемент $\overline{g} \in G$ такий, що $g\overline{g}g = g$ і $\overline{g}g\overline{g} = \overline{g}$ (при цьому елементи g і $\overline{g}$ називаються *регулярно спряженими або інверсними*).

31. Довести, що у мультиплікативній півгрупі матриць n-го порядку, кожен рядок і стовпець яких містить не більше однієї одиниці, а решта елементів дорівнює нулю, для кожної матриці існує єдина регулярно спряжена. Така півгрупа називається *інверсною.*

Творчі задачі

32. Описати систему твірних елементів, підпівгрупи, ідеали, ідемпотенти, регулярні та регулярно спряжені елементи півгрупи:
а) $(M;*)$ (дивись задачу 18); б) $(Z^4;*)$ (дивись задачу 19).

33. Встановити, чи може комутативна півгрупа ідемпотентів бути ізоморфною множині підмножин деякої множини відносно операції перетину (об'єднання).

Задачі з олімпіад

34. Півгрупа називається регулярною, якщо всі її елементи є регулярними. Довести, що півгрупа $(M_n(\mathbb{R});\cdot)$ є регулярною півгрупою такою, що добуток регулярно-спряжених її елементів є ідемпотентною симетричною матрицею ($a_{ij} = a_{ji}$ для всіх $1 \leqslant i, j \leqslant n$).

§ 1.2 Квазігрупи

Література: [17] стор. 5 – 21; [18] стор. 1-29.

Теоретичні відомості

Алгебру $(G;*)$ з бінарною операцією "$*$" часто називають *бінарним оперативом.* Бінарний оператив $(G;\circ)$ називають *двоїстим до оперативу* $(G;*)$, якщо їх операції пов'язані рівністю: $(\forall x, y \in G)(x \circ y = y * x)$.

Бінарний оператив $(G;\circ)$ називають *лівою (правою) квазігрупою,* якщо для довільних $a, b \in G$ рівняння $x \circ a = b$ ($a \circ y = b$) має єдиний розв'язок.

Якщо оператив $(G;\circ)$ є лівою квазігрупою, то єдиний розв'язок рівняння $x \circ a = b$ визначає у G бінарну операцію "$/$", яку називають *лівим діленням,* а елемент $x = b/a$ – *лівою часткою.*

Аналогічно, якщо $(G;\circ)$ є правою квазігрупою, то єдиний розв'язок рівняння $a \circ y = b$ визначає в G бінарну операцію $\backslash$, яку називають *правим діленням,* а елемент $y = b\backslash a$ – *правою часткою.*

Бінарний оператив $(G;\circ)$ називають *квазігрупою,* якщо він є лівою і правою квазігрупою, тобто для довільних $a, b \in G$ рівняння $x \circ a = b$ і $a \circ y = b$ мають єдиний розв'язок. Квазігрупа називається *лупою,* якщо в ній є нейтральний елемент. Для позначення бінарної операції квазігрупи часто застосовують також мультиплікативний запис.

Латинським квадратом розміру n називається числова $n \times n$ таблиця, кожен рядок і стовпець якої містить різні числа з заданих n натуральних чисел. Вивчення латинських квадратів привело до поняття квазігрупи.

Нехай G – деяка квазігрупа. Підмножина $N_l(N_r; N_m)$ квазігрупи G називається *лівим (правим, середнім) ядром* цієї квазігрупи, якщо виконується умова $a \in N_l \longleftrightarrow (\forall x, y \in G)(a(xy) = (ax)y)$ $(a \in N_r \leftrightarrow (\forall x, y \in G)((xy)a = x(ya)); a \in N_m \leftrightarrow (\forall x, y \in G)((xa)y = x(ay)))$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Нехай бінарний оператив G задано таблицею Келі. Яку особливість має ця таблиця, якщо G є:
   а) лівою квазігрупою; в) квазігрупою;
   б) правою квазігрупою; г) лупою?

2. Чи для кожного натурального n можна побудувати:
   а) ліву квазігрупу; б) праву квазігрупу; в) квазігрупу; г) лупу,
   яка містить n елементів?

3. Нехай G – ліва (права) квазігрупа. Який висновок можна зробити про двоїстий бінарний оператив?

4. Чи можна лупу задати магічним квадратом, тобто таким латинським квадратом, у якого суми чисел кожного рядка, стовпця і обох діагоналей однакові?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

5. Бінарні оперативи задані таблицями Келі:

а)

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

д)

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	2	4	1	3
3	3	1	2	4
4	4	2	3	1

б)

$\cdot$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	b	c	d	a
c	d	b	c	d
d	a	a	b	c

е)

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	3	4	2
2	4	2	1	3
3	2	4	3	1
4	3	1	2	4

в)

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	e	a	b	d	c
b	d	e	c	b	a
c	a	d	e	c	b
d	c	b	d	a	e
e	b	c	a	e	d

є)

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	1	5	3	4
3	3	4	1	5	2
4	4	5	2	1	3
5	5	3	4	2	1

г)

$\cdot$	α	β	γ	δ	ε
α	β	γ	α	δ	ε
β	α	δ	γ	ε	β
γ	γ	ε	δ	β	α
δ	ε	α	β	γ	δ
ε	δ	β	ε	α	γ

ж)

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Встановити, які з них є лівими або правими квазігрупами, квазігрупами, лупами. Які серед них є комутативними?

6. Встановити, для яких бінарних операцій, заданих у попередній задачі, можна визначити операції лівого і правого ділення. Побудувати відповідні їм таблиці Келі.

7. Знайти ядра всіх квазігруп з задачі № 5.

8. Перевірити, чи є квазігрупою множина всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$ відносно операції $f(x, y) = x - y + 5$.

9. У множині раціональних чисел $\mathbb{Q}$ бінарна операція "$\circ$" визначена так:
   а) $a \circ b = 2a - b$; в) $a \circ b = \alpha a + \beta b + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$;
   б) $a \circ b = \frac{a+b}{\alpha}, \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; г) $a \circ b = a + b^2$.
   Встановити, чи є така алгебра квазігрупою.

10. Нехай в алгебрі $(\mathbb{Q}; f)$ операція f задається так:
    $f(x, y) = ax + by + c, \quad a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad c \in \mathbb{Q}$.
    Перевірити, шо $(\mathbb{Q}; f)$ є квазігрупою і знайти аналітичне задання операцій лівого і правого ділення.

11. Скласти таблиці Келі для лупи, яка містить 4 елементи, та операцій лівого і правого ділення. Встановити, чи будуть нові алгебри лупами.

Задачі на доведення

12. Довести, що коли $(G; \circ)$ є лівою квазігрупою, то для будь-яких елементів $x, y \in G$ виконуються рівності $(y/x) \circ x = y$ і $(y \circ x)/x = y$.

13. Довести, що коли $(G; \circ)$ є правою квазігрупою, то для будь-яких елементів $x, y \in G$ виконуються рівності $x \circ (x \backslash y) = y$ і $x \backslash (x \backslash y) = y$.

14. Довести, що кожну скінченну квазігрупу можна задати деяким латинським квадратом.

15. Довести, що бінарний оператив є квазігрупою тоді і тільки тоді, коли всі його ліві і праві зсуви є підстановками.

16. Довести, що коли $(G; \circ)$ є квазігрупою, то бінарні оперативи $(G; /)$ і $(G; \backslash)$ також є квазігрупами.

17. Нехай $(G; f)$ – квазігрупа, $f^\star$ – двоїста операція, ${}^{-1}f$ – ліве ділення і f^{-1} – праве ділення. Довести, що для цих операцій виконуються рівності:
    1. $(f^{-1})^{-1} = f$; 2. ${}^{-1}({}^{-1}f) = f$; 3. $({}^{-1}(f^{-1}))^{-1} = {}^{-1}(({}^{-1}f)^{-1}) = f^\star$.

18. Довести, що алгебра $(G; *, \triangleleft, \triangleright)$ з трьома бінарними операціями є квазігрупою відносно операції $*$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких елементів $x, y \in G$ виконуються умови:
    1. $x * (y \triangleleft y) = (y \triangleright x) * x = y$;
    2. $x \triangleleft (x * y) = (y * x) \triangleright x = y$.

19. Довести, що алгебра $(G; *, \lhd, \rhd)$ з трьома бінарними операціями є лупою відносно операції $*$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких елементів $x, y \in G$ виконуються умови:
1. $x * (y \lhd y) = (y \rhd x) * x = y$;
2. $x \lhd (x * y) = (y * x) \rhd x = y$;
3. $x \lhd x = y \rhd y$.

20. Довести, що квазігрупа G має непорожнє ліве (праве) ядро тоді і тільки тоді, коли вона містить ліву (праву) одиницю.

21. Довести, що квазігрупа G має непорожнє середнє ядро тоді і тільки тоді, коли вона є лупою.

22. Довести, що ядро будь-якої квазігрупи є її підгрупою.

Творчі задачі

23. Дослідити, скільки існує неізоморфних комутативних і некомутативних квазігруп та луп порядку $n < 6$.

24. Нехай $(G; f)$ – квазігрупа, $f^{\star}$ – двоїста операція, ${}^{-1}f$ – ліве ділення і f^{-1} – праве ділення. Дослідити, при яких умовах алгебри $(G; f^{\star})$, $(G; {}^{-1}f)$ і $(G; f^{-1})$ є лупами.

Задачі з олімпіад

25. Скільки латинських квадратів можна утворити з даних n натуральних чисел?

26. Скільки магічних квадратів можна утворити з даних n натуральних чисел?

27. Скільки латинських квадратів, симетричних відносно діагоналі, яка виходить з лівого верхнього кута, можна утворити з даних n натуральних чисел?

§ 1.3 Найпростіші властивості груп. Підгрупа. Циклічні групи

Література: [1] стор. 156 – 162; [3] стор. 350 – 351, 354 – 357.

Теоретичні відомості

Алгебра $(G;\cdot)$ з однією бінарною операцією називається *групою,* якщо операція має властивості:
1. $(G;\cdot)$ є півгрупою, тобто операція асоціативна.
2. В G існує нейтральний елемент.
3. Для кожного елемента з G існує симетричний елемент в G.

Група називається *комутативною* або *абелевою,* якщо її операція має властивість комутативності. Група називається *скінченною (нескінченною),* якщо множина її елементів скінченна (нескінченна). Число елементів скінченної групи називається її *порядком.*

Підмножина H групи G називається *підгрупою* цієї групи, якщо вона є групою відносно заданої в G операції.

Непорожня підмножина H групи $(G;\cdot)$ є її підгрупою тоді і тільки тоді, коли разом з будь-якими своїми елементами x, y вона містить елемент $x \cdot y$ і симетричний до кожного елемента $x \in H$ елемент x^{-1} також є в H.

Нехай H – непорожня підмножина групи G. Найменша підгрупа $[H]$ групи G, яка містить підмножину H, називається *породженою цією підмножиною,* а H – *системою твірних для* $[H]$. Підгрупа $[a]$, яка породжена одноелементною підмножиною $H = \{a\}$, називається *циклічною.* Якщо циклічна підгрупа $[a]$ скінченна, то її порядок називають *порядком твірного елемента* a. Якщо циклічна підгрупа $[a]$ нескінченна, то говорять, що *твірний елемент має нескінченний порядок.*

Група називається *циклічною,* якщо вона співпадає з однією з своїх циклічних підгруп.

Кожна нескінченна циклічна група ізоморфна адитивній групі цілих чисел, а скінченна циклічна група n-го порядку ізоморфна мультиплікативній групі коренів n-го степеня з одиниці.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Перевірити, які з аксіом групи виконуються в алгебрі:
   а) $(\mathbb{Z};-)$ усіх цілих чисел з операцією віднімання;
   б) $(n\mathbb{Z};+)$ усіх цілих чисел,кратних n, з операцією додавання;
   в) $(\mathbb{Q}^+;:)$ усіх додатних раціональних чисел з операцією ділення;

г) $(\mathbb{N};\cdot)$ усіх натуральних чисел з операцією множення;
д) $(\mathbb{Q}^+;\cdot)$ усіх додатних раціональних чисел з операцією множення;
е) $(\mathbb{Z}[i];+)$ усіх цілих гауссових чисел з операцією додавання;
є) $(\mathbb{Z}[i]\setminus\{0\};\cdot)$ усіх відмінних від 0 цілих гауссових чисел з операцією множення;
ж) $(S_n;\circ)$ усіх підстановок n-го степеня з операцією композиція.

2. Чи є множина всіх цілих степенів додатного дійсного числа групою відносно операції множення?

3. Перевірити, чи є групою відносно операції множення множина всіх:
а) невироджених матриць другого порядку з невід'ємними дійсними елементами;
б) матриць другого порядку з цілими елементами, визначник яких дорівнює 1;
в) матриць виду $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, де $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$;
г) невироджених діагональних матриць n-го порядку над полем $\mathbb{C}$;
д) матриць з множини $M_n(\mathbb{C})$ виду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, де $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$;
е) матриць з множини $M_n(\mathbb{C})$ виду $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

4. Нехай $(G;*)$ і $(L;\circ)$ – групи. У множині $G\times L$ визначена операція так: $(g_1,l_1)\cdot(g_2,l_2) = (g_1 * g_2, l_1\circ l_2)$. Перевірити, що алгебра $(G\times L;\cdot)$ є групою. Її називають прямим добутком даних груп.

5. Скільки нейтральних елементів може мати група?

6. Скільки ідемпотентів може мати група?

7. Скільки симетричних елементів може бути в групі для її елемента?

8. Які числа можуть бути твірними елементами адитивної групи цілих чисел?

9. Чи має розв'язок у групі G рівняння $ax = b$ і, якщо має, то скільки їх?

10. У групі G виконується рівність $ag = bg$. Який висновок можна зробити з цієї рівності?

11. Навести приклади скінченних циклічних груп різних порядків.

12. Нехай елемент g групи G має порядок n. Яким є порядок елемента g^k для довільного $k \in \mathbb{N}$?

13. Нехай H є підгрупою групи G і L є підгрупою групи H. Чи є L підгрупою групи G?

14. Скільки існує неізоморфних груп другого і третього порядку?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

15. Встановити, чи є групою множина всіх чисел з інтервалу $(-1, 1)$ відносно операції $*$, яка визначається рівністю $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$.

16. Встановити, чи є групою множина G всіх дійсних лінійних функцій $f_{a,b}(x) = ax + b$ таких, що $a \neq 0$, відносно операції їх послідовного виконання.

17. Скласти таблицю Келі для групи самосуміщень:
а) прямокутника; б) ромба; в) рівностороннього трикутника.
Знайти всі її підгрупи.

18. У скінченній півгрупі $(G; \cdot)$ мають місце лівий і правий закони скорочення, тобто

$$(\forall a, b, c \in G) \left((a \cdot b = a \cdot c \to b = c) \land (b \cdot a = c \cdot a \to b = c) \right).$$

Перевірити, чи є півгрупа $(G; \cdot)$ групою.

19. Знайти порядок кожного елемента групи: а) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$; б) $(\mathbb{Z}; +)$.

20. У мультиплікативній групі всіх відмінних від 0 комплексних чисел знайти підгрупу, твірним елементом якої є:
а) $-i$; б) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{1}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. У мультиплікативній групі всіх невироджених матриць другого порядку над полем $\mathbb{C}$ знайти підгрупу, твірним елементом якої є:
а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

22. Скласти таблицю Келі для симетричної групи третього степеня $(S_3; \circ)$ та описати її підгрупи.

23. Знайти всі підгрупи мультиплікативної групи G коренів 12 степеня з одиниці.

24. Геометричне тіло називають *n-кутним діедром*, якщо воно складається з правильної n-кутної піраміди і її симетричного відображення відносно площини основи. Знайти порядок групи самосуміщень n-кутного діедра, якщо $n \neq 4$.

Задачі на доведення

25. У множині $K = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ бінарна операція $\star$ задана таблицею Келі:

$\star$	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	-i	i
j	-j	j	k	-k	1	-1	i	-i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

.

Довести, що алгебра $(K; \star)$ є некомутативною групою (її називають *групою кватерніонів*) та знайти всі її підгрупи.

26. Довести, що множина всіх матриць n-го порядку з цілими елементами і визначником, рівним одиниці, утворює групу відносно операції множення.

27. Довести, що множина $Aut(G)$ всіх автоморфізмів групи G (ізоморфізми групи G в себе) є групою відносно операції композиція.

28. Довести, що для кожної групи G її підмножина $H = \{h | (\forall g \in G) gh = hg\}$ є підгрупою. Ця підгрупа називається *центром групи G*. Коли $G = H$?

29. Довести, що перетин довільної множини підгруп групи G є підгрупою в G.

30. Довести, що об'єднання двох підгруп групи G є підгрупою в G тоді і тільки тоді, коли одна з них міститься в іншій.

31. Нехай H є підгрупою групи G. Довести, що множина:
а) $C(H) = \{x \in G | (\forall h \in H) xh = hx\}$;
б) $g^{-k}Hg^k = \{g^{-k}hg^k | g \in G \wedge h \in H \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ є підгрупою групи G.

32. Довести, що кожна підгрупа циклічної групи є циклічною.

33. Довести, що для довільних елементів a, b, c групи G виконуються твердження:
а) елементи ab і ba мають однаковий порядок;
б) елементи abc, bca і cab мають однаковий порядок;
в) елементи a і $b^{-k}ab^k$ мають однаковий порядок для всіх $k \in \mathbb{N}$.

34. Довести, що група простого порядку є циклічною і кожен її елемент, відмінний від нейтрального, є твірним.

35. Довести, що в скінченній групі непарного порядку кожен її елемент є квадратом єдиного елемента цієї групи.

36. Довести, що для кожного простого числа p і натурального k група порядку p^k має нетривіальний центр (містить більше ніж один елемент).

37. Довести, що коли в скінченній абелевій групі її порядок ділиться на просте число p, то в ній є елемент p-го порядку.

38. Довести, що циклічну групу порядку n можна гомоморфно відобразити на її підгрупу порядку m, якщо m є дільником n.

39. Нехай на числовому відрізку $[0, 1]$ задана операція $\oplus$: $a \oplus b$ є дробовою частиною числа $a + b$. Довести, що $([0, 1]; \oplus)$ є групою, ізоморфною мультиплікативній групі комплексних чисел, модуль яких дорівнює одиниці.

40. Довести, що множина всіх матриць n-го порядку, кожен рядок і стовпець яких містить одну одиницю, а решта елементів рівні нулю, є мультиплікативною групою, ізоморфною групі S_n всіх підстановок n-го степеня.

Творчі задачі

41. Встановити істинність або хибність наступних тверджень:
а) в скінченній групі кожен елемент має скінченний порядок;
б) в нескінченній групі кожен елемент має нескінченний порядок;
в) нескінченна група може містити скінченну нетривіальну підгрупу;

г) в будь-якій групі добуток елементів скінченного порядку є елементом скінченного порядку;
д) в будь-якій групі добуток елементів нескінченного порядку є елементом нескінченного порядку;
е) в абелевій групі добуток елементів скінченного порядку є елементом скінченного порядку.

42. Нехай f є гомоморфізмом групи $(G;*)$ на групу $(G_1;\cdot)$. Встановити всі можливі зв'язки, які можуть існувати між порядками елементів $a \in G$ і $f(a) \in G_1$.

43. Описати всі автоморфізми циклічної групи.

44. Описати всі автоморфізми адитивної групи цілих гауссових чисел.

45. Якщо існує послідовність $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ підгруп групи G така, що кожна попередня є підгрупою наступної і $G = \bigcup H_i$, то говорять, що дана *група є об'єднанням зростаючого ланцюга своїх підгруп*. Як можна адитивну групу $(\mathbb{Q};+)$ раціональних чисел подати у вигляді об'єднання зростаючого ланцюга її циклічних підгруп?

Задачі з олімпіад

46. Нехай для довільних елементів a, b групи G з одиницею e виконуються рівності $aba = ba^2b, a^3 = e$ і $b^{2n-1} = e$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Довести, що $b = e$.

47. Довести, що для простого числа p існує єдина з точністю до ізоморфізму комутативна нециклічна група порядку p^2.

48. Довести, що абелева група порядку pq, де p, q – різні прості числа, є циклічною.

49. Довести, що група автомофізмів адитивної групи цілих гауссових чисел ізоморфна мультиплікативній групі цілочисельних матриць другого порядку з визначником, рівним одиниці.

50. Для довільного простого числа p і натурального k описати всі підгрупи циклічної групи порядку p^k.

51. Нехай для довільних елементів a, b, c, d групи G з одиницею e і різних простих чисел p, q виконуються рівності $ac = ca = bd = db$ і $a^p = b^p = c^q = d^q = e$. Довести, що $a = b, \quad c = d$.

§ 1.4 Розклад групи за підгрупою. Нормальні дільники групи

Література: [1] стор. 123 – 127; [3] стор. 351 – 353, 358 – 359.

Теоретичні відомості

Нехай H - підгрупа групи G і $g \in G$. Кожну підмножину gH (Hg) групи G називають *лівим(правим) суміжним класом групи G за підгрупою H.*

Ліві (праві) суміжні класи групи G за підгрупою H мають властивості:
а) підгрупа H є одним з лівих та правих суміжних класів;
б) перетин будь-яких двох різних лівих (правих) суміжних класів є порожньою множиною;
в) об'єднання всіх лівих (правих) суміжних класів співпадає з G.

Подання групи G у виді об'єднання всіх лівих (правих) суміжних класів за підгрупою H називається *лівим (правим) розкладом групи G за підгрупою H.*

Для будь-якої скінченної групи G порядок кожної її підгрупи H є дільником порядку групи. При цьому частка від ділення порядку G на порядок H називається *індексом підгрупи H.*

Підгрупа H групи G називається *нормальним дільником G* або *інваріантною,* якщо лівий і правий розклади групи G за підгрупою H співпадають.

Підгрупа H групи G є її нормальним дільником тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:
а) $(\forall g \in G)(gH = Hg)$; б) $(\forall g \in G)(gHg^{-1} = H)$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи є підмножина M групи G її лівим або правим суміжним класом за підгрупою H, якщо:
   а) $M = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$, $G = \mathbb{Z}$ - адитивна група і $H = \{0\}$;
   б) $M = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$, $G = \mathbb{Z}$ - адитивна група і $H = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$;
   в) $M = \{1, i\}$, G – мультиплікативна група коренів четвертого степеня з одиниці і $H = \{-1, 1\}$;
   г) $M = \{i, j, k\}$, G – група кватерніонів і $H = \{-1, 1, k, -k\}$?

2. Якими є праві суміжні класи групи:
   а) $(\mathbb{Z}; +)$ за підгрупою $H = \mathbb{Z}$;
   б) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$ за підгрупою $H = \{-1, 1\}$;
   в) $(\mathbb{Z}; +)$ за підгрупою $H = 3\mathbb{Z}$;
   г) $(\mathbb{R}; +)$ за підгрупою $H = \mathbb{Z}$?

3. Чи утворює лівий або правий розклад групи самосуміщень рівностороннього трикутника $G = \{e, s_1, s_2, s_3, R_0^{120^0}, R_0^{240^0}\}$ за якоюсь її підгрупою система підмножин:
   а) $\{e, s_1\}, \{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}, \{R_0^{120^0}, R_0^{240^0}\}$;
   б) $\{e, s_1\}, \{s_3, R_0^{120^0}\}$;
   в) $\{e, R_0^{120^0}\}, \{s_1, s_2\}, \{s_3, R_0^{240^0}\}$;
   г) $\{e, s_1\}, \{s_2, R_0^{120^0}\}, \{s_3, R_0^{240^0}\}$?

4. Знайти лівий розклад групи G самосуміщень рівностороннього трикутника за підгрупою $H = \{e, R_0^{120^0}, R_0^{240^0}\}$.

5. Які підгрупи може мати група 123 порядку?

6. Які підгрупи адитивної групи $M_2(\mathbb{R})$ всіх матриць другого порядку над полем дійсних чисел є її нормальними дільниками?

7. Чи є перетин нормальних дільників групи її нормальним дільником?

8. Скільки нормальних дільників має скінченна група простого порядку?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Перевірити, чи є лівим суміжним класом групи S_5 за деякою її підгрупою множина:
   а) $H = \{(234), (1234)\}$;
   б) $H = \{(12), (123), (1234)\}$;
   в) $H = \{e, (1234), (1432), (13), (24)\}$;
   г) $H = \{(12), (13), (14), (15)\}$.

10. Знайти лівий розклад групи:
    а) $(\mathbb{C}; +)$ за підгрупою $\mathbb{Z}[i]$ всіх цілих гауссових чисел;
    б) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ за підгрупою чисел, модуль яких рівний одиниці;
    в) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ за підгрупою всіх додатних дійсних чисел;
    г) $(\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$ за підгрупою всіх відмінних від нуля дійсних чисел.

11. Знайти лівий і правий розклади групи самосуміщень квадрата за підгрупою симетрій відносно:
    а) центра квадрата;
    б) серединного перпендикуляра однієї з сторін;
    в) однієї з його діагоналей.

12. Знайти лівий і правий розклади групи кватерніонів G за підгрупою $H = \{-1, 1\}$.

13. Знайти лівий і правий розклади циклічної групи восьмого порядку за всіма її підгрупами.

14. Скільки існує різних множин представників правого розкладу групи порядку 15 за підгрупою порядку: а) 5; б) 3?

15. Знайти розклад нескінченної циклічної групи з твірним елементом a за підгрупою з твірним елементом a^4.

16. Встановити, чи є нормальним дільником мультиплікативної групи всіх невироджених матриць другого порядку над полем дійсних чисел підгрупа:

    а) з твірним елементом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

    б) з твірним елементом $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

    в) всіх матриць, визначник яких рівний 1;

    г) $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

17. Знайти всі нормальні дільники симетричної групи S_3.

18. Знайти з точністю до ізоморфізму всі групи: а) 2-го порядку; б) 4-го порядку; в) 6-го порядку; г) 8-го порядку.

Задачі на доведення

19. Нехай G – група всіх відображень $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ виду $f_{a,b}(x) = ax + b$, де $a \neq 0$, відносно композиції відображень. Довести, що множина $H = \{f_{1,b} | b \in \mathbb{R}\}$ є нормальним дільником цієї групи.

20. Довести, що в довільній групі підгрупа індекса 2 є її нормальним дільником.

21. Довести, що перетин $M \cap H$ нормального дільника M групи G з її підгрупою H є нормальним дільником H.

22. Довести, що всі підгрупи групи кватерніонів є її нормальними дільниками.

23. Нехай H_1, H_2 – нормальні дільники групи G і $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Довести, що $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

24. Довести, що добуток скінченного числа нормальних дільників групи є її нормальним дільником.

25. Довести, що кожна підгрупа центра групи є її нормальним дільником.

26. Довести, що знакозмінна група n-го степеня A_n є нормальним дільником групи підстановок S_n.

27. Довести, що елементи групи G, які переставні з підгрупою H, утворюють підгрупу $N(H)$ групи G(називається *нормалізатором H в G*), яка містить H в ролі свого нормального дільника.

28. Довести, що коли H_1 і H_2 – нормальні дільники групи G і $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, то елементи H_1 комутують з елементами H_2.

29. Довести, що в групі всіх рухів простору підгрупа паралельних переносів є її нормальним дільником.

30. *Комутатором елементів g, h групи G* називається елемент $ghg^{-1}h^{-1}$. Підгрупа K групи G, яка породжена всіма її комутаторами, називається *комутантом групи G*. Довести, що комутант є нормальним дільником групи.

Творчі задачі

31. Описати властивості відношення еквівалентності на групі G, яке відповідає правому розкладу групи G за підгрупою H.

32. Описати властивості відношення еквівалентності на групі G, яке відповідає лівому розкладу групи G за підгрупою H.

33. Описати лівий і правий розклади групи самосуміщень (групи діедра) правильного n-кутника за:
а) підгрупами поворотів навколо його центра;
б) підгрупами симетрій відносно його осей симетрії.

Задачі з олімпіад

34. Нехай група $(2^n \cdot m)$-го порядку, де m – непарне число, має елемент 2^n-го порядку. Довести, що всі її елементи непарного порядку утворюють нормальний дільник m-го порядку.

35. Нехай H є підгрупою групи G. Знайти максимальний нормальний дільник групи G серед тих, які містяться у підгрупі H.

§ 1.5 Фактор-група. Гомоморфізми груп

Література: [1] стор. 127 – 132; [3] стор. 359 – 362.

Теоретичні відомості

Нехай H – нормальний дільник групи G. Тоді множини лівих і правих суміжних класів групи G за підгрупою H рівні і утворюють розбиття множини G. Позначимо через G/H множину всіх лівих суміжних класів групи G за підгрупою H і визначимо в ній операцію $*$ рівністю

$$(\forall g_1, g_2 \in G)(g_1H * g_2H) = (g_1g_2)H.$$

Алгебра $(G/H; *)$ є групою. Її називають *фактор-групою групи G за підгрупою H.*

Відображення $f : G \longrightarrow L$ групи $(G; *)$ в групу $(L; \circ)$ називається *гомоморфізмом G в L,* якщо виконується умова:

$$(\forall x, y \in G) f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Якщо відображення f є сюр'єкцією, то f називається гомоморфізмом групи $(G; *)$ на групу $(L; \circ)$. Гомоморфізм групи G в себе називають її *ендоморфізмом.*

Якщо відображення $f : G \longrightarrow L$ є гомоморфізмом групи $(G; *)$ в групу $(L; \circ)$ і e – нейтральний елемент групи L, то множина $f^{-1}(e)$ є нормальним дільником групи G, який називають *ядром гомоморфізму f* і позначають $\ker f$. Отже, $\ker f = \{x | f(x) = e\}$.

Нехай підгрупа H є нормальним дільником групи G. Задамо відображення $\varphi_H : G \longrightarrow G/H$ так: $\varphi_H(g) = gH$ для всіх $g \in G$. Відображення φ_H є гомоморфізмом групи G на фактор-групу G/H. Такий гомоморфізм називають *природним* або *канонічним гомоморфізмом,* який відповідає нормальному дільнику H.

Якщо відображення $f : G \longrightarrow L$ є гомоморфізмом групи $(G; *)$ на групу $(L; \circ)$, то існує ізоморфізм ι фактор-групи $G/\ker f$ на групу L такий, що $f = \iota \circ \varphi_{\ker f}$.

Таким чином, вивчення всіх гомоморфізмів даної групи G зводиться (з точністю до ізоморфізму) до вивчення її нормальних дільників.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Нехай G є групою з нейтральним елементом e. Знайти G/G і $G/\{e\}$.

2. Скільки елементів містить фактор-група групи:
   а) коренів 6-го степеня з одиниці за підгрупою $H = \{-1, 1\}$;
   б) $(\mathbb{Z}; +)$ за підгрупою парних чисел;
   в) $(\mathbb{Z}; +)$ за підгрупою чисел, які діляться на 5;
   г) $(\mathbb{Z}[i]; +)$ за підгрупою всіх цілих чисел?

3. Нехай підгрупа H є нормальним дільником групи G. Перевірити, яке з наступних тверджень стосовно фактор-групи G/H є істинним:
   а) якщо група G є абелевою, то фактор-група G/H є абелевою;
   б) якщо група G є циклічною, то фактор-група G/H є циклічною;
   в) якщо група G є скінченною, то фактор-група G/H є скінченною;
   г) якщо група G є нескінченною, то фактор-група G/H є нескінченною.

4. Скількома способами можна задати гомоморфізм групи:
   а) яка містить 2 елементи;
   б) яка містить 5 елементів;
   в) коренів 5-го степеня з одиниці;
   г) всіх цілих чисел з операцією додавання?

5. Відображення $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ задане рівністю:
   а) $f(z) = |z|$; в) $f(z) = \frac{1}{|z|}$; д) $f(z) = |z|^2$;
   б) $f(z) = 2|z|$; г) $f(z) = 1 + |z|$; е) $f(z) = 1$.
   Яке з них є гомоморфізмом відповідних мультиплікативних груп? Для кожного гомоморфізму знайти його ядро.

6. Для елемента g групи G визначимо відображення $f : G \longrightarrow G$ рівністю: $f_g(x) = g^{-1}xg$ для всіх $x \in G$. Перевірити, що таке відображення є автоморфізмом цієї групи (тобто ізоморфізмом на себе).

7. Якою є фактор-група довільної симетричної групи S_n за її знакозмінною підгрупою A_n?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Скласти таблицю Келі для фактор-групи групи коренів 12-го степеня з одиниці за підгрупою коренів 3-го степеня.

9. Знайти фактор-групу: а) $4\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$; б) $5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$; в) $3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

10. Знайти фактор-групу групи G всіх дійсних функцій $f_{a,b}$ таких, що $f_{a,b}(x) = ax + b$ і $a \neq 0$ за підгрупою H функцій виду $f_{1,b}$ (дивись §1.3, задача 16).

11. Задати гомоморфізм фактор-групи $\mathbb{C} \setminus \{0\}/H$ мультиплікативної групи відмінних від нуля комплексних чисел за підгрупою H, яка містить всі дійсні і чисто уявні числа, на мультиплікативну групу комплексних чисел, модуль яких рівний одиниці.

12. Задати гомоморфізм групи коренів 12-го степеня з одиниці на групу коренів 3-го степеня з одиниці та знайти його ядро.

13. Знайти всі гомоморфізми циклічної групи:
а) 6-го порядку в себе;
б) 14-го порядку в циклічну групу 10-го порядку;
в) 12-го порядку в циклічну групу 15-го порядку;
г) 15-го порядку на циклічну групу 5-го порядку.

14. Задати гомоморфізм групи $(\mathbb{R}; +)$ на мультиплікативну групу комплексних чисел, модуль яких рівний одиниці, так, щоб його ядро співпало з множиною $\mathbb{Z}$.

15. Задати гомоморфізм мультиплікативної групи невироджених матриць 2-го порядку над полем $\mathbb{C}$ на мультиплікативну групу комплексних чисел, модуль яких рівний одиниці, так, щоб його ядро співпало з множиною всіх матриць з додатним визначником.

16. Описати всі ендоморфізми адитивної групи цілих чисел.

Задачі на доведення

17. Довести, що фактор-група мультиплікативної групи невироджених матриць n-го порядку над полем дійсних чисел за підгрупою матриць, визначник яких рівний одиниці, ізоморфна групі $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$.

18. Довести, що фактор-група мультиплікативної групи невироджених матриць n-го порядку над полем дійсних чисел за підгрупою матриць з додатними визначниками є циклічною групою другого порядку.

19. Довести, що при гомоморфізмі f групи $(G; *)$ на групу $(L; \circ)$ рівність $f(g_1) = f(g_2)$ виконується тоді і тільки тоді, коли елементи $g_1, g_2 \in G$ містяться в одному суміжному класі групи G за підгрупою $\ker f$.

20. Довести, що коли f є гомоморфізмом скінченної групи $(G; *)$ на групу $(L; \circ)$, то порядок елемента $g \in G$ ділиться на порядок елемента $f(g)$.

21. Довести, що коли гомоморфним образом групи є некомутативна група, то дана група також некомутативна. Чи вірне обернене твердження?

22. Довести, що порядок гомоморфного образу скінченної групи є дільником порядку групи.

23. Довести, що група L тоді і тільки тоді є гомоморфним образом скінченної циклічної групи G, коли група L теж циклічна, а її порядок є дільником порядку даної групи.

24. Довести, що відображення $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, яке задане рівністю $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$, є гомоморфізмом адитивної групи дійсних чисел на мультиплікативну групу комплексних чисел, модуль яких рівний одиниці. Знайти його ядро.

25. Довести, що всі елементи фактор-групи $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ групи $(\mathbb{Q};+)$ за підгрупою $\mathbb{Z}$ мають скінченний порядок і для кожного натурального n фактор-група $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ містить єдину циклічну підгрупу n-го порядку.

26. Довести, що не існує гомоморфізму адитивної групи раціональних чисел на адитивну групу цілих чисел.

Творчі задачі

27. Дослідити можливість побудови фактор-групи мультиплікативної групи коренів n-го степеня з одиниці за її підгрупою коренів m-го степеня з одиниці при різних натуральних n і m.

28. Дослідити можливість побудови фактор-групи $m\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ при різних натуральних m і k.

29. Дослідити групу автоморфізмів $Aut(G)$ циклічної групи G.

Задачі з олімпіад

30. Група G називається p-групою, якщо кожен її елемент має скінченний порядок, рівний якомусь з невід'ємних цілих степенів простого числа p. Довести, що скінченна група G є p-групою тоді і тільки тоді, коли її порядок є степенем числа p.

31. Довести, що коли підгрупа H_1 групи G містить підгрупу H_2 індекса n, то H_1 містить нормальний дільник, індексом якого є дільник $n!$.

32. Нехай K – комутант групи G. Довести, що:
а) фактор-група G/K групи G за комутантом K є абелевою;
б) фактор-група G/H є абелевою тоді і тільки тоді, коли $K \subset H$.

§ 1.6 Вибрані задачі

1. Скількома способами можна розставити дужки в послідовності $g_1, g_2, \ldots, g_n$ елементів півгрупи G, щоб знайти результат операції над цими елементами.

2. Нехай G – півгрупа і G_1 – півгрупа, утворена з G приєднанням зовнішнім чином одиниці (дивись задачу № 5 з §1.1). Непорожня підмножина K півгрупи G називається *нормальним комплексом даної півгрупи,* якщо виконується умова

$$(\forall k_1, k_2 \in K)(x, y \in G_1)(xk_1y \in K \longrightarrow xk_2y \in K).$$

   Довести, що для будь-якого гомоморфізму півгрупи G на півгрупу S і кожного $s \in S$ множина $K_s = \{g \in G | f(g) = s\}$ є нормальним комплексом даної півгрупи. Яким є нормальний комплекс K_s, якщо s є ідемпотентом півгрупи S?

3. Нехай K є нормальним комплексом півгрупи G. Довести, що існує півгрупа S і гомоморфізм f півгрупи G на півгрупу S такий, що $K = f^{-1}(s)$ для деякого $s \in S$.

4. Довести, що скінченна півгрупа має ідемпотенти.

5. Довести, що скінченна комутативна півгрупа єдиним способом розбивається на нормальні комплекси, кожен із яких є підпівгрупою з одним ідемпотентом.

6. Нехай в ідемпотентній комутативній півгрупі G визначено відношення $(x, y) \in \omega \longleftrightarrow x = xy$. Довести, що відношення ω є відношенням порядку і вивчити його властивості.

7. Нехай L – лівий та R – правий ідеали півгрупи G. Довести, що:
   а) $L \cap R \neq \varnothing$; б) LR – ідеал цієї півгрупи.

8. Нехай $g \in G$, $[g]$ – підмножина півгрупи G, яка містить елементи g, xg, gy, xgy для довільних елементів x, y з G. Довести, що:
   а) $[g]$ є ідеалом даної півгрупи (його називають *головним ідеалом, породженим елементом* g);
   б) кожний ідеал в G є об'єднанням його головних ідеалів.

9. Нехай $(G; \cdot)$ – півгрупа, $(G_1; \cdot)$ – півгрупа, яка доповнена зовнішнім чином одиницею (дивись §1.1, задача 5) і $H \subset G_1$. Пара (ε_H, W_H) називається *елементарною визначальною парою для півгрупи* $(G; \cdot)$,

якщо $\varepsilon_H \subset G_1 \times G_1$ і $W_H \subset G_1$ задані співвідношеннями:
$x \equiv y(\varepsilon_H) \leftrightarrow (\forall t \in G_1)(xt \in H \longleftrightarrow yt \in H)$;
$x \in W_H \longleftrightarrow (\forall t \in G_1)(xt \notin H)$.
Довести, що ε_H є відношенням еквівалентності на множині G_1, яке задовольняє умові $x \equiv y(\varepsilon_H) \to (\forall t \in G_1)(xt \equiv yt(\varepsilon_H))$, а W_H є порожньою множиною або правим ідеалом півгрупи G_1 таким, що W_H є деяким класом еквівалентності ε_H.

10. Нехай (ε_H, W_H) є елементарною визначальною парою для півгрупи $(G;\cdot)$ і $A = G_1/\varepsilon_H$. Для кожного елемента g півгрупи G побудуємо відношення $P_H(g) \subset A \times A$, яке задається співвідношенням

$$(\varepsilon_H < x >, \varepsilon_H < y >) \in P_H(g) \leftrightarrow xg \equiv y(\varepsilon_H) \wedge y \notin W_H.$$

Довести, що множина $P_H(G) = \{P_H(g) | g \in G\}$ з операцією композиція є гомоморфним образом півгрупи $(G;\cdot)$. Півгрупу $(P_H(G);\circ)$ називають *елементарним гомоморфним зображенням півгрупи* $(G;\cdot)$ *за допомогою часткових однозначних перетворень множини* A.

11. Довести, що множина G всіх дійсних функцій $f(x) = ax + \frac{b}{cx} + d$ таких, що $ad - bc \neq 0$, відносно операції композиція є групою.

12. Нехай $A \neq \varnothing$ і $B \subset A$. Довести, що множина всіх бієкцій f множини A таких, що $(\forall b \in B) f(b) = b$, є групою відносно операції композиція.

13. Довести, що група G є абелевою, якщо для всіх її елементів виконується одна з наступних умов:
а) всі неодиничні елементи мають порядок 2;
б) $g^k = g^{k+2}$, де $k \in \mathbb{Z}$;
в) $(gh)^2 = g^2h^2$.

14. Нехай G є циклічною групою порядку n з твірним елементом g, $b = g^k$. Довести, що:
а) b є твірним елементом даної групи тоді і тільки тоді, коли n і k є взаємно простими числами;
б) порядок елемента b дорівнює $\frac{n}{(n,k)}$;
в) якщо n і k є взаємно простими числами, то a є k-тим степенем деякого елемента даної групи і навпаки;
г) якщо n – непарне число, то всі елементи групи G є квадратами деяких елементів з G.

15. Нехай у множині $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Q}$ визначена бінарна операція $*$ так: $(a,b) * (c,d) = (ac, bc + d)$. Довести, що алгебра $(G;*)$ є групою.

16. Побудувати групу самосуміщень куба, описати всі її підгрупи та виділити серед них циклічні і нормальні дільники.

17. Нехай N – нормальний дільник групи G, H – її підгрупа і $H^* = \{hN|h \in H\}$. Довести, що:
а) H^* є підгрупою G/N; б) якщо $N \subset H$, то N є нормальним дільником H і $H^* = H/N$; в) якщо H – нормальний дільник групи G, то H^* є нормальним дільником G/N; г) якщо H^* є нормальним дільником G/N, то H – нормальний дільник групи G.

18. Довести, що мультиплікативна група всіх дісних функцій виду $f(x) = ax + b (a \neq 0)$ ізоморфна групі $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ з операцією $*$, яка визначається рівністю: $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$.

19. Нехай H – центр некомутативної групи G. Довести, що фактор-група G/H не є циклічною.

20. Нехай $(\mathbb{Z}^3; *)$ – група з операцією

$$(k_1, k_2, k_3) * (l_1, l_2, l_3) = (k_1 + (-1)^{k_3} l_1, k_2 + l_2, k_3 + l_3)$$

і $H = \{(k, 0, 0)|k \in \mathbb{Z}\}$ – її нормальний дільник. Довести, що фактор-група $\mathbb{Z}^3/H$ ізоморфна адитивній групі $\mathbb{Z}[i]$ цілих гауссовиж чисел.

21. Нехай $(G; +)$ – адитивна група многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує $n-1$, $(\mathbb{R}^n; +)$ – адитивна група n-вимірних векторів і $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Довести, що відображення $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$, задане рівністю $\varphi(f(x)) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$, є ізоморфізмом.

22. Нехай $(\mathbb{R}[x]; +)$ – адитивна група всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами від однієї змінної, $(\mathbb{R}^n; +)$ – адитивна група n-вимірних векторів і $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Довести, що відображення $\varphi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, задане рівністю $\varphi(f(x)) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$, є гоморфізмом. Знайти ядро цього гомоморфізму.

23. Довести, що довільна група діедра гомоморфно відображається на групу другого порядку.

24. В множині $End(G)$ всіх ендоморфізмів групи G визначимо операції додавання і множення так:
$(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g)\psi(g); \quad (\varphi \circ \psi)(g) = \varphi(\psi(g))$.
Довести, що алгебра $(End(G); +, \circ)$ є кільцем і вивчити його властивості для циклічної групи.

25. Довести, що лупи 1,2,3 і 4-го порядку є групами.

26. Знайти лупу 5-го порядку, яка не є групою.

27. Бінарний оператив $(G;\circ)$ називається *ізотопним до бінарного оператива* $(G;*)$, якщо існують підстановки α,β,γ множини G такі, що $(\forall x,y \in G)\gamma(x\circ y) = \alpha(x)*\beta(y)$. При цьому трійка підстановок $T = (\alpha,\beta,\gamma)$ називається *ізотопією*, а самі підстановки *лівим, правим і головним компонентами ізотопії* відповідно. Ізотопія виду $T = (\alpha,\beta,\Delta_G)$ називається *головною*, а бінарний оператив $(G;*)$ в цьому випадку називають *головним ізотопом* даного оперативу $(G;\circ)$.

    Довести, що бінарний оператив, ізотопний квазігрупі, є квазігрупою.

28. Довести, що множина всіх ізотопій між бінарними оперативами $(G;\circ)$ і $(G;*)$ є групою відносно операції

$$T_1T_2 = (\alpha_2\circ\alpha_1, \beta_2\circ\beta_1, \gamma_2\circ\gamma_1).$$

29. Довести, що коли квазігрупа $(G;\circ)$ ізотопна квазігрупі $(G;*)$, то $(G;\circ)$ ізоморфна деякому головному ізотопу $(G;*)$.

30. Нехай квазігрупа задана таблицею Келі:

$\cdot$	1	2	3	4	5
1	3	1	4	2	5
2	5	2	3	1	4
3	1	4	2	5	3
4	4	5	1	3	2
5	2	3	5	4	1

    Знайти ізотопний образ цієї квазігрупи при ізотопії $T = (\alpha,\beta,\gamma)$ такого виду:

$\cdot$	1	2	3	4	5
α	2	3	4	1	5
β	2	3	1	4	5
γ	3	3	1	4	5

31. Довести, що кожна квазігрупа ізотопна лупі.

32. Довести теорему Алберта: якщо лупа ізотопна групі, то вони ізоморфні між собою.

33. Довести, що коли бінарний оператив з одиницею ізотопний групі, то вони ізоморфні між собою.

34. Встановити, чи може бінарний оператив без одиниці бути ізотопним і ізоморфним деякій групі.

35. Довести, що півгрупа всіх взаємно однозначних часткових перетворень множини A є інверсною.

36. Довести, що півгрупа $(G;\cdot)$ є інверсною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:
а) G – регулярна півгрупа з комутуючими ідемпотентними елементами;
б) кожен головний лівий і правий ідеали півгрупи G мають єдиний породжуючий ідемпотент.

37. Довести, що кожна інверсна півгрупа ізоморфна деякій інверсній півгрупі взаємно однозначних перетворень деякої множини.

38. Нехай G – регулярна півгрупа. Довести, що наступні властивості рівносильні:
а) всі ідемпотенти G комутують між собою;
б) якщо $\bar{g}$ – інверсний елемент до $g \in G$, то елементи $g\bar{g}$ і $\bar{g}g$ комутують між собою;
в) для кожного елемента $g \in G$ існує не більше одного елемента, інверсного з ним;
г) для довільних ідемпотентів $i_1, i_2 \in G$ рівність $i_1 i_2 = i_1$ рівносильна рівності $i_2 i_1 = i_1$;
д) для довільного ідемпотента $g \in G$ та інверсного для нього елемента $\bar{g}$ виконується рівність $g\bar{g} = \bar{g}g$;
е) якщо $i_1, i_2 \in G$ – ідемпотенти, то з рівностей $i_1 i_2 = i_1$, $i_2 i_1 = i_2$ випливає $i_1 = i_2$, а з рівностей $i_1 i_2 = i_2$, $i_2 i_1 = i_1$ випливає $i_1 = i_2$.

39. Для того, щоб регулярна півгрупа G була інверсною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна з перелічених у попередній задачі умов.

40. Довести, що інверсну півгрупу $(G;\cdot)$ можна розглядати як алгебру $(G;\cdot,\bar{\ })$ з унарною операцією $\bar{\ }$ такою, що для будь-яких елементів $g, g_1, g_2 \in G$ виконуються рівності:
а) $\overline{(\bar{g})} = g$;   б) $\overline{(g_1 g_2)} = \bar{g}_2 \bar{g}_1$;   в) $g_1 \bar{g}_1 g_2 \bar{g}_2 = g_2 \bar{g}_2 g_1 \bar{g}_1$.

41. Довести, що коли i_1, i_2 – ідемпотенти в інверсній півгрупі G, то $Gi_1 \cap Gi_2 = Gi_1 i_2$.

42. Довести, що півгрупа $(G;\cdot)$ є регулярною тоді і тільки тоді, коли для будь-яких її правого ідеала R і лівого ідеала L виконується рівність $RL = R \cap L$.

43. Довести, що коли в інверсній півгрупі G для кожного елемента $g \in G$ виконується рівність $g\bar{g} = \bar{g}g$, то G є об'єднанням груп.

44. Довести, що:
а) регулярна півгрупа з єдиним ідемпотентом є групою;
б) регулярна півгрупа з скороченням є групою;
в) регулярна комутативна півгрупа є об'єднанням груп.

45. Довести, що в інверсній півгрупі G відношення $<$, задане умовою $g_1 < g_2 \overset{df}{\longleftrightarrow} g_1\bar{g}_2 = g_1\bar{g}_1$, є відношенням часткового порядку (його називають канонічним порядком).

46. Довести, що канонічний порядок в інверсній півгрупі G можна задати однією з рівностей:
а) $g_2\bar{g}_1 = g_1\bar{g}_1$; б) $\bar{g}_1 g_2 = g_1\bar{g}_1$; в) $\bar{g}_2 g_1 = g_1\bar{g}_1$; г) $g_1\bar{g}_2 g_1 = g_1$;
д) $\bar{g}_1 g_2 \bar{g}_1 = \bar{g}_1$.

47. Довести, що канонічний порядок в інверсній півгрупі G має властивості:
а) якщо $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$;
б) якщо $a < b$, то $\bar{a} < \bar{b}$.

48. Довести, що канонічний порядок в інверсній півгрупі G є стійким, тобто для будь-яких $x, u, v, y \in G$ з нерівностей $z < xv, z < uv, z < uy$ випливає $z < xy$.

Розділ 2

Векторні простори

§ 2.1 Векторний простір. Підпростори

Література: [1] стор. 390 – 393, 405 – 411; [3] стор. 245 – 256.

Теоретичні відомості

Нехай у множині L задана бінарна операція $+$ і зовнішня операція множення на елементи поля P елементів з множини L (тобто відображення множини $P \times L$ в L), для якої будемо використовувати мультиплікативний запис.

Множина L називається *векторним* або *лінійним простором* над полем P, якщо виконуються умови:

1) Множина L є абелевою групою відносно бінарної операції $+$.

2) Для всіх елементів x, y множини L і будь-яких $\alpha, \beta \in P$ виконуються рівності:

а) $1x = x$;

б) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

в) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

г) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Елементи векторного простору L називають *векторами* і позначають $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots$.

Якщо поле P є полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, то такий векторний простір називають *дійсним*. Якщо ж поле P є полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, то такий векторний простір називають *комплексним*.

Різницею векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ векторного простору L над полем P називається вектор $\vec{b} + (-\vec{a})$, який позначають $\vec{b} - \vec{a}$. Для будь-яких векторів $\vec{b}, \vec{a} \in L$ різниця $\vec{b} - \vec{a}$ існує і визначається однозначно як розв'язок рівняння $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$.

Підмножина U векторного простору L над полем P називається його *підпростором*, якщо вона є векторним простором над полем P відносно операцій, заданих в L.

Для того, щоб непорожня підмножина U векторного простору L над полем P була його підпростором, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:

$(\forall \vec{a}, \vec{b} \in U, \lambda \in P)(\vec{a} + \vec{b} \in U \wedge \lambda\vec{a} \in U)$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Як поводять себе число 0 і нульовий вектор $\vec{0}$ при виконанні зовнішньої операції множення векторів простору L на елементи числового поля P?

2. Нехай у векторному просторі L над полем P виконується рівність $\lambda\vec{x} = \vec{0}$. Що можна сказати про співмножники цього добутку?

3. Чому дорівнюють добутки $\alpha(-\vec{x})$ і $(-\alpha)\vec{x}$ у векторному просторі L над полем P?

4. Нехай у звичайному просторі задана деяка система координат і W_3 – множина всіх радіус-векторів точок цього простору (векторів, початок яких є початком координат, а кінцем – дана точка простору). Які з аксіом векторного простору виконуються у W_3 відносно звичайних операцій додавання векторів і множення вектора на дійсне число?

5. Чи утворює векторний простір:
   а) множина $L = \{0\}$ над полем $\mathbb{Q}$;
   б) множина чисел $\{-1, 1\}$ відносно операцій множення і множення на комплексні числа;
   в) множина комплексних чисел $\mathbb{C}$ відносно операцій додавання і множення на дійсні числа;
   г) множина $\mathbb{R}^+$ відносно операцій множення і піднесення додатного числа до дійсного степеня;
   д) множина $M_2(\mathbb{R})$ відносно операцій додавання матриць і множення їх на дійсні числа;
   е) множина $\mathbb{Z}$ відносно операцій додавання і множення на елементи поля $\mathbb{Z}_2$, яка визначається рівностями $\overline{0}\,n = 0$ і $\overline{1}\,n = n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$?

6. Перевірити, що:
   а) поле комплексних чисел є векторним простором над полем комплексних чисел;
   б) поле дійсних чисел є векторним простором над полем раціональних чисел;
   в) будь-яке числове поле є векторним простором над полем раціональних чисел;
   г) будь-яке поле є векторним простором над самим собою.

7. Перевірити, чи є підпростором арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$:
   а) множина всіх векторів з парними координатами;
   б) множина всіх векторів, у яких послідовні координати утворюють геометричну прогресію;
   в) множина всіх векторів, коордисати яких з парними номерами дорівнюють 0;
   г) множина всіх векторів, у яких остання координата рівна сумі всіх попередніх?

8. Чи існує алгебраїчна структура L над полем P з бінарною і зовнішньою операціями, в якій виконуються всі аксіоми векторноіо простору, крім: $(\forall x \in L)(1x = x)$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Встановити, чи утворює векторний простір:
   а) множина $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ всіх прямокутних $m \times n$-матриць над полем $\mathbb{R}$ відносно операцій додавання матриць і множення матриці на дійсне число;
   б) множина всіх відображень $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ відносно відомих з математичного аналізу операцій додавання $((f+g)(x) = f(x)+g(x))$ і множення на дійсне число $((\lambda f)(x) = \lambda f(x))$;
   в) множина P^∞ всіх нескінченних послідовностей елементів поля P відносно операцій покомпонентного додавання і множення на елементи поля P:
   $(a_1,\ldots,a_n,\ldots) \oplus (b_1,\ldots,b_n,\ldots) = (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n,\ldots)$;
   $\lambda(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots) = (\lambda a_4, \lambda a_2,\ldots,\lambda a_n,\ldots)$;
   г) множина $\mathfrak{P}(M_n)$ всіх підмножин множини $M_n = \{1,2,\ldots,n\}$ відносно операцій симетричного віднімання $\div$ і множення на елементи поля $\mathbb{Z}_2$, заданого рівностями $\bar{0}X = \varnothing$, $\bar{1}X = X$ для всіх $X \in \mathfrak{P}(M_n)$.

10. Встановити, чи можна перетворити групу коренів третього степеня з одиниці, шляхом задання зовнішньої операції, у векторний простір над полем: а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_3$.

11. Знайти всі дійсні числа a, при яких множина
$U = \{(x, y, z, t) | 2x + y - z = a + 1 \wedge y + 3z - 5t = a^2 + 6a + 5\}$
є підпростором арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^4$.

12. Встановити, які з наступних множин матриць n-го порядку над полем P є підпросторами векторного простору $M_n(P)$:
   а) симетричних матриць; в) вироджених матриць;
   б) кососиметричних матриць; г) невироджених матриць.

13. Описати всі підпростори векторноуо простору H_3 всіх радіус-векторів звичайного тривимірного простору над полем дійсних чисел.

14. Встановити, чи утворює векторний простір над полем дійсних чисел множина всіх дійсних:
   а) парних функцій; в) монотонно зростаючих функцій;
   б) непарних функцій; г) дифуренційовних функцій
   відносно операцій додавання і множення функцій на дійсні числа.

Задачі на доведення

15. Довести, що наступні множини многочленів від однієї змінної з дійсними коефіцієнтами є векторними просторами над полем $\mathbb{Q}$ відносно операцій додавання многочленів і множення їх на раціональне число:
   а) множина всіх многочленів, степінь яких не перевищує 2002 (всі числа вважаємо многочленами не вище нульового степеня);
   б) множина всіх многочленів $f(x)$ таких, що $f(-1) = 0$;
   в) множина всіх многочленів $f(x)$ таких, що $f(6) \in \mathbb{Q}$;
   г) множина всіх многочленів $f(x)$ таких, що $f'''(x) = 0$.

16. Довести, що комутативність операції додавання у векторному просторі випливає з решти аксіом.

17. Довести, що у векторному просторі L над аолем P для всіх векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і елементів α, β поля P виконуються рівності $\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b}$ і $(\alpha - \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{a}$.

18. Довести, що у векторному просторі L над полем $\mathbb{Z}_2$ для всіх векторів виконується рівність $\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$.

19. Довести, що у векторному просторі L над полем $\mathbb{Z}_1$ для всіх векторів виконується рівність $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}=\vec{7}$.

20. Rовести, що наступні множини векторів утворюють підпростори арифметичного векторного простору P^n над полем P:
    а) множина всіх векторів, у яких координати, рівновіддалені вmд кінців, рівні;
    б) оножина всіх векторів, у яких сума всіх координат рівна 0;
    в) множина всіх векторів, у яких суми координат, які стоять на парних і непарних місцях, однакові;
    г) множина всіх векторів, у яких координати утворюють арифметичні прогресії.

21. Довести, що множина всіх послідовностей векторного простору $\mathbb{R}^\infty$, які задовольняють умову Коші (для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що як тільки $s, t > m$, то виконується нерівність $|x_s - x_t| < \varepsilon$), є підпростором цього простору.

Творчі задачі

22. Чи можна в адитивній групі цілих чисел $\mathbb{Z}$ визнапити зовнішню операцію множення на елементи деякого поля P так, щоб вона стала векторним простором?

23. При яких натуральних n в адитивній групі $\mathbb{Z}_n$ можна визначити зовнішню операцію множення на елементи деякого поля P так, щоб вона стала векторним простором?

Задачі з олімпіад

24. Довести, що адитивну групу L можна перетворити у векторний простір над полем $\mathbb{Z}_p$ тоді і тільки тоді, коли зовнішня операція буде задовольняти умові: $(\forall \vec{x} \in L)(p\vec{x} = \vec{0})$.

25. Довести, що комутативну групу L можна перетворити у векторний простір над полем $\mathbb{Q}$ тоді і тільки тоді, коли в ній немає відмінних від нуля елементів скінченного порядку і для будь-якого натурального n і довільного елемента $a \in L$ рівняння $nx = a$ має розв'язок у групі L.

§ 2.2 Базис і розмірність векторного простору

Література: [1] стор. 393 – 398; [3] стор. 247 – 248, 256 – 261.

Теоретичні відомості

Нехай L – векторний простір над полем P, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in L$ і $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$. Кожний вектор $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{a}_k$ називають *лінійною комбінацією* даних векторів.

Підмножина $M = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s\}$ векторного простору L над полем P називається *лінійно залежною*, якщо хоча б один з її векторів є лінійною комбінацією інших векторів цієї множини.

Підмножина $M = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s\}$ векторного простору L над полем P називається *лінійно незалежною*, якщо ні один її вектор не є лінійною комбінацією інших векторів цієї множини.

Для того, щоб підмножина $M = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s\}$ векторного простору L над полем P була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб існували елементи $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ поля P, з яких хоча б один відмінний від нуля, і виконувалася рівність $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{a}_s = \vec{0}$.

Для того, щоб підмножина $M = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s\}$ векторного простору L над полем P була лінійно незалежною, необхідно і достатньо, щоб рівність $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_s\vec{a}_s = \vec{0}$ виконувалася тільки в єдиному випадку, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$.

Якщо підмножина $M = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s\}$ векторного простору L над полем P є лінійно незалежною і кожен вектор простору L є деякою лінійною комбінацією векторів цієї множини, то M називають *базисом простору L*.

Якщо векторний простір L над полем P містить лінійно незалежну підмножину $M = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s\}$, а кожна підмножина, яка містить $s+1$ вектор є лінійно залежною, то число s називають *розмірністю векторного простору L* і пишуть $\dim L = s$. Простір розмірності s називають також *s-вимірним* і позначають L_s. Векторний простір L називають *нескінченновимірним*, якщо в ньому існує будь-яке число лінійно незалежних векторів.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Перевірити, що у векторному просторі L над полем P мають місце такі властивості лінійно залежних і незалежних множин векторів:
   а) підмножина, яка містить нульовий вектор, є лінійно залежною;
   б) якщо деяка підмножина M_1 є лінійно залежною, то будь-яка інша підмножина M_2, яка містить M_1, також лінійно залежна;

в) якщо деяка підмножина M_1 є лінійно незалежною, то будь-яка підмножина $M_2 \neq \varnothing$, яка міститься в M_1, також лінійно незалежна;
г) якщо деяка підмножина M_1 є лінійно незалежною, а підмножина $M_2 = M_1 \cup \{\vec{b}\}$ лінійно залежна, то вектор $\vec{b}$ є лінійною комбінацією векторів з M_1.

2. Коли є лінійно залежною підмножина M_1 векторного простору L над полем P, яка містить 2 вектори?

3. Чи існують у векторному просторі $C_{[a,b]}$ скінченновимірні підпростори розмірності 5?

4. Яку розмірність можуть мати підпростори векторного простору $\mathbb{R}[x]$ всіх многочленів від змінної x над полем $\mathbb{R}$?

5. Яка розмірність арифметичного векторного простору $(\mathbb{Z}_2)^2$ та скільки базисів він містить?

6. Нехай L є векторний простір над полем P розмірності 20. Яку розмірність можуть мати підпростори цього простору?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

7. Встановити, лінійно залежною чи незалежною є множина векторів:
   а) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$
   простору $M_2(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$;
   б) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$
   простору $M_2(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$;
   в) $f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad f_2(x) = x^3 - x^2 + x - 2,$
   $f_3(x) = 3x^3 + x^2 - x - 1$ простору$\mathbb{R}[x]$ над полем $\mathbb{R}$;
   г) $f_1(x) = 2x^2 + x + 3, \quad f_2(x) = -x^2 + x - 2, \quad f_3(x) = 5x - 1$
   простору$\mathbb{R}[x]$ над полем $\mathbb{R}$.

8. Знайти всі значення λ, при яких у векторному просторі L над полем P:
   а) з лінійної незалежності множини векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ слідує лінійна незалежність множини $\{\lambda\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_2\}$;
   б) з лінійної незалежності множини векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ слідує лінійна незалежність множини $\{\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \lambda\vec{a}_2, (\lambda^2 - 1)\vec{a}_3\}$;
   в) з лінійної незалежності множини векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ слідує лінійна незалежність множини $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2 - \lambda\vec{a}_3, (\lambda + 1)\vec{a}_3\}$;
   г) з лінійної незалежності множини векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ слідує лінійна незалежність множини $\{\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n, \vec{a}_n + \lambda\vec{a}_1\}$.

9. Встановити, якою є розмірність векторного простору:
   а) W_2 над полем $\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$;
   б) W_3 над полем $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$; г) $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{C}$.

10. Знайти розмірність і який-небудь базис векторного простору $M_2(\mathbb{C})$ над полем: а) $\mathbb{C}$; б) $\mathbb{R}$.

11. Перевірити, що множина всіх векторів арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$, кожна координата яких з парним номером є подвоєнням попередньої координати з непарним номером, є підпростором і знайти його розмірність та один з базисів.

12. Визначити розмірність та знайти один з базисів підпростору векторного простору $\mathbb{R}_n[x]$ многочленів від однієї змінної x з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує n, які задовольняють умові:
   а) $f(1) = 0$; в) $3f(0) - 2f(1) = 0$;
   б) $f'''(x) = 0$; г) $f(1) + f(2) = 0$.

13. Знайти розмірність і базис векторного простору всіх матриць:
   а) $M_2(\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{Q}$; в) симетричних матриць 5-го порядку;
   б) $M_3(\mathbb{Z}_3)$ над полем $\mathbb{Z}_3$; г) кососиметричних матриць з $M_n(\mathbb{R})$.

14. Знайти розмірність векторного простору $\mathfrak{P}(M_3)$ всіх підмножин множини $M_3 = \{1, 2, 3\}$ відносно операцій симетричного віднімання $\dotdiv$ і множення на елементи поля $\mathbb{Z}_2$ (дивись §2.1, задача № 9г).

Задачі на доведення

15. Нехай $L_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s, \vec{a}_{s+1}\}$ і $L_2 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s\}$ – підмножини векторного простору L над полем P. Довести, що коли кожен вектор з множини L_1 є лінійною комбінацією векторів множини L_2, то підмножина L_1 є лінійно залежною.

16. Довести, що у скінченновимірному векторному просторі всі базиси містять однакове число векторів.

17. Довести, що коли векторний простір L над полем P має розмірність n, то кожна лінійно незалежна підмножина векторів цього простору, яка містить n векторів, утворює базис.

18. Довести, що у скінченновимірному векторному просторі будь-яку лінійно незалежну підмножину його векторів можна доповнити до базису.

19. Довести, що коли вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ простору L над числовим полем P лінійно незалежні, то вектори $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{c}$ також лінійно незалежні. Чи буде мати місце це твердження, якщо поле P містить 2 елементи?

20. Довести, що у векторному просторі $\mathbb{R}_n[x]$ вектори-многочлени $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ утворюють базис.

21. Довести, що у векторному просторі $\mathbb{R}_n[x]$ базисом є будь-яка множина ненульових многочленів, серед яких є по одному і тільки по одному многочлену кожного з степенів $0, 1, 2, \ldots, n$.

22. У векторному просторі всіх дійсних функцій від однієї змінної над полем $\mathbb{R}$ довести лінійну незалежність множини:
    а) $\{\sin x, \cos x\}$; в) $\{x^{-1}, x, x^2\}$;
    б) $\{1, \sin x, \cos x\}$; г) $\{2^x, 4^x, 8^x\}$.

23. Довести, що у векторному просторі над полем $\mathbb{R}$ всіх дійсних функцій від однієї змінної вектори $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли для будь-яких дійсних чисел a, b, c виконується рівність
$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_1(b) & f_1(c) \\ f_2(a) & f_2(b) & f_2(c) \\ f_3(a) & f_3(b) & f_3(c) \end{vmatrix} = 0.$$

24. Нехай вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ утворюють базис векторного простору L_n над полем P і $\vec{e}_{n+1} = -(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_n)$. Довести, що кожний вектор $\vec{a}$ цього простору можна подати у вигляді суми
$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n + \alpha_{n+1}\vec{e}_{n+1}$$
такої, що $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1} = 0$, і таке подання єдине.

25. Нехай $\mathfrak{P}(M_n)$ – векторний простір всіх підмножин множини $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ відносно операцій симетричного віднімання $\dotdiv$ і множення на елементи поля $\mathbb{Z}_2$ (дивись §2.1, задача № 9г), та підмножини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – такі, що ні одна з них не міститься в об'єднанні всіх інших з цих множин. Довести, що система множин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є лінійно незалежною у просторі $\mathfrak{P}(M_n)$.

26. Довести, що у векторному просторі $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$ лінійно незалежними є числа:
    а) $2^{r_1}, 2^{r_2}, \ldots, 2^{r_n}$, де $r_1, r_2, \ldots, r_n$ є різними раціональними числами з інтервалу $(0, 1)$;
    б) $1, \sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \ldots, \sqrt{m_n}$, де $m_1, m_2, \ldots, m_n$ є різними натуральними числами, кожне з яких не ділиться на квадрат простого числа.

Творчі задачі

27. Нехай $\overline{L}$ є підпростором векторного простору L, $\dim \overline{L} = k, \dim L = m$ і $k < m$. Чи можна відшукати базис простору L, в якому:
    а) не міститься жодного вектора з $\overline{L}$;
    б) містяться тільки $s \leqslant k$ векторів з $\overline{L}$?

28. Нехай $\overline{L}_n$ – векторний простір над полем P, яке містить q елементів. Знайти:
    а) число різних базисів цього простору;
    б) число k-вимірних підпросторів цього простору.

Задачі з олімпіад

29. Функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ визначені на відрізку $[a, b]$, причому для будь-яких c_1 і c_2 функція $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ не змінює знак на (a, b). Довести, що $f_1(x)$ і $f_2(x)$ лінійно незалежні в просторі $C_{[a,b]}$.

30. Нехай $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ – лінійно незалежна підмножина простору $C_{[a,b]}$. Довести, що на відрізку $[a, b]$ існує множина точок $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для яких детермінант матриці n-го порядку $(f_i(a_j))$ відмінний від нуля.

31. Нехай O_1, O_2 – точки перетину медіан трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$. Довести, що $\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} = 3\vec{O_1O_2}$.

32. Відомо, що 2002-кутник $A_1A_2 \ldots A_{2002}$ має дві осі симетрії, які перетинаються в точці O. Довести, що $\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \cdots + \vec{OA}_{2002} = \vec{0}$.

33. На координатній площині від початку координат відкладено 2003 вектори, сума яких дорівнює нульовому вектору. Довести, що ці вектори можна занумерувати так, щоб вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \ldots, \vec{a_1} + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_{2003}$ лежали в одній координатній чверті.

§ 2.3 Лінійна оболонка і лінійний многовид. Перетин і сума підпросторів

Література: [1] стор. 406 – 411; [3] стор. 250 – 255.

Теоретичні відомості

Нехай $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s\}$ – підмножина векторного простору L над полем P. Множина $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s)$ всіх можливих лінійних комбінацій з векторів даної підмножини називається її *лінійною оболонкою*. Лінійна оболонка $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s)$ кожної скінченної підмножини даного векторного простору є його підпростором.

Множина U всіх розв'язків однорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомими над числовим полем P є підпростором векторного простору P^n. Кожний базис цього підпростору називають *фундаментальною системою розв'язків даної системи*. Якщо ранг головної матриці системи рівний r, то фундаментальна система містить $n - r$ векторів.

Нехай U є підпростором векторного простору L над полем P і $\vec{a} \in L$. Множина $\vec{a} + U$ всіх можливих сум вектора $\vec{a}$ та векторів з підпростору U називається *лінійним многовидом, утвореним паралельним перенесенням підпростору U на вектор $\vec{a}$*, а розмірність $\dim U$ називають його *розмірністю.*

Множина V всіх розв'язків сумісної неоднорідної системи m лінійних рівнянь з n невідомими над числовим полем P є лінійним многовидом векторного простору P^n, утвореним паралельним перенесенням простору U розв'язків відповідної однорідної системи на один з розв'язків неоднорідної системи.

Нехай U_1 і U_2 є підпросторами векторного простору L над полем P.

Множина $U_1 \cap U_2$ називається *перетином підпросторів U_1 і U_2.*

Множина $U_1 + U_2$ всіх можливих сум векторів, перший з яких взято з підпростору U_1, а другий – з U_2, називається *сумою підпросторів U_1 і U_2.*

Перетин і сума підпросторів векторного простору є підпростором цього простору.

Сума $U_1 + U_2$ підпросторів U_1 і U_2 векторного простору L над полем P називається *прямою* і позначається $U_1 \oplus U_2$, якщо кожен вектор суми єдиним чином подається у вигляді суми векторів підпросторів U_1 і U_2. Сума $U_1 + U_2$ підпросторів U_1 і U_2 є прямою тоді і тільки тоді, коли їх перетин містить тільки нульовий вектор.

Для підпросторів U_1 і U_2 скінченновимірного векторного простору L над полем P має місце рівність:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Задачі на ілюстрацію понять

1. У векторному просторі $M_2(\mathbb{R})$ встановити, чи належить лінійній оболонці векторів-матриць $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Який геометричний образ асоціюється з лінійною оболонкою множини векторів, яка містить:
   а) один вектор простору W_2;
   б) два різних вектори простору W_2;
   в) три різних вектори простору W_2;
   г) чотири різних вектори простору W_2, серед яких є одна пара колінеарних векторів?

3. З яким геометричним образом асоціюється лінійний многовид у векторному просторі: а) W_2; б) W_3?

4. Яким є простір розв'язків рівняння $x + y + z + t = 0$ над полем дійсних чисел? Навести приклад фундаментальної системи розв'язків для системи рівнянь, яка містить це одне рівняння.

5. Знайти однорідну систему лінійних рівнянь з n невідомими над числовим полем P, простором розв'язків якої є арифметичний векторний простір P^n.

6. Знайти однорідну систему лінійних рівнянь з n невідомими над числовим полем P, простором розв'язків якої є множина всіх n-вимірних векторів, у яких перша координата дорівнює сумі всіх інших координат.

7. Чи можна узагальнити поняття перетину, суми і прямої суми двох підпросторів векторного простору на:
   а) будь-яке скінченне число його підпросторів;
   б) нескінченне число його підпросторів?

8. Чому не знайшло застосувань об'єднання підпросторів векторного простору?

9. Якими є сума і перетин підпросторів U і V векторного простору $M_n(\mathbb{R})$, якщо:
а) U – всі симетричні матриці і V – всі верхні трикутні матриці;
б) U – всі симетричні матриці і V – всі кососиметричні матриці?

10. Чи містить перетин $U \cap V$ підпросторів U і V векторного простору L_n ненульові вектори, якщо $\dim U + \dim V > n$?

11. Чи може сума двох підпросторів U та V векторного простору L_n бути прямою, якщо: а) $\dim U + \dim V > n$; б) $\dim U + \dim V \leqslant n$?

12. Який зв'язок існує між підпросторами U_1 та U_2 векторного простору W_3, якщо їх сума не є прямою?

13. Чи може деякий лінійний многовид векторного простору L над полем P бути утвореним паралельним перенесенням двох різних його підпросторів?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

14. Нехай $V = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s)$ є лінійною оболонкою векторів простору L над полем P . Перевірити, що:
а) V є найменшим підпростором у L, який містить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$;
б) V співпадає з перетином всіх підпросторів, які містять вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$.

15. Який зв'язок існує між розмірністю лінійної оболонки скінченної множини векторів арифметичного простору P^n і рангом цієї множини?

16. Знайти розмірність і який-небудь базис лінійної оболонки системи векторів простору $\mathbb{C}^4$:
а) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (4, 5, 3, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1, 2)$, $\vec{a}_4 = (2, 3, 1, 0)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 1, 4)$, $\vec{a}_4 = (1, 3, -1, 0)$;
в) $\vec{a}_1 = (i, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, i, 2)$, $\vec{a}_3 = (1 + i, 1 - i, 1 - i, 0)$, $\vec{a}_4 = (2, -1 - i, -2i, -3)$;
г) $\vec{a}_1 = (1, 1, \alpha, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, i, 3, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 2i, 1, 2)$, $\vec{a}_4 = (2, -i, i, 0)$, де $\alpha \in \mathbb{C}$.

17. Знайти найпростішу однорідну систему лінійних рівнянь з n невідомими над числовим полем P, простором розв'язків якої є лінійна

оболонка множини векторів:

а) $\vec{a}_1 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 0, 1, 1)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$, $\vec{a}_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$, $\vec{a}_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$;

в) $\vec{a}_1 = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (3, 0, 1, 1, 0, 1, 2)$;

г) $\vec{a}_1 = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (3, 0, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (4, -1, 1, 2)$.

18. Нехай $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ і $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$ – підмножини векторів простору $\mathbb{R}^n$. Чи існує якийсь зв'язок між цими множинами?

19. Побудувати лінійний многовид розв'язків системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$

20. Знайти систему лінійних рівнянь, множиною розв'язків якої є лінійний многовид $S = \vec{a} + L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, якщо $\vec{a} = (1, 2, 3, 4)$ і:

а) $\vec{a}_1 = (1, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 0, 1, 1)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, -1, 0, 1)$.

21. Нехай S і T – лінійні многовиди векторного простору L над полем P, одержані паралельним перенесенням підпросторів U і V на вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно. Знайти умову, при якій лінійні многовиди S і T мають непорожній перетин.

22. Знайти необхідні і достатні умови належності лінійних многовидів Q і S розмірності 1 векторного простору L_n до лінійного многовиду T розмірності 2 цього простору.

23. Знайти спільний елемент лінійних многовидів $\vec{a_0} + L(\vec{a})$ і $\vec{b_0} + L(\vec{b})$ векторного простору L_n, якщо:

а) $\vec{a}_0 = (1, 1, 1)$, $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b}_0 = (-2, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, -1)$;

б) $\vec{a}_0 = (1, 2, 1, 0, 1)$, $\vec{a} = (0, -1, 1, -1, 2)$, $\vec{b}_0 = (1, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 0, 1, 1)$;

в) $\vec{a}_0 = (2, 1, 1, 0, 1)$, $\vec{a} = (0, -1, 1, -1, 2)$, $\vec{b}_0 = (1, 1, -1, 1, -4)$, $\vec{b} = (1, 2, 0, 1, 1)$;

г) $\vec{a}_0 = (3,1,2,1,3)$, $\vec{a} = (1,0,1,1,2)$, $\vec{b}_0 = (2,2,-1,-1,-2)$, $\vec{b} = (2,1,0,1,1)$.

24. Знайти спільний елемент лінійних многовидів $A_0 + L(A)$ і $B_0 + L(B)$ векторного простору $M_2(\mathbb{R})$, якщо $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

25. Знайти спільний елемент лінійних многовидів $\vec{a_0} + L(\vec{a})$ і $\vec{b_0} + L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ векторного простору $\mathbb{R}^4$, якщо $\vec{a}_0 = (1,0,1,3)$, $\vec{a} = (1,2,1,-1)$, $\vec{b}_0 = (1,1,1,1)$, $\vec{b}_1 = (1,1,0,0)$, $\vec{b}_2 = (0,0,1,1)$.

26. Знайти лінійний многовид найменшої розмірності, який містить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ векторного простору L над полем P.

27. Встановити, чи є операція знаходження суми підпросторів векторного простору комутативною і асоціативною.

28. В якому випадку для підпросторів U і V простору L виконується рівність $U + V = U$?

29. Знайти яке-небудь подання векторного простору всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує 2002, у виді прямої суми його нетривіальних підпросторів.

30. Знайти розмірність суми і перетину лінійних оболонок систем векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s$ відповідного простору:
    а) $\vec{a}_1 = (4,3,2,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,0,-1,2)$, $\vec{a}_3 = (3,3,1,3)$,
    $\vec{b}_1 = (-2,0,-2,4)$;
    б) $\vec{a}_1 = (1,1,1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,1,0,-1,1)$, $\vec{a}_3 = (1,3,2,1,3)$,
    $\vec{a}_4 = (1,5,3,1,5)$,
    $\vec{b}_1 = (1,2,-2,-2,-2)$, $\vec{b}_2 = (0,0,1,0,0)$, $\vec{b}_3 = (3,6,-5,-6,-6)$,
    $\vec{b}_4 = (2,4,-3,-4,-4)$;
    в) $\vec{a}_1 = (1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,2,1)$, $\vec{a}_3 = (0,2,2)$,
    $\vec{b}_1 = (3,2,1)$, $\vec{b}_2 = (2,1,0)$, $\vec{b}_3 = (1,1,1)$;
    г) $\vec{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,-1,1,-1)$, $\vec{a}_3 = (1,3,1,3)$,
    $\vec{b}_1 = (1,2,0,2)$, $\vec{b}_2 = (1,2,1,2)$, $\vec{b}_3 = (3,1,3,1)$.

31. Знайти який-небудь базис суми і перетину лінійних оболонок систем векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s$ відповідного простору:

а) $\vec{a}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 3, 3)$,
$\vec{b}_1 = (2, 3, -1)$, $\vec{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\vec{b}_3 = (1, 1, -3)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 2, 1, -2)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 2, -3)$,
$\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 0, 1, -1)$, $\vec{b}_3 = (1, 3, 0, -4)$;
в) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, -1)$, $\vec{a}_3 = (0, 1, -1, 0)$,
$\vec{b}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{b}_2 = (0, -1, 1, 1)$, $\vec{b}_3 = (0, 0, 0, 1)$;
г) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (-1, 2, 0, 1)$,
$\vec{b}_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{b}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\vec{b}_3 = (0, 2, 1, 1)$.

Задачі на доведення

32. Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s$ – вектори з простору L. Довести, що
$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) + L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_s).$$

33. Нехай у векторному просторі L над полем P виконується рівність $\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ для деяких $\beta, \gamma \neq 0$. Довести, що $L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{b}, \vec{c}) = L(\vec{a}, \vec{c})$.

34. Нехай U і V – підпростори векторного простору L над полем P. Довести, що $\dim(U + V) = \dim(U \cap V)$ тоді і тільки тоді, коли $U = V$.

35. Нехай U_1, U_2 і U_3 – підпростори векторного простору L_n над полем P і $L_n = U_1 + U_2 + U_3$. Довести, що $L_n = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ тоді і тільки тоді, коли $\dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 = n$.

36. Довести, що сума $U = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ підпросторів $U_1, U_2, \ldots, U_k$ векторного простору L над полем P є прямою тоді і тільки тоді, коли перетин кожного з них з сумою всіх решти цих підпросторів містить тільки нульовий вектор.

37. Довести, що коли розмірність суми двох підпросторів арифметичного простору $\mathbb{R}^n$ на 1 більша від розмірності їх перетину, то сума співпадає з одним з них, а перетин – з іншим.

38. Довести, що $\dim(U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k) = \dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_k$.

39. Довести, що n-вимірний векторний простір L_n при $n \geqslant 2$ можна подати у виді прямої суми n його одновимірних підпросторів.

40. Нехай маємо лінійні многовиди $S = \vec{a} + U$ і $Q = \vec{b} + V$ векторного простору L_n. Довести, що $S = Q$ тоді і тільки тоді, коли $U = V$ і $\vec{a} - \vec{b} \in U$.

41. Довести, що для різних векторів $\vec{a}, \vec{b}$ векторного простору L над полем P існує єдиний одновимірний лінійний многовид, який містить множину векторів $H = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} | \alpha + \beta = 1\}$.

42. Довести, що коли лінійний многовид S розмірності 1 має два спільних елементи з лінійним многовидом Q, то $S \subset Q$.

43. Довести, що два лінійні многовиди $S = \vec{a} + U$ і $Q = \vec{b} + V$ розмірності 1 рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають принаймні 2 спільних елементи.

44. Довести, що два лінійні многовиди $S = \vec{a} + U$ і $Q = \vec{b} + U$ векторного простору L_n або рівні або не мають спільних елементів.

45. Довести, що векторний простір $\mathbb{C}[0, 1]$ є прямою сумою підпросторів:
а) $U = \{f(x) | f(0) = 0\}$ та $\mathbb{R}$;
б) $U = \{f(x) | f(0) = 0 \wedge f(1) = 0\}$ та $V = \{f(x) | f(x) = ax + b\}$.

Творчі задачі

46. Чи існує якийсь зв'язок між просторами розв'язків систем лінійних однорідних рівнянь $x_1 - x_2 + \dots - x_{2n} = 0$ і $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n}$ та простором $\mathbb{R}^{2n}$?

47. Дослідити, при яких натуральних n два лінійні многовиди $S = \vec{a} + U$ і $Q = \vec{b} + V$ розмірності 2 векторного простору L_n містяться в одному лінійному многовиді цього простору.

Задачі з олімпіад

48. Нехай U, V, W є підпросторами векторного простору L_n. Встановити умови, при яких має місце рівність
$$U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W).$$

49. Знайти нетривіальне подання простору $M_3(\mathbb{R})$ у виді прямої суми його підпросторів та подати матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ як суму елементів цих підпросторів.

50. Нехай U, V і W – підпростори векторного простору L_n над полем P. Довести, що:
а) коли $U \subset V$, то $U + (V \cap W) = (U + V) \cap W$;
б) $(U + V) \cap (W + V) \cap (U + W) = (U + V) \cap W + (U + W) \cap V$.

§ 2.4 Координати вектора. Зв'язок між базисами

Література: [1] стор. 398 – 402; [3] стор. 295 – 296.

Теоретичні відомості

Нехай L_n – векторний простір над числовим полем P і $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ – деякий його базис. Для зручності надалі базис векторного простору L_n будемо вважати лінійно упорядкованою множиною і записувати його як послідовність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Це дає можливість кожному вектору з простору L_n поставити у взаємно однозначну відповідність упорядковану n-ку чисел з поля P.

Якщо $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$, то упорядковану n-ку чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ з поля P називають *координатним рядком вектора у даному базисі*.

Координатний рядок вектора у даному базисі визначається однозначно.

Якщо розглядати координатний рядок вектора як елемент арифметичного векторного простору P^n, то координатний рядок суми двох векторів дорівнює сумі координатних рядків цих векторів, а координатний рядок добутку вектора на число дорівнює добутку координатного рядка вектора на це число у заданому базисі.

Нехай у просторі задано два базиси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ (1) і $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. (2) Кожний вектор $\vec{a}_i$ з другого базису має координатний рядок $(\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots, \tau_{in})$ у першому базисі. Тоді матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею переходу від першого до другого базису*. Іноді її зручно позначати через T_e^a. Тут букви e і a вказують від якого і до якого базису здійснюється перехід.

Матриця переходу від одного базису до іншого є невиродженою.

Кожна невироджена матриця n-го порядку над числовим полем P є матрицею переходу від одного базису векторного простору L_n над полем P до деякого іншого базису цього простору.

Нехай $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – координатні рядки одного і того ж вектора $\vec{a}$ з простору L_n у першому та другому базисах відповідно. Якщо розглядати ці координатні рядки як матриці з одним рядком і n стовпцями, то мають місце формули:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)T; \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)T^{-1}.$$

З них випливає, що $T_a^e = (T_e^a)^{-1}$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Нехай L_n – векторний простір над числовим полем P і $\vec{a} \in L_n$. Що називають координатами вектора $\vec{a}$ і скільки їх у нього може бути?

2. В аналітичній геометрії на площині розглядають ліву і праву прямокутні системи координат. Скільки прямокутних систем координат можна розглядати, маючи стандартну систему $\vec{i}, \vec{j}$ або $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:
а) на площині; б) у звичайному просторі?

3. Як узагальнити поняття лівої і правої прямокутних систем координат площини на n-вимірний векторний простір над числовим полем P?

4. Число $5 - 3i$ можна розглядати як вектор у просторах $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел над полями $\mathbb{C}$ і $\mathbb{R}$. Якими будуть його координати в одиничних базисах цих просторів?

5. Знайти координатний рядок матриці $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ векторного простору $M_2(\mathbb{R})$ у базисі:
$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Чи може матриця переходу від одного до іншого базису векторного простору L_n бути: а) одиничною; б) скалярною; в) діагональною?

7. Як зміниться матриця переходу від одного до іншого базису векторного простору L_n, якщо:
а) замінити місцями перший і останній вектор у другому базисі;
б) замінити місцями перший і останній вектор у першому базисі;
в) змінити послідовність векторів у другому базисі на зворотну;
г) змінити послідовність векторів у обох базисах на зворотну?

8. Чи може матриця:
а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

бути матрицею переходу від одного до іншого базису у векторному просторі $M_3(\mathbb{R})$?

9. Якою є матриця переходу від базису $\vec{i}, \vec{j}$ векторного простору W_2 до базису:
а) $\vec{i}, -\vec{j}$; б) $-\vec{i}, \vec{j}$; в) $-\vec{i}, -\vec{j}$; г)$-\vec{j}, \vec{i}+\vec{j}$; д) $\vec{i}-\vec{j}, \vec{i}+\vec{j}$;
е) $\vec{i}-\vec{j}, -\vec{i}-\vec{j}$; є) $-\vec{i}-\vec{j}, -\vec{i}+\vec{j}$; ж) $2\vec{i}-3\vec{j}, -5\vec{i}+4\vec{j}$;
з) отриманого поворотом даних базисних векторів навколо початку координат на кут α?

10. Записати формули перетворення координат довільного вектора $\vec{a}$ простору W_2 при переході від одного до будь-якого іншого з базисів попередньої задачі.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

11. Знайти координатний рядок матриці $A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ векторного простору $M_2(\mathbb{R})$ у базисі:
$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{a}_1 = (1, 1), \vec{a}_2 = (2, -1)$ до базису $\vec{b}_1 = (2, 3), \vec{b}_2 = (3, 1)$, вектори яких задано своїми координатами у одиничному базисі простору $\mathbb{R}^2$.

13. Знайти матрицю переходу у просторі $M_2(\mathbb{R})$ від базису
$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
до базису
$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Нехай у просторі W_3 задано прямокутний базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Знайти матрицю переходу до базису, отриманого з даного:
а) поворотом даних базисних векторів навколо осі Oz на 45^0;
б) поворотом даних базисних векторів навколо осі Ox на 60^0;
в) симетричним відображенням відносно площини xOz;
г) симетричним відображенням відносно площини yOz.

15. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{x}$ простору L_n задано своїми координатами у деякому базисі:

а) $\vec{a}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,1)$, $\vec{a}_3 = (3,2,1)$, $\vec{x} = (2,-3,1)$;
б) $\vec{a}_1 = (1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (0,3,0)$, $\vec{a}_3 = (1,1,2)$, $\vec{x} = (3,0,1)$;
в) $\vec{a}_1 = (1,1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (2,1,0,-1)$, $\vec{a}_3 = (1,2,1,0)$,
$\vec{a}_4 = (1,3,-1,0)$, $\vec{x} = (-1,1,2,1)$;
г) $\vec{a}_1 = (1,-1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,1,0)$, $\vec{a}_3 = (1,1,1,0)$,
$\vec{a}_4 = (0,-1,0,1)$, $\vec{x} = (2,2,1,1)$.

Перевірити, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ утворюють базис і знайти координати вектора $\vec{x} \in L_n$ у цьому базисі.

Задачі на доведення

16. Довести, що многочлени $1 + x^3, x + x^3, x^2 + x^3, x^3, x^4 + x^3, x^5 + x^3$ з простору многочленів з дійсними коефіцієнтами від однієї змінної, степінь яких не перевищує 5, утворюють його базис і знайти координати многочлена $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$ у цьому базисі.

17. Довести, що кожна з двох систем векторів даного векторного простору L_n є його базисом, і знайти зв'язок між координатами вектора $\vec{x}$ в цих двох базисах:
    а) $\vec{a}_1 = (1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,1)$, $\vec{a}_3 = (3,2,1)$;
    $\vec{b} = (1,-1,1)$, $\vec{b} = (1,2,-1)$, $\vec{b} = (2,2,-1)$;
    б) $\vec{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,1,1,0)$, $\vec{a}_3 = (1,1,0,0)$, $\vec{a}_4 = (1,0,0,0)$;
    $\vec{b}_1 = (1,-1,0,0)$, $\vec{b}_2 = (0,1,1,0)$, $\vec{b}_3 = (1,1,1,0)$, $\vec{b}_4 = (0,-1,0,1)$.

18. Нехай вектор $\vec{a}$ з простору L_2 над числовим полем P в деякому базисі має координати $\vec{a} = (1,2)$. Довести, що існує базис цього простору, у якому даний вектор має координати $\vec{a} = (3,4)$, і знайти його.

Творчі задачі

19. Встановити, чи існують різні базиси векторного простору L_n над числовим полем P такі, щоб у одному базисі координатний рядок вектора $\vec{a} \in L_n$ був $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, а в другому – $\vec{a} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Задачі з олімпіад

20. Нехай $\mathbb{R}_n[x]$ – векторний простір всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами від однієї змінної, степінь яких не перевищує n. Перевірити, що системи многочленів $1, x, x^2, \ldots, x^n$ і $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ утворюють базиси, знайти матрицю переходу від одного базису до іншого та розкласти многочлен $f(x) = x^5 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 1$ за степенями $x + 1$.

§ 2.5 Векторний простір з скалярним множенням. Процес ортогоналізації. Евклідовий простір

Література: [1] стор. 411 – 421; [3] стор. 270 – 273, 276 – 281.

Теоретичні відомості

Нехай L – векторний простір над числовим полем P. Відображення o множини $L \times L$ у множину P, для якого виконуються умови:

1. $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in L)(o(\vec{a}, \vec{b}) = o(\vec{b}, a))$;

2. $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in L)(\forall \alpha, \beta \in P)(o(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}) = \alpha o(\vec{a}, \vec{c}) + \beta o(\vec{b}, \vec{c}))$,

називають *операцією скалярного множення у векторному просторі* L. Число $o(\vec{a}, \vec{b})$ називають *скалярним добутком даних векторів* і позначають так: $o(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b}$. Операцію скалярного множення називають *виродженою,* якщо $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in L)\vec{a}\vec{b} = 0$, і *невиродженою* – у протилежному випадку.

У будь-якому скінченновимірному просторі над числовим полем P можна визначити операцію скалярного множення векторів.

Нехай L – векторний простір з скалярним множенням. Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ з простору L називають *ортогональними,* якщо $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Множина векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ векторного простору L з скалярним множенням називається *ортогональною,* якщо всі її різні вектори є попарно ортогональними. Множину, яка містить один вектор, будемо також вважати ортогональною. Кожна ортогональна множина ненульових векторів є лінійно незалежною. Лінійно незалежну множину векторів можна перетворити в ортогональну (говорять: ортогоналізувати).

Базис векторного простору з скалярним множенням L_n називають *ортогональним*, якщо він є ортогональною множиною векторів. Кожну ортогональну множину ненульових векторів можна доповнити до ортогонального базису.

У кожному скінченновимірному векторному просторі з скалярним множенням L_n існують ортогональні базиси.

Векторний простір з скалярним множенням L над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ називають *евклідовим* і позначають через E, якщо операція скалярного множення векторів є додатно визначеною, тобто $(\forall \vec{a} \neq \vec{0})(\vec{a}\vec{a} > 0)$.

Довжиною або *нормою* вектора $\vec{a}$ у евклідовому векторному просторі E називається арифметичне значення квадратного кореня з скалярного квадрату даного вектора. Позначення: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$. Вектор називають *одиничним* або *нормованим,* якщо його довжина дорівнює одиниці. Базис векторного простору називають *ортонормованим,* якщо він є ортогональним і всі його вектори нормовані.

Кутом між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у евклідовому векторному просторі E називається число $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, для якого виконується рівність

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Задачі на ілюстрацію понять

1. Перевірити, що у векторному просторі з скалярним множенням L над числовим полем P для всіх векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і чисел $\alpha, \beta \in P$ виконуються рівності:

   а) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$; в) $\vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$;

   б) $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{c}$; г) $\vec{a}\vec{0} = 0$.

2. Чи буде векторний простір L_3 над полем дійсних чисел евклідовим, якщо за скалярний добуток векторів $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ взяти число:

   а) $\vec{a}\vec{b} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$;

   б) $\vec{a}\vec{b} = 5\alpha_1\beta_1 + 5\alpha_2\beta_2 + 5\alpha_3\beta_3$;

   в) $\vec{a}\vec{b} = 2\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2 + 4\alpha_3\beta_3$;

   г) $\vec{a}\vec{b} = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 5\alpha_3\beta_3$?

3. Які з властивостей має бінарне відношення ортогональності векторів на евклідовому векторному просторі E:

   а) рефлексивність, нерефлексивність, антирефлексивність;

   б) симетричність, несиметричність, антисиметричність;

   в) транзитивність, нетранзитивність;

   г) досконалість, недосконалість?

4. Обчислити скалярний добуток векторів у арифметичному векторному просторі з стандартним скалярним множенням (добуток дорівнює сумі добутків однойменних координат):

   а) $\vec{a}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, -3, 1)$;

   б) $\vec{a}_1 = (1, 2, \ldots, 10)$, $\vec{a}_2 = (10, 9, \ldots, 1)$;

   в) $\vec{a}_1 = (n, n-1, \ldots, 1)$, $\vec{a}_2 = (3, 3, \ldots, 3)$;

   г) $\vec{a}_1 = (1, 2, \ldots, 3n)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, \ldots, 1)$.

5. Якими повинні бути дійсні числа a, b, c, щоб вектори $\vec{a}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (a, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (b, 3, c)$ з арифметичного простору $\mathbb{R}^3$ з стандартним скалярним множенням були попарно ортогональними?

6. Вектор $\vec{a}$ евклідового векторного простору E ортогональний до векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ цього простору. Чи буде він ортогональний до кожного з векторів лінійної оболонки $L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k)$?

7. Чи можна ортогоналізувати систему векторів у відповідному евклідовому просторі з стандартним скалярним множенням:
   а) $\vec{a}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (2, -3, 1)$;
   б) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 0, -1)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 0, 0)$;
   в) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (3, 3, 3)$;
   г) $\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 0)$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Ортогоналізувати систему векторів евклідового векторного простору E_n з стандартним скалярним множенням:
   а) $\vec{a}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, -1)$, $\vec{a}_3 = (2, -3, 1)$;
   б) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 0, -1)$, $\vec{a}_3 = (2, 2, 0, 0)$;
   в) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (3, 3, 3)$;
   г) $\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 0)$.

9. Ортонормувати базис $\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (0, 1, -2, 1)$ евклідового векторного простору $\mathbb{R}^4$ з стандартним скалярним множенням.

10. Застосуйте процес ортогоналізації до системи многочленів $1, x, x^2, x^3$ евклідового векторного простору $\mathbb{R}[x]$ з скалярним множенням
$$\vec{f(x)}\vec{g(x)} = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

11. Перевірити, чи є вектори ортогональними у відповідному евклідовому просторі з стандартним скалярним множенням, і, коли так, доповнити цю систему до ортогонального базису цього простору:
   а) $\vec{a}_1 = (1, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (2, -5, 1)$;
   в) $\vec{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (3, 3, -3)$;
   б) $\vec{a}_1 = (-1, 1, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 2, 0, 0)$;
   г) $\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, -1, 0)$.

12. Знайти вектори, які доповнюють дану систему векторів до ортонормованого базису у просторі $\mathbb{R}^n$ з стандартним скалярним множенням:

а)	$\vec{a}_1 = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5});$	в)	$\vec{a}_1 = (\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4});$
б)	$\vec{a}_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$ $\vec{a}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0);$	г)	$\vec{a}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0),$ $\vec{a}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$

13. Знайти який-небудь ортонормований базис лінійної оболонки системи векторів у просторі $\mathbb{R}^4$ з стандартним скалярним множенням:
а) $\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\quad \vec{a}_2 = (1, 2, 3, 4)$;
б) $\vec{a}_1 = (2, 2, 1, -1)$, $\quad \vec{a}_2 = (1, -5, 1, 3)$, $\quad \vec{a}_3 = (3, 3, 4, -4)$.

14. Знайти довжини сторін і внутрішні кути трикутника, вершини якого задано своїми координатами:
а) $A = (2, 1, 0)$, $\quad B = (1, -2, 0)$, $\quad C = (0, 1, 1)$;
б) $A = (1, 1, 1, 1)$, $\quad B = (2, 3, 3, 1)$, $\quad C = (1, 1, 1, -3)$.

15. Знайти косинус кута між ребром куба і його діагоналлю.

Задачі на доведення

16. Довести, що в евклідовому векторному просторі E для векторів $\vec{a}, \vec{b}$ виконується нерівність Коші-Буняковського
$$(\vec{a}\vec{b})^2 \leqslant |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2.$$

17. Довести, що в евклідовому векторному просторі E кут між будь-якими ненульовими векторами завжди існує і визначається однозначно.

18. Довести, що в евклідовому векторному просторі E:
   а) сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин його сторін;
   б) квадрат довжини сторони трикутника дорівнює сумі квадратів довжин двох його інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними;
   в) для ортогональних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$(теорема Піфагора);
   г) рівність у нерівності Коші-Буняковського виконується тоді і тільки тоді, коли ці вектори лінійно залежні.

19. Довести, що в евклідовому векторному просторі E виконуються нерівності:
а) $\quad |\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$; б) $\quad |\vec{a}| - |\vec{b}| \leqslant |\vec{a} + \vec{b}|$; в) $\quad |\vec{a}| - |\vec{b}| \leqslant |\vec{a} - \vec{b}|$.
Встановити, коли виконуються рівності.

20. Довести, що в евклідовому векторному просторі всіх неперервних на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій з скалярним множенням $f(\vec{x})g(\vec{x}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ множина функцій $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ є ортогональною.

21. Нехай U, V – підпростори евклідового векторного простору E_n і $\dim U < \dim V$. Довести, що в V існує ненульовий вектор $\vec{a}$ такий, що $(\forall \vec{b} \in U)(\vec{a}\vec{b} = \vec{0})$.

22. Нехай $\vec{e}$ – одиничний вектор евклідового векторного простору E_n. Довести, що кожний вектор $\vec{a} \in E_n$ однозначно подається у вигляді $\vec{a} = \alpha\vec{e} + \vec{b}$, де $\vec{b}\vec{e} = 0$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. При цьому число α називається *проекцією вектора $\vec{a}$ на напрям $\vec{e}$* і позначається $pr_{\vec{e}}\vec{a}$.

23. Довести, що для довільного ортонормованого базису евклідового векторного простору E_n виконуються рівності:
    а) $pr_{\vec{e}_i}(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\vec{e}_i}\vec{a} + pr_{\vec{e}_i}\vec{b}$; в) $pr_{\vec{e}_i}(\lambda\vec{a}) = \lambda pr_{\vec{e}_i}\vec{a}$;
    б) $pr_{\vec{e}_i}\vec{a} = \vec{a}\vec{e}_i$; г) $\vec{a} = (pr_{\vec{e_1}}\vec{a})\vec{e_1} + \cdots + (pr_{\vec{e_n}}\vec{a})\vec{e_n}$.

24. Довести, що для векторів $\vec{a}, \vec{b}$ евклідового векторного простору E рівність $|\vec{a}\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$ виконується тоді і тільки тоді, коли ці вектори лінійно залежні.

25. *Визначником Грама системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ евклідового векторного простору E* називається визначник $\begin{vmatrix} \vec{a_1}\vec{a_1} & \vec{a_1}\vec{a_2} & \ldots & \vec{a_1}\vec{a_n} \\ \vec{a_2}\vec{a_1} & \vec{a_2}\vec{a_2} & \ldots & \vec{a_2}\vec{a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{a_n}\vec{a_1} & \vec{a_n}\vec{a_2} & \ldots & \vec{a_n}\vec{a_n} \end{vmatrix}$. Довести, що визначник Грама не змінюється в процесі ортогоналізації.

26. Довести, що визначник Грама будь-якої скінченної системи векторів евклідового векторного простору E:
    а) невід'ємний;
    б) рівний нулю тоді і тільки тоді, коли система лінійно залежна;
    в) не перевищує добутку квадратів довжин векторів системи;
    г) дорівнює добутку квадратів довжин векторів системи тоді і тільки тоді, коли вона ортогональна або один з них є нульовим вектором.

27. Довести, що в евклідовому векторному просторі E визначник Грама:
а) двох векторів дорівнює квадрату площі паралелограма, побудованого на цих векторах;
б) трьох векторів дорівнює квадрату об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Творчі задачі

28. У евклідовому векторному просторі $\mathbb{R}^n \quad (n > 1)$ з стандартним скалярним множенням існує ортогональний базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ такий, що всі його координати дорівнюють 1 або -1. Дослідити, яким може бути число n.

29. Нехай маємо трикутник ABC. Встановити, які значення для довільної точки O може приймати довжина вектора $S_A\overrightarrow{OA} + S_B\overrightarrow{OB} + S_C\overrightarrow{OC}$, де S_A, S_B, S_C – площі трикутників BCO, CAO, ABO відповідно.

Задачі з олімпіад

30. На площині задано правильний n-кутник і вектор $\vec{a}$. Знайти суму ортогональних проекцій $\vec{a}$ на сторони n-кутника або на їх продовження.

31. Нехай в евклідовому векторному просторі виконується рівність $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. Довести, що $|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}| \geqslant |\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|$.

32. Довести, що висоти трикутної піраміди перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли суми квадратів протилежних ребер піраміди рівні між собою.

33. На площині кожен із заданих n векторів має довжину 1, а їх сума дорівнює нульовому вектору. Довести, що ці вектори можна занумерувати так, щоб при $k = 1, 2, \ldots, n$ сума перших k векторів мала довжину, яка не перевищує 2.

34. Який найменший периметр може бути у випуклого 32-кутника, всі вершини якого лежать у вузлах клітчатої бумаги зі стороною клітки, рівною 1?

35. Всередині трикутника ABC взято точку O і на променях OA, OB, OC побудовано вектори довжиною 1. Довести, що довжина суми цих векторів менша 1. Що можна сказати про таку суму у випадку, коли замість трикутника розглянути довільний n-кутник?

§ 2.6 Ортогональне доповнення до підпростору. Ізоморфізм векторних просторів

Література: [1] стор. 411 – 423; [3] стор. 270 – 283.

Теоретичні відомості

Нехай E – евклідовий векторний простір, U – його підпростір і $\vec{a} \in E$. Вектор $\vec{a}$ називається *ортогональним до підпростору U,* якщо він ортогональний до кожного вектора з цього підпростору. Множину всіх векторів простору E, які ортогональні до підпростору U, називають *ортогональним доповненням до підпростору U* і позначають $U^{\perp}$.

Вектор $\vec{a}$ евклідового векторного простору E_n є ортогональним до його підпростору U тоді і тільки тоді, коли він ортогональний до кожного вектора довільного базису цього підпростору.

Підпростори U і V евклідового векторного простору E називаються *ортогональними,* якщо кожен вектор першого підпростору ортогональний до будь-якого вектора другого підпростору.

Кожний скінченновимірний евклідовий векторний простір E_n є прямою сумою будь-якого нетривіального підпростору і його ортогонального доповнення.

Якщо $E = U \oplus U^{\perp}$ і $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$ для деяких $\vec{x} \in U$, $\vec{y} \in U^{\perp}$, то $\vec{x}$ називають *ортогональною проекцією вектора $\vec{a}$ на підпростір U* і позначають $\vec{a}_U$, а $\vec{y}$ – *ортогональною складовою вектора $\vec{a}$* або *проектуючим вектором,* і позначають $\vec{a}_{U^{\perp}}$.

Кутом між вектором $\vec{a}$ у евклідовому просторі $E = U \oplus U^{\perp}$ і його підпростором U називається кут між цим вектором і ортогональною проекцією вектора $\vec{a}_U$ на підпростір U.

Відстанню від точки, заданої вектором $\vec{x}$ у евклідовому просторі $E = U \oplus U^{\perp}$, *до лінійного многовиду $T = \vec{a}_0 + U$* називається мінімум відстаней від даної точки до точок многовиду, тобто мінімум довжин векторів $\vec{x} - \vec{t}$, де $\vec{t} \in T$. Ця відстань дорівнює довжині $|(\vec{x} - \vec{a}_0)_{U^{\perp}}|$ ортогональної складової $(\vec{x} - \vec{a}_0)_{U^{\perp}}$ вектора $\vec{x} - \vec{a}_0$ на підпростір U.

Нехай L і T – векторні простори над одним і тим же числовим полем P. Взаємно однозначне відображення f простору L на T називається *ізоморфізмом векторних просторів,* якщо виконуються умови:

1. $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in L)(f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}))$;

2. $(\forall \vec{a} \in L)(\forall \lambda \in P)(f(\lambda \vec{a}) = \lambda f(\vec{a}))$.

При цьому векторні простори L і T називаються *ізоморфними*.

Два скінченновимірні простори над одним і тим же числовим полем P ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх розмірності однакові.

Евклідові векторні простори E і E' називаються *ізоморфними,* якщо вони ізоморфні як векторні простори і $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in E)(\vec{a}\vec{b} = f(\vec{a})f(\vec{b}))$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Нехай $\vec{a}$ – ненульовий вектор евклідового простору E_3. Якою може бути розмірність підпростору, ортогонального до вектора $\vec{a}$?

2. Нехай U і V – підпростори евклідового векторного простору E, причому розмірність U менша за розмірність V. Чи існує в просторі U ненульовий вектор, ортогональний до V?

3. Описати ортогональні підпростори у просторі W_3.

4. Нехай U і V – підпростори евклідового векторного простору E, причому $U = V^{\perp}$ і $V = U^{\perp}$. Що можна сказати про перетин $U \cap V$ і суму $U + V$?

5. Перевірити, що ортогональне доповнення до підпростору евклідового векторного простору E_n має властивості:
   а) $\{\vec{0}\}^{\perp} = E_n$; б) $E_n^{\perp} = \{\vec{0}\}$; в) $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

6. Нехай векторні простори L і T, які задані над одним і тим же числовим полем P, ізоморфні. Якщо $f : L \to T$ є ізоморфізмом, то що є образом векторів $\vec{0}$ і $-\vec{a}$ для кожного $\vec{a} \in L$?

7. Нехай f – ізоморфізм векторних просторів L і T. Перевірити, що:
   а) лінійно незалежна система векторів простору L переходить у лінійно незалежну систему векторів простору T;
   б) базис простору L переходить у базис простору T;
   в) розмірність простору L дорівнює розмірності простору T.

8. При якій умові скінченновимірні евклідові векторні простори E_n і E_m є ізоморфними?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Знайти необхідну і достатню умову, при якій підпростори U і V евклідового векторного простору E_n ортогональні між собою.

10. У векторному просторі $\mathbb{R}_n[x]$ скалярний добуток многочленів $f(x) = a_nx^n + \dots + a_mx^m + \dots + a_1x + a_0$ і $g(x) = b_mx^m + \dots + b_1x + b_0$ таких, що $n \geqslant m$, задано формулою $fg = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_mb_m$.
Знайти ортогональне доповнення:
а) підпростору всіх многочленів таких, що $f(1) = 0$;
б) підпростору всіх многочленів парного степеня.

11. Знайти базис ортогонального доповнення $U^{\perp}$ підпростору $U = L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ евклідового векторного простору E_n, якщо:
а) $\vec{a}_1 = (1, -1, 1), \vec{a}_2 = (2, 0, 1)$;
б) $\vec{a}_1 = (1, 1, 0, -2), \vec{a}_2 = (2, 1, -1, 1)$;
в) $\vec{a}_1 = (1, 0, 1, -1), \vec{a}_2 = (2, -1, 3, 0)$;
г) $\vec{a}_1 = (1, 1, -1, 2), \vec{a}_2 = (2, 0, 1, 3), \vec{a}_3 = (4, 2, -1, 7)$.

12. Знайти ортогональну проекцію $\vec{a}_U$ і ортогональну складову $\vec{a}_{U^{\perp}}$ вектора $\vec{a}$ на лінійний підпростір U відповідного евклідового простору, якщо:
а) $\vec{a} = (-1, 2)$ і $U = L((2, 3))$;
б) $\vec{a} = (1, -2, 0)$ і $U = L((-1, 2, 1))$;
в) $\vec{a} = (5, 2, -2, 2)$ і $U = L((2, 1, 1, -1), (1, 1, 3, 0), (1, 2, 8, 1))$;
г) $\vec{a} = (8, 5, -3, 6)$ і U є підпростором розв'язків системи
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

13. Знайти кут між вектором $\vec{a}$ і лінійною оболонкою $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, якщо:
а) $\vec{a} = (2, 2, 1, 1), \vec{a}_1 = (3, 4, -4, -1), \vec{a}_2 = (0, 1, -1, 2)$;
б) $\vec{a} = (1, 0, 3, 0), \vec{a}_1 = (5, 3, 4, -3), \vec{a}_2 = (1, 1, 4, 5), \vec{a}_3 = (2, -1, 1, 2)$.

14. Знайти відстань від точки, заданої вектором $\vec{a}$, до лінійного многовиду T відповідного евклідового простору, якщо:
а) $\vec{a} = (1, 3)$ і T заданий рівнянням $x - 2y = 3$;
б) $\vec{a} = (1, 1, 1)$ і $T = (1, 2, 1) + L((0, 0, 1), (1, 0, 0))$;
в) $\vec{a} = (1, 2, -1)$ і T заданий рівнянням $2x - 2y + z = 3$;
г) $\vec{a} = (2, 4, -4, 2)$ і T заданий системою рівнянь
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Задачі на доведення

15. Довести, що ортогональне доповнення до підпростору евклідового векторного простору E_n має властивості:

а) $(U+V)^{\perp}=U^{\perp}\cap V^{\perp}$; в) $(U\cap V)^{\perp}=U^{\perp}+V^{\perp}$;
б) $(U^{\perp}+V^{\perp})^{\perp}=U\cap V$; г) $(U^{\perp}\cap V^{\perp})^{\perp}=U+V$.

16. Довести, що для будь-яких підпросторів U, V, T евклідового векторного простору E_n виконуються рівності:
а) $(U\cap V\cap T)^{\perp}=U^{\perp}+V^{\perp}+T^{\perp}$;
б) $(U+V+T)^{\perp}=U^{\perp}\cap V^{\perp}\cap T^{\perp}$.

17. Довести, що серед всіх векторів підпростору U евклідового векторного простору E найменший кут з даним вектором $\vec{a}$ утворює його ортогональна проекція $\vec{a}_U$ на підпростір U.

18. Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$ – ортогональний базис підпростору U евклідового векторного простору E_n і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ – ортогональний базис ортогонального доповнення $U^{\perp}$. Довести, що система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ є ортогональний базис E_n.

19. Нехай U і V – підпростори евклідового векторного простору E_n та $U+V\neq E_n$. Довести, що існує ненульовий вектор $\vec{a}\in E_n$ такий, що $\vec{a}$ ортогональний до U і V.

20. Довести, що задання підпростору U евклідового векторного простору E_n і його ортогонального доповнення $U^{\perp}$ в ортонормованому базисі за допомогою систем лінійних рівнянь пов'язані так:
коефіцієнти лінійно незалежної системи лінійних рівнянь, яка задає один з цих підпросторів, є координатами векторів базису другого підпростору.

21. Довести, що довжина проекції вектора $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ на вектор $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ евклідового векторного простору W_3 з стандартним скалярним множенням дорівнює

$$\frac{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

22. Довести, що проекція вектора $\vec{v}$ евклідового векторного простору W_3 з стандартним скалярним множенням на площину $ax+by+cz=d$ знаходиться за формулою $\vec{v}-\frac{\vec{u}\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$, де $\vec{u}=(a,b,c)$.

23. Довести, що ортогональна проекція довільного вектора многовиду $\vec{a}+U$ на ортогональне доповнення $U^{\perp}$ співпадає з ортогональною проекцією $\vec{a}_U^{\perp}$ вектора $\vec{a}$ на $U^{\perp}$.

24. Нехай U, V_1, V_2 є підпросторами евклідового векторного простору E і $U = V_1 \oplus V_2$. Довести, що коли вектор $\vec{a}$ ортогональний до підпростору V_1, то відстані між цим вектором і підпросторами U та V_2 рівні.

25. У векторному просторі $\mathbb{R}_n[x]$ з скалярним множенням многочленів $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_mx^m + \cdots + a_1x + a_0$ і $g(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0$, яке при $n \geqslant m$ задано формулою

$$fg = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_mb_m,$$

розглянемо підпростір $U = \{f(x)|f(1) = 0\}$. Довести, що відстань між довільним многочленом $g(x)$ і підпростором U дорівнює $\frac{g(1)}{\sqrt{n+1}}$.

26. Довести, що дійсний векторний простір симетричних матриць другого порядку над полем $\mathbb{R}$ ізоморфний арифметичному векторному простору $\mathbb{R}^3$.

27. Довести, що дійсний векторний простір кососиметричних матриць третього порядку над полем $\mathbb{R}$ ізоморфний арифметичному векторному простору $\mathbb{R}^3$.

28. Довести, що при ізоморфізмі f евклідових векторних просторів E і E':
а) ортогональна система векторів з E переходить в ортогональну систему з E';
б) ортонормована система векторів з E переходить в ортонормовану систему з E';
в) якщо U підпростір простору E, то $f(U^\perp) = (f(U))^\perp$.

Творчі задачі

29. Встановити, чи виконуються рівності з задач 5,15,16 для довільного евклідового векторного простору E. Якщо рівність не виконується, то вивчити взаємозв'язки, які існують між цими підпросторами.

30. Нехай L – нескінченновимірний простір над полем P і V_n – скінченновимірний простір над цим самим полем. Чи можна задати хоча б один ізоморфізм одного з цих просторів у інший?

Задачі з олімпіад

31. Нехай L_k і U_n – векторні простори над скінченним полем $\mathbb{Z}_p$, розмірності яких задовольняють нерівності $k \leqslant n$. Скільки існує різних ізоморфізмів простору L_k у U_n?

§ 2.7 Вибрані задачі

1. Які з аксіом векторного простору можна довести, виходячи з решти?

2. Описати всі підпростори векторного простору $\mathbb{R}_n[x]$ всіх многочленів від однієї змінної x над полем $\mathbb{R}$, степінь яких не перевищує числа n.

3. Нехай $\mathbb{Z}_p^n$ – арифметичний векторний простір над полем $\mathbb{Z}_p$ для деякого простого числа p. Скільки підпросторів є у просторі $\mathbb{Z}_p^n$?

4. При яких умовах групу коренів n-го степеня з одиниці можна перетворити у векторний простір над полем $\mathbb{Z}_p$ для деякого простого числа p? Скільки підпросторів містить такий векторний простір?

5. Чи можна вздовж кожного ребра 2003-кутної піраміди спрямувати вектор, поставивши стрілку у певному напрямку так, щоб сума всіх таких векторів дорівнювала $\vec{0}$?

6. На площині дано 2002 вектори, серед яких є неколінеарні. Відомо, що сума довільних 2001 векторів із них колінеарна до вектора, який не ввійшов у суму. Довести, що сума всіх 2002 векторів рівна $\vec{0}$.

7. Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_k$ – підпростори векторного простору L над числовим полем P. При якій умові виконується рівність $L = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$?

8. Чи існує векторний простір L над скінченним полем $\mathbb{Z}_p$ такий, що $L = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ для деяких нетривіальних його підпросторів U_1, U_2, U_3?

9. У векторному просторі $\mathbb{R}_{10}[x]$ всіх дійсних многочленів від однієї змінної, степінь яких не перевищує 10, вибрані підмножини U – всіх многочленів, степінь яких не перевищує 3, і V – всіх многочленів парного степеня, який не перевищує 8. Довести, що U і V є підпросторами, та знайти розмірності $U, V, U \cap V, U + V$.

10. Знайти лінійний многовид найменшої розмірності, який містить многовиди $\vec{a} + U$, $\vec{b} + V$ векторного простору L_n над полем P, та його розмірність.

11. Описати всі можливі випадки співвідношень між лінійними многовидами $S = \vec{a} + L(\vec{a}_1, \vec{a_2})$ і $T = \vec{b} + L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ векторного простору L_n над полем P та знайти необхідні і достатні умови, які описують ці співвідношення та виражаються через вектори $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a_2}, \vec{b}, \vec{b}_1, \vec{b}_2$.

12. Нехай U, V, W є підпросторами векторного простору L_n. Довести, що
$$(U+W)\cap(V+W)\cap(U+V)=[(W+V)\cap U]+[(U+V)\cap W].$$

13. Нехай U, V, W є підпросторами векторного простору L_n. Довести, що
$$\dim[(U+V)\cap W]+\dim(U\cap V)=\dim[(W+V)\cap U]+\dim(V\cap W).$$

14. Нехай U, V, W є підпросторами векторного простору L_n. Довести, що
$$(U\cap V)+(V\cap W)+(U\cap W)\subset(U+V)\cap(U+W)\cap(V+W)$$
і різниця розмірностей цих підпросторів є парним числом.

15. Довести, що два лінійні многовиди $S=\vec{a}+U$ і $Q=\vec{b}+V$ розмірності 1 векторного простору L_n при $n\geqslant 3$ містяться в одному лінійному многовиді розмірності 3 цього простору.

16. Довести, що два лінійні многовиди $S=\vec{a}+U$ і $Q=\vec{b}+V$ розмірності 2 векторного простору L_n при $n\geqslant 5$ містяться в одному лінійному многовиді, розмірність якого не перевищує 5.

17. Довести, що два лінійні многовиди $S=\vec{a}+U$ і $Q=\vec{b}+V$ розмірностей k і l векторного простору L_n при $n\geqslant k+l+1$ містяться в деякому лінійному многовиді, розмірність якого не перевищує $k+l+1$.

18. Знайти лінійний многовид розмірності 1, який має непорожній перетин з кожним лінійним многовидом $\vec{a_0}+L(\vec{a})$ і $\vec{b_0}+L(\vec{b})$ векторного простору L_n, і містить вектор $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{a}_0=(1,1,1,1)$, $\vec{a}=(1,2,1,0)$, $\vec{b}_0=(2,2,3,1)$, $\vec{b}=(1,0,1,3)$, $\vec{c}=(4,5,2,7)$;

б) $\vec{a}_0=(9,3,6,4)$, $\vec{a}=(-1,0,2,-1)$, $\vec{b}_0=(7,4,11,3)$, $\vec{b}=(1,1,-1,2)$, $\vec{c}=(4,5,2,7)$.

19. Довести, що скалярне множення в $\mathbb{R}^2$ можна визначити формулою
$$\vec{a}\vec{b}=\alpha a_1b_1+\beta a_1b_2+\beta a_2b_1+\gamma a_2b_2$$
тоді і тільки тоді, коли $\alpha>0$ і $\alpha\gamma>\beta^2$.

20. Довести, що для дійсних чисел має місце числова нерівність
$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\leqslant(c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_na_n)^2\cdot\left(\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2}+\dots+\frac{b_n}{c_n}\right)^2.$$

21. Довести нерівності:
а) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$, якщо $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$;
б) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

22. Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$. Довести, що $|A|^2 \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$(нерівність Адамара).

23. Довести, що рівність у нерівності Адамара виконується тоді і тільки тоді, коли система рядків матриці A ортогональна або один з рядків є нульовим.

24. Вектор $\vec{a}$ евклідового векторного простору E_n має одиничну довжину і раціональні координати. При яких умовах існує ортогональний до $\vec{a}$ вектор одиничної довжини з раціональними координатами?

25. На сфері одиничного радіуса розміщено $n \geqslant 2$ точок. Довести, що сума квадратів довжин усіх відрізків, які визначаються цими точками, не перевищує n^2. Чи може ця сума дорівнювати n^2?

26. Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$ – деяка система векторів евклідового векторного простору E. Довести, що коли в процесі ортогоналізації цієї системи одержали ненульові вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_k$, а вектор $\vec{c}_{k+1} = \vec{0}$, то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ лінійно незалежна та вектор $\vec{a}_{k+1}$ лінійно виражається через ці вектори.

27. Векторний простір всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує 3, перетворено довільним чином в евклідовий. Довести, що в ньому:
а) існує ортогональний базис, який містить по одному многочлену кожного з степенів $0, 1, 2, 3$;
б) якщо $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ і $g_0(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ – два ортогональні базиси, які мають властивість а), то многочлени у другому базисі можна перенумерувати так, що вони будуть відрізнятися від $f_i(x)(0 \leqslant i \leqslant 3)$ тільки сталими дійсними множниками.

28. Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ – ортонормований базис евклідового векторного простору E_n і $\vec{a} \in E_n$ – одиничний вектор. Довести, що координати вектора $\vec{a}$ у цьому базисі дорівнюють косинусам кутів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які вектор $\vec{a}$ утворює з відповідними базисними векторами та має місце рівність
$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \ldots + \cos^2 \alpha_n = 1.$$

29. Нехай підпростори U, V простору $\mathbb{R}^n$ задані системами рівнянь $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ і $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ відповідно. Довести, що $\mathbb{R}^n = U \oplus V$, і знайти ортогональні проекції одиничних векторів на ці підпростори.

30. Довести, що простір $M_n(\mathbb{R})$ є прямою сумою його підпросторів симетричних і кососиметричних матриць, та знайти проекції матриці $A = (a_{ij})$ такої, що $a_{ij} = 1$ при $i \leqslant j$, і $a_{ij} = 0$ при $i > j$, на кожний з цих підпросторів паралельно іншому.

31. Довести, що відстань d від точки, заданої вектором $\vec{a}$, до лінійного многовиду $\vec{a}_0 + L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ можна обчислити з застосуванням визначників Грама за формулою
$$d^2 = \frac{G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{a} - \vec{a}_0)}{G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)}.$$

32. *Відстанню між лінійними многовидами* $S = \vec{a}_1 + U$ *і* $Q = \vec{a}_2 + V$ *евклідового векторного простору* E_n називається найменша відстань між довільними двома точками, одна з яких належить S, а друга – Q. Довести, що ця відстань дорівнює довжині ортогональної складової $|(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)_{U^\perp}|$ вектора $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ на підпростір $U^\perp$.

33. Знайти відстань між двома многовидами $\vec{a}_0 + L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $\vec{b}_0 + L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ простору $\mathbb{R}^4$, якщо $\vec{a}_0 = (5, 5, 3, 2), \vec{a}_1 = (1, 2, 2, 2), \vec{a}_2 = (2, -2, 1, 2)$, $\vec{b}_0 = (1, -2, 1, -3), \vec{b}_1 = (2, 0, 2, 1), \vec{b}_2 = (1, -2, 0, -1)$.

34. Дві системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ евклідового векторного простору називаються *біортогональними*, якщо для всіх $1 \leqslant i \leqslant n$ виконується рівність $\vec{a}_i\vec{b}_i = 1$ і $\vec{a}_i\vec{b}_j = 0$ при всіх $i \neq j$. Довести, що кожна з біортогональних систем векторів є лінійно незалежною.

35. Довести, що для будь-якого базису евклідового векторного простору E_n існує єдиний біортогональний базис.

36. Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ – пара біортогональних базисів евклідового векторного простору E_n і $1 \leqslant k \leqslant n$. Довести, що $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)^\perp = L(\vec{b}_{k+1}, \vec{b}_{k+2}, \dots, \vec{b}_n)$.

37. Знайти біортогональний базис до базису евклідового векторного простору $\mathbb{R}^n$ з стандартним скалярним множенням:

а) $\vec{a}_1 = (1,1)$, $\vec{a}_2 = (2,-2)$;
б) $\vec{a}_1 = (1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (0,0,1)$, $\vec{a}_3 = (0,3,0)$;
в) $\vec{a}_1 = (-1,1,0,1)$, $\vec{a}_2 = (0,1,0,1)$, $\vec{a}_3 = (0,0,-1,1)$, $\vec{a}_4 = (0,9,0,1)$;
г) $\vec{a}_1 = (1,-1,1,-1)$, $\vec{a}_2 = (1,1,1,1)$, $\vec{a}_3 = (-1,1,1,-1)$, $\vec{a}_4 = (1,1,-1,-1)$.

38. *Кутом між вектором $\vec{a}$ і лінійним многовидом $\vec{a}+U$ евклідового векторного простору E* називається найменший кут, який вектор $\vec{a}$ утворює з векторами лінійного многовиду $\vec{a}+U$. Довести, що кут між вектором $\vec{a}$ і лінійним многовидом $\vec{a}+U$ дорівнює куту між $\vec{a}$ і його ортогональною проекцією на U.

39. Довести, що сума кутів, які вектор $\vec{a}$ евклідового векторного простору E утворює з підпростором U і його ортогональним доповненням, дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

40. Нехай евклідовий векторний простір E розкладено у пряму суму його попарно ортогональних підпросторів $E = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k$ і вектор $\vec{a}$ утворює кути $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ з відповідними підпросторами. Довести, що виконується рівність

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_k = 1.$$

41. Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ – лінійно незалежна система векторів евклідового векторного простору E. *Паралелепіпедом, побудованим на цих векторах,* називається множина точок, які є кінцями векторів $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{a}_k$, де $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$ для всіх $0 \leqslant i \leqslant 1$. Якщо дана система ортонормована, то відповідний паралелепіпед називають *k-вимірним кубом*. Об'єм $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$ такого k-вимірного паралелепіпеда визначимо індуктивно:
а) $V(\vec{a}_1) = |\vec{a}_1|$;
б) $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1}) \cdot h_k$, де h_k – довжина ортогональної складової вектора $\vec{a}_k$ на підпростір $(L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1}))^{\perp}$.
Довести, що:
а) $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = \sqrt{G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)}$, де $G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$ є визначником Грама;
б) $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = |D|$, де D – визначник, рядками якого є координати векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ відносно якого-небудь ортонормованого базису лінійної оболонки $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$;
в) $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) \leqslant |\vec{a}_1||\vec{a}_2| \cdots |\vec{a}_k|$;
г) рівність $V(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = |\vec{a}_1||\vec{a}_2| \cdots |\vec{a}_k|$ виконується тоді і тільки тоді, коли система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ ортогональна.

Розділ 3

Лінійні оператори

§ 3.1 Властивості лінійних операторів. Матриця лінійного оператора

Література: [1] стор. 429 – 436; [3] стор. 283 – 286, 289 – 291.

Теоретичні відомості

Нехай L – векторний простір над полем P. Відображення $f : L \to L$ називається *лінійним оператором векторного простору* L, якщо виконуються умови:

1. $(\forall \vec{x} \in L, \lambda \in P)(f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}))$;
2. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in L)(f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}))$.

Нехай у векторному просторі L_n задано базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ і f є лінійним оператором простору L_n. Тоді образи базисних векторів можна записати у вигляді

$$\begin{array}{ccccccccc}
f(\vec{e}_1) & = & \sigma_{11}\vec{e}_1 & + & \sigma_{12}\vec{e}_2 & + & \ldots & + & \sigma_{1n}\vec{e}_n, \\
f(\vec{e}_2) & = & \sigma_{21}\vec{e}_1 & + & \sigma_{22}\vec{e}_2 & + & \ldots & + & \sigma_{2n}\vec{e}_n, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f(\vec{e}_n) & = & \sigma_{n1}\vec{e}_1 & + & \sigma_{n2}\vec{e}_2 & + & \ldots & + & \sigma_{nn}\vec{e}_n.
\end{array}$$

Матриця

$$A_f^e = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею лінійного оператора f у заданому базисі,* який ми позначили буквою e і відобразили це у верхньому індексі. Таким чином, у вибраному базисі векторного простору L_n кожному лінійному оператору f цього простору можна поставити у відповідність матрицю n-го порядку над полем P. Лінійний оператор f визначається цією матрицею однозначно.

Якщо $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{e}_n$ і $f(\vec{x}) = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \cdots + \beta_n\vec{e}_n$, то між координатними рядками векторів $\vec{x}$ і $f(\vec{x})$ існує така залежність:

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A_f^e.$$

Нехай у просторі L_n задано два базиси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ та $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і T_e^a – матриця переходу від першого до другого базису. З § 2.4 відомо, що $T_a^e = (T_e^a)^{-1}$. Тому, якщо лінійний оператор f простору L_n у цих базисах має матриці A_f^e і A_f^a відповідно, то мають місце співвідношення

$$A_f^a = T_e^a A_f^e T_a^e = T_e^a A_f^e (T_e^a)^{-1}.$$

Матриці A і B з векторного простору $M_n(P)$ називаються *подібними,* якщо існує невироджена матриця Q така, що $A = QBQ^{-1}$.

Матриці лінійного оператора скінченновимірного векторного простору у різних базисах подібні між собою.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Яке з відображень простору W_2 в себе є лінійним оператором:
   а) гомотетія з центром в початку координат і коефіцієнтом 5;
   б) паралельне перенесення на вектор $\vec{a} = (1, 1)$;
   в) поворот навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{6}$;
   г) проектування на вісь Oy?
   Для лінійних операторів записати їх матриці у базисі $\vec{i}, \vec{j}$.

2. Яке з відображень простору W_2 в себе є лінійним оператором:
   а) $f(x, y) = (y, x)$; в) $f(x, y) = (x, -y)$; д) $f(x, y) = (-y, -x)$;
   б) $f(x, y) = (-x, -y)$; г) $f(x, y) = (-x, y)$; е) $f(x, y) = (-y, x)$?
   Яку назву мають в геометрії ці оператори?

3. Яка з операцій у векторному просторі $\mathbb{R}[x]$ є лінійним оператором:
   а) диференціювання; б) інтегрування?

4. Що ви можете сказати про лінійні оператори одновимірного дійсного векторного простору? Якими є матриці таких лінійних операторів?

5. Лінійний оператор f простору $\mathbb{R}^3$ переводить одиничний базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ у вектори $\vec{a}_1 = (1, -2, 1), \vec{a}_2 = (3, 0, 3), \vec{a}_3 = (1, 2, 3)$, які задані своїми координатами у цьому ж базисі. Якою є матриця A_f^e?

6. У базисі $\vec{i}, \vec{j}$ векторного простору W_2 задано вектор $\vec{a} = (-1, 2)$. Якими будуть координати вектора $R_O^{\frac{7}{6}\pi}(\vec{a})$ у цьому ж базисі?

7. Лінійний оператор f простору W_3 в одиничному базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ має матрицю $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти координати вектора $f(\vec{x})$ у цьому базисі, якщо $\vec{x} = (1, -1, 1)$.

8. Як зміниться матриця лінійного оператора f арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$, якщо в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:
а) поміняти місцями вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_n$;
б) записати всі вектори в зворотному порядку?

9. Чи існує лінійний оператор простору $\mathbb{R}^3$, який відображає вектори $\vec{a}_1 = (1, 1, 1), \vec{a}_2 = (3, 3, 3), \vec{a}_3 = (1, 2, 3)$, на вектори $\vec{b}_1 = (1, 1, 1), \vec{b}_2 = (1, 2, 3), \vec{b}_3 = (0, 0, 3)$ відповідно?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Перевірити, чи є лінійним оператор f арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$, якщо:
а) $f((x_1, x_2, x_3)) = \vec{a}$, де $\vec{a}$ – фіксований вектор простору $\mathbb{R}^3$;
б) $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_2, x_4, x_3, x_1)$;
в) $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 3x_2, 2x_2, 3x_3, x_4 + x_1)$;
г) $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2, 0, x_3, x_4)$.
У випадку, коли оператор f є лінійним, знайти його матрицю в одиничному базисі. Якщо оператор не є лінійним, то вказати причину.

11. Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Перевірити, що відображення f векторного простору $M_2(\mathbb{R})$ в себе, при якому $f(X) = A^{-1}XA$, є лінійним оператором і знайти його матрицю у базисі
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Перевірити, що оператор $f(A) = A^t$ простору $M_n(P)$ є лінійним, і знайти його матрицю в одному з базисів цього простору.

13. Встановити, чи існує лінійний оператор арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^3$, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ у вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно, що задані своїми координатами у одиничному базисі:
    а) $\vec{a}_1 = (2,0,3), \vec{a}_2 = (1,1,-1), \vec{a}_3 = (2,1,0)$,
    $\vec{b}_1 = (1,2,-1), \vec{b}_2 = (-2,1,3), \vec{b}_3 = (1,-1,1)$;
    б) $\vec{a}_1 = (-1,2,-2), \vec{a}_2 = (0,1,1), \vec{a}_3 = (0,0,3)$,
    $\vec{b}_1 = (1,0,0), \vec{b}_2 = (0,1,0), \vec{b}_3 = (1,2,0)$;
    в) $\vec{a}_1 = (1,2,3), \vec{a}_2 = (-1,-2,0), \vec{a}_3 = (0,1,0)$,
    $\vec{b}_1 = (1,1,-1), \vec{b}_2 = (1,1,1), \vec{b}_3 = (2,1,2)$;
    г) $\vec{a}_1 = (1,0,-1), \vec{a}_2 = (0,1,2), \vec{a}_3 = (1,1,1)$,
    $\vec{b}_1 = (1,0,0), \vec{b}_2 = (0,1,0), \vec{b}_3 = (1,1,0)$.

14. Встановити, чи існує лінійний оператор арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^4$, який переводить вектори базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ у вектори базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ і якщо так, то скільки їх.

15. Знайти матрицю лінійного оператора f векторного простору W_3 в одиничному базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, якщо він є:
    а) ортогональним проектуванням на координатну вісь вектора $\vec{j}$;
    б) ортогональним проектуванням на площину, яка містить вектори $\vec{j}, \vec{k}$;
    в) ортогональним проектуванням на пряму, яка утворює рівні кути з векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
    г) ортогональним проектуванням на площину, яка проходить через вектор $\vec{k}$ і ділить кут між векторами $\vec{i}, \vec{j}$ пополам;
    д) поворотом на кут α навколо координатної осі вектора $\vec{i}$;
    е) поворотом на кут $\frac{2}{3}\pi$ навколо прямої, яка утворює рівні кути з векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

16. Перевірити, що оператор f евклідового векторного простору E_3 з стандартним скалярним множенням, який задано формулою $f((x_1,x_2,x_3)) = ((1,0,-1)(x_1,x_2,x_3))(2,1,-1)$, є лінійним, і знайти його матрицю у одиничному базисі.

17. Знайти матрицю лінійного оператора диференціювання векторного простору $\mathbb{R}_2[x]$ у базисі $1, x, x^2$.

18. Описати всі лінійні оператори векторного простору $\mathbb{R}^+$ над полем $\mathbb{R}$, в якому операція додавання є звичайною операцією множення додатних дійсних чисел, а множення на скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$ додатного числа є піднесенням цього числа до степеня λ. Якими є їх матриці у вибраному базисі?

19. Знайти матриці A_f^e, A_f^a, A_f^b лінійного оператора f арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^2$, який переводить вектори $\vec{a}_1 = (-1, 1), \vec{a}_2 = (1, 2)$ у вектори $\vec{b}_1 = (-1, 2), \vec{b}_2 = (2, 2)$ відповідно, що задані своїми координатами у одиничному базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

20. Лінійний оператор f арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$ в одиничному базисі задано матрицею A_f^e. Знайти координати вектора $f(\vec{x})$ у цьому самому базисі, якщо:

а) $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (3, 2, 1);$

б) $A_f^e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (-2, 0, 2);$

в) $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (2, 3, 4, 5);$

г) $A_f^e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (-4, -3, -2, -1).$

21. Лінійний оператор f арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^3$ у базисі $\vec{a}_1 = (1, -2, 1), \vec{a}_2 = (3, 0, 3), \vec{a}_3 = (1, 2, 3)$ має матрицю $A_f^a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього самого оператора у базисі $\vec{b}_1 = (1, 0, 0), \vec{b}_2 = (0, 1, 0), \vec{b}_3 = (0, 1, 1)$.

22. Лінійний оператор f арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^4$ в одиничному базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ має матрицю $A_f^e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Знайти матрицю цього самого оператора у базисах:
а) $\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_3$; б) $\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_3 - \vec{e}_4$.

Задачі на доведення

23. Довести, що матриці лінійного оператора в двох різних базисах рівні тоді і тільки тоді, коли матриця переходу від одного з них до другого

переставна з матрицею цього лінійного оператора в одному з даних базисів.

24. Лінійний оператор f евклідового векторного простору E називають *самоспряженим (або симетричним),* якщо для будь-яких векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ цього простору виконується рівність $f(\vec{x})\vec{y} = \vec{x}f(\vec{y})$.

    Довести, що лінійний оператор f евклідового векторного простору E є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли в ортонормованому базисі цього простору він має симетричну матрицю A_f.

25. Довести, що існує єдиний лінійний оператор f векторного простору L_n над полем P, який переводить базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ у базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

26. Довести, що коли хоч одна з двох матриць A, B невироджена, то матриці AB і BA подібні.

27. Довести, що коли хоч одна з двох матриць A, B невироджена, то матриці $ABAB$ і $BABA$ подібні.

28. Довести, що існують вироджені матриці A, B такі, що матриці AB і BA не подібні.

29. Нехай лінійний оператор f векторного простору L_n переводить лінійно незалежні вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ у вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ відповідно. Довести, що матрицю A_f^e цього оператора у деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ можна знайти з рівності $A_f^e = C^{-1}D$, де рядки матриць C і D містять координати векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ і $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ відповідно у цьому ж базисі.

Творчі задачі

30. Нехай матриці A і B з векторного простору $M_n(P)$ подібні. Описати множину всіх невироджених матриць Q таких, що $A = Q^{-1}BQ$.

Задачі з олімпіад

31. Задати лінійний оператор векторного простору $\mathbb{R}^3$, який залишав би на місці:

    а) пряму $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0; \end{cases}$

    б) площину $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

    Якою є матриця такого оператора у одиничному базисі?

§ 3.2 Операції над лінійними операторами. Лінійні алгебри та їх ізоморфізм

Література: [1] стор. 438 – 443; [3] стор. 298 – 303.

Теоретичні відомості

Нехай у множині A визначені бінарні операції додавання, множення і зовнішня операція множення на скаляри з поля P. Таку алгебру називають *лінійною,* якщо вона є кільцем відносно операцій додавання і множення, векторним простором відносно операцій додавання і множення на скаляри з поля P та виконується умова

$$(\forall x, y \in A, \lambda \in P)(\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)).$$

Прикладом такої алгебри є множина $M_n(P)$ всіх матриць n-го порядку над полем P з операціями додавання, множення і множення матриць на скаляри з поля P.

Нехай L^* - множина всіх лінійних операторів векторного простору L над полем P, $f, g \in L^*$ і $\lambda \in P$. *Сумою лінійних операторів f і g* називається відображення $f+g$, яке задовольняє умову $(\forall \vec{x} \in L)((f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x})+g(\vec{x}))$. Сума $f+g$ лінійних операторів f і g є лінійним оператором, а операцію знаходження суми в L^* називають *додаванням лінійних операторів* і позначають знаком $+$.

Добутком fg лінійних операторів f і g називають відображення $g \circ f$ таке, що $(\forall \vec{x} \in L)((fg)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})))$. Добуток fg лінійних операторів є лінійним оператором, а операцію знаходження добутку в L^* називають *множенням лінійних операторів* і вживають мультиплікативний запис.

Алгебра $(L^*; +, \cdot)$ є кільцем.

Добутком скаляра $\lambda \in P$ на лінійний оператор $f \in L^*$ називають відображення λf таке, що $(\forall \vec{x} \in L)((\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}))$. Добуток скаляра $\lambda \in P$ на лінійний оператор $f \in L^*$ є лінійним оператором, а операцію знаходження такого добутку називають *множенням лінійних операторів на скаляр.*

Алгебра L^* з операціями додавання і множення на скаляри з поля P є векторним простором над полем P.

В алгебрі L^* з операціями додавання, множення і множення на скаляри з поля P виконуються рівності: $(\forall f, g \in L^*, \lambda \in P)(\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g))$. Отже, алгебра L^* є лінійною алгеброю над полем P.

Лінійна алгебра лінійних операторів L_n^* над числовим полем P ізоморфна лінійній алгебрі $M_n(P)$ всіх матриць n-го порядку над полем P. Шуканим ізоморфізмом є відображення $\Phi : L_n^* \to M_n(P)$, яке кожному $f \in L^*$ ставить у відповідність матрицю A_f цього оператора у вибраному базисі.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Нехай h_o^λ – гомотетія з центром у початку координат O і коефіцієнтом $\lambda \in \mathbb{R}$ у векторному просторі W_3 та $\alpha \in \mathbb{R}$. Яким лінійним оператором є αh_o^λ?

2. Нехай r_o^α, r_0^β – повороти навколо початку координат O у векторному просторі W_2 на кути α і β відповідно. Що можна сказати про лінійні оператори:
   а) $r_o^\alpha r_o^\beta$; б) $r_o^\beta r_o^\alpha$; в) $r_o^\alpha + r_o^\beta$; г) $r_o^\alpha - r_o^\beta$?

3. Нехай лінійний оператор f векторного простору L_n над полем P у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ має матрицю A_f^a і $\alpha \in P$. Якою є матриця лінійного оператора αf у цьому самому базисі?

4. Нехай лінійний оператор f векторного простору L_n над полем P у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ має матрицю A_f^a, а лінійний оператор g у цьому самому базисі має матрицю A_g^a. Якими є матриці лінійних операторів $f + g$, $g + f$, $f - g$, $g - f$, $g \circ f$ та $f \circ g$ у цьому самому базисі?

5. Що можна сказати про розмірність векторного простору L_1^*?

6. Чи є лінійною алгеброю над полем $\mathbb{R}$ поле:
   а) раціональних чисел; б) дійсних чисел; в) комплексних чисел?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

7. Нехай лінійні оператори f і g векторного простору L_n над полем P у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ мають матриці A_f^a і A_g^a відповідно і $\alpha \in P \setminus \{0\}$. Знайти матриці лінійних операторів $f^2 \circ g^2$ і $\alpha^{-1} f^2$ у цьому самому базисі.

8. Нехай у векторному просторі $\mathbb{R}^3$ задані лінійні оператори $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$ і $g(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_3, x_1 - x_2)$. Задати аналітично оператори $f + g$, fg і gf та знайти їх матриці в одиничному базисі.

9. Нехай лінійний оператор f векторного простору $\mathbb{R}^2$ над полем $\mathbb{R}$ у базисі $\vec{a}_1=(2,7), \vec{a}_2=(1,4)$ має матрицю $A_f^a=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор g у базисі $\vec{b}_1=(3,8), \vec{b}_2=(1,3)$ має матрицю $A_g^b=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю лінійного оператора $3f-2g$ у базисі, в якому задано координати всіх векторів.

10. Нехай лінійний оператор f векторного простору $\mathbb{R}^2$ над полем $\mathbb{R}$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ має матрицю A_f^a, а лінійний оператор g у базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ має матрицю A_g^b. Знайти матрицю лінійного оператора $f+g$:
а) у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, якщо $\vec{a}_1=(1,-2), \vec{a}_2=(3,-5)$, $A_f^a=\begin{pmatrix} 37 & -13 \\ 108 & -38 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1=(1,2), \vec{b}_2=(2,5)$, $A_g^b=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
б) у базисі $\vec{b}_1, \vec{b}_2$, якщо $\vec{a}_1=(7,3), \vec{a}_2=(2,1)$, $A_f^a=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1=(6,1), \vec{b}_2=(5,1)$, $A_g^b=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.

11. Нехай лінійний оператор f векторного простору $\mathbb{R}^2$ у базисі $\vec{a}_1=(-3,-1), \vec{a}_2=(7,2)$ має матрицю $A_f^a=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, а лінійний оператор g у базисі $\vec{b}_1=(3,2), \vec{b}_2=(4,3)$ має матрицю $A_g^b=\begin{pmatrix} -14 & 10 \\ -21 & 15 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю лінійних операторів fg і gf у базисі, в якому задано координати всіх векторів.

12. Лінійні оператори f і g векторного простору $\mathbb{R}^3$ задані матрицями:
а) $A_f^e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ у одиничному базисі і $A_g^a=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ у базисі $\vec{a}_1=(1,1,0), \vec{a}_2=(0,1,1), \vec{a}_3=(1,0,1)$.
Знайти матриці лінійних операторів $f+g$ і gf у одиничному базисі.
б) $A_f^a=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ у базисі $\vec{a}_1=(1,1,0), \vec{a}_2=(1,1,1), \vec{a}_3=(0,2,2)$ і $A_g^b=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ у базисі $\vec{b}_1=(1,2,2), \vec{b}_2=(1,0,1), \vec{b}_3=(0,0,1)$.
Знайти матриці лінійних операторів $f+g$ і gf у одиничному базисі.

13. Встановити, чи є лінійною алгеброю поле P над:
а) його підполем S;
б) полем T, яке є розширенням поля P?

Задачі на доведення

14. Нехай векторний простір $L = U \oplus V$ є прямою сумою своїх підпросторів U і V. Тоді кожний вектор $\vec{a} \in L$ однозначно подається у виді суми $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, де $\vec{u} \in U, \vec{v} \in V$. Довести, що:
а) відображення $f(\vec{a}) = \vec{u}$ є лінійним оператором простору L, який задовольняє умові $f^2 = f$ (його називають *оператором проектування простору L на підпростір U паралельно до V*);
б) відображення $g(\vec{a}) = \vec{u} - \vec{v}$ є лінійним оператором простору L, який задовольняє умові $g^2 = e$ (його називають *оператором відбиття або симетричного відображення простору L відносно підпростору U паралельно до підпростору V*), де e – тотожний оператор.

15. Довести, що лінійний оператор f векторного простору L над числовим полем є проектуванням тоді і тільки тоді, коли $f^2 = f$.

16. Довести, що лінійний оператор g векторного простору L над числовим полем є відбиттям тоді і тільки тоді, коли $g^2 = e$.

17. Лінійний оператор f дійсного векторного простору L_n має властивість $f^2 = e$. Довести, що простір L_n є прямою сумою підпросторів U і V таких, що $(\forall \vec{x} \in U)(f(\vec{x}) = \vec{x})$ і $(\forall \vec{x} \in V)(f(\vec{x}) = -\vec{x})$.

18. Лінійний оператор f дійсного векторного простору L_n має властивість $f^2 = f$. Довести, що простір L_n є прямою сумою підпросторів U і V таких, що $(\forall \vec{x} \in U)(f(\vec{x}) = \vec{x})$ і $(\forall \vec{x} \in V)(f(\vec{x}) = \vec{0})$.

19. Нехай f, g – самоспряжені лінійні оператори евклідового векторного простору E_n. Довести, що:
а) сума $f + g$ є самоспряженим оператором;
б) для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ оператор $\alpha f + \beta g$ є самоспряженим;
в) добуток fg є самоспряженим оператором тоді і тільки тоді, коли $fg = gf$;
г) самоспряженим є оператор $fg + gf$.

20. Нехай $f \in L^*$. Довести, що множина всіх лінійних операторів $g \in L^*$ таких, що $fg = o$ (o – нульовий оператор: $((\forall \vec{x} \in L)(o(\vec{x}) = \vec{0}))$), є підпростором векторного простору L^*.

21. Нехай f, g – лінійні оператори повороту проти годинникової стрілки на кут $\frac{\pi}{2}$ у векторному просторі W_3 навколо координатних осей векторів $\vec{i}$ та $\vec{j}$ відповідно. Довести, що:
а) $fg \neq gf$; б) $f^4 = g^4 = e$.

22. Нехай f, g – лінійні оператори простору L над полем P, o – нульовий оператор і $f + g = e$. Довести, що:
а) $fg = o$ тоді і тільки тоді, коли $gf = o$;
б) $fg = o$ тоді і тільки тоді, коли $f^2 = f$ і $g^2 = g$.

23. Нехай f, g – лінійні оператори простору L, $f^2 = f$ і $g^2 = g$. Довести, що $(fg)^2 = fg$ тоді і тільки тоді, коли $fg = gf$.

24. Лінійний оператор $f \in L^*$ називається *нільпотентним,* якщо існує натуральне число k таке, що $f^k = o$. Найменше з таких натуральних чисел k називають *індексом нільпотентності для* f. Довести, що лінійний оператор f диференціювання у векторному просторі $\mathbb{R}_3[x]$ є нільпотентним і знайти його індекс нільпотентності.

25. Нехай f – лінійний оператор диференціювання, а g – лінійний оператор множення на x у векторному просторі $\mathbb{R}[x]$. Довести, що $g^n f - fg^n = ng^{n-1}$ при всіх $n \geqslant 1$.

26. Довести, що лінійний оператор f диференціювання у векторному просторі $\mathbb{R}_n[x]$ при $n+1$-кратному виконанні переводить будь-який многочлен у число 0. Якою є матриця лінійного оператора f^{n+1}?

27. Нехай L – векторний простір над числовим полем. Довести, що:
а) якщо f – оператор проектування, то $2f - e$ – оператор відбиття;
б) якщо g – оператор відбиття, то $\frac{1}{2}(f + e)$ – оператор проектування.

28. Довести, що векторний простір $C_{a,b}$ усіх функцій від дійсної змінної x, неперервних на відрізку $[a, b]$, є лінійною алгеброю над полем $\mathbb{R}$.

29. Довести, що множина $K = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ є лінійною алгеброю відносно операцій:
1. $(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$;
2. $(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) = a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + d_1 c_2 - c_1 d_2)i + (a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)k$;
3. $\lambda(a + bi + cj + dk) = (\lambda a) + (\lambda b)i + (\lambda c)j + (\lambda d)k$.
Цю алгебру називають *алгеброю кватерніонів*.

30. Довести, що підмножина U матриць виду $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$ лінійної алгебри $M_2(\mathbb{C})$ є лінійною алгеброю над полем $\mathbb{R}$.

31. Довести, що підмножина V матриць виду $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ лінійної алгебри $M_4(\mathbb{R})$ є лінійною алгеброю над полем $\mathbb{R}$.

32. Довести, що лінійні алгебри K, U і V з попередніх трьох задач ізоморфні між собою.

Творчі задачі

33. Нехай f – нільпотентний лінійний оператор індексу k і вектор $\vec{a}$ такий, що $f^{k-1}(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Що можна сказати про лінійну залежність векторів $\vec{a}, f(\vec{a}), \ldots, f^{k-1}(\vec{a})$?

Задачі з олімпіад

34. Нехай лінійні оператори f, g векторного простору L над полем P задовольняють рівності $gf = o$ і $g + f = e$. Довести, що оператори f, g є операторами проектування.

35. Нехай лінійні оператори f, g векторного простору L над полем P задовольняють рівність $gf = fg$. Довести, що оператор gf є оператором проектування.

§ 3.3 Область значень і ядро, ранг і дефект лінійного оператора

Література: [1] стор. 443 – 448; [3] стор. 307 – 309.

Теоретичні відомості

Нехай f – лінійний оператор векторного простору L над полем P. Множина $Imf = \{f(\vec{x})|\vec{x} \in L\}$ називається *областю значень* або *образом лінійного оператора* f.

Множина $Kerf = \{\vec{x}|\vec{x} \in L \wedge f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ називається *ядром лінійного оператора* f.

Область значень і ядро лінійного оператора f є підпросторами векторного простору L.

Якщо $\dim L = n$ і $f \in L_n^*$, то $\dim Imf$ називають *рангом,* а $\dim Kerf$ – *дефектом лінійного оператора* f.

Для кожного лінійного оператора f скінченновимірного векторного простору L_n виконується рівність

$$\dim Imf + \dim Kerf = n.$$

Лінійний оператор $f \in L_n^*$ називається *невиродженим,* якщо $\dim Imf = n$, і *виродженим* – якщо $\dim Imf < n$.

Лінійний оператор $f \in L^*$ називається *оборотним,* якщо існує оператор $g \in L^*$ такий, що $f \circ g = g \circ f = e$ для тотожного лінійного оператора e. Якщо такий оператор g існує, то він єдиний. Його називають *оберненим до* f і позначають через f^{-1}.

Множина всіх оборотних лінійних операторів векторного простору L_n над полем P є групою. Її називають *повною лінійною групою* і позначають $GL(n, P)$ або $GL_n(P)$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Якими є образи і ядра тотожного e і нульового o лінійних операторів векторного простору L над полем P? Чи залежать вони від поля, над яким розглядається векторний простір?

2. Якими є ранг і дефект тотожного e і нульового o лінійних операторів векторного простору L над полем P?

3. Які особливості має матриця лінійного оператора f простору $\mathbb{R}^n$ у одиничному базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, якщо перші його k векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ утворюють базис: а) $Ker\, f$; б) $Im\, f$?

4. Якими є образ, ядро, ранг і дефект лінійного оператора:
а) ортогонального проектування на координатну вісь вектора $\vec{j}$ у просторі W_2;
б) ортогонального проектування на координатну вісь вектора $\vec{k}$ у просторі W_3?

5. Якими є образ, ядро, ранг і дефект лінійного оператора ортогонального проектування на координатну площину векторів $\vec{i}, \vec{j}$ у просторі W_3?

6. Якими є образ, ядро, ранг і дефект лінійного оператора повороту на кут α навколо початку координат у просторі W_2?

7. Якими є образ, ядро, ранг і дефект лінійного оператора гомотетії з центром у початку координат і коефіцієнтом $\lambda \neq 0$ у просторі W_3?

8. Описати образ і ядро лінійного оператора диференціювання в просторі $\mathbb{R}_2[x]$.

9. Який з лінійних операторів є оборотним:
а) ортогональне проектування на координатну вісь вектора $\vec{i}$ простору W_2;
б) поворот на кут α навколо початку координат простору W_2;
в) гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом $\lambda \neq 0$ у просторі W_3?

10. Навести приклад лінійного оператора f векторного простору W_2 такого, що $W_2 = Im\, f \oplus Ker\, f$.

11. Навести приклад лінійного оператора f векторного простору L такого, що $Im\, f \oplus Ker\, f \neq L$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

12. Нехай векторний простір $L = U \oplus V$ є прямою сумою своїх підпросторів U і V. Знайти образ, ядро, ранг і дефект лінійного оператора:
а) проектування простору L на підпростір U паралельно до V;
б) відбиття простору L відносно підпростору U паралельно до підпростору V.

13. Лінійний оператор f арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$ задано так:
а) $f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+2x_2+3x_3,0,0)$;
б) $f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1-x_2,0,x_3)$;
в) $f((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (3x_1-x_2,2x_2-x_3,x_3-x_4,0)$;
г) $f((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (x_1+x_2,x_2,x_3,x_4)$.
Знайти ранг і дефект, ядро і образ цього лінійного оператора.

14. Якими є образ, ядро, ранг і дефект лінійного оператора диференціювання у просторі $\mathbb{R}_n[x]$?

15. Знайти в просторі $\mathbb{R}_2[x]$ два різних лінійних оператори, які мають однакові образи і ядра.

16. Нехай лінійний оператор f векторного простору L_n над полем $\mathbb{R}$ у деякому базисі цього простору задано матрицею:

а) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$; д) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A_f = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; е) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

в) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; є) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; ж) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайти ранг і дефект цього лінійного оператора. Побудувати його образ і ядро.

17. Лінійний оператор f дійсного векторного простору L_n має властивість $f^2 = f$. Знайти зв'язок між образами і ядрами лінійних операторів f і $e - f$.

18. Перевірити, що оператор диференціювання:
а) є виродженим у просторі $\mathbb{R}_2[x]$;
б) є невиродженим у підпросторі $L(\sin x, \cos x)$ простору $C_{[a,b]}$.

19. Нехай лінійний оператор f векторного простору L_n над полем $\mathbb{R}$ у деякому базисі цього простору задано матрицею:

а) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$; г) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A_f = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; д) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Встановити, чи є даний оператор оборотним. Якщо так, то знайти матрицю оберненого оператора f^{-1} у цьому ж самому базисі.

20. Знайти обернений оператор до лінійного оператора диференціювання у підпросторі $L(\sin x, \cos x)$ простору $C_{[a,b]}$.

Задачі на доведення

21. Нехай U і V – підпростори векторного простору L_n і $\dim U + \dim V = n$. Довести, що існує лінійний оператор f простору L_n такий, що $U = Im\, f$ і $V = Ker\, f$.

22. Довести, що для довільних лінійних операторів f і g векторного простору L_n виконуються співвідношення:
а) $\dim Im(f+g) \leqslant \dim Im\, f + \dim Im\, g$;
б) $\dim Ker(fg) \leqslant \dim Ker\, f + \dim Ker\, g$.

23. Лінійний оператор f дійсного векторного простору L_n має властивість $f^2 = f$. Довести, що простір L_n є прямою сумою підпросторів образу і ядра цього оператора.

24. Довести, що лінійний оператор f простору L_n є невиродженим тоді і тільки тоді, коли:
а) $Im\, f = L_n$; б) $Ker\, f = \{\vec{0}\}$; в) $\dim Ker\, f = 0$;
г) матриця лінійного оператора f простору L_n у деякому базисі є невиродженою;
д) відображення f є взаємно однозначним;
е) f є оборотним.

25. Довести, що добуток лінійних операторів f і g є невиродженим тоді і тільки тоді, коли кожний з них невироджений. При цьому
$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

26. Довести, що коли лінійний оператор f векторного простору L_n є невиродженим, то для будь-якого оператора $g \in L_n^*$ виконуються рівності $\dim Im(fg) = \dim Im(gf) = \dim Img$.

27. Довести, що для невиродженого лінійного оператора $f \in L^*$ і довільного оператора $g \in L^*$ виконується рівність

$$(f+g)f^{-1}(f-g) = (f-g)f^{-1}(f+g).$$

28. Довести, що повна лінійна група $GL(n,P)$ ізоморфна групі всіх невироджених матриць n-го порядку над полем P.

Творчі задачі

29. Чи може бути так, щоб лінійні оператори $f, g \in L_n^*$ були різними і в той же час $Im\, f = Im\, g$ та $Ker\, f = Ker\, g$?

Задачі з олімпіад

30. Довести, що для лінійного оператора $f \in L_n^*$ рангу 1 хоча б один з лінійних операторів $f - e$ і $e - f$ є невиродженим.

31. Нехай $f \in L_n^*$ і r – його ранг. Довести, що множина всіх лінійних операторів g простору L_n таких, що $gf = o$, є векторним простором. Знайти його розмірність.

32. Довести, що множина H всіх векторів простору $\mathbb{R}^n$, які відображаються лінійним оператором f цього простору в один і той же вектор $\vec{a}$, є лінійним многовидом у $\mathbb{R}^n$. Знайти базис напрявляючого підпростору U і вектор $\vec{a}_0$ паралельного перенесення многовиду $H = \vec{a}_0 + U$ лінійного оператора $f \in \mathbb{R}_4^*$, який в одиничному базисі заданий матрицею $A_f^e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 11 & -2 \\ -5 & 3 & -13 & 1 \\ 7 & -2 & 16 & 3 \end{pmatrix}$ і $\vec{a} = (-3, 13, -14, 13)$.

§ 3.4 Інваріантні підпростори. Власні вектори і власні значення лінійного оператора

Література: [1] стор. 448 – 453; [3] стор. 307 – 311.

Теоретичні відомості

Нехай f є лінійний оператор векторного простору L над полем P і U – підпростір L. Підпростір U називається *інваріантним відносно* f*,* якщо $f(U) \subset U$. Ненульовий вектор $\vec{a} \in L$ називається *власним вектором лінійного оператора* f цього простору, якщо існує $\lambda \in P$ такий, що $f(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$. При цьому λ називають *власним значенням лінійного оператора* f*, яке відповідає власному вектору* $\vec{a}$*.*

Власні вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ лінійного оператора $f \in L^*$, яким відповідають попарно різні власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, є лінійно незалежними.

Нехай $A \in M_n(P)$ і P – числове поле. Матриця $A - \lambda E$ називається *характеристичною матрицею матриці* A*,* а рівняння $|A - \lambda E| = 0$ називається *характеристичним рівнянням матриці* A (тут E – одинична матриця, а λ – деяке невідоме число).

Характеристичні рівняння подібних матриць однакові.

Нехай A_f –матриця лінійного оператора f векторного простору L_n над числовим полем P у деякому базисі. Матриця $A_f - \lambda E$ називається *характеристичною матрицею лінійного оператора* f*,* а рівняння $|A_f - \lambda E| = 0$ називається *характеристичним рівнянням цього оператора.* Корені цього рівняння називаються *характеристичними коренями лінійного оператора* f.

Число λ є власним значенням лінійного оператора f для деякого власного вектора $\vec{a} \in L_n$ тоді і тільки тоді, коли λ є характеристичним коренем цього оператора.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Які підпростори векторного простору L над полем P є інваріантними щодо тотожного e і нульового o лінійних операторів цього простору ?

2. Які підпростори векторного простору W_2 є інваріантними щодо лінійного оператора:
   а) ортогональне проектування на координатну вісь вектора $\vec{i}$;
   б) ортогональне проектування на пряму, яка утворює рівні кути з координатними осями;

в) поворот на кут α навколо початку координат;
г) гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом λ?

3. Які підпростори векторного простору W_3 є інваріантними щодо лінійного оператора:
а) ортогональне проектування на координатну вісь вектора $\vec{k}$;
б) ортогональне проектування на площину, яка містить вектори $\vec{i}, \vec{k}$;
в) ортогональне проектування на пряму, яка утворює рівні кути з векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
г) ортогональне проектування на площину, яка проходить через вектор $\vec{k}$ і ділить кут між векторами $\vec{i}, \vec{j}$ пополам;
д) поворот на кут α навколо координатної осі вектора $\vec{i}$;
е) поворот на кут $\frac{2}{3}\pi$ навколо прямої, яка утворює рівні кути з векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$?

4. Які підпростори векторного простору $\mathbb{R}_n[x]$ є інваріантними відносно лінійного оператора диференціювання?

5. Матриця лінійного оператора $f \in L_n^*$ у деякому базисі має діагональний вид. Що можна сказати про власні значення цього оператора?

6. Скільки власних значень може відповідати одному власному вектору лінійного оператора $f \in L^*$?

7. Скільки власних векторів може відповідати одному власному значенню лінійного оператора $f \in L_n^*$?

8. Записати характеристичну матрицю і характеристичне рівняння лінійного оператора векторного простору W_2:
а) ортогональне проектування на координатну вісь вектора $\vec{i}$;
б) ортогональне проектування на пряму, яка утворює рівні кути з координатними осями;
в) поворот на кут α навколо початку координат;
г) гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом α.

9. Знайти всі власні вектори лінійного оператора векторного простору W_3:
а) ортогональне проектування на координатну вісь вектора $\vec{k}$;
б) ортогональне проектування на площину, яка містить вектори $\vec{i}, \vec{k}$;
в) ортогональне проектування на пряму, яка утворює рівні кути з векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
г) ортогональне проектування на площину, яка проходить через вектор

$\vec{k}$ і ділить кут між векторами $\vec{i}, \vec{j}$ пополам;
д) поворот на кут α навколо координатної осі вектора $\vec{i}$;
е) поворот на кут $\frac{2}{3}\pi$ навколо прямої, яка утворює рівні кути з векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

10. Якими є характеристичні корені матриці:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$?

11. Записати характеристичне рівняння матриці:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

12. Які підпростори дійсного векторного простору L_2 є інваріантними щодо лінійного оператора f, який у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ цього простору задано матрицею:

а) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

13. Скільки існує інваріантних підпросторів у просторі L_n відносно лінійного оператора f, матриця якого у деякому базисі є діагональною з різними елементами на діагоналі?

14. Порівняти власні значення і множини власних векторів лінійних операторів простору L_3, які в деякому базисі задані матрицями:

а) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

15. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора f дійсного векторного простору, заданого в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ цього простору матрицею A_f^e, якщо:

а) $A_f^e = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$; б) $A_f^e = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A_f^e = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A_f^e = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$; є) $A_f^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $A_f^e = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; ж) $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $A_f^e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; з) $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

16. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора f, який є диференціюванням у векторному просторі $\mathbb{R}_2[x]$.

17. Знайти всі підпростори дійсного векторного простору L_n, інваріантні щодо лінійного оператора $f \in L_n^*$, який у деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ цього простору задано матрицею:

а) $A_f^e = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A_f^e = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A_f^e = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A_f^e = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

18. Знайти всі підпростори дійсного векторного простору L_3, інваріантні одночасно відносно двох лінійних операторів $f, g \in L_3^*$, які у деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ цього простору задано матрицями:

а) $A_f^e = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -6 \\ -3 & 5 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ і $A_g^e = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A_f^e = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ і $A_g^e = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

19. Перевірити, що матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ є коренем рівняння $X^2 + X - 2 = O$.

20. Перевірити, що кожна матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$ задовольняє своє характе-

ристичне рівняння, тобто, якщо

$$|A-\lambda E| = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

то $\quad a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0E = O.$

21. Використовуючи попередню задачу, знайти матрицю $A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

22. Використовуючи задачу № 20, обчислити обернену матрицю до
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

23. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора f векторного простору $\mathbb{C}^n$, заданого в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ цього простору матрицею A_f^e, якщо:
а) $A_f^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A_f^e = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;
г) $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; д) $A_f^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$; е) $A_f^e = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
є) $A_f^e = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$;

Задачі на доведення

24. Довести, що комплексне число λ є власним значенням матриці $A \in M_n(\mathbb{C})$ тоді і тільки тоді, коли спряжене число $\overline{\lambda}$ є власним значенням матриці $\overline{A}$, яка утворена з A заміною всіх її елементів спряженими комплексними числами.

25. Якщо $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, то позначимо $\overline{\vec{x}} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$. Довести, що $\vec{x}A = \lambda\vec{x}$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{\vec{x}}\overline{A} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}}$.

26. Довести, що сума і перетин інваріантних підпросторів простору L щодо лінійного оператора f є інваріантними відносно цього оператора.

27. Довести, що всі власні значення дійсної симетричної матриці є дійсними числами.

28. Довести, що нільпотентний оператор не має відмінних від нуля власних значень.

29. Довести, що всі відмінні від нуля вектори простору L тоді і тільки тоді є власними векторами лінійного оператора $f \in L^*$, коли цей оператор є оператором подібності, тобто $(\forall \vec{x}) f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ для деякого λ.

30. Довести, що лінійна оболонка кожної множини власних векторів лінійного оператора $f \in L^*$ є інваріантним підпростором простору L відносно оператора f.

31. Довести, що множина всіх власних векторів лінійного оператора $f \in L^*$, які належать одному і тому самому власному значенню λ_0, разом з нульовим вектором, утворюють підпростір простору L, інваріантний відносно оператора f. Його називають *власним підпростором лінійного оператора $f \in L^*$, відповідним власному значенню λ_0*.

32. Довести, що сума власних підпросторів лінійного оператора $f \in L_n^*$ є прямою сумою.

33. Довести, що кожний підпростір U векторного простору L, інваріантний відносно невиродженого лінійного оператора $f \in L^*$, є одночасно інваріантним і відносно оберненого оператора f^{-1}.

34. Довести, що образ Imf і ядро $Kerf$ лінійного оператора $f \in L^*$ є інваріантними підпросторами простору L відносно оператора f.

35. Нехай лінійні оператори $f, g \in L^*$ такі, що $fg = gf$. Довести, що образ Img і ядро $Kerg$ лінійного оператора g є інваріантними підпросторами простору L відносно оператора f.

36. Довести, що лінійна оболонка $L(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, -\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ є інваріантним підпростором у просторі L_4 відносно лінійного оператора $f \in L_4^*$, який у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ задано матрицею $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

37. Довести, що число лінійно незалежних власних векторів лінійного оператора $f \in L_n^*$, які належать одному і тому самому власному значенню λ_0, не перевищує кратності числа λ_0 як кореня характеристичного рівняння оператора f.

38. Нехай $A, B \in M_n(P)$ і хоча б одна з цих матриць є невиродженою. Довести, що характеристичні рівняння матриць AB і BA однакові.

39. Довести, що лінійний оператор $f \in L_n^*$ є невиродженим тоді і тільки тоді, коли він не має власного значення 0.

40. Довести, що для кожного невиродженого лінійного оператора f простору W_3 існує пряма, яка проходить через початок координат і є інваріантною відносно f.

41. Довести, що коли лінійний оператор $f \in L_n^*$ є виродженим, то будь-який підпростір, який містить його образ Imf, є інваріантним відносно оператора f.

42. Довести, що:
а) власні вектори лінійного оператора $f \in L_n^*$, які відповідають власному значенню 0, і тільки вони, належать його ядру $Kerf$;
б) власні вектори лінійного оператора $f \in L_n^*$, які відповідають ненульовим власним значенням, належать його образу Imf.

43. Довести,що всі характеристичні корені самоспряженого лінійного оператора $f \in E_n^*$ є дійсними і він має n власних значень.

44. Довести, що власні вектори самоспряженого оператора $f \in E_n^*$, які відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою.

Творчі задачі

45. Нехай $f \in L^*$ – невироджений лінійний оператор. Який зв'язок існує між власними векторами і власними значеннями лінійних операторів f і f^{-1}?

46. Нехай f – лінійний оператор дійсного векторного простору L_n та $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Який зв'язок існує між власними векторами і власними значеннями лінійних операторів f та
$a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0$?

47. Чи вірним є твердження про те, що матриці, які мають однакові характеристичні многочлени, є подібними?

Задачі з олімпіад

48. Довести, що будь-який многочлен третього степеня, з старшим коефіцієнтом рівним 1, є характеристичним многочленом деякої матриці третього порядку.

49. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора f дійсного векторного простору, заданого в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ цього простору матрицею A^e_f, якщо:

а) $A^e_f = \begin{pmatrix} 2002 & 2002 & \ldots & 2002 \\ 2002 & 2002 & \ldots & 2002 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2002 & 2002 & \ldots & 2002 \end{pmatrix}$;

б) $A^e_f = \begin{pmatrix} 2002 & 2003 & \ldots & 2003 \\ 2003 & 2002 & \ldots & 2003 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2003 & 2003 & \ldots & 2002 \end{pmatrix}$.

50. Знайти характеристичний многочлен, власні значення і власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в полі комплексних чисел.

§ 3.5 Квадратичні форми і їх звязок з матрицями

Література: [1] стор. – ; [3] стор. – .

Теоретичні відомості

Квадратичною формою від n змінних над полем дійсних чисел називається функція $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ з областю визначення $\mathbb{R}^n$, яка приймає значення у полі $\mathbb{R}$ і задається формулою

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Числа $a_{ij} \in \mathbb{R}$ називають коефіцієнтами даної квадратичної форми.

Кожній квадратичній формі $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ відповідає симетрична матриця n-го порядку

$$A_F = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \dots & \frac{1}{2}a_{1(n-1)} & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \dots & \frac{1}{2}a_{2(n-1)} & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \dots & \frac{1}{2}a_{(n-1)n} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що кожній симетричній матриці n-го порядку A над полем $\mathbb{R}$ відповідає квадратична форма $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, яка задається формулою

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) A (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t,$$

або у векторній формі

$$F(\vec{x}) = \vec{x} A \vec{x}^t.$$

Як відомо (дивись § 2.4), при переході від одного до іншого базису у векторному просторі $\mathbb{R}^n$ координати одного і того ж вектора змінюються за формулою $\vec{x} = \vec{y}T$, де T - матриця переходу від першого до другого базису і вектори другого базису є рядками матриці переходу T. В той же час заміною змінних у квадратичній формі $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ називається перетворення, яке задається формулами:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n, \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

У векторній формі ці рівності якраз і перетворюються у записану вище формулу. Тому після заміни змінної, тобто переходу до нової системи координат, дана квадратична форма прийме вигляд:

$$F(\vec{y}) = (\vec{y}T)A(\vec{y}T)^t = \vec{y}(TAT^t)\vec{y}^t.$$

Якщо матриця $B = TAT^t$ має діагональний вид і матриця T є ортогональною (тобто, $TT^t = E$), то $T^t = T^{-1}$ і очевидно, що квадратична форма має вигляд:

$$F(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

В ній немає добутків різних змінних. В цьому випадку вектори з другого базису (тобто, вектор-рядки матриці T) називають головними осями квадратичної форми та говорять, що квадратична форма має в ньому канонічну форму. Відомо також (§ 3.5), що $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ є власними значеннями матриці A.

Квадратична форма $F(\vec{x})$ називається:

а) додатно визначеною, якщо $F(\vec{x}) > 0$ для всіх $\vec{x} \neq \vec{0}$;

б) від'ємно визначеною, якщо $F(\vec{x}) < 0$ для всіх $\vec{x} \neq \vec{0}$;

в) невизначеною, якщо $F(\vec{x})$ приймає додатні та від'ємні значення.

Для кожної симетричної матриці A квадратична форма $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ є:

а) додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці A є додатними;

б) від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці A є від'ємними;

в) невизначеною тоді і тільки тоді, коли A має додатні та від'ємні власні значення.

Нехай $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ - квадратична форма простору $\mathbb{R}^2$ і матриця A є оборотною. Тоді для будь-якого дійсного числа λ графік рівняння

$$\vec{x}A\vec{x}^t = \lambda$$

є однією з фігур: еліпсом (або колом), гіперболою, двома прямими, які перетинаються, точкою або порожною множиною.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи є дана функція квадратичною формою:
   а) $F(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 5$;
   б) $F(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$;
   в) $F(x_1, x_2, x_3) = -16x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_4$;
   г) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - x_2^2 - 8x_2x_3 + 3x_3^2$.

2. Записати найпростішу ненульову квадратичну форму у векторному та координатному вигляді від:
   а) двох змінних; б) трьох змінних; в) n змінних.
   Яка особливість матриць цих форм і скільки їх є в кожному випадку?

3. Записати матрицю квадратичної форми:
   а) $F(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 5x_2^2$;
   б) $F(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$;
   в) $F(x_1, x_2, x_3) = -16x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$;
   г) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2 - 8x_2x_3 + 3x_3^2$.

4. Записати квадратичну форму у векторному вигляді:
   а) $F(x_1, x_2) = x_1x_2 - 2x_2^2$;
   б) $F(x_1, x_2) = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$;
   в) $F(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$;
   г) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_2x_3 + 3x_3^2$.

5. Записати квадратичну форму в координатному вигляді, якщо її матриця є такою:
   а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;
   б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Обчислити значення квадратичної форми $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$, якщо
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ та:
   а) $\vec{x} = (1, 1)$; б) $\vec{x} = (a_1, a_2)$; в) $\vec{x} = (2, -1)$; г) $\vec{x} = (-2, 3)$.

7. Чи має квадратична форма $F(\vec{x}) = 3x_1^2 + 5x_2^2$ найменше числове значення?

8. Пояснити, яке з наступних тверджень відносно матриць з кільця $M_n(\mathbb{R})$ і векторів з простору $\mathbb{R}^n$ та квадратичних форм є істиним та яке хибним:
   а) матриця квадратичної форми є симетричною;
   б) квадратична форма не містить добутків різних змінних тоді і тільки тоді, коли матриця квадратичної форми є діагональною;
   в) головні осі квадратичної форми $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ є власними векторами для матриці A;
   г) додатно визначена квадратична форма $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ задовольняє нерівність $F(\vec{x}) > 0$ для всіх $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

д) якщо всі власні значення симетричної матриці A є додатними, то квадратична форма $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ є додатно визначеною;
е) вираз $F(\vec{x}) = |\vec{x}|^2$ є квадратичною формою;
є) якщо A симетрична і P ортогональна матриця, то заміна змінної $\vec{x} = \vec{y}P$ зводить квадратичну форму $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ до канонічного виду;
ж) якщо A є симетричною матрицею другого порядку, то рівняння $\vec{x}A\vec{x}^t = -1$ є рівнянням еліпса.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Обчислити значення квадратичної форми $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$, якщо
$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ та:
а) $\vec{x} = (1, 1, -1)$; б) $\vec{x} = (a_1, a_2, a_3)$; в) $\vec{x} = (2, -1, 5)$;
г) $\vec{x} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

10. Знайти матрицю квадратичної форми та записати квадратичну форму у векторному вигляді:
   а) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$;
   б) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_3$;
   в) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -4x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_4$;
   г) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 8x_2x_3 + 3x_3^2 + 4x_1x_4 - x_4^2$.

11. Для наступних квадратичних форм зробити заміну змінної $\vec{x} = \vec{y}T$ після якої форма зведеться до канонічного виду та записати матрицю T і нову квадратичну форму:
   а) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$; г) $F(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$;
   б) $F(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2$; д) $F(x_1, x_2) = -5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$;
   в) $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$; е) $F(x_1, x_2) = 6x_1^2 + 9x_1x_2$.

12. Звести квадратичну форму до канонічного виду:
   а) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_2x_3 + 4x_1x_3$;
   б) $F(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 + 8x_1x_3$;
   в) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 11x_1^2 - 12x_1x_2 - x_2^2 - 12x_1x_3 - 12x_1x_4 - 2x_3x_4$;
   г) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 9x_1x_2 + x_2^2 + 12x_2x_3 + x_3^2 - 12x_1x_4 + x_4^2 + 9x_3x_4$.

13. Встановити, якими є наступні лінії другого порядку:
   а) $x_1^2 - 4x_2x_3 + 4x_1x_3 = 0$;
   б) $9x_1^2 - 8x_1x_2 + = 0$;
   в) $11x_1^2 - 12x_1x_2 - x_2^2 = 0$;
   г) $x_1^2 + 9x_1x_2 + x_2^2 + 12x_2x_3 + = 0$.

14. Знайти найбільше значення квадратичної форми $F(\vec{x}) = 5x_1^2 + 8x_2^2$, якщо $\vec{x}\vec{x}^t = 1$.

Задачі на доведення

15. Матриця квадратичної форми $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ має вид $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ і $|A| \neq 0$. Довести, що її власні значення λ_1 і λ_2 задовольняють умови $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ та $\lambda_1\lambda_2 = |A|$.

16. Для квадратичної форми $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ з попередньої задачі довести або заперечити твердження:
а) $F(\vec{x})$ є додатно визначеною, якщо $|A| > 0$ і $a > 0$;
б) $F(\vec{x})$ є відємно визначеною, якщо $|A| < 0$ і $a < 0$;
в) $F(\vec{x})$ є невизначеною, якщо $|A| < 0$.

17. Матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$ називається додатно визначеною, якщо такою є відповідна їй квадратична форма. Довести, що для додатно визначеної матриці A існує додатно визначена матриця B така, що $A = BB^t$.

18. Нехай $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ є симетричними матрицями з додатними власними значеннями. Довести, що всі власні значення матриці $A+B$ також є додатними.

19. Нехай $A \in M_n(\mathbb{R})$ є симетричною оборотною матрицею. Довести, що коли квадратична форма $F(\vec{x}) = \vec{x}A\vec{x}^t$ є додатно визначеною, то такою є і квадратична форма $F(\vec{x}) = \vec{x}A^{-1}\vec{x}^t$

20.

§ 3.6 Зведення матриці до діагонального виду

Література: [1] стор. 453 – 457; [3] стор. 311 – 315.

Теоретичні відомості

Нехай f – лінійний оператор векторного простору L_n над числовим полем P. Множина всіх власних значень лінійного оператора називається його *спектром.* Говорять, що f *має простий спектр,* якщо він має n попарно різних власних значень.

Якщо лінійний оператор $f \in L_n^*$ має простий спектр, то існує базис простору L_n, у якому матриця A_f цього оператора має діагональний вид.

Матриця A_f лінійного оператора $f \in L_n^*$ у деякому базисі є діагональною тоді і тільки тоді, коли цей базис складається з власних векторів даного оператора.

Задачу знаходження для матриці $A \in M_n(P)$ подібної їй і такої, яка має діагональний вид, називається *зведенням даної матриці до діагонального виду.*

Достатньою умовою для зведення матриці лінійного оператора $f \in L_n^*$ до діагонального виду є наявність у даного оператора простого спектру, причому діагональними елементами будуть саме ці власні значення.

Якщо лінійний оператор має менше як n дійсних власних значень, причому враховується їх кратність як коренів характеристичного рівняння, то матриця такого оператора не зводиться до діагонального виду.

Якщо лінійний оператор має менше як n різних власних значень, а враховуючи кратності кожного як коренів характеристичного рівняння їх рівно n, то треба дослідити ще, яке число k лінійно незалежних власних векторів визначає кожний корінь λ кратності s. Оскільки число лінійно незалежних власних векторів довільного лінійного оператора, які належать одному власному значенню λ, не певищує s, то:

а) матриця не зводиться до діагонального виду, коли хоча б для одного λ виконується нерівність $k < s$ (тоді не набереться стільки власних векторів, скільки їх повинно бути в базисі);

б) матриця зводиться до діагонального виду, коли для всіх λ виконується рівність $k = s$, причому діагональними елементами є власні значення оператора, що повторюються стільки раз, яка їх кратність.

Задачу знаходження для матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ подібної їй і такої, яка має трикутний вид, називається *зведенням даної матриці до трикутного виду.*

Якщо всі характеристичні корені матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$ є дійсними числами, то її можна звести до трикутного виду.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Яким є спектр лінійного оператора:
   а) ортогональне проектування на координатну вісь вектора $\vec{i}$ векторного простору W_2;
   б) поворот на кут α навколо початку координат простору W_2;
   в) ортогональне проектування на площину, яка містить вектори $\vec{j}, \vec{k}$ у векторному просторі W_3;
   г) гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом λ у векторному просторі W_3?

2. Яким є геометричний зміст лінійного оператора з простим спектром векторного простору: а) W_2; б) W_3?

3. Якими є спектри тривіальних лінійних операторів (тотожного e і нульового o) для будь-якого дійсного векторного простору L_n?

4. Чи може матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ бути подібною:
   а) до двох різних діагональних матриць;
   б) до трьох різних діагональних матриць?

5. При якій умові матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$ подібна кільком діагональним матрицям?

6. Який вигляд мають матриці другого порядку над полем $\mathbb{Q}$, коли відомо, що їх власними значеннями є -1 і 1?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

7. При якій умові матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ a & 3 \end{pmatrix}$ з кільця $M_2(\mathbb{R})$ можна звести до діагонального виду?

8. Знайти діагональну матрицю, яка подібна над полем раціональних чисел матриці:
   а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
   б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Знайти діагональну матрицю, яка подібна над полем дійсних чисел матриці:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

10. Звести дану матрицю до діагонального виду, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 & -12 \\ 3 & 8 & -9 \\ 4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Скільком діагональним матрицям може бути подібною матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$?

12. Лінійний оператор f евклідового векторного простору E_n у деякому ортонормованому базисі задано матрицею:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

Знайти ортонормований базис з власних векторів лінійного оператора і його матрицю в цьому базисі.

13. Перевірити, що матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ не можна звести до діагонального виду, але вона подібна трикутній матриці $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти невироджену матрицю Q таку, що $B = QAQ^{-1}$.

14. Знайти трикутну матрицю B, подібну до даної матриці A, та невироджену матрицю Q таку, що $B = QAQ^{-1}$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

15. Звести дану матрицю A до трикутного виду, якщо це можливо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -8 & -3 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; є) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; ж) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

16. Нехай лінійний оператор f дійсного векторного простору L_n має тільки одне власне значення кратності n. Знайти необхідні і достатні умови, при яких матриця цього оператора зводиться до діагонального виду.

Задачі на доведення

17. Нехай матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$ подібна до діагональної. Довести, що для будь-якого натурального числа k матриця A^k також подібна до діагональної матриці.

18. Довести, що для довільного самоспряженого оператора $f \in E_n^*$ завжди існує ртонормований базис з власних векторів, в якому цей оператор має діагональну матрицю.

19. Довести, що коли матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$ подібна до діагональної, то всі її арактеристичні корені є дійсними числами.

20. Довести, що коли лінійний оператор f дійсного векторного простору L_n має n різних власних значень, то кожний лінійний оператор g, який переставний з f, має базис з власних векторів, причому будь-який власний вектор лінійного оператора f є одночасно і власним вектором лінійного оператора g.

21. Довести, що коли матриця n-го порядку $A \in M_n(\mathbb{R})$ має дійсний характеристичний корінь λ, то вона подібна матриці

$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$. Якою є невироджена матриця Q така, що $B = QAQ^{-1}$?

22. Довести, що матриця n-го порядку $A \in M_n(\mathbb{R})$, яка має n дійсних характеристичних коренів, рахуючи кожен з його кратністю, подібна до деякої трикутної матриці (теорема Шура).

Творчі задачі

23. Знайти умови, при яких матриця $A \in M_n(\mathbb{R})$, яка має на побічній діагоналі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а на інших місцях нулі, подібна до діагональної матриці.

24. Що можна сказати про характеристичні корені та власні вектори матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$, яка подібна до трикутної матриці B? Яку характерну властивість має матриця Q така, що $B = QAQ^{-1}$?

Задачі з олімпіад

25. Знайти трикутну матрицю, подібну до матриці:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

26. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ знайти невироджену матрицю T таку, щоб матриця $B = T^{-1}AT$ була діагональною. Вказати вигляд матриці B.

§ 3.7 Вибрані задачі

1. Нехай матриці A і B з векторного простору $M_n(P)$ є діагональними. Знайти умову їх подібності.

2. Нехай f – ін'єктивний лінійний оператор простору L_n. Довести, що система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ є лінійно незалежною тоді і тільки тоді, коли система їх образів $f(\vec{a}_1), f(\vec{a}_2), \ldots, f(\vec{a}_n)$ лінійно незалежна.

3. Нехай лінійні оператори f, g векторного простору L над полем P задовольняють рівність $gf + f + e = o$. Довести, що оператор f оборотний і $f^{-1} = -e - g$.

4. Нехай f, g – лінійні оператори евклідового векторного простору E_n. Оператор g називають *спряженим до f,* якщо виконується умова
$$f(\vec{x})\vec{y} = \vec{x}g(\vec{y}).$$
Довести, що спряжений оператор до даного оператора f є єдиним. Його позначають f^*.

5. Довести, що операція переходу від лінійного оператора до спряженого лінійного оператора має такі властивості:
   а) $(f^*)^* = f$; в) $(fg)^* = g^* f^*$;
   б) $(f+g)^* = f^* + g^*$; г) $(\forall \lambda \in \mathbb{R})((\lambda f)^* = \lambda f^*)$;
   д) якщо лінійний оператор f невироджений, то $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

6. Лінійний оператор f евклідового векторного простору E називають *ортогональним,* якщо $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E) f(\vec{x}) f(\vec{y}) = \vec{x}\vec{y}$. Довести, що :
   а) добуток двох ортогональних операторів простору E є ортогональним оператором;
   б) ортогональним оператором є кожен лінійний оператор, який зберігає довжини всіх векторів.

7. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ортонормований базис евклідового векторного простору E_2 і лінійний оператор f цього простору в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю спряженого лінійного оператора f^* у цьому самому базисі.

8. Нехай f – лінійний оператор простору L_n, H – мінімальний нетривіальний підпростір, який інваріантний відносно f. Знайти базис H.

9. Нехай лінійні оператори f, g комплексного векторного простору $\mathbb{C}^n$ задовольняють рівності $f^2 = g^2 = e$. Довести, що існує одновимірний або двовимірний підпростір в $\mathbb{C}^n$, який інваріантний відносно обох лінійних операторів.

10. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^n$ кожний лінійний оператор має інваріантні підпростори розмірності $n-1$ або $n-2$.

11. Довести, що коли підпростір евклідового векторного простору E інваріантний відносно лінійного оператора f, то ортогональне доповнення $U^{\perp}$ є інваріантним відносно спряженого оператора f^*.

12. Для даного вектора $\vec{a}$ евклідового векторного простору E_3 знайти всі інваріантні підпростори відносно лінійного оператора f цього простору, який задано рівністю $f(\vec{x}) = [\vec{a}, \vec{x}]$ (векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{x}$).

13. Нехай *лінійний оператор* $f \in L_n^*$ *має просту структуру,* тобто існує базис простору L_n, який складається з власних векторів оператора f. Довести, що у оператора f:
а) образ Imf є лінійною оболонкою власних векторів, які відносяться до ненульових власних значень;
б) перетин ядра і образу містить тільки нульовий вектор, тобто $Kerf \cap Imf = \{\overrightarrow{0}\}$.

14. Нехай лінійний оператор $f \in L_n^*$ має просту структуру. Довести, що для будь-якого натурального числа k оператор f^k також має просту структуру.

15. Довести, що лінійні оператори проектування і відбиття векторного простору L_n над числовим полем є операторами простої структури.

16. Нехай лінійний оператор $f \in L_n^*$ має просту структуру, A_f^e – його матриця і $B = T^{-5} A_f^e T$ – діагональна матриця, подібна до матриці A_f^e. Довести, що:
а) діагональні елементи матриці B є власними значеннями, а вектор-стовпці матриці T – власними векторами лінійного оператора f;
б) якщо вектор-стовпці матриці T є власними векторами лінійного оператора f, то матриця трансформує матрицю A_f^e до діагональної матриці B.

17. Довести, що коли невироджений лінійний оператор $f \in L_n^*$ має просту структуру, то лінійний оператор f^{-1} також має просту структуру.

18. Довести, що коли лінійний оператор f векторного простору L над числовим полем P має просту структуру, то будь-який многочлен від оператора f з коефіцієнтами з цього поля також має просту структуру.

19. Довести, що коли лінійні оператори $f, g \in L_n^*$ мають просту структуру і $fg = gf$, то існує базис простору L_n, який складається з спільних власних векторів цих операторів.

20. Нехай лінійний оператор $f \in L_n^*$ над числовим полем P має простий спектр. Довести, що кожний лінійний оператор g такий, що $fg = gf$, має просту структуру.

21. Довести, що в умовах попередньої задачі лінійний оператор g можна подати у вигляді многочлена від оператора f з коефіцієнтами з цього поля.

22. Довести, що довільний многочлен $f \in \mathbb{R}_n[x]$ степеня $n \geqslant 1$ з коефіцієнтом $(-1)^n$ при старшому члені є характеристичним многочленом матриці $A \in M_n(\mathbb{R})$, а його корені є власними значеннями деякого лінійного оператора.

23. Довести, що у записі характеристичного многочлена з протилежним знаком матриці A, записаного за спадними степенями λ,
$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$
коефіцієнт a_k дорівнює сумі всіх головних мінорів порядку $n-k$ матриці A, взятій зі знаком $(-1)^{n-k}$.

24. Довести, що для будь-яких матриць $A, B \in M_n(P)$ матриці AB і BA мають однаковий характеристичний многочлен.

25. Довести, що для характеристичних многочленів $f(\lambda)$ матриці A і $g(\lambda)$ матриці $A - \lambda_0 E$ виконується рівність $g(\lambda) = f(\lambda + \lambda_0)$.

26. Довести, що для характеристичних многочленів $f(\lambda)$ невиродженої матриці A і $g(\lambda)$ матриці A^{-1} виконується рівність $g(\lambda) = (-\lambda)^n \frac{1}{|A|} f(\frac{1}{\lambda})$.

27. Довести, що для будь-яких матриць $A, B \in M_n(P)$ характеристичний многочлен матриці $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ дорівнює добутку характеристичних многочленів матриць $A + B$ і $A - B$.

Розділ 4

Системи лінійних нерівностей та їх застосування

§ 4.1 Числові нерівності. Нерівності зі змінними

Література: [2] стор. 5 – 11.

Теоретичні відомості

Поле дійсних чисел $\mathbb{R}$ є упорядкованим, тобто в множині $\mathbb{R}$ можна задати відношення строгого лінійного порядку $>$, яке має властивості:

1. $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a > b \to a + c > b + c)$;

2. $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a > b \wedge c > 0 \to ac > bc)$.

Запис $a > b$ називають числовою нерівністю і говорять "a більше b". Обернене відношення до $>$ позначають знаком $<$ і, коли $b < a$, говорять – "b менше a".

Відношення $>$ має такі властивості:

1. $(\forall a, b, \in \mathbb{R})(a > b \leftrightarrow a - b > 0)$;

2. $(\forall a \in \mathbb{R})(a > 0 \leftrightarrow -a < 0)$;

3. $(\forall a \in \mathbb{R})(a \neq 0 \leftrightarrow a^2 > 0)$.

4. $(\forall a \in \mathbb{R})(a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a} > 0)$.

Відношення $\geqslant$ на множині $\mathbb{R}$ визначається так:

$$a \geqslant b \overset{df}{\leftrightarrow} a > b \vee a = b.$$

Обернене до нього відношення позначають $\leqslant$.

Модулем (або *абсолютною величиною*) дійсного числа a називають невід'ємне з чисел a та $-a$ і позначають через $|a|$. Іншими словами:

$$|a| \overset{df}{=} \left[\begin{array}{rl} a, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{array} \right.$$

Мають місце співвідношення:

1. $(\forall a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R})(|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots |a_n|)$.

2. $(\forall a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R})(|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|)$;

3. $(\forall a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R})((\exists 1 \leqslant i \leqslant n) a_i \neq 0 \leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0)$.

Нехай f_1 і f_2 – часткові відображення множини $\mathbb{R}^n$ в множину $\mathbb{R}$, тобто дійсні функції від n дійсних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

Нерівністю від n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називають вираз

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee f_2(x_1, x_2, ..., x_n),$$

де $\vee$ — один із знаків $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, який є символічним записом задачі про знаходження всіх упорядкованих наборів значень змінних, при яких дана нерівність перетворюється у вірну числову нерівність.

Областю допустимих значень (ОДЗ) або *областю визначення нерівності* називають перетин областей визначення функцій f_1 і f_2.

Відомо, що $\mathbb{R}^n$ є арифметичним векторним простором над полем $\mathbb{R}$. Тому кожен елемент з ОДЗ нерівності є n-вимірним вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$. Його будемо називати *допустимим для даної нерівності*.

Розв'язком нерівності називають кожний допустимий вектор для даної нерівності, при підстановці відповідних координат якого в нерівність отримаємо вірну числову нерівність.

Розв'язати нерівність — це означає знайти множину всіх її розв'язків.

Якщо множина всіх розв'язків нерівності є порожня, то її називають *суперечливою* або *тотожно хибною*.

Дві нерівності від одних і тих же n змінних називають *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Розв'язування нерівності з n змінними полягає в заміні даної нерівності рівносильною їй, але такою, що її множину розв'язків простіше знайти.

Якщо до обох частин даної нерівності додати функцію $g(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка визначена при всіх допустимих векторах для даної нерівності, то дістанемо рівносильну даній нерівність
$g(x_1, x_2, ..., x_n) + f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee g(x_1, x_2, ..., x_n) + f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Якщо функція $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ приймає додатні значення при всіх допустимих векторах для даної нерівності, то дана нерівність рівносильна такій:
$g(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee g(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Якщо функція $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ приймає від'ємні значення при всіх допустимих векторах, то дана нерівність рівносильна такій:
$g(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge g(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$
(тут знак $\wedge$ є оберненим до знака $\vee$).

Якщо ОДЗ даної нерівності дорівнює її множині розв'язків, то в цьому випадку нерівність називають *тотожною* і замість розв'язування говорять про доведення нерівності. Прикладом такої нерівності є нерівність Коші-Буняковського, яка була доведена в § 2.5, задача № 16:
$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$.

Середні величини додатних чисел x_1, x_2,..., x_n визначаються так:

- *середнє геометричне* — $C_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{df}{=} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$;
- *середнє арифметичне* — $C_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{df}{=} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;
- *середнє квадратичне* — $C_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{df}{=} \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$;
- *середнє гармонійне* — $C_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{df}{=} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Як визначається відношення $>$ на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ в середній школі?
2. Які способи доведення числових нерівностей ви знаєте?
3. Які зв'язки можуть існувати між областю визначення і множиною розв'язків нерівності зі змінними?
4. Що означає довести нерівність зі змінними?

5. Чи рівносильні нерівності:
   а) $\frac{1}{x-1} > \frac{3}{x}$ та $x > 3(x-1)$;
   б) $\frac{1}{x} < 3x$ та $\frac{1}{x} - 3x < 0$;
   в) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0$ та $x-1 \geqslant 0$;
   г) $f(x)g(x) < 0$ та $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$;
   д) $f(x)g(x) \leqslant 0$ та $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$?

6. Яким необхідним і достатним умовам повинні задовольняти числа a, b, c для того, щоб нерівність $ax + by + c \leqslant 0$ була тотожною?

7. Яким умовам повинні задовольняти числа a, b, c, d для того, щоб нерівність $ax + by + cz + d \geqslant 0$ була суперечливою?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Встановити, чи виконується нерівність:
   а) $\sqrt[3]{47} > \sqrt{13}$; д) $\sqrt[3]{58} < \sqrt{15}$;
   б) $2\sqrt{17} \leqslant 8,(24)$; е) $2\sqrt{14} \geqslant 7,(48)$;
   в) $\frac{-3+\sqrt{17}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$; є) $\frac{9}{\sqrt{11}-\sqrt{2}} > \frac{6}{3-\sqrt{3}}$;
   г) $\sqrt{13} > 2^{2\log_4(1-\frac{1}{10})+3\log_{27}9}$; ж) $\sqrt{11} < 9^{\frac{1}{2}\log_3(1+\frac{1}{9})+\frac{3}{2}\log_8 2}$.

9. Встановити, додатним чи від'ємним є число $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} - 2$.

10. Знайти область визначення нерівності:
    а) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} > 0$; в) $\frac{1}{\log_2(7x-4)} \leqslant \frac{1}{\log_6(9x^2-2x+2)}$;
    б) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\ln(x^2-3x+3)} < 0$; г) $\frac{5}{\log_2(\frac{2}{\sin x})} > \frac{1}{\log_{2\sin x} 2}$.

11. Розв'язати нерівності:
    а) $\sqrt{x} \geqslant \sqrt{-2x}$; в) $\sqrt{x-3} \leqslant 3 - |x-6|$;
    б) $\frac{x+7}{x-2} < x-1$; г) $\sqrt{7+2^{1-x}} \geqslant 7 - (\frac{1}{2})^{x-2}$.

12. При яких значеннях параметра a є суперечливою нерівність:
    а) $(a^2-9)x_1 - (a^2+5a+6)x_2 + (a+3)x_3 - (a-2) \leqslant 0$;
    б) $(a^2+2a)x_1 + (a^2+5a+6)x_2 + (a^2-4)x_3 + a^3 > 0$?

13. Знайти необхідну і достатню умови, при яких лінійна нерівність
    а) $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geqslant 0$ є тотожно істинною;
    б) $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a > 0$ є суперечливою.

14. Знайти всі значення параметра a, при яких з нерівності:
    а) $x^2 - 2a^2x - a^2(1-a^2) < 0$ випливає нерівність $x^2 - 4 < 0$;
    б) $x^2 - 1 < 0$ випливає нерівність $x^2 + 2a^2x - 3a^4 < 0$.

Задачі на доведення

15. Довести такі властивості числових нерівностей:
   а) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a < b \to a + c < b + c)$;
   б) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a < b \wedge c > 0 \to ac < bc)$;
   в) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})(a < b \wedge c < 0 \to ac > bc)$;
   г) $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\,((a > b \wedge c > d \to a + c > b + d)\wedge$
   $(a > b \wedge c < d \to a - c > b - d))$;
   д) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\,((a + c > b + c \to a > b) \wedge (a + c < b + c \to a < b))$;
   е) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\,((ac > bc \wedge c > 0 \to a > b) \wedge (ac > bc \wedge c < 0 \to a < b))$;
   є) $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+)(a > b \wedge c > d \to ac > bd)$.

16. Довести нерівності:
   а) $\sin 2 > \sin 3$;
   б) $\log_2 3 < \log_3 2$;
   в) $\sqrt{1 - 2\sin \frac{3}{2}\pi} > \sqrt[3]{5 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}$;
   г) $3\sqrt{7} + 5\sqrt{2} > 6\sqrt{5}$;
   д) $\log_5 8 > \log_5 4$;
   е) $\log_2 7 + (3 + \cos \frac{15}{7}) \log_7 2 < 4$.

17. Квадратний тричлен $x^2 + bx + c$ має два корені, які належать інтервалу $(2, 3)$. Довести, що $5b + 2c + 12 < 0$.

18. Довести, що поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ не можна упорядкувати.

19. Довести, що для будь-яких додатних чисел x та y виконується нерівність $\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geqslant \frac{9}{4xy}$.

20. Довести, що для будь-яких невід'ємних чисел x, y виконується нерівність $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy$.

21. Довести, що для будь-яких додатних чисел x_1, x_2, x_3 виконується нерівність:
   а) $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$;
   б) $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant \sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}$;
   в) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \geqslant x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$;
   г) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \geqslant x_3^2\sqrt{x_1x_2} + x_2^2\sqrt{x_1x_3} + x_1^2\sqrt{x_2x_3}$.

22. Довести, що коли $xyz > 0$, то виконується нерівність $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant x + y + z$.

23. Довести, що для будь-яких додатних чисел x_1, x_2, x_3, x_4 виконується нерівність:
$\sqrt{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)} + \sqrt{(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)} + \sqrt{(x_1 + x_4)(x_3 + x_2)} \leqslant 6\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$.

Творчі задачі

24. Встановити, яке з двох чисел більше: $\sqrt{1997}+2\sqrt{1999}+2\sqrt{2001}+\sqrt{2003}$ чи $2\sqrt{1998}+2\sqrt{2000}+2\sqrt{2002}$.

25. Довести, що для будь-яких невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконується нерівність:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt[n]{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

26. Нехай $n \geqslant 2$ та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – дійсні числа з відрізка $[1, 2]$. Довести, що виконується нерівність

$$\frac{\sqrt{x_1^2-1}}{x_2}+\frac{\sqrt{x_2^2-1}}{x_3}+\cdots+\frac{\sqrt{x_n^2-1}}{x_1} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}n.$$

Задачі з олімпіад

27. Довести, що для будь-яких невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконується нерівність:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

28. Довести, що для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконується нерівність:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

29. Довести, що для будь-яких невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ виконується нерівність:
$\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}x_n} \geqslant \frac{n-1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

30. Довести, що коли добуток будь-яких невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дорівнює 1, то виконується нерівність

$$(1+4x_1)(1+4x_2)\cdots(1+4x_n) \geqslant 4^n.$$

31. Довести, що коли добуток додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2003}$ дорівнює 1, то виконується нерівність $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{2003}) > 2^{2003}$.

§ 4.2 Системи лінійних нерівностей з двома та трьома змінними

Література: [2] стор. 11 – 17; [7] стор. 317 – 326.

Теоретичні відомості

Нехай дано нерівності з n змінними (надалі — невідомими) $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee g_1(x_1, x_2, ..., x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \vee g_m(x_1, x_2, ..., x_n)$, спільна ОДЗ яких є деяка підмножина множини $\mathbb{R}^n$.

Кажуть, що дані нерівності *утворюють систему нерівностей*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee g_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \vee g_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \vee g_m(x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases}$$

якщо треба знайти всі допустимі вектори, кожен з яких є розв'язком всіх даних нерівностей. Вектор $\vec{a}$=$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$, який є розв'язком кожної з нерівностей системи, називають *розв'язком цієї системи нерівностей*.

Розв'язок $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системи називають *додатним,* якщо всі координати $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, — додатні, і *невід'ємним,* якщо всі координати — невід'ємні.

Розв'язати систему нерівностей — це означає знайти множину всіх її розв'язків. Якщо A — множина розв'язків системи та A_1, A_2, …, A_m — множини розв'язків даних нерівностей цієї системи, то

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m.$$

Система називається *сумісною,* якщо $A \neq \varnothing$ і *несумісною,* якщо $A = \varnothing$.

Дві системи нерівностей з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$ називають *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків рівні.

Розв'язування системи нерівностей полягає в заміні даної системи рівносильною, розв'язок якої знайти простіше.

Якщо в системі нерівностей будь-яку нерівність замінити рівносильною їй нерівністю, то дістанемо систему нерівностей, рівносильну даній.

Лінійною нерівністю з n невідомими називають нерівність виду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \vee 0,$$

де a_1, a_2, …, a_n, $b \in \mathbb{R}$, а $\vee$ – один із знаків $<, \leqslant, >, \geqslant$.

Числа $a_1, \ldots, a_n$ називають *коефіцієнтами,* а число b — *вільним членом.*

Лінійну нерівність, у якої вільний член b дорівнює нулю, називають *лінійною однорідною нерівністю.*

Систему нерівностей, яка складається з лінійних нерівностей, називають *системою лінійних нерівностей.* У загальному виді її записують так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \vee 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \vee 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \vee 0. \end{cases}$$

Якщо в системі всі вільні члени $b_1, \ldots, b_m$ дорівнюють нулю, тобто всі нерівності є однорідними, то систему називають *однорідною системою лінійних нерівностей.*

Лінійну нерівність $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \vee 0$ називають *наслідком* даної системи нерівностей, якщо кожен розв'язок системи є розв'язком цієї нерівності.

Множину розв'язків системи лінійних нерівностей з однією змінною (далі будемо говорити: з одним невідомим) можна знайти алгебраїчним та геометричним способом і вони відомі ще з шкільної математики.

Нехай маємо лінійну нерівність з двома невідомими $ax + by + c \leqslant 0$, де $a^2 + b^2 \neq 0$. Її областю допустимих значень є множина $\mathbb{R}^2$, тобто вся координатна площина. Відомо, що графіком рівняння $ax + by + c = 0$ є пряма лінія, координати точок (α_1, α_2) якої є множиною всіх розв'язків цього рівняння. Ця пряма розбиває координатну площину на дві півплощини так, що всі точки однієї з них є множиною розв'язків нерівності $ax + by + c \geqslant 0$, а іншої — нерівності $ax + by + c \leqslant 0$. Для розв'язання такої нерівності достатньо встановити, яка нерівність має місце в початку координат, якщо $c \neq 0$.

Нехай маємо систему лінійних нерівностей з двома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \leqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 \leqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_mx + b_my + c_m \leqslant 0. \end{cases}$$

Систему лінійних нерівностей, в якій зустрічаються знаки $\leqslant$ і $\geqslant$, завжди можна звести до такого вигляду. Дійсно, нерівність $ax + by + c \geqslant 0$ рівносильна нерівності $-ax - by - c \leqslant 0$ і, після відповідних замін, прийдемо до такої системи.

Множиною розв'язків даної системи нерівностей з геометричної точки зору є перетин півплощин, які є множинами розв'язків нерівностей системи. Ця множина є опуклою областю на площині (опуклість означає, що разом з будь-якими двома точками цієї множини всі точки відрізка, який їх з'єднує, також належать цій множині). Її границя може складатися з прямих, променів і відрізків. Якщо границя множини розв'язків складається тільки з відрізків, то цю область називають *многокутником розв'язків системи*.

Розглянемо систему лінійних нерівностей з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \leqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \leqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_mx + b_my + c_mz + d_m \leqslant 0. \end{cases}$$

Областю допустимих значень цієї системи є арифметичний векторний простір $\mathbb{R}^3$. Будемо вважати, що в кожній нерівності хоча б один коєфіцієнт біля невідомих x, y, z є відмінним від нуля. Якщо це не так, то ця нерівність перетвориться в числову і її множиною розв'язків є одна з двох множин – $\mathbb{R}^3$ або $\varnothing$. В першому випадку нерівність можна опустити, а в другому — вона є несумісною, а отже і вся система є несумісною.

З геометрії відомо, що рівняння $ax+by+cz+d=0$, у випадку коли $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, визначає у звичайному тривимірному просторі площину, яка розбиває цей простір на два півпростори, координати (α, β, γ) точок одного з яких є розв'язками нерівності $ax+by+cz+d \geqslant 0$, а іншого — нерівності $ax+by+cz+d \leqslant 0$.

Тому множиною розв'язків системи лінійних нерівностей з трьома невідомими є деяка опукла многогранна область M, яка є перетином півпросторів, що є розв'язками всіх нерівностей системи. Вона може бути необмеженою, многогранником, порожньою та "вироджуватися" в різні фігури на площині і навіть точку.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Навести приклад системи лінійних нерівностей з двома невідомими, розв'язком якої на площині є:

а)	пряма лінія;	д)	порожня множина;
б)	промінь;	е)	паралелограм;
в)	відрізок;	є)	квадрат;
г)	одна точка;	ж)	многокутник.

2. Чи може розв'язок системи лінійних нерівностей містити тільки три точки, які не лежать на одній прямій?

3. Яка з даних нерівностей є наслідком іншої:
   а) $2x + 3y > 4$ та $4x + 6y > 10$;
   б) $-x - 4y \leqslant 1$ та $2x + 8y + 3 \geqslant 0$;
   в) $5x - 4y \leqslant 1$ та $10x - 8y < 0$;
   г) $-2x + 5y < 0$ та $3x - 2y > 0$?

4. Навести приклад системи лінійних нерівностей, яка є наслідком даної системи:
$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 > 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

5. Чи рівносильні такі системи лінійних нерівностей:

   а) $\begin{cases} x - 2y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 5, \\ -2x + y \leqslant -3 \end{cases}$ та $\begin{cases} -x + 2y \geqslant 0, \\ x + y - 5 \leqslant 0, \\ 2x - y - 3 \geqslant 0; \end{cases}$

   б) $\begin{cases} x - 2y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 5, \\ -2x + y \leqslant -3 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x - y \leqslant 5, \\ x + y \leqslant 5, \\ -2x + y \leqslant -3? \end{cases}$

6. У якому відношенні між собою (рівносильні, одна є наслідком іншої, жодна не є наслідком іншої) перебувають системи лінійних нерівностей:

   а) $\begin{cases} x - 2y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 5, \\ -2x + y \leqslant -3 \end{cases}$ та $\begin{cases} x + y - 8 \leqslant 0, \\ 2x - y - 3 \geqslant 0; \end{cases}$

   б) $\begin{cases} x - 2y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 5, \end{cases}$ та $\begin{cases} x + y - 8 \leqslant 0, \\ x - 2y - 3 \geqslant 0; \end{cases}$

   в) $\begin{cases} x - 2y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 3, \\ -2x + y \geqslant -6 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x - y \leqslant 5, \\ x + y \leqslant 1, \\ -x + 2y \geqslant 3? \end{cases}$

Задачі на техніку обчислень та перетворень

7. Розв'язати систему лінійних нерівностей:

   а) $\begin{cases} 2x + 3 \geqslant 0, \\ -4x + 5 \geqslant 0, \\ 3x - 2 > 0, \\ -7x + 5 > 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - \cos\frac{\pi}{5} \geqslant 0, \\ -x + \sin\frac{\pi}{5} \geqslant 0, \\ \cos\frac{\pi}{3} \cdot x - \sin\frac{\pi}{3} < 0, \\ \log_4 3 \cdot x + 1 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x + 2y \leqslant 0, \\ 2x - 3y > 0, \\ -2x + 5y > 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4x + 5y > 0, \\ -4x + 5y < 0, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 7y \geqslant 0, \\ -7x + 5y \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0; \end{cases}$ є) $\begin{cases} -x + 2y > 0, \\ -2x + y \leqslant 0, \\ x \leqslant 2, \\ y < 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 8x + 3y > 0, \\ x + 2y \leqslant 0, \\ 5y \geqslant 1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 4x - 3y < 0, \\ x + y \geqslant 0, \\ 2x + 3y \leqslant 0. \end{cases}$

8. Знайти область розв'язків системи лінійних нерівностей:

а) $\begin{cases} 2x - 3y - 6 \leqslant 0, \\ 2x + 3y - 6 \leqslant 0, \\ x \leqslant 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ y - 3 \geqslant 0, \\ 4x + 4y + 16 \leqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \leqslant 0, \\ -2x - 3y - 6 \leqslant 0, \\ 2x + 3y + 18 \geqslant 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - 2y \leqslant 0, \\ x - 3y - 2 \leqslant 0, \\ -x + y + 2 \leqslant 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 3y - 24 \geqslant 0, \\ x - y - 8 \leqslant 0, \\ 2x + 2y + 16 \geqslant 0, \\ x + y - 8 \leqslant 0; \end{cases}$ є) $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ -x + y - 4 \leqslant 0, \\ x - y + 8 \geqslant 2, \\ 2x - 2y + 5 \leqslant -3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -2x + y + 1 \geqslant 0, \\ x \geqslant 2, \\ x + y \geqslant -2, \\ -0,5x + y \leqslant 0; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x + 4y \geqslant -1, \\ -4x + y \leqslant 1, \\ 5x + 2y \leqslant 10, \\ 10x + 4y \geqslant 20. \end{cases}$

9. Зобразити на рисунку область розв'язків системи лінійних нерівностей:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3z \leqslant 6, \\ x \geqslant 0, \\ y \leqslant 1, \\ z \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2x + y + 3z \geqslant 6, \\ x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z \geqslant 12, \\ 2x + 3y + 4z \leqslant 24, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -x + 2y - z \geqslant -2, \\ -2x + y - z \leqslant -4, \\ x \geqslant 0, \\ y \leqslant 0, \\ z \geqslant 0. \end{cases}$

Задачі на доведення

10. Довести, що множина розв'язків системи лінійних нерівностей з двома і трьома невідомими є опуклою (тобто, разом з довільними двома точками містить і всі точки відрізка, який з'єднує їх).

11. Довести, що нерівність $ax + by \leqslant 0$ є наслідком системи нерівностей $\begin{cases} a_1x + b_1y \leqslant 0, \\ a_2x + b_2y \leqslant 0 \end{cases}$ тоді і тільки тоді, коли існують невід'ємні числа k_1, k_2 такі, що $ax + by = k_1(a_1x + b_1y) + k_2(a_2x + b_2y)$.

12. Довести, що нерівність $ax + by + cz \leqslant 0$ є наслідком системи нерівностей $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z \leqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z \leqslant 0 \end{cases}$ тоді і тільки тоді, коли існують невід'ємні числа k_1, k_2 такі, що $ax + by + cz = k_1(a_1x + b_1y + c_1z) + k_2(a_2x + b_2y + c_2z)$.

13. Довести, що коли нерівність $ax + by \leqslant 0$ є наслідком системи нерівностей $\begin{cases} a_1x + b_1y \leqslant 0, \\ a_2x + b_2y \leqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_sx + b_sy \leqslant 0, \end{cases}$ то рівняння $ax + by = 0$ є наслідком системи рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = 0, \\ a_2x + b_2y = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_sx + b_sy = 0. \end{cases}$

14. Довести, що коли нерівність $ax + by + cz \leqslant 0$ є наслідком системи нерівностей $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z \leqslant 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z \leqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_sx + b_sy + c_sz \leqslant 0, \end{cases}$ то рівняння $ax + by + cz = 0$ є наслідком системи рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_sx + b_sy + c_sz = 0. \end{cases}$

15. Довести, що коли система нерівностей $\begin{cases} a_1x + b_1y \leqslant d_1, \\ a_2x + b_2y \leqslant d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_sx + b_sy \leqslant d_s \end{cases}$ є несумісною, то існують невід'ємні числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ такі, що

$k_1(a_1x+b_1y)+k_2(a_2x+b_2y)+\dots+k_s(a_sx+b_sy)=0$ і $k_1d_1+k_2d_2+\dots+k_sd_s<0$.

16. Довести, що коли система нерівностей $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z\leqslant d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z\leqslant d_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_sx+b_sy+c_sz\leqslant d_s \end{cases}$

є несумісною, то існують невід'ємні числа $k_1,k_2,\dots,k_s$ такі, що

$k_1(a_1x+b_1y+c_1z)+k_2(a_2x+b_2y+c_2z)+\dots+k_s(a_sx+b_sy+c_sz)=0$ і $k_1d_1+k_2d_2+\dots+k_sd_s<0$.

Творчі задачі

17. Описати всі можливі фігури на площині, які можуть зображати множину розв'язків системи двох нерівностей з двома невідомими, серед яких одна є лінійною, а друга – квадратною.

18. Описати всі відомі з шкільної математики правильні многогранники за допомогою систем лінійних нерівностей.

19. Описати всі можливі фігури звичайного простору, які можна задати за допомогою:
а) системи трьох лінійних нерівностей з трьома невідомими;
б) системи n лінійних нерівностей з трьома невідомими.

Задачі з олімпіад

20. На координатній площині задано правильний семикутник з центром в початку координат, одна з вершин якого лежить на координатній осі. Знайти систему лінійних нерівностей, розв'язком якої є цей семикутник.

21. На координатній площині задано правильний n-кутник з центром в початку координат, одна з вершин якого лежить на координатній осі. Знайти систему лінійних нерівностей, розв'язком якої є цей n-кутник.

§ 4.3 Розв'язування систем лінійних нерівностей методом виключення невідомих

Література: [21] стор. 58 – 71, 103 – 110.

Теоретичні відомості

Розглянемо систему лінійних нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0. \end{cases}$$

При вивченні систем лінійних рівнянь важливу роль відігравало поняття лінійної комбінації рівнянь. Аналогічне поняття для нерівностей є вужчим.

Для зручності позначимо ліву частину кожної з нерівностей даної системи через $L_1, L_2, \ldots, L_m$ відповідно.

Нерівність виду

$$k_1L_1 + k_2L + \ldots + k_mL_m \geqslant 0,$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ —невід'ємні дійсні числа, називається *лінійною комбінацією нерівностей даної системи.*

Легко перевірити, що:

а)кожний розв'язок даної системи лінійних нерівностей є розв'язком будь-якої її лінійної комбінації;

б) кожна лінійна комбінація лінійних комбінацій нерівностей даної системи є знову лінійною комбінацією нерівностей цієї системи.

Лінійну нерівність з n невідомими $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geqslant 0$ називають *суперечливою,* якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ і $b < 0$.

Очевидно, що суперечлива нерівність є несумісною.

Всі лінійні нерівності, крім суперечливих, є сумісними.

Система лінійних нерівностей є несумісною тоді і тільки тоді, коли деяка лінійна комбінація нерівностей цієї системи є суперечливою.

Система m лінійних нерівностей з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \geqslant 0 \end{cases}$$

рівносильна такій:

$$
\begin{cases}
\boxed{\begin{array}{c} F_1 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_\ell \geqslant 0, \end{array}} & - \quad I \text{ блок}, \\[2ex]
\boxed{\begin{array}{c} x_n \geqslant \Phi_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \geqslant \Phi_s, \end{array}} & - \quad II \text{ блок}, \\[2ex]
\boxed{\begin{array}{c} x_n \leqslant \Psi_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_n \leqslant \Psi_t, \end{array}} & - \quad III \text{ блок}
\end{cases}
$$

де $F_\gamma, \Phi_\beta, \Psi_\alpha$ – вирази виду $a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a$, $\gamma \leqslant \ell$, $\beta \leqslant s$, $\alpha \leqslant t$, $\ell, s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (рівність ℓ, s, t нулю означає, що у системі відсутній відповідний блок) і $\ell + s + t = m$.

Система лінійних нерівностей $\begin{cases} F_\gamma \geqslant 0, \\ \Psi_\alpha \geqslant \Phi_\beta, \end{cases}$ де $1 \leqslant \alpha \leqslant t$, $1 \leqslant \beta \leqslant s$, $1 \leqslant \gamma \leqslant \ell$, називається *супутньою до даної системи*. Якщо в побудованій системі немає другого або третього блоку, то супутня система містить тільки нерівності першого блоку. Якщо в побудованій системі немає першого і другого або першого і третього блоку, то будемо вважати, що супутня система складається з однієї нерівності $0 \geqslant 0$.

Зауважимо, що супутня до даної системи не містить невідоме x_n.

Якщо з будь-якого розв'язку даної системи m лінійних нерівностей з n невідомими вилучити значення невідомого x_n, то отримаємо розв'язок супутньої їй системи. До кожного розв'язку супутньої системи можна вибрати і приєднати значення невідомого x_n так, щоб отримати розв'язок даної системи.

Таким чином, дана система m лінійних нерівностей з n невідомими є сумісною тоді і тільки тоді, коли сумісною є супутня їй система.

Розв'язування даної системи m лінійних нерівностей з n невідомими методом виключення невідомих полягає у побудові ланцюга супутніх систем, остання з яких містить одне невідоме, і нагадує подібний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.

Нехай маємо однорідну систему лінійних нерівностей

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant 0,
\end{cases}
$$

і $A \subset \mathbb{R}^n$ множина всіх її розв'язків.

Якщо $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ є розв'язком даної системи, то для будь-якого невід'ємного числа λ вектор $\lambda\vec{a}$ також є розв'язком цієї системи.

Сума будь-яких двох розв'язків даної системи є знову розв'язком цієї системи нерівностей.

Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ є розв'язками однорідної системи лінійних нерівностей і $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — невід'ємні числа, то вектор $\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k$ також є розв'язком цієї системи.

При цьому вектор $\vec{a}$ називають *невід'ємною лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$. Зауважимо, що множина A не є підпростором простору $\mathbb{R}^n$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$, які є розв'язками даної однорідної системи лінійних нерівностей, називається *фундаментальною системою розв'язків* цієї системи, якщо кожен елемент множини розв'язків A є невід'ємною лінійною комбінацією цих векторів. При цьому вектор $\vec{a} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_s\vec{a}_s$, де $k_1, k_2, \dots, k_s$ – невід'ємні цілі числа, називається *загальним розв'язком даної системи.*

Для будь-якої однорідної системи лінійних нерівностей існує така фундаментальна система розв'язків.

Теорема Мінковського. Кожна однорідна лінійна нерівність, яка є наслідком деякої сумісної однорідної системи лінійних нерівностей, може бути подана у вигляді лінійної комбінації нерівностей цієї системи.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Навести приклад системи лінійних нерівностей та лінійної комбінації нерівностей цієї системи.

2. Побудувати супутню систему для системи лінійних нерівностей:

а) $\begin{cases} 2x - y \geqslant 0, \\ 5x + y - 4 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y + 3 \geqslant 0, \\ x < 0, \\ x + y - 1 \geqslant 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - y \geqslant 0, \\ y - 4 \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2y + 3 \geqslant 0, \\ x < 0, \\ 3x + y - 2 \geqslant 0. \end{cases}$

3. Чи для кожної системи лінійних нерівностей можна побудувати супутню систему?

4. Скільки супутніх систем можна побудувати для даної системи лінійних нерівностей?

5. Чи є сумісною довільна однорідна система лінійних нерівностей з n невідомими?

6. Перевірити істинність твердження: Якщо $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ є розв'язком даної однорідної системи m лінійних нерівностей з n невідомими, то для будь-якого невід'ємного числа λ вектор $\lambda\vec{a}$ також є розв'язком цієї системи.

7. Показати, що сума будь-яких двох розв'язків $\vec{a}$ та $\vec{b}$ однорідної системи лінійних нерівностей є знову розв'язком даної системи.

8. Показати, що будь-яка невід'ємна лінійна комбінація розв'язків $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ однорідної системи лінійних нерівностей є знову розв'язком даної системи.

9. Перевірити, що вектори $\vec{a} = (1, 2)$ та $\vec{b} = (4, 2)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків системи: $\begin{cases} 2x - y \geqslant 0; \\ x - 2y \leqslant 0. \end{cases}$

10. Знайти яку-небудь фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи:
а) $\begin{cases} x \leqslant 0; \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant 0; \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

11. Проаналізувати схожість і відмінність в означенні понять наслідку, рівносильності, лінійної комбінації і фундаментальної системи розв'язків та загального розв'язку для систем лінійних рівнянь та нерівностей.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

12. Побудувати супутню систему для системи лінійних нерівностей:
а) $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ 2x + 4y + 3 \leqslant 0, \\ 10x + 7y - 14 \geqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + 3 \geqslant 0, \\ 7x + y - 11 \geqslant 0, \\ 3x + 5y + 9 \geqslant 0; \end{cases}$
б) $\begin{cases} x - y + 12 < 0, \\ 3x + 4y - 6 \leqslant 0, \\ 5x + 7y - 12 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x - y + 8 = 0, \\ -x + 4y + 2 \leqslant 0, \\ 5x + 3y - 4 \geqslant 0. \end{cases}$

13. Побудувати ланцюжок супутніх систем до системи:

а) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7x & + & 2y & - & 2z-4 & \geqslant & 0, \\ -x & - & y & - & z+4 & \geqslant & 0, \\ -2x & + & 3y & + & z-1 & \leqslant & 0, \\ 5x & - & y & + & z+2 & \geqslant & 0; \end{array}\right.$

б) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & 6x_3 & \geqslant & 1, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leqslant & -2, \\ -x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & \leqslant & 5, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geqslant & 0; \end{array}\right.$

в) $\left\{\begin{array}{l} x+2y-3=0, \\ 2x-y+1\geqslant 0, \\ 3x+y-30\geqslant 0; \end{array}\right.$ г) $\left\{\begin{array}{l} -x+4y+2=0, \\ 5x+3y-4\geqslant 0, \\ 2x-y-3=0, \\ x+5\leqslant 0; \end{array}\right.$

д) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \geqslant & 1, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \leqslant & 0, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & > & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \geqslant & 5, \end{array}\right.$

е) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & \geqslant & 0, \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leqslant & 0, \\ -x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geqslant & 0; \end{array}\right.$

Встановити, чи є дана система сумісною. Якщо дана система сумісна, то знайти один із її частинних розв'язків.

14. Знайти яку-небудь фундаментальну систему розв'язків системи:

а) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y\leqslant 0, \\ x-2y\geqslant 0; \end{array}\right.$ в) $\left\{\begin{array}{l} 2x-4y\geqslant 0, \\ 6x+2y\geqslant 0; \end{array}\right.$

б) $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y\leqslant 0, \\ -x+2y\geqslant 0; \end{array}\right.$ г) $\left\{\begin{array}{l} 4x-y\geqslant 0, \\ x+5y\geqslant 0. \end{array}\right.$

15. Знайти фундаментальну систему розв'язків системи:

$\left\{\begin{array}{l} x-y-z\leqslant 0, \\ x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad z\geqslant 0. \end{array}\right.$

Задачі на доведення

16. Довести,що:
а) кожний розв'язок даної системи лінійних нерівностей є розв'язком будь-якої лінійної комбінації нерівностей цієї системи;
б) кожна лінійна комбінація будь-якої множини лінійних комбінацій нерівностей даної системи лінійних нерівностей є лінійною комбінацією нерівностей цієї системи.

17. Довести, що кожна система лінійних нерівностей рівносильна деякій системі, записаній у виді системи з трьох блоків, як це записано в теоретичних відомостях до цього параграфу.

18. Довести, що коли від будь-якого розв'язку $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ даної системи лінійних нерівностей відкинути значення $x_n = \alpha_n$, то одержимо деякий розв'язок супутньої до даної системи лінійних нерівностей.

19. Довести, що для будь-якого розв'язку $\vec{a}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ супутньої до даної системи лінійних нерівностей можна знайти таке значення $x_n = \alpha_n$, що, приєднавши його до $\vec{a}_1$, одержимо розв'язок $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ вихідної системи.

20. Довести, що кожна нерівність супутньої системи є лінійною комбінацією нерівностей даної системи.

21. Довести, що система лінійних нерівностей є несумісною тоді і тільки тоді, коли деяка лінійна комбінація нерівностей цієї системи є суперечливою нерівністю.

22. Довести, що коли система лінійних нерівностей не має невід'ємних розв'язків, то існує лінійна комбінація нерівностей цієї системи, яка є суперечливою нерівністю.

23. Нехай маємо однорідну систему m лінійних нерівностей з n невідомими. Довести, що будь-яку однорідну нерівність, яка є наслідком даної системи, можна подати як деяку лінійну комбінацію нерівностей цієї системи.

Творчі задачі

24. Побудувати фундаментальну систему розв'язків системи, яка містить одну нерівність
$$\{\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant 0,$$
в якій хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ не дорівнює нулю.

25. Нехай маємо однорідну систему m лінійних нерівностей з n невідомими і $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s$ – її фундаментальна система розв'язків. Описати спосіб побудови фундаментальної системи розв'язків для системи, одержаної приєднанням до даної ще однієї лінійної нерівності з n невідомими.

26. Чи кожна однорідна система m лінійних нерівностей з n невідомими має фундаментальну систему розв'язків?

27. Яким може бути мінімальне чи максимальне число розв'язків у фундаментальній системі для даної однорідної системи m лінійних нерівностей з n невідомими?

Задачі з олімпіад

28. Знайти фундаментальну систему розв'язків системи

$$\{\ x + y - z + t \geqslant 0.$$

29. Знайти всі частинні розв'язки системи лінійних нерівностей

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & \geqslant & 0, \\ x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & \geqslant & 0, \\ \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . & \ldots & . & . \\ x_{2002} & - & 4x_{2003} & + & 3x_1 & \geqslant & 0, \\ x_{2003} & - & 4x_1 & + & 3x_2 & \geqslant & 0, \end{array}\right.$$

у яких $x_1 = 1$.

§ 4.4 Задачі лінійного програмування і графічний спосіб їх розв'язування

Література: [1] стор. 25 – 44.

Теоретичні відомості

Теорія систем лінійних нерівностей знаходить широкі застосування при розв'язуванні задач лінійного програмування. Детально такі задачі розглядаються в навчальних дисциплінах "Чисельні методи" і "Математичі методи в економіці". Тому сформулюємо лише деякі найпростіші поняття, пов'язані з такими задачами.

Нехай маємо змішану систему m лінійних рівнянь і k нерівностей з n невідомими над полем $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ a_{(m+1)1}x_1 + a_{(m+1)2}x_2 + \ldots + a_{(m+1)n}x_n \leqslant b_{m+1}, \\ a_{(m+2)1}x_1 + a_{(m+2)2}x_2 + \ldots + a_{(m+2)n}x_n \leqslant b_{m+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{(m+k)1}x_1 + a_{(m+k)2}x_2 + \ldots + a_{(m+k)n}x_n \leqslant b_{m+k}. \end{cases}$$

Дану систему можна також записати у векторно-скалярній та матричній формах. Вектор $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, який є розв'язком даної змішаної системи, називається невід'ємним, якщо всі його координати невід'ємні, тобто $\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$.

Розрізняють 3 типи задач лінійного програмування.

Загальна задача лінійного програмування полягає у виборі серед множини невід'ємних розв'язків даної змішаної системи лінійних рівнянь та нерівностей з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такого, при якому лінійна функція

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

приймає максимальне (або мінімальне) значення. При цьому систему лінійних рівнянь і нерівностей називають *системою обмежень*, а функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — *цільовою функцією даної задачі*.

Загальну задачу лінійного програмування називають *стандартною,* якщо в систему її обмежень входять тільки нерівності, тобто $m = 0$.

Загальну задачу лінійного програмування називають *канонічною,* якщо в систему її обмежень входять тільки рівняння, тобто $k = 0$.

Вектор $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, який задовольняє всім умовам даної задачі лінійного програмування, називають *допустимим вектором цієї задачі.* Задачу, яка має допустимий розв'язок, називають *допустимою.* Допустимий розв'язок називають *оптимальним,* якщо він максимізує (мінімізує) цільову функцію.

Всі три типи задач лінійного програмування зводяться одна до іншої на підставі таких перетворень.

1. Кожне рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_1$ рівносильне системі нерівностей
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b_1, \\ -a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_nx_n \leqslant -b_1. \end{cases}$$

2. Кожна нерівність $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b_1$ рівносильна змішаній системі
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b_1, \\ x_{n+1} \geqslant 0. \end{cases}$$

Крім того, оскільки $max(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = -min(-f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, то задачу максимізації цільової функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна замінити на рівносильну задачу мінімізації функції $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при тій самій системі обмежень, і навпаки.

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність двоїсту до неї задачу.

Нехай, наприклад, маємо стандартну задачу лінійного програмування: знайти невід'ємний розв'язок системи k лінійних нерівностей
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \leqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 \leqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + b_k \leqslant 0 \end{cases}$$
з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при якому лінійна функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ приймає максимальне значення.

Двоїстою до даної стандартної задачі лінійного програмування є така: серед множини невід'ємних розв'язків системи n лінійних нерівностей
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{k1}y_k + c_1 \geqslant 0, \\ a_{12}y_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{k2}y_k + c_2 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{kn}y_k + c_n \geqslant 0 \end{cases}$$
з k невідомими $y_1, y_2, \ldots, y_k$ знайти такий, при якому лінійна функція $g(y_1, y_2, \ldots, y_k) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ky_k$ приймає мінімальне значення. Тут: число нерівностей у другій системі рівне числу невідомих у першій і навпаки; коефіцієнти цільової функції першої задачі є вільними членами

нерівностей двоїстої задачі, а вільні члени нерівностей першої задачі є коефіцієнтами цільової функції другої задачі; матриця коефіцієнтів системи обмежень першої задачі є транспонованою до матриці коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі; всі нерівності першої задачі мають знак $\leqslant$, а двоїстої – $\geqslant$.

Наведені вище задачі є взаємно двоїстими, тобто вихідна задача є двоїстою до побудованої.

Якщо кожна з двох взаємно двоїстих стандартних задач допустима, то обидві вони мають оптимальні розв'язки і значення їх однакові, тобто виконується рівність $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_ky_k.$. Якщо хоч одна з цих задач не є допустимою, то жодна з них не має оптимального розв'язку.

Для канонічної і загальної задач лінійного програмування також існують двоїсті задачі і має місце аналогічне твердження.

Задачі лінійного програмування з двома і трьома невідомими можна розв'язувати графічним способом. Для цього слід спочатку знайти розв'язок системи обмежень даної задачі. Після цього надають цільовій функції довільного значення (наприклад, 0) і отримують рівняння $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ або $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$. В першому випадку це рівняння прямої, а в другому – площини, які проходять через початок координат. Переміщуючи тепер паралельно пряму або відповідно площину так, щоб вона "дотикалася"до множини всіх розв'язків системи обмежень, ми знаходимо максимальне або мінімальне значення цільової функції і відповідний йому оптимальний розв'язок в точці дотику. З геометричної точки зору оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування з двома або трьома невідомими знаходиться у вершині многокутної або многогранної області, яка є множиною розв'язків системи обмежень даної задачі.

Використання двоїстої задачі лінійного програмування іноді дає можливість застосувати графічний спосіб до розв'язування задач, які містять більше трьох невідомих.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Задано такі канонічні задачі лінійного програмування:
   на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь

а) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -8; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

знайти такий, який би максимізував (мінімізував) цільову функцію
а) $f = 4x_1 + 7x_2 - x_3$; б) $f = 11x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$.
Записати ці задачі у формі стандартних задач лінійного програмування.

2. Задано такі стандартні задачі лінійного програмування:
на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей

а) $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 \leqslant 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 \leqslant 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leqslant 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 0; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geqslant 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

знайти такий, який би максимізував (мінімізував) цільову функцію
а) $f = 2x_1 + x_2 + 5x_3$; б) $f = -3x_1 - x_2 - x_3$.
Записати ці задачі у формі канонічних задач лінійного програмування.

3. Задано такі загальні задачі лінійного програмування:
на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей

а) $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 \leqslant 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 \leqslant -2, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 5 \end{cases}$$

знайти такий, який би максимізував цільову функцію
$f = -x_1 + 6x_2 - x_3$;

б) $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 \geqslant 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3 \end{cases}$$

знайти такий, який би мінімізував цільову функцію
$f = 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4$.
Записати ці задачі у формі стандартних та канонічних задач лінійного програмування.

4. Побудувати двоїсту задачу до такої задачі:
на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \geqslant 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \geqslant 2 \end{cases}$$

знайти такий, який би максимізував цільову функцію
$f = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4$.

5. Записати математичну модель задачі оптимального розкрою. Для виготовлення 90 штук виробів з листового прокату певної форми потрібно вирізати деяку кількість заготовок двох типів T_1 і T_2. Для одного виробу потрібно 2 заготовки типу T_1 і 10 заготовок типу T_2. Можливі 4 варіанти розкрою одного листа прокату. Число заготовок кожного типу, що отримується при кожному варіанті розкрою одного листа прокату, та відходи при розкрою вказані в таблиці:

Варіант розкрою	Заготовки	(штук)	Відходи розкрою (%)
	T_1	T_2	
1	4	0	12
2	3	3	5
3	1	9	3
4	0	12	0

Яку кількість прокату треба розкроїти кожним варіантом для виготовлення 90 штук виробів, щоб відходи від розкроїв були найменшими?

6. Записати математичну модель задачі оптимального вирощування сільськогосподарських культур. Агрофірма відвела три земельні участки розмірами 5000 га, 8000 га і 9000 га під посіви жита, пшениці і кукурудзи. Середня врожайність (в центнерах на 1 га) по масивах вказана в таблиці

Сільськогосподарська культура	I	II	III
Жито	16	14	15
Пшениця	36	42	51
Кукурудза	30	35	28

За 1 ц жита агрофірма отримує 40 грн., за 1 ц пшениці – 50 грн. і за 1 ц кукурудзи – 28 грн. прибутку. Скільки гектарів і на яких масивах агрофірма повинна відвести під кожну культуру, щоб отримати максимальний прибуток, якщо вона повинна здати державі в якості податку не менше 1900 т жита, 15 800 т пшениці і 30 000 т кукурудзи?

7. Записати математичну модель задачі про оптимальне планування випуску продукції. Фірма випускає продукцію 4 видів P_1, P_2, P_3, P_4, для виготовлення якої потрібно використовувати сировину 5 видів S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Відомо, що запаси сировини кожного виду становлять відповідно b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 умовних одиниць та для виготовлення одиниці продукту P_i необхідно затратити a_{ij} сировини S_j. Від реалізації одиниці продукції P_i фірма отримує прибуток c_i гривень. Скласти план випуску продукції фірмою, при якому прибуток від реалізації продукції був би найбільшим.

8. Записати математичну модель транспортної задачі. На кожній з m агрофірм $F_1, F_2, \ldots, F_m$ вирощено відповідно $p_1, p_2, \ldots, p_m$ тонн цукрового буряка. Автомобільному підприємству потрібно доставити весь цей буряк на n цукрових заводів $S_1, S_2, \ldots, S_n$, причому s_k тонн на завод S_k. Транспортні витрати, що пов'язані з перевезенням 1 тонни буряків, задані $m \times n$-матрицею $T = (c_{ij})$, де c_{ij} – вартість в гривнях витрат при перевезенні 1 тонни буряків з агрофірми F_i на цукровий завод S_j. Скласти такий план перевезень, при якому загальні транспортні витрати були б найменшими.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Задача лінійного програмування має вигляд:
на множині розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей:

$$\text{а)}\quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \;\alpha\; 1, \\ 2x_2 - x_3 \;\beta\; 3, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \;\gamma\; 2, \\ x_1, \quad x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

знайти такий, який би максимізував цільову функцію
$f = 4x_1 + x_2 + 3x_3$;

$$\text{б)}\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_4 \;\alpha\; 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \;\beta\; 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 \;\gamma\; 0 \end{cases}$$

знайти такий, який би мінімізував цільову функцію
$f = 11x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$.
Записати цю задачу у формі загальної, стандартної та канонічної задач лінійного програмування, якщо буквам α, β, γ відповідають символи:
1) $=, \leqslant, \geqslant$; 2) $\geqslant, \geqslant, \leqslant$.

10. Сформулювати двоїсту задачу до задачі лінійного програмування:
на множині розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \;\alpha\; 2, \\ -4x_1 + 3x_2 \;\beta\; 1, \\ 8x_1 - 7x_2 \;\gamma\; 3, \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

знайти такий розв'язок, який би максимізував цільову функцію $f = 2x_1 + x_2$, якщо буквам α, β, γ відповідають символи:
1) $\geqslant, \leqslant, =$; 2) $\leqslant, \geqslant, \leqslant$.

11. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 - 4 \leqslant 0, \\ x_2 - 1 \geqslant 0, \end{cases}$$

при якому функція $f = x_1 + x_2$ досягає мінімуму (максимуму).
Як зміниться відповідь, якщо:
а) до даної системи дописати нерівність $x_1 + x_2 - 10 \leqslant 0$;
б) із даної системи вилучити нерівність $x_1 + x_2 - 4 \geqslant 0$?

12. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 6 \leqslant 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6 \geqslant 0, \\ x_1 + 3 \geqslant 0, \end{cases}$$

при якому функція $f = -2x_1 + 3x_2$ досягає мінімуму (максимуму).
Як зміниться відповідь, якщо:
а) до даної системи дописати нерівність $3x_1 + 2x_2 - 6 \leqslant 0$;
б) із даної системи вилучити нерівність $x_1 + 3 \geqslant 0$?

13. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} x_1 - 6 \geqslant 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2 \leqslant 0, \\ x_2 - 2 \geqslant 0, \end{cases}$$

при якому функція $f = -3x_1 - 4x_2$ досягає мінімуму (максимуму).
Як зміниться відповідь, якщо:
а) до даної системи дописати нерівність $3x_1 + 4x_2 - 24 \geqslant 0$;
б) узяти нову цільову функцію $f = 3x_1 + 4x_2$?

14. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 - 2 \geqslant 0, \\ x_2 - 3 \leqslant 0, \end{cases}$$

при якому функція $f = 3x_1 - x_2$ досягає мінімуму (максимуму).

15. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2 \geqslant 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 63 \leqslant 0, \\ x_1 + x_2 + 1 \leqslant 0, \end{cases}$$

при якому функція $f = 7x_1 + 9x_2$ досягає мінімуму (максимуму).
Як зміниться відповідь, якщо із даної системи вилучити нерівності $-x_1 - x_2 - 2 \geqslant 0$ і $x_1 + x_2 + 1 \leqslant 0$ та дописати $-x_1 - x_2 - 2 \leqslant 0$ і $x_1 + x_2 + 1 \geqslant 0$?

16. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5 \geqslant 0, \\ x_2 - 4 \leqslant 0, \\ x_1 - 5 \leqslant 0, \end{cases}$$
при якому функція $f = -6x_1 + x_2$ досягає мінімуму (максимуму).
Як зміниться відповідь, якщо:
а) у даній системі нерівність $x_1 - 5 \leqslant 0$ замінити нерівністю $-6x_1 + x_2 + 30 \leqslant 0$;
б) у даній системі вилучити нерівності $x_1 - 5 \leqslant 0$ і $x_2 - 4 \leqslant 0$ та дописати такі: $-6x_1 + x_2 + 30 \geqslant 0$ і $-6x_1 + x_2 + 2 \leqslant 0$?

17. Чи є допустимою задача № 4 лінійного програмування і, якщо так, то знайти її оптимальний розв'язок?

Задачі на доведення

18. Довести, що вектори $\vec{y}_0$ і $\vec{x}_0$ є оптимальними розв'язками даної і двоїстої задач
а) знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - y_3 + 5y_4 \geqslant 5, \\ 3y_1 + 3y_2 + y_3 + 4y_4 \geqslant 4, \end{cases}$$
при якому функція $f = 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 + 6y_4$ досягає мінімуму, $\vec{y}_0 = (0, 0, 0, 1)$ і $\vec{x}_0 = (\frac{6}{5}, 0)$;
б) знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 - 3y_3 - y_4 \geqslant 7, \\ y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4 \geqslant -2, \end{cases}$$
при якому функція $f = 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 + 3y_4$ досягає мінімуму, $\vec{y}_0 = (\frac{17}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0)$ і $\vec{x}_0 = (\frac{21}{5}, \frac{4}{5})$;
в)знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leqslant 3, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ -3x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ 3x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \end{cases}$$
при якому функція $f = x_1 + 2x_2$ досягає мінімуму, $\vec{y}_0 = (\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0)$ і $\vec{x}_0 = (\frac{5}{7}, \frac{2}{7})$;
г) знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1 \leqslant 3, \\ x_2 \leqslant 3, \end{cases}$$

при якому функція $f = 3x_1 + 3x_2$ досягає максимуму, $\vec{y}_0 = (0,0,3,0)$ і $\vec{x}_0 = (1,3)$.

Творчі задачі

19. Знайти всі значення параметра a, при яких функція:
а) $f = ax_1 + x_2$ досягає максимуму в точці $(2,6)$ на множині розв'язків системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 16, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 10; \end{cases}$$
б) функція $f = x_1 + 3x_2$ досягає максимуму в точці $(0,4)$ на множині розв'язків системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leqslant 2, \\ 3ax_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ ax_1 + x_2 \geqslant 4; \end{cases}$$
в) функція $f = -x_1 + 7ax_2 + 2ax_3$ досягає максимуму в точці $(-1,0,3)$ на множині розв'язків системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0; \end{cases}$$
г) функція $f = 4x_1 - x_2 + ax_3$ досягає максимуму в точці $(0,1,3)$ на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geqslant 3, \\ 3ax_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant 7, \\ 5ax_1 - 4x_2 + x_3 \leqslant 1. \end{cases}$$

20. Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 - 2 \geqslant 0, \\ x_2 - 3 \leqslant 0, \end{cases}$$
при якому функція $f = ax_1 + bx_2$ досягає мінімуму (максимуму) в залежності від різних значень дійсних чисел a і b.

§ 4.5 Симплекс-метод та його застосування

Література: [2] стор. 49 – 69; [7] стор. 335 – 344.

Теоретичні відомості

Описаний в попередньому параграфі графічний спосіб розв'язування задачі лінійного програмування на випадок n невідомих узагальнюється так. Розв'язком системи обмежень такої задачі є певна випукла многогранна область G (перетин півпросторів) у n-вимірному векторному просторі $\mathbb{R}^n$, а цільова функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ для кожного свого значення є гіперплощиною цього простору. Ці гіперплощини не мають спільних точок для різних значень функції і тому їх можна називати паралельними. Взявши довільну з них і переміщуючи її у векторному просторі паралельно в напрямку нормального вектора $\vec{p} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, ми отримаємо "точку входу" A і "точку виходу" B гіперплощини у область G. В цих точках цільова функція досягає свого максимуму та мінімуму. Може трапитися так, що ці точки єдині і тоді вони є вершинами многогранної області G. У випадку, коли одна з граней області G паралельна до гіперплощини, таких "точок входу чи виходу" буде безліч, і тому задача матиме безліч оптимальних розв'язків. Якщо ж многогранна область G є необмеженою, то таких точок може не існувати і тоді задача може не мати оптимального розв'язку.

Таким чином, знаходження оптимальних розв'язків задачі лінійного програмування з n невідомими зводиться до обчислення значень цільової функції у всіх вершинах многогранної області G, яка є розв'язком системи обмежень даної задачі. Однак при великому числу невідомих пошук всіх вершин та обчислення значень цільової функції в них стає складним, а іноді і неможливим, навіть для сучасних комп'ютерів. Тому були розроблені спеціальні числові методи розв'язування таких задач.

Одним з найбільш загальних і поширених методів розв'язування таких задач є *симплексний метод (коротко: симплекс-метод)*. Ця назва походить від поняття симплексу. Симплекс – це найпростіша фігура у n-вимірній геометрії, тобто піраміда, координати всіх точок якої задовольняють нерівність $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant 1$, де всі $x_i \geqslant 0$.

Вперше на такий метод вказав радянський математик-економіст Канторович Л.В. у 1939 році. Його розвинув і вдосконалив американський математик Дж.Б.Данціг у 1946-48 роках. Суть цього методу полягає у цілеспрямованому переборі та пошуку потрібних вершин многогранної області G. Спочатку визначають який-небудь допустимий базисний розв'язок (одну з вершин), після чого шляхом послідовних поліпшень допустимого розв'язку знаходять оптимальний, або переконуються, що такого не існує. Число таких поліпшень практично не перевищує числа змінних задачі лінійного програмування з n невідомими.

Схему застосування симплекс-методу розглянемо для канонічної задачі лінійного програмування при знаходженні максимуму цільової функції та лінійно незалежній системі обмежень. Якщо область G порожня, то задача лінійного програмування розв'язку немає.

Симплекс-метод полягає у послідовному виконанні таких дій:

1. Зведення системи обмежень до лінійно незалежної сумісної системи лінійних рівнянь.

2. Знаходження одного з базисних розв'язків.

3. Дослідження отриманого розв'язку на оптимальність.

4. Якщо базисний розв'язок не оптимальний, то взяти інший базисний розв'язок шляхом заміни одного із значень базисних змінних, значення цільової функції для якого "ближче" до оптимального, ніж в попередньому випадку. Далі виконують знову п. 3.

5. Якщо базисний розв'язок оптимальний, то завершити задачу.

Для вказаного алгоритму складають програму і знаходять розв'язок задачі лінійного програмування за допомогою ЕОМ. При розв'язуванні ручним способом зручно на кожному кроці ітерації (поліпшенні базисного допустимого розв'язку) складати відповідні симплекс-таблиці.

Нехай потрібно на множині невід'ємних розв'язків даної системи m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
знайти такий, при якому лінійна функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ приймає максимальне значення. Розв'язуючи дану систему методом Гаусса, зведемо її до виду
$$\begin{cases} x_1 + a^\star_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a^\star_{1n}x_n = b^\star_1, \\ x_2 + a^\star_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a^\star_{2n}x_n = b^\star_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + a^\star_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a^\star_{rn}x_n = b^\star_r. \end{cases}$$
Як відомо, вихідну систему у векторній формі записують так:
$$x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots + x_n\vec{p}_n = \vec{b},$$
де $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ – вектор-стовпці системи, а $\vec{b}$ – вектор-стовпець вільних членів. Будемо вважати, що числа $b^\star_1, b^\star_2, \ldots, b^\star_r$ невід'ємні. При цьому змінні

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ будемо називати *базисними*, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – *вільними*. Якщо вільним змінним надати значення $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$, то отримаємо допустимий розв'язок даної задачі $\vec{x}^0 = (b_1^\star, b_2^\star, \ldots, b_r^\star, 0, \ldots, 0)$. Його називають *допустимим базисним розв'язком*.

Початкова симплекс-таблиця має вигляд

i	Баз.	Баз.	$\vec{p}$		c_1	c_2	$\ldots$	c_r	c_{r+1}	$\ldots$	c_n
	зм.	век.	$\vec{p}'$	$\vec{b}$	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	$\ldots$	$\vec{p}_r$	$\vec{p}_{r+1}$	$\ldots$	$\vec{p}_n$
1	x_1	$\vec{e}_1$	c_1	$b_1^\star$	1	0	$\ldots$	0	$a_{1,r+1}^\star$	$\ldots$	$a_{1n}^\star$
2	x_2	$\vec{e}_2$	c_2	$b_2^\star$	0	1	$\ldots$	0	$a_{2,r+1}^\star$	$\ldots$	$a_{2,n}^\star$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
r	x_r	$\vec{e}_r$	c_r	$b_r^\star$	0	0	$\ldots$	1	$a_{r,r+1}^\star$	$\ldots$	$a_{r,n}^\star$
j				Δ_0	Δ_1	Δ_2	$\ldots$	Δ_r	Δ_{r+1}	$\ldots$	Δ_n

Таблиця містить $r+3$ рядки і $n+5$ стовпців. У перших двох рядках записані коефіцієнти цільової функції та позначення $\vec{p}'$ – укороченого до перших r координат вектора $\vec{p}$, $\vec{b}$ – вектор-стовпця вільних членів і вектор-стовпців $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$ при відповідних невідомих системи обмежень даної задачі. В другому і третьому стовпцях – позначення базисних змінних та відповідних їм одиничних векторів, а у четвертому – відповідні їм коефіцієнти цільової функції. В інших стовпцях знаходяться координати відповідних векторів, які стоять у другому рядку. В останньому рядку записуються оцінки допустимого базисного розв'язку, які обчислюються за формулою $\Delta_j = \vec{p}'\vec{p}_j - c_j$.

Після заповнення таблиці проводиться її аналіз на основі алгоритму симплекс-методу. Перш за все за допомогою останнього рядка перевіряється допустимий базисний розв'язок на оптимальність:

1. якщо всі $\Delta_j \geqslant 0$, то цей розв'язок є оптимальним;

2. якщо існує j таке, що $\Delta_j < 0$ і $\vec{p}_j \leqslant 0$, то цільова функція необмежена зверху і задача оптимального розв'язку не має;

3. якщо існує j таке, що $\Delta_j < 0$ і в вектор-стовпці $\vec{p}_j$ існують додатні координати, то цей розв'язок можна поліпшити за рахунок переходу до нового допустимого базисного розв'язку, при якому значення цільової функції може збільшитися.

Для такого переходу серед коефіцієнтів при вільних невідомих (вектор-стовпці $\vec{p}_{r+1}, \vec{p}_{r+2}, \ldots, \vec{p}_n$) вибираємо *розв'язувальний коефіцієнт* $a_{lk}^\star$ так:

1. Δ_k повинно бути найменшим серед від'ємних Δ_j;

2. відношення $\frac{b_{l0}^\star}{a_{lk}^\star}$ повинно бути найменшим серед додатних $a_{lk}^\star$ в k-ому стовпці.

Після цього для зручності складаємо нову симплекс-таблицю, яку отримуємо з попередньої шляхом таких перетворень:

1. базисну змінну x_l з відповідним значенням c_l та вектором $\vec{e}_l$ замінимо

на нову базисну змінну x_k з відповідним значенням c_k та вектором $\vec{e}_k$;

2. розв'язувальний l-ий рядок ділимо на $a^{\star}_{lk}$;

3. всі інші рядки отримаємо шляхом утворення нулів над і під елементом $a^{\star}_{lk}$ у k-ому стовпці (як при методі Гаусса).

Таке поліпшення проводимо до тих пір, поки не отримаємо невід'ємний останній рядок, або ж поки не знайдеться j таке, що $\Delta_j < 0$ і $\vec{p}_j \leqslant 0$.

Іноді на деякому з кроків симплекс-методу можна натрапити на *вироджений базисний розв'язок* (коли одна з базисних координат дорівнює нулю). Тоді може відбутися зациклення в розрахунках, коли знову повертаємося до раніше знайденого базисного розв'язку. В такому випадку слід вибрати інший розв'язувальний коефіцієнт.

В багатьох конкретних задачах лінійного програмування знаходження початкового допустимого базисного розв'язку не викликає труднощів. Одним з загальних методів побудови початкового допустимого базисного розв'язку є *метод штучного базису*. Він полягає в тому, що замість даної канонічної задачі розглядають таку: на множині невід'ємних розв'язків даної системи m лінійних рівнянь з $n+m$ невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$

знайти такий, при якому лінійна функція $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$ приймає максимальне значення, де M – достатньо велике число і всі $b_i \geqslant 0$. Можна показати, що дана задача має оптимальний розв'язок, коли відповідна остання задача має оптимальний розв'язок. Остання задача має ту перевагу, що за її початковий допустимий базисний розв'язок можна взяти $n+m$-вимірний вектор, у якого перші n координат рівні 0, тобто $\vec{x}^0 = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$. В результаті її розв'язування отримаємо один із таких трьох випадків:

а) цільова функція останньої задачі необмежена зверху – це означає, що і вихідна функція необмежена зверху і, отже, ці задачі не мають оптимального розв'язку;

б) відбулася повна заміна всіх базисних змінних і одиничних векторів штучного базису, що може привести до оптимального розв'язку обох задач;

в) оптимальний розв'язок останньої задачі, але не всі базисні змінні і одиничні вектори штучного базису вдалося замінити – це означає, що вихідна задача не має оптимального розв'язку.

Задача знаходження невід'ємного розв'язку системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$ де всі $b_i \geqslant 0$, рівносильна задачі: на множині невід'ємних розв'язків даної системи m лінійних рівнянь з $n+m$ невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$ знайти такий, при якому лінійна функція $f = -x_{n+1} - \ldots - x_{n+m}$ приймає максимальне значення.

Дана система лінійних рівнянь має невід'ємний розв'язок тоді і тільки тоді, коли максимальне значення останньої цільової функції дорівнює нулю.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чому до розв'язування задач лінійного програмування не вдається застосувати прийоми диференціального числення?

2. Сформулювати алгоритм симплекс-методу для канонічної задачі лінійного програмування на мінімум.

3. Який вигляд має алгоритм симплекс-методу для стандартної задачі лінійного програмування?

4. Чи можна метод штучного базису застосувати до розв'язування довільної задачі лінійного програмування?

5. Розв'язати наступні задачі лінійного програмування евристичними міркуваннями без застосування симплекс-методу.
   Знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь:

   а) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$
   при якому функція $f = -5x_1 + 5x_2$ досягає максимуму;

   б) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \end{cases}$$
   при якому функція $f = 2x_2 + 3x_3$ досягає максимуму;

   в) $$\begin{cases} x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$$
   при якому функція $f = 10x_1 - 2x_3$ досягає мінімуму;

г) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \end{cases}$

при якому функція $f = x_1 - x_3$ досягає мінімуму.

6. Встановити, чи мають невід'ємні ненульові розв'язки такі системи:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \leqslant 7, \\ 3x_1 - 3x_2 \geqslant 5. \end{cases}$

7. Знайти всі базиси вершини $\vec{x}^0$ многогранника G простору $\mathbb{R}^n$, який є множиною невід'ємних розв'язків системи рівнянь, якщо:

а) $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 + 4x_6 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 1, \\ x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 0, \end{cases}$

$n = 6,\quad \vec{x}^0 = (0,1,0,1,0,0);$

б) $\begin{cases} kx_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ - x_2 + x_3 + (k-5)x_4 + 2x_5 = 1, \end{cases}$

$n = 5,\quad \vec{x}^0 = (0,0,1,0,0).$

8. Встановити за допомогою симплекс-методу, яке з наступних тверджень: А: вектор $\vec{x}^0$ є розв'язком; Б: задача не має розв'язку; В: існує вершина, в якій цільова функція приймає більше значення, ніж при $\vec{x}^0$, – має місце для такої задачі лінійного програмування.

На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 - x_4 - 14x_5 = 7, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 4x_4 + 20x_5 = -10 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5$ на максимум, якщо $\vec{x}^0 = (2,0,0,3,0)$;

б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -1, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 3x_5 = -5 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = -x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5$ на максимум, якщо $\vec{x}^0 = (0,1,2,0,0)$;

в) $\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = 3x_2 - 7x_3 + x_4 - x_5$ на максимум, якщо $\vec{x}^0 = (0,1,0,0,1)$;

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5$ на мінімум, якщо $\vec{x}^0 = (2,1,0,0,0)$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Розв'язати симплекс-методом задачі з № 5.

10. Розв'язати симплекс-методом задачу, розпочавши з вказаного допустимого базисного розв'язку:
На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь:
а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$
дослідити цільову функцію $f = 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$ на максимум, якщо $\vec{x}^0 = (0, 0, 1, 5)$;
б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$
дослідити цільову функцію $f = -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4$ на мінімум, якщо $\vec{x}^0 = (0, 0, 1, 3)$;
в) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 - 3x_6 = -3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 - 7x_6 = -2 \end{cases}$
дослідити цільову функцію $f = 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 2x_6$ на максимум, якщо $\vec{x}^0 = (0, 0, 1, 0, 1, 0)$;
г) $\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 + x_5 = 7, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$
дослідити цільову функцію $f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5$ на мінімум, якщо $\vec{x}^0 = (3, 1, 1, 0, 0)$.

11. Розв'язати задачі лінійного програмування в стандартній формі, попередньо звівши їх до канонічного вигляду. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей:
а) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 \leqslant 3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 \leqslant 4 \end{cases}$
дослідити цільову функцію $f = -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4$ на максимум;
б) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 4x_3 \geqslant -8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant -2, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 \leqslant 2 \end{cases}$
дослідити цільову функцію $f = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$ на мінімум;
в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \leqslant 3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 1 \end{cases}$
дослідити цільову функцію $f = -x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5$ на максимум;
г) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geqslant -2 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = -x_1 - 2x_2 + 4x_3$ на мінімум.

12. Методом заміщення одиничних базисних векторів розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 11x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 10. \end{cases}$

13. Методом штучного базису розв'язати задачі лінійного програмування. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_5 = 4 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5$ на максимум;

б) $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 30, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 19, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5$ на мінімум;

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4$ на максимум;

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ - 4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$

дослідити цільову функцію $f = x_2 - 3x_3 + 2x_5$ на мінімум.

14. Знайти всі базисні розв'язки системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 + 6x_2 + 17x_3 - 4x_4 = 22, \\ x_3 + 2x_4 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -13, \\ x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

г) $$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 10x_2 - 8x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

15. Знайти всі невід'ємні базисні розв'язки системи рівнянь:

а) $$\begin{cases} x_1 - 3x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -7; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 - 5x_5 + 2x_6 = -3, \\ x_2 - 2x_5 - x_6 = 5, \\ x_3 - 3x_5 + x_6 = -7, \\ x_4 + x_5 - 3x_6 = -4; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Задачі на доведення

16. Довести, що канонічна задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, коли відповідна їй канонічна задача з штучним базисом має оптимальний розв'язок.

17. Довести, що цільова функція канонічної задачі лінійного програмування необмежена, якщо цільова функція відповідної канонічної задачі з штучним базисом необмежена.

18. Довести, що канонічна задача лінійного програмування не має оптимального розв'язку, коли відповідна їй канонічна задача з штучним базисом має оптимальний розв'язок, який містить ненульові значення деяких штучних базисних змінних.

19. Довести, що коли система лінійних рівнянь має невід'ємні розв'язки, то вона має і базисні невід'ємні розв'язки.

Творчі задачі

20. Сформулювати наступну задачу як задачу лінійного програмування: помістити в обмежений многогранник G простору $\mathbb{R}^n$, який задано системою лінійних нерівностей, сферу найбільшого радіуса.

21. Знайти сферу найбільшого радіуса, що лежить всередині обмеженого многогранника G простору $\mathbb{R}^n$, який задано системою лінійних нерівностей, всі коефіцієнти і вільні члени якої є додатними числами.

22. Розробити критерій того, коли канонічна задача лінійного проурамування має безліч розв'язків.

Задачі з олімпіад

23. В дитячому таборі відпочинку проводився конкурс на кращий малюнок. Організатори конкурсу доручили студенту-практиканту:

    а) на суму 30гр. закупити для нагород акварельні фарби по ціні 3 гр., альбоми для малювання по ціні 1 гр., кольорові олівці – по 0 гр. та лінійки – по 9.5 гр.;

    б) потрібно купити не менше трьох коробок фарб, лінійок – не більше 5, альбомів – стільки, скільки коробок олівців і фарб разом;

    в) нwобхідно купити найбільшу кількість предметів.

    Студент витратив всі гроші і купив 3 коробки фарб, 6 коробок олівців і 9 альбомів. Чи повністю виконав доручення практикант?

24. Для участі у міжшкільних змаганнях з легкої атлетики школа повинна виставити команду, яка складається з спортсменів 1 та 2 розрядів. Змагання проводяться по бігу, стрибках у довжину та висоту. В стрибках у висоту повинні приймати участь 5 спортсменів, у стрибках у довжину – 8 спортсменів, а у бігу – не більше 10 спортсменів. Кількість очок, що гарантується спортсмену кожного розряду кожного з різних видів спорту, вказана в таблиці

Розряд	Біг	Стрибки у висоту	Стрибки у довжину
перший	5	4	5
другий	3	2	3

    Розподілити спортсменів команди так, щоб сума очок команди була найбільшою, якщо в команді перший розряд мають лише 10 спортсменів.

§ 4.6 Вибрані задачі

1. Для яких натуральних n виконується нерівність $\sqrt[n+1]{n+1} \geqslant \sqrt[n]{n}$?

2. Довести, що $2^{\sqrt[12]{|x|}} + 2^{\sqrt[4]{|x|}} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{|x|}}$.

3. Нехай $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_n$ – числа Фібоначчі. Довести, що $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_n}{2^n} < 2$.

4. Довести, що $\left| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$.

5. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок лінійної нерівності $\qquad x_1 - 4x_2 + 3x_3 \geqslant 0$.

6. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 & \geqslant & 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 & \geqslant & 0, \\ x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0. \end{cases}$$

7. Знайти всі невід'ємні розв'язки системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} -3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 \geqslant & 0, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 \geqslant & 0. \end{cases}$$

8. Підмножина H – n-вимірного арифметичного простору $\mathbb{R}^n$ називається *опуклою*, якщо вона разом із своїми векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ містить довільний вектор $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$, де $0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, який називається опуклою комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Довести, що:
а) підпростір H простору $\mathbb{R}^n$ є опуклою множиною;
б) перетин $H_1 \cap H_2$ опуклих множин H_1 і H_2 є опуклою множиною;
в) сума $H_1 + H_2$ опуклих множин H_1 і H_2 є опуклою множиною.

9. Довести, що підможина H арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$ опукла тоді і тільки тоді, коли вона разом із своїми векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ містить довільний вектор $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{a}_k$, де $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, який називається *опуклою комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

10. Множина $M(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$, яка містить всі опуклі комбінації векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, називається *опуклим многогранником, породженим цими векторами*. Довести, що опуклий многогранник є опуклою множиною.

11. Вектор $\vec{a}$ опуклої множини H називається *вершиною* H, якщо він не є внутрішньою точкою ні жодного відрізка $M(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, кінці якого $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ належать цій множині (*відрізок* $M(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ – це опуклий многогранник, породжений векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, а довільний вектор $\vec{a}$ цього відрізка, що не співпадає з кінцями $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, називається *внутрішнім*). Довести, що опуклий многогранник має скінченне число вершин.

12. Довести, що множина всіх розв'язків:
а) лінійного однорідного рівняння з n змінними;
б) лінійної однорідної нерівності з n змінними;
в) однорідної системи лінійних рівнянь з n змінними;
г) однорідної системи лінійних нерівностей з n змінними
є опуклою множиною простору $\mathbb{R}^n$.

13. *Півпростором арифметичного векторного простору* $\mathbb{R}^n$, відповідним заданій лінійній нерівності з n змінними, називається множина всіх розв'язків цієї нерівності. *Многогранною областю простору* $\mathbb{R}^n$, *відповідною заданій системі лінійних нерівностей з* n *змінними*, називається множина всіх розв'язків цієї системи. Довести, що:
а) многогранна область опукла;
б) многогранна область є опуклим многогранником, якщо вона обмежена (область вважається обмеженою, якщо довжина довільного її вектора не перевищує певного заданого числа);
в) многогранна область має скінченне число вершин.

14. Довести, що множина всіх допустимих розв'язків задачі лінійного програмування опукла і є многогранною областю.

15. Довести, що кожний опуклий многогранник з вершинами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ є породженим своїми вершинами.

16. Довести, що довільний опуклий многогранник є множиною всіх розв'язків певної системи лінійних нерівностей.

17. Довести, що між невід'ємними ров'язками лінійної нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$ і невід'ємними розв'язками лінійного рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ можна встановити взаємно однозначну відповідність.

18. Непорожня підмножина H арифметичного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається *опуклим конусом*, якщо вона замкнута відносно додавання і множення векторів на невід'ємні скаляри. Довести, що:
а) підпростір є опуклим конусом;

б) множина всіх розв'язків однорідної системи лінійних нерівностей є опуклим конусом;
в) опуклий конус є опукла множина;
г) множину всіх розв'язків сумісної системи лінійних нерівностей можна подати як суму опуклого многогранника і опуклого конуса, породженого скінченною множиною векторів.

19. Допустимий розв'язок $\vec{a}_0 = (a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{n0})$ канонічної задачі лінійного програмування називається *базисним*, якщо він містить точно r ненульових координат, де r ранг відповідної матриці системи лінійних рівнянь цієї задачі. Довести, що:
а) допустимий розв'язок задачі лінійного програмування є вершиною опуклої множини всіх розв'язків даної задачі тоді і тільки тоді, коли він є базисним розв'язком;
б) якщо канонічна задача лінійного програмування має оптимальний розв'язок, то вона має і оптимальний базисний розв'язок.

20. Довести, що коли одна із взаємно двоїстих задач лінійного програмування має розв'язок, то друга задача теж має розв'язок, причому тоді оптимальні значення відповідних функцій цих задач співпадають.

21. Довести що, коли $\vec{x}_0$ – допустимий розв'язок і $\vec{p} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ –вектор коефіцієнтів цільової функції прямої задачі лінійного програмування, а $\vec{y}_0$ – допустимий розв'язок і $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ –вектор коефіцієнтів цільової функції відповідної двоїстої задачі, то виконується нерівність $\vec{p}\vec{x}_0 \leqslant \vec{b}\vec{y}_0$.

22. Для виробництва двох видів продукції фірма використовує 4 групи устаткування S_1 – 18 штук, S_2 – 12 штук, S_3 – 24 штуки, S_4 – 18 штук. На виготовлення одного виробу A протягом 1 години працюють 1,0,5,2, а на виготовлення одного виробу B – 1,1,0,2 устаткувань груп S_1, S_2, S_3, S_4 відповідно. Скільки штук виробів A і B повинна виготовити фірма, щоб отримати максимальний прибуток, якщо з одного виробу A вона має 80 грн, а з одного виробу B – 12 грн прибутку?

23. Із залізничного вокзалу можна відправити швидкі та кур'єрські поїзди. Місткість вагонів та наявний на станції парк вагонів вказані в таблиці:

Тип вагонів	Багаж.	Пошт.	Жорст.	Куп.	М'які	Поїзд
Число	1	-	5	6	3	К
вагонів	1	1	8	4	1	Ш
Місць у вагоні	-	-	58	40	32	
Парк вагонів	12	8	81	70	27	

Необхідно вибрати таке співвідношення між числом швидких та кур'єрських поїздів, щоб число щоденно відправлених пасажирів було максимальним.

24. Звіроферма вирощує чорнобурих лисиць і песців. На фермі є 10000 кліток, причому в кожній можна розмістити 2 лисиці або 1 песця. По плану на фермі повинно бути не менше 3000 лисиць і 6000 песців. Щодоби одній лисиці потрібно видавати 4 одиниці їжі і кожному песцю – 5 одиниць їжі. Скільки лисиць і песців слід тримати на фермі, щоб отримати максимальний прибуток, якщо від реалізації однієї шкірки лисиці ферма отримує 100 грн, а песця – 500 грн?

25. Дослідити на екстремум функцію f на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей, якщо:

а) $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2$ і $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geqslant 15, \\ 2x_1 + 6x_2 \geqslant 12, \\ \geqslant 2x_1 \geqslant 6, \\ \geqslant 2x_2 \geqslant 3; \end{cases}$

б) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ і $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \leqslant 12, \\ x_1 - x_2 \geqslant 3, \\ x_1 + x_1 \geqslant 7, \\ x_2 \leqslant 1; \end{cases}$

в) $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1 + 6x_2 - 2x_3$ і $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geqslant 6, \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geqslant 8; \end{cases}$

г) $f(x_1, x_2, x_3) = -10x_1 + x_3$ і $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 \geqslant 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 6, \\ x_3 \geqslant 3. \end{cases}$

26. Застосовуючи принцип двоїстості та графічний метод, розв'язати такі задачі:

а) знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей $\begin{cases} -y_1 + 6y_2 + 2y_3 - 4y_4 \geqslant 2, \\ y_1 + 7y_2 - 3y_3 - y_4 \geqslant 1, \end{cases}$
при якому функція $f = 3y_1 + 42y_2 + 6y_3 - 4y_4$ досягає мінімуму;

б) знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей $\begin{cases} 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geqslant 1, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 - y_4 \geqslant 1, \end{cases}$
при якому функція $f = 4y_1 + 15y_2 + 12y_3 + 2y_4$ досягає мінімуму;

в) знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей $\begin{cases} y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4 \geqslant 3, \\ y_1 - y_2 - 5y_3 + y_5 \geqslant 3, \end{cases}$

при якому функція $f = 4y_1 - 4y_2 - 4y_3 + 3y_4 + 3y_5$ досягає мінімуму;
г) знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 3, \\ y_1 + 3y_2 - y_4 + y_5 = 5, \end{cases}$$
при якому функція $f = 3y_1 + 4y_2 + y_3 + 6y_4$ досягає максимуму.

27. Знайти невід'ємні розв'язки рівняння:
а) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$;
б) $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -4$.

28. Знайти невід'ємні розв'язки системи рівняннь:

а) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 12x_4 = 9; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_2 - 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4; \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 3x_5 - x_6 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 1, \\ -4x_1 + 4x_2 - 12x_3 - 2x_5 + 2x_6 = 1; \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 - 5x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$$

29. Знайти сферу найбільшого радіуса, яку можна розмістити всередині многогранника $G \subset \mathbb{R}^4$, заданого системою
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 15, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leqslant 40, \\ x_1 + 7x_2 + 7x_3 + x_4 \leqslant 60, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Відповіді. Вказівки. Розв'язки.

Розділ 1: Групи

§ 1.1. Півгрупи та їх властивості

1. 4 способи. **2.** а) ні; б) ні; в) так; г) ні; д) так; е) так; є) так; ж) так.

3. а), б), в), г) – так. **4.** Так; ні. **5.** Так. **6.** а) Так; нейтральний елемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б), г), д) – ні; в) Так; нейтральний елемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) Так; нейтральний елемент $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **7.** а) Ні; б) так. **8.** Так. **9.** а) Так; б) так. **10.** $p = q = 1$ або $p = q = 0$ або $p = r = 0$ і $q = 1$ або $p = 1$ і $q = r = 0$. **11.** Так.

12. Так. **13.** Так. **14.** Таких півгруп є 4. Операції в них задаються таблицями Келі:

$*$	a	b
a	a	b
b	a	b

;

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

;

$*$	a	b
a	a	a
b	a	a

;

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

.

15. а) $[A] = \{A, A^2, A^3\}$; б) $[A] = \{A, A^2\}$. **16.** а) $\{1\}$; б) 1 і всі прості числа.

22. Нехай I_1, I_2 – ідеали півгрупи G, $I = I_1 \cap I_2$ та $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$. Розглянемо добуток $i_1 i_2$. За означенням ідеала півгрупи $i_1 i_2 \in I_1$ та $i_1 i_2 \in I_2$. тобто $i_1 i_2 \in I$. Це означає, що $I \neq \varnothing$. Покажемо тепер, що I є лівим і правим ідеалом півгрупи G. Нехай $i \in I$ та $g \in G$. Тоді з $i \in I_1$ маємо $gi \in I_1$, а з $i \in I_2$ – $gi \in I_2$. Отже, $gi \in I$. Аналогічно перевіряється, що $ig \in I$, тобто I є ідеалом півгрупи G.

28. Нехай r_g – правий зсув півгрупи G, який визначається елементом $g \in G$, тобто $r_g(x) = xg$. Відображення $f : G \to \Pi(G)$, яке визначається рівністю $f(g) = r_g$, є сюр'єкцією. Якщо $f(g_1) = f(g_2)$, тобто $r_{g_1} = r_{g_2}$, то $xg_1 = xg_2$ для кожного елемента $x \in G$. Зокрема, ця рівність має місце і для нейтрального елемента $e \in G$, тобто $eg_1 = eg_2$. Отже, $g_1 = g_2$ і відображення f є бієкцією. Залишається перевірити виконання рівності $f(g_1 g_2) = f(g_2) \circ f(g_1)$, $r_{g_1 g_2} = r_{g_2} \circ r_{g_1}$. Це слідує з того, що для кожного $x \in G$ маємо $r_{g_1 g_2}(x) = x(g_1 g_2) = (xg_1)g_2 = r_{g_2}(xg_1) = r_{g_2}(r_{g_1}(x)) = (r_{g_2} \circ r_{g_1})(x)$. Таким чином, відображення f є ізоморфізмом.

30. Нехай g – регулярний елемент півгрупи G. Тоді існує елемент $h \in G$ такий, що $ghg = g$. Розглянемо елементи g і $\bar{g} = hgh$. Вони є регулярно спряженими. Дійсно, $g\bar{g}g = g(hgh)g = (ghg)hg = ghg = g$. Крім цього, $\bar{g}g\bar{g} = (hgh)g(hgh) = h(ghg)(hgh) = (hg)(hgh) = h(ghg)h = hgh = \bar{g}$, що і потрібно було довести.

31. Вказівка. До кожної матриці A даного виду в ролі регулярно спряженої взяти транспоновану до неї матрицю A^t.

§ 1.2. Квазігрупи

1. а) Ні один стовпець не повинен містити однакових елементів; б) ні один рядок не містить однакових елементів; в) кожен рядок і стовпець не містять однакових елементів; г) кожен рядок і стовпець не містять однакових елементів та є рядок і стовпець, які співпадають з вихідними.

2. Можна. Для прикладу можна розглянути адитивну алгебру $(\mathbb{Z}_n; \oplus)$ остач від ділення на число n.

3. Є правою (лівою) квазігрупою. **4.** Можна.

5. Всі бінарні оперативи є лівими квазігрупами; всі, крім б), є правими квазігрупами; всі, крім б), є квазігрупами; а),є),ж) – лупи; а), ж) – комутативні лупи.

6. До б) існує тільки ліве ділення, а у всіх інших випадках визначені обидві операції. Наприклад, у випадку г) вони є такими:

/	a	b	c	d	e
a	c	a	e	d	b
b	e	d	a	b	c
c	d	e	b	c	a
d	b	c	d	a	e
e	a	b	c	e	d

\	a	b	c	d	e
a	b	c	e	d	a
b	e	d	c	a	b
c	a	e	d	b	c
d	d	b	a	c	e
e	c	a	b	e	d

8. Так. **9.** а),б),в) –так; г) – ні. **10.** Операції задаються так: $^{-1}f(x,y) = \frac{x-by-c}{a}$ – ліве ділення і $f^{-1}(x,y) = \frac{-ax+y-c}{b}$ – праве ділення.

§ 1.3. Найпростіші властивості груп. Підгрупа. Циклічні групи

1. а), в) Не виконується жодна з аксіом; б), д), е), ж) – є групою; г),є) – асоціативність, є нейтральний елемент. **2.** Так. **3.** а),в),е) – ні; б),г),д) – так. **5.** Єдиний нейтральний елемент.

6. Завжди один ідемпотент – це нейтральний елемент. **7.** Для кожного елемента є єдиний симетричний елемент. **8.** $-1, 1$.

9. Має єдиний розв'язок $x = a^{-1}b$. **10.** $a = b$. **11.** Мультиплікативна група всіх коренів $n-$го степеня з одиниці; адитивна група лишків цілих чисел за модулем n. **12.** $\frac{n}{(k,n)}$. **13.** Так. **14.** Одна другого і одна третього порядків. **15.** Так. **16.** Так. Доведемо це. Перевіримо спочатку, чи замкнута дана множина G відносно вказаної операції. Нехай $f_{a,b}(x) = ax + b, f_{c,d}(x) = cx + d$ і $ac \neq 0$. Тоді

$$(f_{c,d} \circ f_{a,b})(x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x)) = f_{c,d}(ax + b) = acx + (cb + d) = f_{ac,cb+d}(x),$$

тобто $f_{c,d} \circ f_{a,b} \in G$.

Те, що алгебра $(G; \circ)$ є півгрупою, випливає з асоціативності операції композиція (послідовне виконання) відображень.

Нейтральним елементом є функція $f_{1,0}(x) = x$.

Оберненим елементом до функції $f_{a,b}$ є функція $f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$. Справді,

$$(f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} \circ f_{a,b})(x) = f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}(f_{a,b}(x)) = f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}(ax + b) = x,$$

$$(f_{a,b} \circ f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}})(x) = f_{a,b}(f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}(x)) = f_{a,b}(\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}) = x,$$

тобто $f_{a,b} \circ f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} = f_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} \circ f_{a,b} = f_{1,0}$. Отже, алгебра $(G; \circ)$ є групою.

17. а),б) – Циклічними є підгрупи $\{e\}, \{e, s_a\}, \{e, s_b\}, \{e, R_O^{180^0}\}$, а таблиця Келі така:

$\circ$	e	$R_O^{180^0}$	s_a	s_b
e	e	$R_O^{180^0}$	s_a	s_b
$R_O^{180^0}$	$R_O^{180^0}$	e	s_b	s_a
s_a	s_a	s_b	e	$R_O^{180^0}$
s_b	s_b	s_a	$R_O^{180^0}$	e

; в) Циклічними є підгрупи $\{e\}, \{e, s_a\}, \{e, s_b\}, \{e, s_c\}, \{e, R_O^{120^0}, R_O^{240^0}\}$, а таблиця Келі така:

$\circ$	e	$R_O^{120^0}$	$R_O^{240^0}$	s_a	s_b	s_c
e	e	$R_O^{120^0}$	$R_O^{240^0}$	s_c	s_a	s_b
$R_O^{120^0}$	$R_O^{120^0}$	$R_O^{240^0}$	e	s_b	s_c	s_a
$R_O^{240^0}$	$R_O^{240^0}$	e	$R_O^{120^0}$	s_b	s_c	s_a
s_a	s_a	s_b	s_c	e	$R_O^{120^0}$	$R_O^{240^0}$
s_b	s_b	s_c	s_a	$R_O^{240^0}$	e	$R_O^{120^0}$
s_c	s_c	s_a	s_b	$R_O^{120^0}$	$R_O^{240^0}$	e

.

18. Так. **19.** а) 1 має порядок 1; -1 має порядок 2; всі інші числа мають нескінченний порядок; б) 0 має порядок 1; всі інші мають нескінченний порядок. **20.** а) $\{1, -1, i, -i\}$; б) $\{1, , -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$; в) $\{1, -1, i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$; г) $\{1, -1, \frac{\sqrt{1}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{1}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{1}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. **21.** а) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$; б) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbb{Z}\right\}$;

в) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}$;
г) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. **22.** $S_3 = \{e, \alpha, \beta, s_1, s_2, s_3\}$. $\{e\}, S_3, \{e, s_1\}, \{e, s_2\}, \{e, s_3\}$, $A_3 = \{e, \alpha, \beta\}$ – знакозмінна група. Таблиця Келі така:

$\circ$	e	α	β	s_1	s_2	s_3
e	e	α	β	s_1	s_2	s_3
α	α	β	e	s_2	s_3	s_1
β	β	e	α	s_3	s_1	s_2
s_1	s_1	s_3	s_2	e	β	α
s_2	s_2	s_1	s_3	α	e	β
s_3	s_3	s_2	s_1	β	α	e

23. G, $\{\varepsilon_1^0\}$, $\{\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^6\}$, $\{\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^4, \varepsilon_1^8\}$, $\{\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^3, \varepsilon_1^6, \varepsilon_1^8\}$, $\{\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^2, \varepsilon_1^4, \varepsilon_1^6, \varepsilon_1^8\, \varepsilon_1^{10}\}$, де $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$. **24.** $4n$. **25.** Підгрупи: $\{1\}$, $\{1, -1\}$, $\{1, -1, i, -i\}, \{1, -1, j, -j\}$, $\{1, -1, k, -k\}$, $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. **28.** $G = H$ тоді, коли G – комутативна.

32. Нехай $G = [g]$ і H – підгрупа циклічної групи G. Якщо H є тривіальною підгрупою, то $H = \{g^0\}$ або $H = G = [g]$.

Нехай H – нетривіальна підгрупа і k – найменше натуральне число таке, що $g^k \in H$. Тоді з необхідних і достатніх умов для підгрупи слідує, що $g^{kn} \in H$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, тобто $[g^k] \subset H$. Навпаки, нехай $h \in H$. Тоді існує ціле число l таке, що $h = g^l$. З попередніх міркувань випливає, що $|l| \geqslant k$. Виконаємо ділення з остачею числа l на число k. Будемо мати $l = km + r$, де $m \in \mathbb{Z}$ і $0 \leqslant r < k$. Але $g^{-km} \in H$. Тому $g^l \cdot g^{-km} = g^r \in H$. Оскільки число k є найменшим, для якого ця умова виконується, то $r = 0$, тобто l ділиться на k. Отже, $h \in [g^k]$ і $H \subset [g^k]$. Таким чином, $H = [g^k]$ є циклічною підгрупою.

33. а) Нехай e – нейтральний елемент групи G, а p і s – порядки елементів ab і ba відповідно. Тоді $(ab)^p = e$ і $(ba)^s = e$, причому числа p і s є найменшими з тих, які мають цю властивість. Розглянемо елемент $(ba)^p$. $(ba)^p = e \cdot \underbrace{(ba)(ba)\cdots(ba)}_{p} = (a^{-1}a)\underbrace{(ba)(ba)\cdots(ba)}_{p} = a^{-1}\underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{p}a = a^{-1}(ab)^p a = a^{-1}ea = a^{-1}a = e$. Отже, p ділиться на s. Аналогічно перевіряється, що s ділиться на p. Це означає, що $p = s$.

Задачі б) і в) випливають з а).

§ 1.4. Розклад групи за підгрупою. Нормальні дільники групи

1. а) Ні; б) так; в) ні; г) ні. **2.** а) Єдиний клас $\mathbb{Z}$; б) класами є множини $\{-a, a | a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$; в) $\{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2\}$; г) множини всіх дійсних чисел, у яких однакова дробова частина. **3.** а) Ні, оскільки дві підмножини мають спільний елемент; б) ні, оскільки об'єднання підмножин не дорівнює G; в) ні, оскільки серед підмножин немає жодної підгрупи; г) так, утворює лівий розклад групи G за підгрупою $\{e, s_1\}$. **4.** $H, \{s_1, s_2, s_3\}$. **5.** 1,3,41. **6.** Всі підгрупи є нормальними дільниками. Вони мають вигляд $H_{a,b,c,d} = \left\{ \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} | k \in \mathbb{Z} \right\}$ де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **7.** Так. **8.** Два: обидві тривіальні підгрупи.

9. а),в) – так; б),г) – ні. **10.** а) Суміжними класами є множини комплексних чисел z, у яких сталими є дробові частини Rez і Imz; б) класами є множини комплексних чисел, які лежать на колах радіуса $r > 0$; в) класами є множини комплексних чисел, які лежать на променях, що виходять з початку координат; г) класами є множини комплексних чисел, які лежать на прямих, що проходять через початок координат, без початку координат.

11. Група самосуміщень квадрата є такою $G = \{e, r_1, r_2, r_3, s_a, s_b, s_m, s_n\}$. Тут e, r_1, r_2, r_3 – повороти навколо центра квадрата на $0^0, 90^0, 180^0, 270^0$ відповідно, s_a, s_b – симетрії відносно його діагоналей і s_m, s_n – симетрії відносно серединних перпендикулярів до сторін. а) Лівий і правий розклади однакові: $G = \{e, r_1, r_2, r_3\} \cup \{s_a, s_b, s_m, s_n\}$; б) лівий розклад: $G = \{e, s_m\} \cup \{r_1, s_b\} \cup \{r_2, s_n\} \cup \{r_3, s_a\}$; правий розклад: $G = \{e, s_m\} \cup \{r_1, s_a\} \cup \{r_2, s_n\} \cup \{r_3, s_b\}$; в) лівий розклад: $G = \{e, s_a\} \cup \{r_1, s_m\} \cup \{r_2, s_b\} \cup \{r_3, s_n\}$; правий розклад: $G = \{e, s_a\} \cup \{r_1, s_n\} \cup \{r_2, s_b\} \cup \{r_3, s_m\}$.

12. Лівий і правий розклади однакові: $G = \{-1, 1\} \cup \{-i, i\} \cup \{-j, j\} \cup \{-k, k\}$.

13. Нехай $G = [g]$ і елемент g має порядок 8. Підгрупами цієї групи є тривіальні та $\{e, g^4\}$ і $\{e, g^2, g^4, g^6\}$. Ліві і праві розклади однакові і є такими: $G = \{e, g^4\} \cup \{g, g^5\} \cup \{g^2, g^6\} \cup \{g^3, g^7\}$; $G = \{e, g^2, g^4, g^6\} \cup \{g, g^3, g^5, g^7\}$. **14.** а) 125; б) 243. **15.** $[a] = [a^4] \cup [a^4]a \cup [a^4]a^2 \cup [a^4]a^3$. **16.** а) Ні; б) так; в) так; г) ні. **17.** $H_1 = \{e\}; H_2 = S_3; H_3 = \{e, \alpha, \beta\}$, де $\alpha^2 = \beta, \beta^2 = \alpha, \alpha\beta = \beta\alpha = e$ (дивись відповідь до задачі № 22 з §3). **18.** а) Циклічна група; б) циклічна група і четверна група Клейна; в) циклічна група і група $\{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ така, що $a^3 = b^2 = e$, $(ab)^2 = e$; г) 5 груп: циклічна; $\{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$, де $a^4 = b^2 = e, ab = ba$; $\{e, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$, де $a^2 = b^2 = c^2 = e, ab = ba, ac = ca, bc = cb$; група діедра; група кватерніонів.

21. В задачі 29 попереднього параграфа було показано, що $D = M \cap H$ є підгрупою в G, а отже, і в H. Нехай $d \in D$. Тоді для кожного $h \in H$ маємо $hdh^{-1} \in M$ (оскільки M є нормальним дільником в G) і $hdh^{-1} \in H$. Це означає, що $hdh^{-1} \in M \cap H$, тобто $hDh^{-1} \subset D$.

Навпаки, нехай $d \in D$. Тоді для кожного $h \in H$ маємо $d = (hh^{-1})d(hh^{-1}) = h(h^{-1}dh)h^{-1} \in hDh^{-1}$, тобто $D \subset hDh^{-1}$. Таким чином,

$D = hDh^{-1}$ та $hD = Dh$ для кожного $h \in H$.

§ 1.5. Фактор-група. Гомоморфізми груп

1. $G/G = \{G\}$; $G/\{e\} = \{\{g\}|g \in G\}$. **2.** а) 3; б) 2; в) 5; г) безліч; фактор-група має вигляд $\mathbb{Z}[i]/\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z} + bi|b \in \mathbb{Z}\}$. **3.** а), б), в) – істинні; г) хибне. **4.** а) 2; б) 2; в) 2; г) безліч способів. **5.** а),в), д) – гомоморфізми і $\ker f = \{z||z| = 1\}$; е) гомоморфізм і $\ker f = \mathbb{C}\setminus\{0\}$; б),г) – не гомоморфізми.

7. $S_n/A_n = \{A_n, S_n \setminus A_n\}$. **8.** Нехай $G = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{11}\}$. Тоді $H = \{\varepsilon_0, \varepsilon_4, \varepsilon_8\}$ і три інших класи є такими: $H_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_9\}$, $H_2 = \{\varepsilon_2, \varepsilon_6, \varepsilon_{10}\}$, $H_3 = \{\varepsilon_3, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}\}$. Таблиця Келі для фактор-групи G/H є такою:

$*$	H	H_1	H_2	H_3
H	H	H_1	H_2	H_3
H_1	H_1	H_2	H_3	H
H_2	H_2	H_3	H	H_1
H_3	H_3	H	H_1	H_2

.

9. а) $4\mathbb{Z}/16\mathbb{Z} = \{16\mathbb{Z}, 16\mathbb{Z}+4, 16\mathbb{Z}+8, 16\mathbb{Z}+12\}$; б) $5\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \{15\mathbb{Z}, 15\mathbb{Z}+5, 15\mathbb{Z}+10\}$; в) $3\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} = \{24\mathbb{Z}, 24\mathbb{Z}+3, 24\mathbb{Z}+6, 24\mathbb{Z}+9, 24\mathbb{Z}+12, 24\mathbb{Z}+15, 24\mathbb{Z}+18, 24\mathbb{Z}+21\}$ г) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, n\mathbb{Z}+2, \ldots, n\mathbb{Z}+(n-1)\}$. **10.** $G/H = \{H_a|a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$, де $H_a = \{f_{a,b}|b \in \mathbb{R}\}$. **11.** $f(zH) = \frac{z}{|z|}$.

12. Нехай $G = \{\varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_1^{12}\}$ і $G' = \{\omega_1, \omega_1^2, \omega_1^3\}$ – групи коренів 12-го і 3-го степеня з одиниці відповідно. Шуканий гомоморфізм єдиний і задається рівністю $f(\varepsilon_1^n) = \omega_1^r$, де r є остача від ділення n на 3. Його ядро $\ker f = \{1, \varepsilon_1^3, \varepsilon_1^6, \varepsilon_1^9\}$.

13. а) Таких гомоморфізмів є 4: $f_1(\varepsilon_1^k) = 1$, $f_2(\varepsilon_1^k) = \varepsilon_1^k$, $f_3(\varepsilon_1^k) = \varepsilon_1^{2k}$, $f_4(\varepsilon_1^k) = \varepsilon_1^{3k}$; б) таких гомоморфізмів 2: $f_1(g^k) = 1$ і $f_2(g^{2n}) = 1, f_2(g^{2n+1}) = \varepsilon_1^5$; в) таких гомоморфізмів 2: $f_1(g^k) = 1$ і $f_2(g^{3n+r}) = \varepsilon_1^{5r}$; г) такий гомоморфізм один: $f(g^{5n+r}) = \varepsilon_1^{5r}$. **14.** $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$, де $x \in \mathbb{R}$. **15.** $f(A) = \frac{Re(\delta_A)+Im(\delta_A)i}{|\delta_A|}$, де δ_A – визначник A. **16.** $f_k(z) = kz$, де $k, z \in \mathbb{Z}$.

17. Нехай $GM_n(\mathbb{R})$ – мультиплікативна група всіх невироджених матриць n-го порядку над полем $\mathbb{R}$ та H – підмножина всіх таких матриць, визначник яких дорівнює одиниці. Доведемо спочатку, що H є нормальним дільником в $GM_n(\mathbb{R})$. Якщо $A, B \in H$, тобто $|A| = |B| = 1$, то $|AB| = |A||B| = 1$ і $AB \in H$. Крім того, для матриці A існує обернена A^{-1} і $|E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |A^{-1}| = 1$, тобто $A^{-1} \in H$. Отже, H є підгрупою. Далі, для будь-яких матриць $A \in GM_n(\mathbb{R})$ і $B \in H$ маємо $|ABA^{-1}| = |A||B||A^{-1}| = 1$, тобто $ABA^{-1} \in H$ і $AHA^{-1} \subset H$. З останнього включення слідує, що $H \subset A^{-1}HA$, тобто H є нормальним дільником. Відзначимо, що всі матриці, які належать до одного суміжного класу за підгрупою H, мають однакові визначники.

Розглянемо фактор-групу $(GM_n(\mathbb{R})/H;*)$. Задамо відображення $f : GM_n(\mathbb{R})/H \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ рівністю $f(AH) = |A|$ для кожного лівого суміжного класу групи $GM_n(\mathbb{R})$ за підгрупою H. Оскільки для кожного $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ можна вказати матрицю, визначник якої дорівнює a, то дане відображення є сюр'єкцією. З припущення про те, що $f(AH) = f(BH)$, випливає $|A| = |B|$, тобто $AH = BH$, і тому f є бієкцією. Нарешті

$$f(AH * BH) = f((AB)H) = |AB| = |A||B| = f(AH)f(BH),$$

тобто задане відображення f є ізоморфізмом. Отже, дані групи ізоморфні.

21. Ні, невірне. **24.** $\ker f = \mathbb{Z}$. **25.** Адитивна група $(\mathbb{Z};+)$ є підгрупою і нормальним дільником групи $(\mathbb{Q};+)$. Розглянемо фактор-групу $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z};\oplus)$. Операція в ній визначається рівністю $(r_1+\mathbb{Z})\oplus(r_2+\mathbb{Z}) = (r_1+r_2)+\mathbb{Z}$ для всіх чисел $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, а всі числа з одного суміжного класу мають однакову цілу частину. Розглянемо довільний суміжний клас $r+\mathbb{Z}$. Якщо $r = \frac{p}{q}$ – нескоротний дріб, то $rq = p$ і $\underbrace{(r+\mathbb{Z})\oplus(r+\mathbb{Z})\oplus\cdots\oplus(r+\mathbb{Z})}_{q} = \mathbb{Z}$.

Це означає, що клас $r+\mathbb{Z}$ має скінченний порядок q.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо $m \in \mathbb{Z}$ таке, щоб дріб $\frac{m}{n}$ був нескоротним. Тоді клас $\frac{m}{n}+\mathbb{Z}$ має порядок n і він єдиний такого порядку. Підгрупа $[\frac{m}{n}+\mathbb{Z}]$ є єдиною циклічною підгрупою n-го порядку фактор-групи $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z};\oplus)$.

Розділ 2: Векторні простори

§ 2.1. Векторний простір. Підпростори

1. $(\forall \vec{a} \in L, \alpha \in P)(0\vec{a} = \vec{0} \wedge \alpha\vec{0} = \vec{0})$. **2.** Якщо $\alpha\vec{a} = \vec{0}$, то $\alpha = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$. **3.** $-(\alpha\vec{x})$. **4.** Всі. **5.** а),в),г),д),е) – так; б) ні. **7.** а),б) – ні; в),г) – так. **8.** Так. Множення елементів a абелевої ненульової групи A на скаляри α з поля P можна визначити так: $\alpha a = 0$.

9. а),б),в),г) – так. **10.** а) – не можна; б) – зовнішню операцію множення на скаляри поля $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ в множині $\{1,\varepsilon_1,\varepsilon_1^2\}$ можна задати так:

	1	ε_1	ε_1^2
$\overline{0}$	1	1	1
$\overline{1}$	1	ε_1	ε_1^2
$\overline{2}$	1	ε_1^2	ε_1

. **11.** $a = -1$. **12.** а),б) – так; в),г) – ні.

13. Підпросторами є W_3, $\{\vec{0}\}$ і множини векторів, кінці яких лежать на окремих прямих та на площинах, що проходять через початок координат. **14.** а),б),г) – так; в) – ні.

15. Для доведення достатньо перевірити, що сума многочленів певного виду і добуток будь-якого числа на многочлен даного виду є многочленом цього ж виду. Доведемо, наприклад г). Якщо $f'''(x) = 0$ і $g'''(x) = 0$, то $(f+g)'''(x) = f'''(x) + g'''(x) = 0 + 0 = 0$ і $(\lambda f)'''(x) = \lambda f'''(x) = \lambda \cdot 0 = 0$. Отже, множина многочленів з задачі г) є підпростором.

§ 2.2. Базис і розмірність векторного простору

2. Підмножина $M_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ є лінійно залежною, якщо вона містить нульовий вектор або $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ для деякого $\lambda \in P$. **3.** Так. Наприклад, множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує 4, є підпростором $\mathbb{C}_{[a,b]}$ розмірності 5. **4.** Будь-якої скінченної розмірності. **5.** Розмірність рівна 2, а базисами можуть бути 3 підмножини: $\{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{0})\}, \{(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1})\}, \{(\overline{1},\overline{1}),(\overline{1},\overline{0})\}$. **6.** Від 0 до 20. **7.** а), б), в), г) – ні.

8. а) $\lambda \neq \pm 1$; б) $\lambda \neq \pm 1, \lambda \neq 0$; в) $\lambda \neq -1$; г) $\lambda \neq (-1)^n$. **9.** а) Нескінченновимірний; б) нескінченновимірний; в) 2; г) 1. **10.** а) 4; один з базисів: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) 8; один з базисів: $E_1, E_2, E_3, E_4, iE_1, iE_2, iE_3, iE_4$. **11.** Розмірність дорівнює 1; один з базисів: $\vec{a} = (1, 2, 1, 2, \ldots)$. **12.** а) Розмірність дорівнює n; один з базисів: $x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1, \ldots, x^n - 1$; б) розмірність дорівнює 3; один з базисів: $1, x, x^2$; в) розмірність дорівнює n; один з базисів: $x + 2, x^2 + 2, \ldots, x^n + 2$; г) розмірність дорівнює n; один з базисів: $f_1 = (2^{n-1}+1)x^n - (2^n+1)x^{n-1}, f_2 = (2^{n-2}+1)x^n - (2^n+1)x^{n-2}, \ldots, f_{n-1} = 5^n x^n - (2^n+1)x, f_n = 2x^n - (2^n+1)$. **13.** а) Нескінченновимірний; б) 9; всі матриці M_{ij}, в яких елемент $a_{ij} = \overline{1}$, а всі інші – $\overline{0}$; в) 15; всі матриці M_{ij}, в яких елементи $a_{ij} = a_{ji} = 1$, а всі інші – 0; г) $\frac{n(n-1)}{2}$; всі матриці $M_{ij} (i \neq j)$, в яких $a_{ij} = -a_{ji} = 1$, а всі інші – 0.

14. Розмірність рівна 3. Дійсно, $\mathfrak{P}(M_3) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Множина $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ є лінійно незалежною, оскільки жоден з її елементів не може дорівнювати симетричній різниці двох інших. Крім того, $\varnothing = \overline{0}\{1\}$, $\{1,2\} = \{1\} \div \{2\}$, $\{1,3\} = \{1\} \div \{3\}$, $\{2,3\} = \{2\} \div \{3\}$, $\{1,2,3\} = \{1\} \div \{2\} \div \{3\}$.

§ 2.3. Лінійна оболонка і лінійний многовид. Перетин і сума підпросторів

1. Так. **2.** а) Пряма, яка проходить через початок координат; б) якщо вектори колінеарні, то пряма, яка проходить через початок координат; якщо вектори неколінеарні, то вся площина; в) якщо всі три вектори колінеарні, то пряма, яка проходить через початок координат; якщо є пара неколінеарних векторів, то вся площина; г) якщо всі чотири вектори колінеарні, то пряма, яка проходить через початок координат; якщо є пара неколінеарних векторів, то вся площина. **3.** а) Пряма або вся площина; б) пряма, площина або весь простір. **4.** $U = \{(-y-z-t, y, z, t) | y, z, t \in \mathbb{R}\}$. **5.** $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$.

6. $\{x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_n = 0$. **7.** а) Так; б) перетин – так; сума і пряма сума – ні. **8.** Об'єднання підпросторів не є підпростором. **9.** а) $U+V = M_n(\mathbb{R}), U \cap V$ – всі діагональні матриці; б) $U+V = M_n(\mathbb{R}), U \cap V = \{O\}$. **10.** Так. **11.** а) Ні; б) може бути. **12.** $U_1 \cap U_2 \neq \{\vec{0}\}$. **13.** Ні. Якщо $\vec{a}+U_1 = \vec{b}+U_2$, то $U_1 = U_2$. Дійсно, $U_1 = (\vec{b}-\vec{a})+U_2$ і $(\vec{a}-\vec{b})+U_1 = U_2$. Звідки $\vec{b}-\vec{a} \in U_1, \vec{a}-\vec{b} \in U_2$. Тому $\vec{b}-\vec{a} \in U_2$ і $\vec{a}-\vec{b} \in U_1$. Отже, $(\vec{b}-\vec{a}) + U_2 = U_2 = U_1$.

14. а) Якщо U – підпростір L і $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in U$, то, за необхідною і достатньою умовою підпростору, для будь-яких скалярів $\lambda_i \in P$ вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$ є елементом U. Тому $V \subset U$, тобто V є найменшим відносно включення підпростором в L.

б) Якщо $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ – підпростори, які містять дані вектори, то серед них є також V. Тому $\bigcap U_i \subset V$. Оскільки $V \subset U_i$ для всіх підпросторів U_i, то $V \subset \bigcap U_i$. Отже, $V = \bigcap U_i$. **15.** Вони рівні.

16. а) $\dim L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = 3$; $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – базис; б) $\dim L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = 4$; $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ – базис; в) $\dim L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = 4$; $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ – базис; г) якщо $\alpha = \frac{1}{4}(7+11i)$, то $\dim L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = 3$; $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – базис; якщо $\alpha \neq \frac{1}{4}(7+11i)$, то $\dim L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = 4$; $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ – базис.

17. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_3 - x_5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_3 - x_4 - x_6 = 0, \\ -x_1 + x_3 + x_7 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

18. Так. $U \oplus V = \mathbb{R}^n$. **19.** а) $V = (-5, 0, 11) + L((4, 1, -5))$; б) $V = (-1, 2, 1, 0) + L((-2, 3, 1, 0), (3, -1, 0, 1))$. **20.** а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = -5; \end{cases}$ б) $\{x_2 - x_3 + x_4 = 3$. **21.** $\vec{a} - \vec{b} \in U + V$. **22.** Якщо $Q = \vec{a}_1 + L(\vec{a})$ і $S = \vec{b}_1 + L(\vec{b})$, то вони містяться у лінійному многовиді розмірності 2 тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}_1 - \vec{b}_1$ є лінійно незалежними. **23.** а) $(-1, 0, 0)$; б) спільного елемента немає; в) $(2, 3, -1, 2, -3)$; г) $(0, 1, -1, -2, -3)$. **24.** $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$. **25.** $\vec{c} = (2, 2, 2, 2)$. **26.** $S = \vec{a}_1 + L(\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k - \vec{a}_1)$.

27. Так, так. **28.** $V \subset U$. **29.** Нехай $A = \{f(x) | \deg f(x) \leqslant 1001\}$, $B = \{f(x) | 1001 < \deg f(x) \leqslant 2002\} \cup \{0\}$. Тоді $\mathbb{R}_{2002}[x] = A \oplus B$.

30. а) $\dim(L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + L(\vec{b}_1)) = 3$, $\dim(L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \cap L(\vec{b}_1)) = 1$; б) 3;1; в)3;2; г) 4;0.

31. а) Базис суми не може перевищувати 3. Оскільки $\vec{a}_1 = \frac{1}{2}(\vec{a}_2 + \vec{a}_3)$ і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_2$ лінійно незалежні, то їх можна взяти за базис суми. Розмірність кожної лінійної оболонки рівна 2 і за базиси можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ та $\vec{b}_2, \vec{b}_3$ відповідно. Базис перетину оболонок складається тільки з одного вектора. Будемо шукати його у виді $\vec{c} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = x_3\vec{b}_2 + x_4\vec{b}_3$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Її загальний розв'язок такий: $x_1 = 2x_4, \quad x_2 = x_4, \quad x_3 = 2x_4, \quad x_4 \in \mathbb{R}$, а одним із частинних розв'язків є $x_1 = x_3 = 2, \quad x_2 = x_4 = 1$. Тому $\vec{c} = (3, 5, 1)$. б) За базис суми можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$. Базис перетину складається з векторів $\vec{c}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{c}_2 = (2, 4, 1, -3)$. в) За базис суми можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}_3$. Базис перетину складається з векторів $\vec{c}_1 = (1, -1, 0, 0), \vec{c}_2 = (0, -1, 1, 0)$. г) За базис суми можна взяти вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}_2$. Базис перетину складається з векторів $\vec{c}_1 = (0, 1, 0, 0), \vec{c}_2 = (0, 2, 1, 1)$.

§ 2.4. Координати вектора. Зв'язок між базисами

1. У вибраному базисі простору L_n кожен вектор має n координат.

2. а) 8; б) 48. **3.** Права $\vec{i}, \vec{j}$ і ліва $\vec{j}, \vec{i}$ системи координат на площині відрізняються тільки порядком запису векторів у базисі. Відповідно у просторі L_n з кожного базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ можна утворити $n!$ нових базисів. **4.** $5 - 3i; (5, -3)$. **5.** Координатний рядок даної матриці є таким: $(2, 2, -2, 2)$. **6.** а) Тільки у випадку, коли це той самий базис; б) так; в) так. **7.** а) Поміняються місцями перший і останній рядки; б) поміняються місцями перший і останній стовпці; в) зміниться послідовність рядків на зворотну; г) матриця зміниться на симетричну відносно свого центра.

8. а) Ні, оскільки матриця не квадратна; б) ні, оскільки серед елементів матриці є комплексні числа; в) так. **9.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **10.** Нехай маємо

3 базиси простору L_n, T_1^2 – матриця переходу від першого до другого базису, T_1^3 – матриця переходу від першого до третього базису, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ і $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ – координатні рядки вектора $\vec{a}$ у першому, другому і третьому базисах відповідно. Тоді мають місце формули: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)T_1^2$ і $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)T_1^3$. З них маємо $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)T_1^2 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)T_1^3$ або $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)T_1^3(T_1^2)^{-1}$. Використовуючи тепер матриці, отримані при розвязуванні задач 8 а)–з), можна записати всі формули перетворення координат. Так, наприклад, при переході від базису $-\vec{i}, -\vec{j}$ до базису $-\vec{i} - \vec{j}, -\vec{i} + \vec{j}$ отримаємо формулу $(\beta_1, \beta_2) = (\gamma_1, \gamma_2) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Нехай координатний рядок матриці A у даному базисі має вид $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, тобто виконується рівність $A = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 + \alpha_4 B_4$. Порівнюючи матриці, отримуємо систему рівнянь: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 13, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 12, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -1, \\ \alpha_1 = -5, \end{cases}$ тобто $\alpha_1 = -5, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 11$. Отже, шуканий координатний рядок є $(-5, 4, 3, 11)$.

12. $T_a^b = T_1^b(T_1^a)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

13. Введемо в розгляд базис $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді $T_E^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_E^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $T_B^C = T_E^B(T_E^C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

14. а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **15.** а) $(2, -3, 1) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$(x,y,z) = (2,3,-1)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = (-\frac{5}{3}, \frac{17}{6}, \frac{13}{6}) = \frac{1}{6}(-10,17,13)$; б) $(x,y,z) = (3,0,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = (3,0,1)\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $(5,-1,-2)$; в) $(x,y,z,t) = (-1,1,2,1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$ $(-1,1,2,1)\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 & -2 \\ -6 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & -1 \\ 8 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}(11,6,20,2)$; г) $(x,y,z,t) =$ $(2,2,1,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (2,2,1,1)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$ $(-2,-3,4,1)$.

§ 2.5. Векторний простір з скалярним множенням. Процес ортогоналізації. Евклідовий простір

1. Випливають безпосередньо з означення операції скалярного множення векторів. **2.** а) Ні, оскільки $\vec{a}\vec{a} = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ і для вектора $\vec{a} = (1,2,1)$ отримаємо $\vec{a}\vec{a} = -2 < 0$; б) так; в) так; г) ні, оскільки для вектора $\vec{a} = (-1,2,0)$ маємо $\vec{a}\vec{a} = -4$. **3.** а) Ні, так, ні; б) так, ні, ні; в) ні, так; г) ні, так. **4.** а) -2; б) 220; в) $\frac{3n(n+1)}{2}$; г) $\frac{3n(3n+1)}{2}$. **5.** $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$. **6.** Так. **7.** а) Так; б) ні; в) ні; г) так. **8.** а) Знайдемо ранг системи векторів:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Отже, ранг рівний 3 і дана система векторів лінійно незалежна.

Застосуємо процес ортогоналізації. Виберемо вектор $\vec{c}_1 = \vec{a}_1$. Вектор $\vec{c}_2 = \lambda\vec{c}_1 + \vec{a}_2$ знайдемо так, щоб $\vec{c}_1\vec{c}_2 = 0$. Тому
$\lambda = -\frac{\vec{c}_1\vec{a}_2}{\vec{c}_1\vec{c}_1} = -\frac{4}{3}$ і $\vec{c}_2 = -\frac{4}{3}(1,1,-1) + (1,2,-1) = \frac{1}{3}(-1,2,1)$.

Тепер вектор $\vec{c}_3$ будемо шукати у виді $\vec{c}_3 = \alpha_1\vec{c}_1 + \alpha_2\vec{c}_2 + \vec{a}_3$ так, щоб $\vec{c}_1\vec{c}_3 = 0$ і $\vec{c}_2\vec{c}_3 = 0$. Підставляючи значення $\vec{c}_3$ у останні рівності по черзі, отримаємо: $\alpha_1 = -\frac{\vec{c}_1\vec{a}_3}{\vec{c}_1\vec{c}_1} = \frac{2}{3}$ і $\alpha_2 = -\frac{\vec{c}_2\vec{a}_3}{\vec{c}_2\vec{c}_2} = \frac{7}{6}$. Тоді $\vec{c}_3 = \frac{2}{3}(1,1,-1) +$

$\frac{7}{6}(-1,2,1)+(2,-3,1)=\frac{3}{2}(1,0,1)$. Таким чином, в процесі ортогоналізації ми отримали ортогональну систему векторів

$\vec{c}_1=(1,1,-1)$, $\vec{c}_2=\frac{1}{3}(-1,2,1)$, $\vec{c}_3=\frac{3}{2}(1,0,1)$. б) Дану систему векторів ортогоналізувати не можна, оскільки $\vec{a}_3=\vec{a}_1+\vec{a}_2$; в) дану систему векторів ортогоналізувати не можна, оскільки $\vec{a}_3=3\vec{a}_1$; г) $\vec{c}_1=\vec{a}_1$, $\vec{c}_2=\vec{a}_3$, $\vec{c}_3=\frac{1}{6}(-1,-1,2,0)$.

9. В процесі ортогоналізації знайдемо ортогональний базис $\vec{a}_1$, $\vec{a}_4$, $\vec{c}_3=\frac{1}{6}(-2,-1,0,1)$, $\vec{c}_4=\frac{2}{3}(0,1,1,1)$. Поділивши тепер кожен з цих векторів на його довжину, отримаємо ортонормований базис $\vec{b}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}_1$, $\vec{b}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{a}_4$, $\vec{b}_3=\sqrt{6}\vec{c}_3$, $\vec{b}_4=\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{c}_4$. **10.** Нехай $\vec{c}_1=1$. Оскільки $\int_{-1}^{1}xdx=0$, то візьмемо $\vec{c}_2=x$. Далі $\vec{c}_3=\lambda_1\vec{c}_1+\lambda_2\vec{c}_2+x^2$. Тоді $\lambda_1=-\frac{\int_{-1}^{1}x^2dx}{\int_{-1}^{1}xdx}=-\frac{1}{3}$, $\lambda_2=-\frac{\int_{-1}^{1}x^3dx}{\int_{-1}^{1}x^2dx}=0$ і $\vec{c}_3=-\frac{1}{3}+x^2$. Аналогічно $\vec{c}_4=\alpha\vec{c}_1+\beta\vec{c}_2+\gamma\vec{c}_3+x^3$. Тоді $\alpha=-\frac{\int_{-1}^{1}x^3dx}{\int_{-1}^{1}dx}=0$, $\beta=-\frac{\int_{-1}^{1}x^4dx}{\int_{-1}^{1}x^2dx}=-\frac{3}{5}$, $\gamma=-\frac{\int_{-1}^{1}(-\frac{1}{3}x^3+x^5)dx}{\int_{-1}^{1}(-\frac{1}{3}+x^2)^2dx}=0$ і $\vec{c}_4=-\frac{3}{5}x^2+x^3$. Отже, ортогоналізованим є базис 1, x, $-\frac{1}{3}+x^2$, $-\frac{3}{5}x+x^3$.

11. а) Так; $\vec{a}_3=(-16,-5,7)$; б) так; $\vec{a}_3=(-1,1,0,-2),\vec{a}_4=(0,0,1,0)$; в) так; $\vec{a}_3=(-1,2,1)$; г) так; $\vec{a}_3=(1,1,2,0),\vec{a}_4=(0,0,0,1)$.

12. а) $\vec{a}_2=\frac{1}{\sqrt{17}}(-4,1,0)$, $\vec{a}_3=\frac{1}{\sqrt{425}}(-2\sqrt{2},-8\sqrt{2},17)$; б) $\vec{a}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,0,-2)$, $\vec{a}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,3,1)$; в) $\vec{a}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(0,3,1)$, $\vec{a}_3=\frac{1}{\sqrt{160}}(10,\sqrt{6},-3\sqrt{6})$; г) $\vec{a}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,0,1)$, $\vec{a}_4=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-1,1)$.

13. а) $\frac{\vec{a}_1}{\sqrt{2}}$, $\frac{(3,3,6,8)}{\sqrt{118}}$; б) $\frac{\vec{a}_1}{\sqrt{10}}$, $\frac{(3,-3,2,2)}{\sqrt{26}}$, $\frac{(-1,-1,2,-2)}{\sqrt{10}}$.

14. а) $\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{5}$, $\cos B=\frac{10}{\sqrt{110}}$, $\cos C=\frac{3}{\sqrt{55}}$, $AB=\sqrt{10}$, $BC=\sqrt{11}$, $AC=\sqrt{5}$; б) $\angle A=90^\circ$, $\cos B=\frac{3}{5}$, $\cos C=\frac{4}{5}$, $AB=3$, $BC=5$, $AC=4$. **15.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

§ 2.6. Ортогональне доповнення до підпростору. Ізоморфізм векторних просторів

1. 1,2. **2.** Якщо $U\subset V$, то такого вектора не існує. Якщо $U\not\subset V$, то такий вектор існує. Його можна знайти так: візьмемо $\vec{a}\in U\setminus V$, розглянемо базис $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_k$ підпростору V і ортогоналізуємо лінійно незалежну систему векторів $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_k,\vec{a}$. Вектор $\vec{c}_{k+1}$ буде шуканим. **3.** Множини векторів, які лежать на взаємно перпендикулярних прямих і площинах, що проходять через початок координат. **4.** $U\cap V=\{\vec{0}\},U+V=U\oplus V$. **5.** Рівності а), б) випливають з означення ортогонального доповнення підпростору; в) $(U^{\perp})^{\perp}$ – це множина всіх векторів простору E_n, які ортогональні до векторів з $U^\perp$. Але всі вектори підпростору U є ортогональними до підпростору $U^\perp$. Тому $U \subset (U^\perp)^\perp$. Оскільки $E_n = U \oplus U^\perp = U^\perp + (U^\perp)^\perp$, то $\dim U + \dim U^\perp = \dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp = n$. Це означає, що підпростори U і $(U^\perp)^\perp$ мають однакову розмірність і базис, тобто $U = (U^\perp)^\perp$. **6.** $f(\vec{0})$ є нульовим вектором у T; вектор $f(-\vec{a})$ є протилежним до вектора $f(\vec{a})$ у просторі T. **8.** $n = m$.

9. Кожен вектор довільного базису U ортогональний до кожного вектора довільного базису в V. **10.** а) Одновимірний підпростір всіх многочленів, у яких рівні коефіцієнти; б) підпростір всіх непарних многочленів. **11.** а) $\vec{b} = (-1, 1, 2)$; б) $\vec{b}_1 = (-3, 5, 0, 1), \vec{b}_2 = (1, -1, 1, 0)$; в) $\vec{b}_1 = (-1, 1, 1, 0), \vec{b}_2 = (1, 2, 0, 1)$; г) $\vec{b}_1 = (3, 1, 0, -2), \vec{b}_2 = (-5, 0, 1, 3)$.

12. а) $\vec{a}_U = (\frac{8}{13}, \frac{12}{13})$, $\vec{a}_{U^\perp} = (-\frac{21}{13}, \frac{14}{13})$; б) $\vec{a}_U = \frac{5}{6}(1, -2, -1)$, $\vec{a}_{U^\perp} = \frac{1}{6}(1, -2, 5)$; в) $\vec{a}_U = 2(2, 1, 1, -1) - (1, 1, 3, 0) = (3, 1, -1, -2)$, $\vec{a}_{U^\perp} = (2, 1, -1, 4)$; г) Легко перевірити, що розмірність простору розв'язків U даної системи лінійних рівнянь дорівнює 2 і вектори $\vec{c}_1 = (0, -1, 1, 0)$, $\vec{c}_2 = (1, -2, 0, 1)$ утворюють його базис. Тоді $\vec{a} = \vec{a}_U + \vec{a}_{U^\perp}$ і $\vec{a}_U = x\vec{c}_1 + y\vec{c}_2$, тобто $\vec{a} = x\vec{c}_1 + y\vec{c}_2 + \vec{a}_{U^\perp}$. Помножимо останню рівність почленно скалярно на вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2$. Оскільки вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ ортогональні до підпростору $U^\perp$, то $\vec{c}_1\vec{a}_{U^\perp} = \vec{c}_2\vec{a}_{U^\perp} = 0$. Отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} \vec{a}\vec{c}_1 = x\vec{c}_1\vec{c}_1 + y\vec{c}_1\vec{c}_2, \\ \vec{a}\vec{c}_2 = x\vec{c}_1\vec{c}_2 + y\vec{c}_2\vec{c}_2, \end{cases}$ або $\begin{cases} x + y = -4, \\ x + 3y = 2. \end{cases}$ З останньої системи маємо $x = -7, y = 3$ і $\vec{a}_U = (3, 1, -7, 3)$, $\vec{a}_{U^\perp} = \vec{a} - \vec{a}_U = (5, 4, 4, 3)$. **13.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

14. а) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$; б) 1; в) Многовид розв'язків T даної системи лінійних рівнянь можна записати у виді $T = \vec{a}_0 + U$, де $\vec{a}_0 = (0, 0, 3)$ – один з розв'язків даної системи лінійних рівнянь і U – простір розв'язків відповідної однорідної системи лінійних рівнянь, базисом якого є $\vec{c}_1 = (1, 0, 1), \vec{c}_2 = (0, 1, 5)$. Тоді $\vec{a} - \vec{a}_0 = x\vec{c}_1 + y\vec{c}_2 + (\vec{a} - \vec{a}_0)_{U^\perp}$. Помножимо останню рівність почленно скалярно на вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2$. Оскільки вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2$ ортогональні до підпростору $U^\perp$, то $\vec{c}_1(\vec{a} - \vec{a}_0)_{U^\perp} = \vec{c}_2(\vec{a} - \vec{a}_0)_{U^\perp} = 0$. Отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = -3, \\ 5x + 26y = -18. \end{cases}$ Її розв'язком є $x = \frac{4}{9}$, $y = -\frac{7}{9}$. Тоді $\vec{a} - \vec{a}_0 = \frac{1}{9}(4, -7, -31)$ і $(\vec{a} - \vec{a}_0)_{U^\perp} = \frac{1}{9}(5, -11, -5)$. Нарешті шукана відстань є $|(\vec{a} - \vec{a}_0)_{U^\perp}| = \frac{\sqrt{171}}{9}$; г) 2.

Розділ: Лінійні оператори

§ 3.1. Властивості лінійних операторів. Матриця лінійного оператора

1. а) Так. $A_f = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; б) ні; в) так; $A_f = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; г) так; $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** а) Так; симетрія відносно бісектриси першого і третього координатних кутів; б) так; симетрія відносно початку координат або гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом -1; в) так; симетрія відносно осі Ox; г) так; симетрія відносно осі Oy; д) так; симетрія відносно бісектриси другого і четвертого координатних кутів; е) так; без назви.

3. а) Так; б) так. **4.** Всі є гомотетіями з коефіцієнтом $\lambda \in \mathbb{R}$. Матриця має вид (λ). **5.** $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **6.** $R_o^{\frac{7}{6}\pi}(\vec{a}) = (-1,2)\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{3})$. **7.** $f(\vec{x}) = (1,-1,1)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = (-3,-1,-1)$. **8.** а) У матриці поміняються місцями перший і останній рядки та перший і останній стовпці; б) Всі рядки матриці запишуться у зворотному порядку, а в кожному рядку елементи також будуть записані у зворотному порядку.

9. Ні. **10.** а) Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то він є лінійним (це нульовий оператор). Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то такий оператор не є лінійним, оскільки $f(2\vec{a}) \neq 2f(\vec{a})$. б) Так; $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) так; $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) так; $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $A_f^E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & -3 \\ -6 & 4 & -9 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. **12.** Так. Наприклад, у просторі $M_2(\mathbb{R})$ та базисі з попередньої задачі маємо $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **13.** а) Так; б) так; в) так; г) ні. **14.** Так, єдиний. **15.** а) $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A_f = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A_f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; д) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; е) $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, якщо $\vec{i}$ переходить в $\vec{j}$, і $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, якщо $\vec{j}$ переходить в $\vec{i}$. **16.** $A_f^e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **17.** $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **18.** Кожний лінійний оператор цього простору є піднесенням до фіксованого для нього дійсного степеня всіх додатних дійсних чисел.

19. $A_f^e = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $A_f^a = A_f^b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. **20.** а) $f(\vec{x}) = (2, -2, 2)$; б) $f(\vec{x}) = (-6, -6, 2)$; в) $f(\vec{x}) = (11, 8, -1, 12)$; г) $f(\vec{x}) = (-8, -7, -15, -42)$. **21.** За відомою формулою маємо $A_f^b = T_a^b A_f^a (T_a^b)^{-1}$. Оскільки $T_a^b = T_e^b (T_e^a)^{-1}$, $T_e^a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ і $T_e^b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, то обчислюємо $(T_e^a)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Тоді $T_a^b = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Далі $(T_a^b)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Нарешті $A_f^b = T_a^b A_f^a (T_a^b)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix} 11 & 13 & 51 \\ -4 & 28 & 24 \\ 7 & -7 & 27 \end{pmatrix}$. **22.** а) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

§ 3.2. Операції над лінійними операторами

1. Гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом $\alpha\lambda$. **2.** а) Поворот на кут $\alpha+\beta$; б) Поворот на кут $\alpha+\beta$. **3.** αA_f^a. **4.** $A_{f+g} = A_f + A_g = A_{g+f}$, $A_{f-g} = A_f - A_g$, $A_{g-f} = A_g - A_f$, $A_{f\circ g} = A_g A_f$, $A_{g\circ f} = A_f A_g$. **5.** $\dim L_1^* = 1$. **6.** а) Ні; б) так; в) так. **7.** $A_{f^2\circ g^2} = (A_g^a)^2(A_f^a)^2$; $A^a_{\alpha^{-1}f^2} = \alpha^{-1}(A_f^a)^2$. **8.** $(f+g)((x_1,x_2,x_3)) = (2x_2+x_3, 2x_3, 2x_1-x_2)$; $(fg)((x_1,x_2,x_3)) = g(f(x_1,x_2,x_3)) = g((x_2,x_3,x_1)) = (x_1+x_3, x_1, x_2-x_3)$; $(gf)((x_1,x_2,x_3)) = f(g(x_1,x_2,x_3)) = f((x_2+x_3,x_3,x_1-x_2)) = (x_3, x_1-x_2, x_2+x_3)$. **9.** Відомо, що $A^e_{3f-2g} = A^e_{3f} - A^e_{2g} = 3A^e_f - 2g^e$. Крім того, з $A_f^a = T_e^a A_f^e (T_e^a)^{-1}$ маємо $A_f^e = (T_e^a)^{-1} A_f^a T_e^a$. Аналогічно $A_g^e = (T_e^b)^{-1} A_g^b T_e^b$. Але $T_e^a = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ і $T_e^b = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Тепер обчислюємо послідовно $(T_e^a)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ і $(T_e^b)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Далі $A_f^e = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ і $A_g^e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ та нарешті $A^e_{3f-2g} = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

10. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. **11.** $A_{fg} = A_{gf} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$. **12.** а) $A^e_{f+g} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^e_{gf} = \begin{pmatrix} 3 & 17 & -6 \\ 1 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A^e_{f+g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A^e_{gf} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & 8 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$. **13.** а) Так; б) ні. **24.** Індекс нільпотентності рівний 4.

§ 3.3. Область значень і ядро, ранг і дефект лінійного оператора

1. $Im\,e = L$, $Ker\,e = \{\vec{0}\}$, $Im\,o = \{\vec{0}\}$, $Ker\,o = L$. Образ і ядро цих операторів не залежать від поля, над яким розглядається векторний простір. **2.** Ранг e дорівнює $\dim L$, а дефект рівний 0. Ранг o дорівнює 0, а дефект рівний $\dim L$. **3.** а) Перші k рядків містять тільки нулі, а інші – лінійно незалежні; б) перші k рядків лінійно незалежні а інші – містять тільки нулі. **4.** а) $Imf = \{\alpha\vec{j} | \alpha \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha\vec{i} | \alpha \in \mathbb{R}\}$, ранг і дефект рівні 1; б) $Imf = \{\alpha\vec{k} | \alpha \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, ранг рівний 1, а дефект 2. **5.** $Imf = \{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha\vec{k} | \alpha \in \mathbb{R}\}$, ранг рівний 2, а дефект 1. **6.** Образ W_3, ядро $\{\vec{0}\}$, ранг 3, дефект 0. **7.** Образ W_3, ядро $\{\vec{0}\}$, ранг 3, дефект 0. **8.** Образ $\mathbb{R}_1[x]$, ядро $\mathbb{R}$. **9.** а) Ні; б) так; в) так. **10.** Дивись задачу № 3а. **11.** Лінійний оператор диференціювання у просторі $\mathbb{R}_2[x]$.

12. а) $Imf = U$, $Kerf = V$, $rangf = dimU$, $defectf = dimV$; б) $Imf = U$, $Kerf = V$, $rangf = dimU$, $defectf = dimV$.

13. а) Ранг рівний 1, а дефект – 2; $Imf = \{\alpha(1,0,0)|\alpha \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)|\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$; б) ранг рівний 2, а дефект – 1; $Imf = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,0,1)|\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha(0,1,0)|\alpha \in \mathbb{R}\}$; в) ранг рівний 3, а дефект – 1; $Imf = \{\alpha(1,0,0,0) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(0,0,1,0)|\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha(0,1,0)|\alpha \in \mathbb{R}\}$; г) ранг рівний 4, а дефект – 0; $Imf = \mathbb{R}, Kerf = \{\vec{0}\}$.

14. $Im\,f = \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $Ker\,f = \mathbb{R}$, ранг рівний $n-1$, а дефект – 1. **15.** f – похідна; $g = 3f$.

16. а) Ранг і дефект рівні 1; $Imf = \{\alpha(2,3)|\alpha \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{(2\alpha,\alpha)|\alpha \in \mathbb{R}\}$; б) ранг рівний 1, а дефект – 3; $Imf = \{(4\alpha,0)|\alpha \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{(0,\alpha,\beta,\gamma)|\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$; в) ранг рівний 1, а дефект – 2; $Imf = \{\alpha(1,1,1)|\alpha \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha(1,1,0) + \beta(-2,0,1)|\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$; г) ранг рівний 3, а дефект – 1; $Imf = \{\alpha(1,0,1,0)+\beta(-1,1,-1,1)+\gamma(-1,0,1,-1)|\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha(1,1,-1,0)|\alpha \in \mathbb{R}\}$; д) ранг рівний 2, а дефект – 0; $Imf = \{\alpha(1,1) + \beta(0,1)|\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\vec{0}\}$; е) ранг рівний 2, а дефект – 1; $Imf = \{\alpha(1,2,3) + \beta(0,0,1)|\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha(-1,1,6)|\alpha \in \mathbb{R}\}$; є) ранг рівний 3, а дефект – 0; $Imf = \{\alpha(1,0,3) + \beta(2,1,-3) + \gamma(-2,0,1)|\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\vec{0}\}$; ж) ранг і дефект рівні 2; $Imf = \{\alpha(1,-2,1,2) + \beta(2,1,0,1)|\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}, Kerf = \{\alpha(-1,-1,1,0) + \beta(-2,-1,0,1)|\alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.

17. $Ker(e-f) = Im\,f$, $Ker\,f = Im\,(e-f)$. **18.** а) Є виродженим, оскільки його матриця $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ у базисі $1, x, x^2$ є виродженою; б) є невиродженим, оскільки підпростір $L(\sin x, \cos x)$ простору $C_{[a,b]}$ має розмірність 2 і одним з його базисів є множина векторів-функцій $\{\sin x, \cos x\}$, а в цьому базисі матриця оператора диференціювання є $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, тобто невиродженою.

19. а) Так; $A_f^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) так; $A_f^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) так; $A_f^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) так; $A_f^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; д) так; $A_f^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; е) ні. **20.** Матриця оберненого оператора є $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а аналітично його можна задати так: $f(\alpha \sin x + \beta \cos x) = \beta \sin x - \alpha \cos x$.

§ 3.4. Інваріантні підпростори. Власні вектори і власні значення лінійного оператора

1. Всі підпростори. **2.** а) Тривіальні та $U = \{\lambda\vec{i}|\lambda \in \mathbb{R}\}, U = \{\lambda\vec{j}|\lambda \in \mathbb{R}\}$; б) тривіальні та множина всіх векторів, які лежать на цій прямій; в) якщо $\alpha \neq k\pi$, то тільки тривіальні; якщо $\alpha = k\pi$, то будь-який підпростір; г) будь-який підпростір.

3. а) Множини всіх векторів, які лежать на кожній прямій, що проходить через початок координат і лежить в площині xOy; множина всіх векторів, які лежать на осі Oz; множина всіх векторів, які лежать на площині xOy, та тривіальні підпростори;

б) множина всіх векторів, які лежать на осі Oy; множини всіх векторів, які лежать на кожній прямій, що проходить через початок координат і лежить в площині xOz; множина всіх векторів, які лежать на площині xOz, та тривіальні підпростори;

в) множина всіх векторів, які лежать на даній прямій; множини всіх векторів, які лежать на кожній прямій, що проходить через початок координат і лежить в площині перпендикулярній до даної прямої в початку координат, та тривіальні підпростори;

г) множина всіх векторів, які лежать на даній площині; множини всіх векторів, які лежать на кожній прямій, що проходить через початок координат і лежить в даній площині; множина всіх векторів, які лежать на прямій, що проходить через початок координат і перпендикулярна до даної площини в початку координат, та тривіальні підпростори;

д) якщо $\alpha \neq k\pi$, то множина всіх векторів, які лежать на площині zOy, множина всіх векторів, які лежать на осі Ox, та тривіальні підпростори; якщо $\alpha = 2k\pi$, то будь-який підпростір; якщо $\alpha = (2k+1)\pi$, то множина всіх векторів, які лежать на площині yOz, множина всіх векторів, які лежать на осі Ox, множини всіх векторів, які лежать на кожній прямій, що проходить через початок координат і лежить в площині yOz, та тривіальні підпростори;

е) множина всіх векторів, які лежать на даній прямій, та тривіальні підпростори.

4. $\mathbb{R}_k[x]$, $k \leqslant n$. **5.** Всі власні значення – це діагональні елементи матриці оператора. **6.** Одне. **7.** Від одного до n лінійно незалежних. **8.** а) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda(\lambda-1) = 0$; б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda^2 - \lambda = 0$; в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$; г) $\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$, $(\alpha-\lambda)^2 = 0$.

9. а) Всі вектори виду $(0,0,\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ і $(\alpha,\beta,0)$, де $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0$; б) всі вектори виду $(0,\alpha,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ і $(\alpha,0,\beta)$, де $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0$; в) всі вектори виду (α,α,α), де $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; г) всі вектори виду $(\alpha,-\alpha,0)$,$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ і (α,α,β), де $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha\beta \neq 0$; д) якщо $\alpha \neq k\pi$, то всі вектори виду $(\alpha,0,0)$,$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; якщо $\alpha = k\pi$, то всі ненульові вектори; е) всі вектори виду (α,α,α), де $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

10. $1, -2$. **11.** а) $(\lambda-2)^2((\lambda-3)^2-1)=0$; б) $(4\lambda-15)(\lambda^2-12\lambda+35)=0$. **12.** а) Тільки тривіальні; б) $L((1, 1+\sqrt{3}))$, $L((1, 1-\sqrt{3}))$ та тривіальні підпростори. **13.** 2^n. **14.** Всі чотири оператори мають однакові власні значення: $\lambda_{1,2,3}=2$. Ситуація з власними векторами є іншою. а) Будь-який ненульовий вектор простору L_3 є власним вектором лінійного оператора f; б) власними векторами лінійного оператора g є множина векторів $U=\{(\alpha,0,\beta)|\alpha\neq 0 \vee \beta\neq 0\}$; в) власними векторами лінійного оператора h є множина векторів $U=\{(\alpha,0,0)|\alpha\neq 0\}$; г) власними векторами лінійного оператора t є множина векторів $U=\{(\alpha,0,0)|\alpha\neq 0\}$.

15. а) Власними значеннями є $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1=\alpha(1,1)$ і $\vec{a}_2=\alpha(2,5)$, де $\alpha\neq 0$;

б) власними значеннями є $\lambda_1=0, \lambda_2=3$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1=\alpha(2,1)$ і $\vec{a}_2=\alpha(1,2)$, де $\alpha\neq 0$;

в) власними значеннями є $\lambda_{1,2}=3$; йому відповідає один власний вектор $\vec{a}=\alpha(0,1)$, де $\alpha\neq 0$;

г) власними значеннями є $\lambda_1=2, \lambda_2=1, \lambda_3=-1$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1=\alpha(1,-1,1)$, $\vec{a}_2=\alpha(-2,1,1)$ і $\vec{a}_3=\alpha(-1,0,1)$, де $\alpha\neq 0$;

д) власними значеннями є $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=1$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1=\alpha(1,-2,1)$ і $\vec{a}_3=\alpha(3,-3,1)$, де $\alpha\neq 0$;

е) власними значеннями є $\lambda_1=1, \lambda_{2,3,4}=3$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1=\alpha(0,0,-1,1)$ і $\vec{a}_2=\alpha(0,1,1,1)$, $\vec{a}_3=\alpha(0,1,0,0)$, де $\alpha\neq 0$;

є) власними значеннями є $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1=\alpha(-2,1,0)$ і $\vec{a}_3=\alpha(-1,0,1)$, де $\alpha\neq 0$;

ж) власними значеннями є $\lambda_1=1, \lambda_{2,3}=2$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1=\alpha(1,-1,1)$ і $\vec{a}_2=\alpha(-1,1,0)$, $\vec{a}_3=\alpha(-1,0,1)$, де $\alpha\neq 0$;

з) власними значеннями є $\lambda_1=0, \lambda_2=4$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1=\alpha(1,1,1,-2)$ і $\vec{a}_2=\alpha(1,-3,-5,-10)$, де $\alpha\neq 0$.

16. Власним значенням є число 0, а власними векторами є всі многочлени нульового степеня, тобто відмінні від нуля дійсні числа.

17. а) *Розв'язання.* Задача знаходження всіх інваріантних щодо лінійного оператора f одновимірних підпросторів векторного простору L_n рівносильна задачі знаходження власних векторів для f. Якщо базис простору L_n складається з власних векторів оператора f, то всі нетривіальні підпростори простору L_n, які інваріантні щодо оператора f, дістанемо шляхом утворення лінійних оболонок всіх можливих підмножин базису з власних векторів оператора f. Власними векторами даного лінійного оператора є $\vec{a}_1=(1,-2,1), \vec{a}_2=(1,0,2), \vec{a}_3=(0,1,1)$. Тому інваріантними щодо лінійного оператора f є підпростори $L(\vec{a}_1)$, $L(\vec{a}_2)$, $L(\vec{a}_3)$, $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, $L(\vec{a}_1,\vec{a}_3)$, $L(\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ та тривіальні – $\{\vec{0}\}$, L_3.

б) Власними векторами даного лінійного оператора є $\vec{a}_1 = (-1,1,-1), \vec{a}_2 = (1,0,2), \vec{a}_3 = (0,1,2)$. Тому інваріантними щодо лінійного оператора f є підпростори $L(\vec{a}_1)$, $L(\vec{a}_2)$, $L(\vec{a}_3)$, $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, $L(\vec{a}_1,\vec{a}_3)$, $L(\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ та тривіальні – $\{\vec{0}\}$, L_3;

в) власними векторами даного лінійного оператора є $\vec{a}_1 = (1,1,0), \vec{a}_2 = (1,0,1), \vec{a}_3 = (1,2,0)$. Тому інваріантними щодо лінійного оператора f є підпростори $L(\vec{a}_1)$, $L(\vec{a}_2)$, $L(\vec{a}_3)$, $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, $L(\vec{a}_1,\vec{a}_3)$, $L(\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ та тривіальні – $\{\vec{0}\}$, L_3;

г) власними векторами даного лінійного оператора є $\vec{a}_1 = (-1,1,0), \vec{a}_2 = (-1,0,1), \vec{a}_3 = (1,1,1)$. Тому інваріантними щодо лінійного оператора f є підпростори $L(\vec{a}_1)$, $L(\vec{a}_2)$, $L(\vec{a}_3)$, $L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, $L(\vec{a}_1,\vec{a}_3)$, $L(\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ та тривіальні – $\{\vec{0}\}$, L_3. **18.** а) Інваріантними щодо обох лінійних операторів є лінійна оболонка $L((1,0,2))$ та тривіальні підпростори $\{\vec{0}\}$, L_3; б) інваріантними щодо обох лінійних операторів є тільки тривіальні підпростори $\{\vec{0}\}$, L_3. **21.** $-4E$. Дійсно, характеристичне рівняння матриці A є $\lambda^3 - 2\lambda + 1 = 0$. Тому має місце рівність $A^3 - 2A + E = O$. Звідки $(A-E)(A^2 + A - E) = O$. Оскільки $A^2 + A - E \neq O$, то $A - E = O$. **22.** Характеристичне рівняння матриці A є $\lambda^3 - 6\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$. Тому має місце рівність $A^3 - 6A^2 + A + 6E = O$. Звідки $A(-\frac{1}{6})(A^2 - 5A + E) = E$ і $A^{-1} = -\frac{1}{6}(A^2 - 6A + E) = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 10 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **24.** Нехай $A = A^t \in M_n(\mathbb{R})$. Легко перевірити, що $|A - \lambda E| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $|A - \overline{\lambda} E| = 0$. Після цього перевіряємо, що $\vec{x}A = \lambda\vec{x}$ тоді і тільки тоді, коли $\overline{\vec{x}}A = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}}$. Далі перевіряємо, що $(\overline{\vec{x}}A)\vec{x} = \overline{\vec{x}}(\vec{x}A)$. Але $(\overline{\vec{x}}A)\vec{x} = (\overline{\lambda}\,\overline{\vec{x}})\vec{x} = \overline{\lambda}(\overline{\vec{x}}\vec{x})$ та $\overline{\vec{x}}(\vec{x}A) = \overline{\vec{x}}(\lambda\vec{x}) = \lambda(\overline{\vec{x}}\vec{x})$. Це означає, що $\overline{\lambda}(\overline{\vec{x}}\vec{x}) = \lambda(\overline{\vec{x}}\vec{x})$ і $(\overline{\lambda} - \lambda)\overline{\vec{x}}\vec{x} = 0$. Тому $\overline{\lambda} = \lambda$ і $\lambda \in \mathbb{R}$.

22. а) Власними значеннями є $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1 = \alpha(1,-i)$ і $\vec{a}_2 = \alpha(1,i)$, де $\alpha \neq 0$;

б) Власними значеннями є $\lambda_1 = 2+3i, \lambda_2 = 2-3i$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1 = \alpha(1-3i,2)$ і $\vec{a}_2 = \alpha(1+3i,2)$, де $\alpha \neq 0$;

в)Власними значеннями є $\lambda_1 = 4+i, \lambda_2 = 4-i$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1 = \alpha(1,-1+i)$ і $\vec{a}_2 = \alpha(1,-1-i)$, де $\alpha \neq 0$;

г) Власними значеннями є $\lambda_1 = 2+i, \lambda_2 = 2-i$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1 = \alpha(-1+i,1)$ і $\vec{a}_2 = \alpha(-1-i,1)$, де $\alpha \neq 0$;

д) Власними значеннями є $\lambda_1 = 2+2i, \lambda_2 = 2-2i$; відповідними власними векторами є $\vec{a}_1 = \alpha(1,2+2i)$ і $\vec{a}_2 = \alpha(1,2-2i)$, де $\alpha \neq 0$;

§ 3.5. Зведення матриці до діагонального виду

1. а) $\{0,1\}$; б) якщо $\alpha \neq k\pi$, то $\varnothing$; якщо $\alpha = 2k\pi$, то $\{1\}$; якщо

$\alpha = (2k+1)\pi$, то $\{-1\}$; в) $\{0,1\}$; г) $\{\lambda\}$. **2.** В обох випадках лінійний оператор "розтягує" відповідний векторний простір вздовж власних векторів цього оператора з коефіцієнтами розтягу, рівними власним значенням для цих векторів. **3.** $\{1\}$ і $\{0\}$ відповідно. **4.** а) Так, вона подібна до матриць $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) ні. **5.** При умові, що вона має n дійсних характеристичних коренів, серед яких хоча б два є різними. **6.** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, де $a, b, c \in \mathbb{Q}$ і $a^2 = 1 - bc$. **7.** $a = 0$. **8.** а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) такої матриці не існує; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. **9.** а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. **10.** а) Дану матрицю не можна звести до діагонального виду, оскільки власному значенню $\lambda_{1,2} = 2$ відповідає тільки один лінійно незалежний власний вектор $\vec{a} = (1, 0, 0)$; б) дана матриця подібна до матриці $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) дану матрицю не можна звести до діагонального виду, оскільки власному значенню $\lambda_{1,2} = 5$ відповідає тільки один лінійно незалежний власний вектор $\vec{a} = (0, 0, 1, -2)$; г) дана матриця подібна до матриці $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **11.** Від ні одної до $n!$. **12.** а) $\vec{a}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \vec{a}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\vec{a}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \vec{a}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\vec{a}_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \vec{a}_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \vec{a}_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$; $\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$; г) $\vec{a}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, 0, -2), \vec{a}_2 = \frac{\sqrt{5}}{15}(4, 5, 2), \vec{a}_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$; $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$. **13.** Дана матриця має 2 рівні характеристичні корені $\lambda_{1,2} = 2$, але їм відповідає тільки один лінійно незалежний вектор $\vec{a} = (1, 1)$. Тому матриця не може бути зведеною до діагонального виду. Разом з тим існує невироджена матриця $Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ така, що $Q^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = QAQ^{-1}$.

15. а) Дана матриця подібна до діагональної матриці $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) дана матриця подібна до матриці $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ і $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) *Розв'язання.* Знайдемо спочатку хоча б один характеристичний корінь даної матриці. Її характеристичне рівняння є таким $\lambda^3 = 0$. Характеристичному кореню $\lambda = 0$ відповідає один лінійно незалежний вектор $\vec{a} = (1, 0, -1)$. Доповнимо цей вектор до ортогонального базису евклідового векторного простору $\mathbb{R}^3$. За такий базис можна взяти $\vec{a} = (1, 0, -1), \vec{a}_1 = (0, 1, 0), \vec{a}_2 = (1, 0, 1)$. З цих векторів складемо матрицю, вектор-рядками якої є останні вектори: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Остання матриця є ортогональною і невиродженою. При цьому $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Розглянемо тепер матрицю $B = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Вона подібна до даної і в ній у першому рядку стоять нулі. Розглянемо тепер підматрицю другого порядку $C = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, яка стоїть у правому нижньому куті даної матриці. Її характеристичне рівняння є таким: $\lambda^2 = 0$. Характеристичному кореню $\lambda = 0$ відповідає один лінійно незалежний вектор $\vec{b} = (2, 1)$. Доповнимо цей вектор до ортогонального базису евклідового векторного простору $\mathbb{R}^2$. За такий базис можна взяти $\vec{b} = (2, 1), \vec{b}_1 = (-1, 2)$. З цих векторів складемо матрицю, вектор-рядками якої є останні вектори $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ та обчислимо $T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ і $D = TCT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{6} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Побудуємо тепер матрицю $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ і обернену до неї $Q^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Нарешті знаходимо шукану трикутну матрицю $QBQ^{-1} = Q(SAS^{-1})Q^{-1} = (QS)A(QS)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{13}{10} & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

§ 1.8.

Розділ: Системи лінійних нерівностей

§ 4.1. Числові нерівності. Нерівності зі змінними

3. Множина розв'язків завжди є підмножиною області визначення нерівності. **4.** Слід показати, що множина розв'язків нерівності співпадає з її областю визначення. **5.** а) ні; б) так; в) ні; г) так; д) ні. **6.** $a = b = 0, c \leqslant 0$. **7.** $a = b = c = 0, d < 0$. **8.** а) так; б) ні; в) так; г) так; д) так; е) ні; є) ні; ж) так. **9.** Від'ємне.

10. а) $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$; б) $(\frac{3}{2}, 2)$; в) $(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}) \cup (\frac{5}{7}, +\infty)$; г) $(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, де $k \in \mathbb{Z}$.

11 а) 0; б) $x \in (1,2) \cup (5, +\infty)$; в) $x = 3, x \in [4, 7]$; г) $x \leqslant 0$. **12.** а) $a = -3$; б) $a = -2$. **13.** а) $a_1 = \ldots = a_n = 0$, $a \geqslant 0$; б) $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0, a < 0$. **14.** а) $a \in [-1, 0) \cup (0, 1]$; б) $a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

§ 4.2. Системи лінійних нерівностей з двома і трьома змінними

1. а) $\begin{cases} x - 2y & \leqslant 0, \\ x - 2y & \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y & \geqslant & 2x + 1, \\ y & \leqslant & 2x + 1, \\ x - 1 & \geqslant & 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 2y & \leqslant 6, \\ x & \geqslant 0, \\ y & \geqslant 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y & \leqslant 2, \\ -x + y & \geqslant 0, \\ y - 1 & \geqslant 0, \\ x + 2y & \geqslant 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - 2y & \leqslant 3, \\ 2x - 4y & \geqslant 15; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - y & \leqslant 4, \\ x + 2y & \leqslant 10, \\ x - y & \geqslant 0, \\ x + 2y & \geqslant 0; \end{cases}$

є) $\begin{cases} x - y & \leqslant 0, \\ y - x & \leqslant 5, \\ x + y & \geqslant 0, \\ x + y & \leqslant 5; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x \geqslant 0, & x \leqslant 4, \\ y \geqslant 0, & y \leqslant 4, \\ x + 2y & \leqslant 6, \\ 2x + y & \leqslant 6. \end{cases}$

2. Ні. **3.** а) Перша нерівність є наслідком другої; б) друга нерівність є наслідком першої; в) перша нерівність є наслідком другої; г) жодна з нерівностей не є наслідком іншої. **4.** $\begin{cases} 6x_2 - x_3 & \geqslant 0, \\ 7x_2 + 3x_3 & > 0. \end{cases}$ **5.** а) Так; б) ні. **6.** а) Друга система є наслідком першої; б) жодна з систем не є наслідком іншої; в) перша система є наслідком другої.

7. а) $\frac{2}{3} < x < \frac{5}{7}$; б) $\{(x,y)|\frac{2}{5}x < y < \frac{2}{3}x\}$; в) $\{(x,y)|x = y = 0\}$; г) $\{(x,y)| -\frac{8}{3}x < y \leqslant -\frac{1}{2}x\}$; д) $\{(x,y)|\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} \leqslant x \leqslant \sin\frac{\pi}{5}\}$; е) $\{(x,y)| -\frac{4}{5}x < y < \frac{4}{5}x \wedge x \leqslant 2\}$; є) $\{(x,y)|\frac{1}{2}x < y \leqslant 2x \wedge x \leqslant 2\}$; ж) $\varnothing$.

8. а) $\{(x,y)||y| \leqslant 2 - \frac{2}{3}x \wedge x \leqslant 0\}$; б) $\{(x,y)||2x+3y| \leqslant 6\}$; в) $\{(x,y)||x-y| = 8 \wedge xy \leqslant 0\}$; г) $\{(x,y)|2x-1 \leqslant y \leqslant \frac{x}{2} \wedge x \geqslant 0\}$; д) $\varnothing$; е) $\{(x,y)|\frac{1}{2}x \leqslant y \leqslant x\}$; є) $\{(x,y)|y = x+4\}$; ж) $\{(x,y)| -\frac{1-x}{4} \leqslant y \leqslant 4x+1 \wedge 5x+2y = 10\}$.

§ 4.3. Розв'язування систем лінійних нерівностей методом виключення невідомих

1. Розглянемо систему $\begin{cases} 2x - y + 1 & \geqslant 0, \\ x - 2y + 2 & \geqslant 0. \end{cases}$ Нерівність $8x - 7y + 7 \geqslant 0$ є лінійною комбінацією нерівностей цієї системи, оскільки $3(2x - y + 1) + 2(x - 2y + 2) = 8x - 7y + 7$.

2. а) $-5x + 4 \leqslant 2x$; б) $4 \leqslant 2x$; в) $x < 0$; г) $\begin{cases} x & < 0, \\ -3x + 2 & \leqslant \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \end{cases}$

3. Так. **4.** Одну. **5.** Так, якщо всі нерівності є нестрогими. Не завжди, якщо серед нерівностей є строгі. **6.** Якщо всі нерівності системи є нестрогими, то твердження істинне. Якщо ж серед нерівностей системи є строга, то при $\lambda = 0$ твердження є хибним, а в решті випадків – істинним. **7.** Застосуйте властивості числових нерівностей. **8.** Застосуйте властивості числових нерівностей.

9. Зобразіть розв'язок системи нерівностей і дані вектори на координатній площині. **10.** а) Наприклад, фундаментальною системою розв'язків є множина векторів $\vec{a} = (-1, 0), \vec{b} = (0, 1)$, а загальний розв'язок – $\vec{x} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$, де $k_1, k_2 \geqslant 0$. б)Наприклад, фундаментальною системою розв'язків є множина векторів $\vec{a} = (-1, 0), \vec{b} = (0, -1)$, а загальний розв'язок – $\vec{x} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$, де $k_1, k_2 \geqslant 0$.

11. Означення понять наслідку і рівносильності для систем лінійних рівнянь і нерівностей однакові. Означення поняття лінійної комбінації для рівнянь загальніше, ніж для нерівностей, оскільки у другому випадку дійсні коефіцієнти можуть бути тільки невід'ємними. Це приводить до різниці в поняттях фундаментальної системи розв'язків і загального розв'язку для систем лінійних рівнянь і нерівностей.

12. а) $\begin{cases} -\frac{10}{7}x+2 & \leqslant x, \\ -\frac{10}{7}x+2 & \leqslant -\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+12 & < -\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}, \\ -\frac{5}{7}x+\frac{12}{7} & < -\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}; \end{cases}$
в) $\begin{cases} -7x+11 & \leqslant x+3, \\ -\frac{3}{5}x-\frac{9}{5} & \leqslant x+3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6x+8 & \leqslant \frac{1}{4}x-\frac{1}{2}, \\ -\frac{5}{3}x+\frac{4}{3} & \leqslant 6x+8. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} -5x+y-2 & \leqslant & \frac{7}{2}x+y-2, \\ -5x+y-2 & \leqslant & -x-y+4, \\ -5x+y-2 & \leqslant & 2x-3y+1; \end{cases}$ $\{x \geqslant 0$; частинний розв'язок: $x=0$, $y=0$, $z=2$; б) $\begin{cases} x_1-2x_2+2 & \leqslant & \frac{1}{2}x_1-3x_2+\frac{5}{2}, \\ x_1-2x_2+2 & \leqslant & \frac{1}{6}x_1-\frac{1}{6}x_2-\frac{1}{6}, \\ -x_1-x_2 & \leqslant & \frac{1}{6}x_1-\frac{1}{6}x_2-\frac{1}{6}, \\ -x_1-x_2 & \leqslant & \frac{1}{2}x_1-3x_2+\frac{5}{2}; \end{cases}$
$\begin{cases} \frac{5}{11}x_1+\frac{13}{11} & \leqslant & -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}, \\ \frac{5}{11}x_1+\frac{13}{11} & \leqslant & \frac{3}{4}x_1+\frac{5}{4}, \\ -\frac{7}{5}x_1+\frac{1}{5} & \leqslant & \frac{3}{4}x_1+\frac{5}{4}, \\ -\frac{7}{5}x_1+\frac{1}{5} & \leqslant & -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 & \leqslant & -\frac{5}{7}, \\ x_1 & \geqslant & -\frac{3}{13}, \\ x_1 & \geqslant & -\frac{21}{43}, \\ x_1 & \geqslant & -\frac{1}{3}; \end{cases}$ система несумісна;
в) $\begin{cases} -3x+30 & \leqslant 2x+1, \\ -3x+30 & \leqslant -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}; \end{cases}$ $x-\frac{57}{5} \geqslant 0$; частинний розв'язок $x=13$, $y=5$; г) $\begin{cases} x+5 & \leqslant 0, \\ -\frac{5}{3}x+\frac{4}{3} & \leqslant \frac{1}{4}x-\frac{1}{2}, \\ -\frac{5}{3}x+\frac{4}{3} & \leqslant 2x-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x & \leqslant & -5, \\ x & \geqslant & \frac{13}{11}, \\ x & \geqslant & \frac{22}{23}; \end{cases}$ система несумісна; д) $\begin{cases} -x_1+x_2-2x_3+1 & < & -x_1+2x_2-x_3, \\ 2x_1-x_2+x_3 & < & -x_1+2x_2-x_3, \\ -\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{5}{2} & < & -x_1+2x_2-x_3; \end{cases}$
$\begin{cases} 3x_1-5x_2+2 & < & 0, \\ x_1-6x_2+6 & < & 0; \end{cases}$ $0 \leqslant 0$; частинний розв'язок $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=0$, $x_4=3$; е) $\begin{cases} x_1-x_2 & \leqslant & \frac{5}{6}x_1+\frac{1}{6}x_2, \\ x_1-x_2 & \leqslant & \frac{1}{2}x_1-3x_2, \\ -x_1-x_2 & \leqslant & \frac{1}{2}x_1-3x_2, \\ -x_1-x_2 & \leqslant & \frac{5}{6}x_1+\frac{1}{6}x_2; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{7}x_1 & \leqslant & -\frac{1}{4}x_1, \\ \frac{1}{7}x_1 & \leqslant & \frac{3}{4}x_1, \\ -\frac{11}{7}x_1 & \leqslant & \frac{3}{4}x_1, \\ -\frac{11}{5}x_1 & \leqslant & -\frac{1}{4}x_1; \end{cases}$
$\begin{cases} x_1 & \leqslant & 0, \\ x_1 & \geqslant & 0; \end{cases}$ система має єдиний розвязок $x_1=x_2=x_3=0$.

14. а) $\vec{a}_1=(-1,-2)$, $\vec{a}_2=(-2,-1)$; $\vec{a}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2, k_1,k_2 \geqslant 0$; б) $\vec{a}_1=(-3,2)$, $\vec{a}_2=(-2,-1)$; $\vec{a}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2, k_1,k_2 \geqslant 0$; в) $\vec{a}_1=(2,1)$, $\vec{a}_2=(1,-3)$; $\vec{a}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2, k_1,k_2 \geqslant 0$; г) $\vec{a}_1=(1,4)$, $\vec{a}_2=(5,-1)$; $\vec{a}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2, k_1,k_2 \geqslant 0$. **15.** $\vec{a}_1=(2,1,1)$, $\vec{a}_2=(0,1,0)$, $\vec{a}_3=(0,0,1)$; $\vec{a}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+k_3\vec{a}_3, k_1,k_2,k_3 \geqslant 0$.

§ 4.4. Задачі лінійного програмування і графічний спосіб їх розв'язування

1. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей

а) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & \leqslant & -1, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 & \leqslant & 1, \\ -x_1 - x_2 - x_3 & \leqslant & -6, \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leqslant & 6, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 & \leqslant & -8, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leqslant & 8; \end{array}\right.$ б) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 & \leqslant & 5, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 & \leqslant & -5, \\ -6x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 & \leqslant & 1, \\ 6x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 & \leqslant & -1, \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 & \leqslant & -3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 & \leqslant & 3 \end{array}\right.$

знайти такий, який максимізував (мінімізував) би цільову функцію:
а) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 7x_2 - x_3$; б) $f(x_1, x_2, x_3) = 11x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$.

2. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь

а) $\left\{\begin{array}{rcr} 5x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 & = & 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_6 & = & 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0. \end{array}\right.$ б) $\left\{\begin{array}{rcr} 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 - x_4 & = & 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 & = & 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_6 & = & 0 \end{array}\right.$

знайти такий, який максимізував (мінімізував) би цільову функцію:
а) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 5x_3$; б) $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1 - x_2 - x_3$.

3. а) Стандартна (канонічна): на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей (рівнянь)

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 - x_3 & \leqslant & -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leqslant & 5, \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 & \leqslant & 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 & \leqslant & 0, \\ 5x_1 + x_2 - 6x_3 & \leqslant & 1, \end{array}\right. \quad \left(\left\{\begin{array}{rcr} 5x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 & = & 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 & = & -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 & = & 5, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 0, \end{array}\right.\right)$$

знайти такий, який максимізував би цільову функцію $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 6x_2 - x_3$;
б) стандартна (канонічна): на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей (рівнянь)

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 & \geqslant & 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 & \geqslant & -4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & \geqslant & 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 & \geqslant & 3, \end{array}\right. \quad \left(\left\{\begin{array}{rcr} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 4, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 & = & 0, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_6 & = & 3 \end{array}\right.\right)$$

знайти такий, який мінімізував би цільову функцію $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4$.

4. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей
$\left\{\begin{array}{rcr} 2y_1 + y_2 & \leqslant & 2, \\ -y_1 + 2y_2 & \leqslant & -1, \\ 3y_1 - y_2 & \leqslant & 1, \\ y_1 - 3y_2 & \leqslant & -3 \end{array}\right.$ знайти такий, який мінімізував би цільову функцію $g(y_1, y_2) = y_1 + 2y_2$.

5. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 180, \\ 3x_2 + 9x_3 + 12x_4 &= 900 \end{cases}$$

знайти такий, який максимізував би цільову функцію
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 0x_4$.

6. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 5000, \\ x_2 + y_2 + z_2 = 8000, \\ x_3 + y_3 + z_3 = 9000, \\ 16x_1 + 14x_2 + 15x_3 \geqslant 19000, \\ 30y_1 + 42y_2 + 51y_3 \geqslant 158000, \\ 30z_1 + 35z_2 + 25z_3 \geqslant 300000 \end{cases}$$

знайти такий, який би максимізував цільову функцію
$f = 640x_1 + 560x_2 + 600x_3 + 1800y_1 + 2100y_2 + 2550y_3 + 840z_1 + 980z_2 + 784z_3$. Тут x_i – площа, відведена під жито на масиві i, y_j – площа, відведена під пшеницю на масиві j, z_t – площа, відведена під кукурудзу на масиві t.

7. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leqslant b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leqslant b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \leqslant b_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \leqslant b_5, \end{cases}$$

де x_j – число одиниць продукції виду P_j, знайти такий, який би максимізував цільову функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$.

8. На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{1j} = p_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} x_{mj} = p_m, \\ \sum_{t=1}^{n} x_{t1} = s_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \sum_{t=1}^{n} x_{tn} = s_n, \end{cases}$$

де x_{ij} – кількість тонн буряків, яка доставляється з агрофірми F_i до цукрового заводу S_j, знайти такий, який мінімізував би цільову функцію $f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$.

9. а) Нехай $(\alpha, \beta, \gamma) = (=, \leqslant, \geqslant)$. Тоді у загальному виді задача формулюється так: на множині розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 \leqslant 3, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leqslant -2, \\ x_1, \quad x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

знайти такий, який би максимізував цільову функцію $f = 4x_1 + x_2 + 3x_3$;

Оскільки у даній задачі немає обмеження на невід'ємність змінної x_2, то для запису цієї задачі у канонічному та стандартному виді введемо нові невід'ємні змінні $x_2^{'}$ і $x_2^{''}$ так, щоб $x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$. Тоді у канонічному виді вона запишеться так: на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 - x_2^{'} + x_2^{''} + x_3 & = & 1, \\ 2x_2^{'} - 2x_2^{''} - x_3 + x_4 & = & 3, \\ x_1 - 3x_2^{'} + 3x_2^{''} - 2x_3 + x_5 & = & -2 \end{array}\right.$$

знайти такий, який би максимізував цільову функцію
$f = 4x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} + 3x_3 + x_4 + x_5$, а у стандартному виді
на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x_1 - x_2^{'} + x_2^{''} + x_3 & \leqslant & 1, \\ -3x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} - x_3 & \leqslant & -1, \\ 2x_2^{'} - 2x_2^{''} - x_3 & \leqslant & 3, \\ x_1 - 3x_2^{'} + 3x_2^{''} - 2x_3 & \leqslant & -2 \end{array}\right.$$

знайти такий, який би максимізував цільову функцію $f = 4x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} + 3x_3$. Аналогічно розглядається другий випадок. **10.** а) Нехай $(\alpha, \beta, \gamma) = (\geqslant, \leqslant, =)$. Тоді у загальному виді задача формулюється так: на множині розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -6x_1 & - & 5x_2 & \leqslant & -2, \\ -4x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 1, \\ 8x_1 & - & 7x_2 & = & 3, \\ x_1 & & & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

знайти такий, який би максимізував цільову функцію $f = 2x_1 + x_2$. Тоді аналогічними міркуваннями як у задачі № 4 прийдемо до такої двоїстої задачі: на множині розв'язків системи лінійних рівнянь і нерівностей

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -6y_1 & - & 4y_2 & + & 8y_3 & \geqslant & 2, \\ -5y_1 & + & 3y_2 & - & 7y_3 & = & 1, \\ y_1, & & y_2 & & & \geqslant & 0 \end{array}\right.$$

знайти такий, який би мінімізував цільову функцію $f = -2y_1 + y_2 + 3y_3$.

11. Задача мінімізації має нескінченну множину оптимальних розв'язків: кожна точка відрізка з кінцями в точках $A(1, 3)$ і $B(0, 4)$ є оптимальним розв'язком , причому $f_{min}(0, 4) = 4$. Задача максимізації оптимального розв'язку не має, бо цільова функція не обмежена зверху. У випадку а) $f_{min}(0, 4) = 4$ і $f_{max}(9, 1) = 10$. У випадку б) $f_{min}(0, 1) = 1$, а точки, в якій функція досягає свого максимуму, не існує.

12. Дана система нерівностей має порожню множину розв'язків. Тому задачі максимізації і мінімізації не допустимі і оптимального розв'язку не мають. У випадках а) і б) відповідь не зміниться.

13. Задача максимізації має єдиний оптимальний розв'язок $f_{max}(6,4) = -34$. Задача мінімізації оптимального розв'язку не має, бо цільова функція не обмежена знизу. У випадку а) відповідь не зміниться. У випадку б) $f_{min}(6,4) = 34$ – єдиний розв'язок задачі мінімізації, а задача максимізації розв'язку не має.

14. Задача мінімізації має єдиний оптимальний розв'язок $f_{min}(3,1) = 8$. Задача максимізації оптимального розв'язку не має, бо цільова функція не обмежена зверху.

15. Задача максимізації і мінімізації розв'язків не має. Якщо ж виконати вказану заміну нерівностей у системі, то $f_{min}(0,0) = 0$ і $f_{max}(0,7) = 63$.

16. $f_{min}(5,0) = -30$ і $f_{max}(1,4) = -2$. а) Задача мінімізації оптимального розв'язку не має і $f_{max}(5,0) = -30$; б) $f_{min}(5,0) = -30$ і $f_{max}(1,4) = -2$.

17. Задача № 4 є допустимою, оскільки $(2,0,0,0)$ є одним з невід'ємних розв'язків даної системи лінійних нерівностей, а двоїста до неї задача (дивись відповідь до цієї задачі) є недопустимою. Отже, дана задача оптимального розв'язку немає.

18. а) Двоїстою задачею до даної є: знайти невід'ємний розв'язок системи лінійних нерівностей $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 3, \\ x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 4, \\ -x_1 & + & x_2 & \leqslant & 5, \\ 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 6 \end{array}\right.$ при якому функція $f^\star = 5x_1 + 4x_2$ досягає максимуму. Ця функція досягає максимуму в кожній точці відрізка з кінцями $A(\frac{6}{7}, \frac{8}{7})$ і $B(\frac{5}{6}, 0)$. Отже, $f^\star(\frac{5}{6}, 0) = 6$. Тоді можна показати, що для прямої задачі $f_{min}(0,0,0,1) = 6$. Випадки б),в),г) розв'язуються аналогічно.

19. а) $a \in [\frac{1}{2}, 2]$; б) $a \in (0, \frac{2}{9}]$; в) $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$; г) таких значень параметра немає.

§ 4.5. Симплекс-метод та його застосування

1. При застосуванні прийомів диференціального числення отримаємо систему $\frac{\text{f}}{dx_i} = 0$, яка не має розв'язку на області G лінійних обмежень задачі лінійного програмування. Це вказує на те, що оптимум цільової функції f може досягатися лише на межі області G.

2. Оскільки для функції $\varphi(\vec{x}) = -f(\vec{x})$ має місце рівність $minf(\vec{x}) = -max\varphi(\vec{x})$, то задача мінімізації зводиться до задачі максимізації при тих самих обмеженнях.

3. Якщо у стандартній задачі всі вільні члени невід'ємні, то її слід перевести в канонічну форму. Якщо деякий вільний член від'ємний, то відповідну нерівність замінюємо на рівняння і множимо його на -1, а після цього застосовуємо метод штучного базису. **4.** Так.

5. а) Перепишемо дану систему у виді $\left\{\begin{array}{lllllll} x_3 & + & x_1 & - & 2x_2 & = 1, \\ x_4 & - & 2x_1 & + & x_2 & = 2, \\ x_5 & + & 3x_1 & + & x_2 & = 3. \end{array}\right.$
З цього запису видно, що за вільні невідомі можна взяти x_1, x_2, а x_3, x_4, x_5 є базисними. Оскільки всі вільні члени додатні, то вектор $\vec{x}_0 = (0,0,1,2,3)$ є допустимим базисним розв'язком і при цьому $f(\vec{x}_0) = 0$. Оскільки в аналітичному заданні цільової функції коефіцієнт біля x_1 від'ємний, а біля x_2 додатний, то збільшення значення функції можна досягти тільки при збереженні $x_1 = 0$ і збільшенні x_2, але так, щоб змінні x_3, x_4, x_5 залишалися невід'ємними. Це означає, що таке x_2 повинно задовольняти систему нерівностей $\left\{\begin{array}{ll} 1+2x_2 & \geqslant 0, \\ 2-x_2 & \geqslant 0, \\ 3-x_2 & \geqslant 0, \end{array}\right.$ тобто $x_2 = 2$. Тоді вектор $\vec{x}_1 = (0,2,5,0,1)$ є новим допустимим базисним розв'язком і при цьому $f(\vec{x}_1) = 10$. Тепер в ролі вільних змінних візьмемо x_1, x_4, а базисних – x_2, x_3, x_5. Оскільки з другого рівняння $x_2 = 2x_1 - x_4$, то цільова функція приймає вид $f = 10 + 5x_1 - 5x_4$ і $\left\{\begin{array}{lllllll} x_2 & - & 2x_1 & + & x_4 & = 2, \\ x_3 & - & 3x_1 & + & 2x_4 & = 5, \\ x_5 & + & 5x_1 & - & x_4 & = 1. \end{array}\right.$

Далі будемо збільшувати x_1, залишаючи $x_4 = 0$. Це означає, що таке x_1 повинно задовольняти систему нерівностей $\left\{\begin{array}{ll} 2+2x_1 & \geqslant 0, \\ 5+3x_1 & \geqslant 0, \\ 1-5x_1 & \geqslant 0, \end{array}\right.$ тобто $x_1 = \frac{1}{5}$. Тоді вектор $\vec{x}_2 = (\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, \frac{28}{5}, 0, 0)$ є новим допустимим базисним розв'язком і при цьому $f(\vec{x}_2) = 11$. Далі в ролі вільних змінних візьмемо x_4, x_5, а базисних – x_1, x_2, x_3. При цьому цільова функція приймає вид $f = 11 - 4x_4 - x_5$, а система обмежень – $\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 & - & \frac{1}{5}x_4 & + & \frac{1}{5}x_5 & = \frac{1}{5}, \\ x_2 & + & \frac{3}{5}x_4 & + & \frac{2}{5}x_5 & = \frac{12}{5}, \\ x_3 & + & \frac{7}{5}x_4 & + & \frac{3}{5}x_5 & = \frac{28}{5}. \end{array}\right.$
Оскільки обидві вільні змінні входять до цільової функції з від'ємними коефіцієнтами, то найбільшого значення вона досягне при $x_4 = x_5 = 0$. Отже, вектор $\vec{x}_2 = (\frac{1}{5}, \frac{12}{5}, \frac{28}{5}, 0, 0)$ є оптимальним розв'язком і $f_{max}(\vec{x}_2) = 11$. б) Максимального значення не існує; в) оптимальним розв'язком є $\vec{x}_3 = (0, 0, \frac{7}{4}, \frac{1}{2})$, $\varphi_{max}(\vec{x}_3) = \frac{7}{2}$ і $f_{min}(\vec{x}_3) = -\frac{7}{2}$; г) оптимальним розв'язком є $\vec{x}_\star = (0,1,3,0)$ і $f_{min}(\vec{x}_\star) = -3$.

6. а) Ні; б) ні. **7.** Вказівка: якщо вершина многогранника системи обмежень є виродженою (на це вказує менше число ненульових координат у вершини в порівнянні з рангом системи обмежень), то їй будуть відповідати кілька базисів. Кожен з таких базисів складається з векторів-стовпців при невідомих, причому до нього обовязково входять ті вектори, для яких значення відповідної змінної у вершині більші нуля. а) $\{\vec{p}_2, \vec{p}_4, \vec{p}_3\}$ та $\{\vec{p}_2, \vec{p}_4, \vec{p}_6\}$ є базисами вершини $\vec{x}^0$; б) якщо $k \neq 4$ і $k \neq 15$, то $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$, $\{\vec{p}_1, \vec{p}_3, \vec{p}_4\}$, $\{\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4\}$ є базисами вершини $\vec{x}^0$; якщо $k = 15$, то $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$, $\{\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4\}$ є базисами вершини $\vec{x}^0$; якщо $k = 4$ то $\{\vec{p}_1, \vec{p}_3\}$, $\{\vec{p}_2, \vec{p}_3\}$, $\{\vec{p}_3, \vec{p}_4\}$ є базисами вершини $\vec{x}^0$.

8. а) Має місце твердження Б. Покажемо це. З початкового допустимого базисного розв'язку $\vec{x}^0 = (2, 0, 0, 3, 0)$ видно, що за базисні невідомі слід взяти x_1, x_4, а за вільні – x_2, x_3, x_5. Перепишемо систему обмежень тепер у вигляді $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \quad - 4x_5 = 2, \\ x_4 + x_2 + 3x_3 + \quad - 6x_5 = 3. \end{cases}$
(спочатку у першому рівнянні виключили x_1, а потім у другому – x_4). Складемо відповідну симплекс-таблицю.

i	Баз. зм.	Баз. век.	$\vec{p}$ / $\vec{p}'$	$\vec{x}^0$	2 / $\vec{p}_1$	-4 / $\vec{p}_2$	1 / $\vec{p}_3$	-1 / $\vec{p}_4$	3 / $\vec{p}_5$
1	x_1	$\vec{e}_1$	2	2	1	-1	2	0	-4
2	x_4	$\vec{e}_2$	-1	3	0	1	3	1	-6
j				1	0	1	0	0	-7

З таблиці видно, що $\Delta_5 = -7 < 0$ і $\vec{p}_5 = (-4, -6)$ має обидві від'ємні координати. Отже, цільова функція необмежена, тобто задача не має розв'язку. б) В; в) А; г) В.

10. а) $f_{max}(0, 5, 6, 0) = 17$; б) $f_{min}(3, 0, 4, 0) = -7$; в) $f_{max}(3, 0, 0, 0, 0, 2) = 13$; г) $f_{min}(0, 1, 0, 1, 1) = 5$.

11. а) Введемо нові невід'ємні змінні x_5, x_6 та запишемо задачу у канонічному виді: на множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + x_6 = 4 \end{cases}$$

дослідити цільову функцію $f = -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6$ на максимум.

Отримана система рівнянь сумісна і її ранг рівний 2. В ролі базисних невідомих візьмемо x_5, x_6, вільних – x_1, x_2, x_3, x_4. Тоді початковий невід'ємний базисний розв'язок є $\vec{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 3, 4)$.

Застосуємо тепер симплекс-метод до цієї задачі. Для цього складемо відповідні таблиці, залишаючи один заголовок таблиць.

i	Баз. зм.	Баз. век.	$\vec{p}$ / $\vec{p}'$	$\vec{x}^0$	-1 $\vec{p}_1$	-1 $\vec{p}_2$	3 $\vec{p}_3$	4 $\vec{p}_4$	0 $\vec{p}_5$	0 $\vec{p}_6$
1	x_5	$\vec{e}_5$	0	3	2	4	-1	-1	1	0
2	x_6	$\vec{e}_6$	0	4	-1	-1	1	4	0	1
j				0	1	1	-3	-4	0	0
1	x_5	$\vec{e}_5$	0	4	$\frac{7}{4}$	$\frac{11}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$
2	x_4	$\vec{e}_4$	4	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$
j				4	0	0	-2	0	0	1
1	x_1	$\vec{e}_1$	0	7	1	-2	0	3	1	1
2	x_3	$\vec{e}_3$	3	4	-1	-1	1	4	0	1
j				12	-2	-2	0	8	0	3

З третьої таблиці видно, що $\Delta_2 = -2 < 0$ і у вектора $\vec{p}_2$ обидві координати від'ємні. Тому цільова функція необмежена і задача розв'язку не має. б) $f_{min}(3,0,2,0,0) = 5$; в) $f_{max}(0,3,0,2,0) = 9$; г) $f_{min}(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{4}) = -\frac{21}{4}$.

12. а) Метод заміщення одиничних базисних векторів по суті є модифікацією методу Гаусса і використовується також при розв'язуванні задач лінійного програмування. Проілюструємо його на цьому прикладі.

Дану систему рівнянь у векторній формі можна записати так:

$$x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3 = \vec{b}.$$

Але $\vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. Якщо в останній рівності поступово замінити одиничні вектори на вектори $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$, то отримаємо розв'язок системи. Якщо ж такий перехід здійснити не можна, то система є несумісною. Для цього використаємо рівності

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3, \\ \vec{p}_2 &= -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \\ \vec{p}_3 &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Послідовні кроки заміщення базисних одиничних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ векторами $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ подамо у вигляді таблиць, які нагадують симплекс-таблиці.

T0	$\vec{b}$	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_3$
$\vec{e}_1$	3	2	-1	1
$\vec{e}_2$	4	2	-3	2
$\vec{e}_3$	2	11	3	1

T1	$\vec{b}$	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_3$
$\vec{p}_3$	3	2	-1	1
$\vec{e}_2$	-2	-2	-1	0
$\vec{e}_3$	-1	9	4	0

T2	$\vec{b}$	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_3$
$\vec{p}_3$	5	4	0	1
$\vec{p}_2$	2	2	1	0
$\vec{e}_3$	-9	1	0	0

T3	$\vec{b}$	$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_3$
$\vec{p}_3$	41	0	0	1
$\vec{p}_2$	20	0	1	0
$\vec{p}_1$	-9	1	0	0

З останньої таблиці Т3 маємо $\vec{b} = -9\vec{p}_1 + 20\vec{p}_2 + 41\vec{p}_3$, тобто розв'язком даної системи є $\vec{x}_0 = (-9, 20, 41)$.

б) Система несумісна; в) $\vec{x}_0 = (1, 2, 3)$; г) $\vec{x}_0 = (6 - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma, 4 - 2\alpha - \beta - 2\gamma, \alpha, \beta, \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

13. а) Розглянемо відповідну розширену канонічну задачу: На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_7 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_5 + x_8 = 4 \end{cases}$$

дослідити цільову функцію $f = -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8$ на максимум. За початковий допустимий невід'ємний базисний розв'язок візьмемо $\vec{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 4, 1, 4)$. Після застосування симплекс-методу одержимо оптимальний розв'язок $\vec{x}^1 = (0, 9, 0, 8, 5)$ і $f_{max}(0, 9, 0, 8, 5) = 19$.

Для спрощення обчислень можна спочатку розв'язати таку задачу: На множині невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_7 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_5 + x_8 = 4 \end{cases}$$

дослідити цільову функцію $f_1 = -x_6 - x_7 - x_8$ на максимум. Вона досягає максимуму в точці $\vec{x}' = (0, 5, 4, 0, 1, 0, 0, 0)$. Цим самим знайдено початковий допустимий невід'ємний базисний розв'язок $\vec{x}^0 = (0, 5, 4, 0, 1)$ даної задачі, якому відповідають базисні змінні x_2, x_3, x_5, а система обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} -x_1 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_4 = 5, \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 4. \end{cases}$$

Застосувавши тепер симплекс-метод, ми прийдемо до вказаного вище результату. б) $f_{min}(0, 3, 8, 0, 0) = -5$; в) $f_{max}(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0) = 30$; г) $f_{min}(0, 4, 5, 0, 0, 11) = -11$.

14. Вказівка: один з базисних розв'язків можна отримати методом заміщення базисних векторів, коли всім вільним змінним надати значення 0. Всіх базисних розв'язків є C_n^m, де n – число змінних у системі, а m – ранг головної матриці системи. Кожний інший базисний розв'язок отримується з попереднього заміною однієї з базисних змінних на одну з вільних. а) $\vec{x}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, \frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, 0)$, $\vec{x}_3 = (-3, 0, -5, 0)$, $\vec{x}_4 = (\frac{1}{3}, 0, 0, -\frac{10}{3})$, $\vec{x}_5 = (0, -1, 0, -5)$, $\vec{x}_6 = (0, 0, -\frac{1}{2}, -3)$.

15. а) Система має 3 невід'ємних базисних розв'язки: $\vec{x}_1 = (\frac{15}{2}, 1, 0, \frac{7}{2}, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, \frac{139}{19}, 0, \frac{29}{19}, \frac{25}{19})$, $\vec{x}_3 = (9, 0, 1, 4, 0)$. б) Система має 2 невід'ємних базисних розв'язки: $\vec{x}_1 = (0, 53, 0, 63, 11, 26)$, $\vec{x}_2 = (\frac{63}{8}, \frac{109}{8}, 0, 0, \frac{25}{8}, \frac{19}{8})$.

23. Ні. Слід було розв'язати відповідну задачу лінійного програмування.

Можна було купити 19 предметів: 3 коробки фарб, 4 коробки олівців, 7 альбомів і 5 лінійок.

Групи порядку від 1 до 20

порядок групи	число груп	твірні елементи	визначальні співвідношення
1	1	e	$e^2 = e$ – одинична група
2	1	a	$a^2 = e$ – циклічна група
3	1	a	$a^3 = e$ – циклічна група
4	2	a	$a^4 = e$ – циклічна група
		a, b	$a^2 = e, b^2 = e, ab = ba$ – четверна група
5	1	a	$a^5 = e$ – циклічна група
6	2	a	$a^6 = e$ – циклічна група
		a, b, c	$a^3 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e$ – група діедра
7	1	a	$a^7 = e$ – циклічна група
8	5	a	$a^8 = e$ – циклічна група
		a, b	$a^4 = e, b^2 = e, ab = ba$
		a, b	$a^4 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e$ – група діедра
		a, b	$a^4 = e, b^2 = a^2, ba = a^{-1}b$ – група кватерніонів
		a, b, c	$a^2 = b^2 = c^2 = e, ab = ba, ac = ca, bc = cb$
9	2	a	$a^9 = e$ – циклічна група
		a, b	$a^3 = b^3 = e, ab = ba$
10	2	a	$a^{10} = e$ – циклічна група
		a, b	$a^5 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e$ – група діедра
11	1	a	$a^{11} = e$ – циклічна група
12	5	a	$a^{12} = e$ – циклічна група
		a, b	$a^6 = e, b^2 = e, ba = a^{-1}b$ – група діедра
13	1	a	$a^{13} = e$ – циклічна група
14	2	a	$a^{14} = e$ – циклічна група
		a, b	$a^7 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e$ – група діедра
15		a	$a^{15} = e$ – циклічна група
16	14	a	$a^{16} = e$ – циклічна група
		інші аб.	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
		a, b	$a^8 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e$ – група діедра
17	1	a	$a^{17} = e$ – циклічна група
18	5	a	$a^{18} = e$ – циклічна група
		a, b	$a^9 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e$ – група діедра
19	1	a	$a^{19} = e$ – циклічна група
20	5	a	$a^{20} = e$ – циклічна група
		a, b	$a^{10} = e, b^2 = e, (ab)^2 = e$ – група діедра

Групи самосуміщень

Групи діедра

Групи діедра – це групи самосуміщень правильних многокутників. Група діедра правильного n-кутника містить $2n$ елементів. Це n поворотів навколо центра многокутника на кути $\alpha_i = i\frac{2\pi}{n}$, $0 \leqslant i < n$, і n симетрій відносно осей, які перпендикулярні до середин сторін або проходять через протилежні вершини n-кутника.

Група тетраедра

Група тетраедра – це група самосуміщень піраміди, у якої всі грані є правильними трикутниками. Вона містить 12 елементів. Серед них 9 поворотів навколо висот, опущених з вершин на протилежні грані, на кути $0^0, 120^0$ і 240^0 та 3 повороти навколо медіан піраміди (відрізки, які з'єднують середини мимобіжних ребер піраміди) на 180^0. Визначальними співвідношеннями є $r^3 = e, f^2 = e, (rf)^3 = e$, де e, r, f відповідні повороти на $0^0, 120^0$ і 180^0.

Група гексаедра

Група гексаедра – це група самосуміщень куба. Вона містить 24 елементи. Серед них 9 поворотів навколо діагоналей куба на кути $0^0, 120^0$ і 240^0, 9 поворотів навколо осей, які з'єднують центри протилежних граней, на кути $90^0, 180^0$ і 270^0 та 6 поворотів навколо медіан, які з'єднують середини паралельних ребер, що не лежать в одній грані, на 180^0.

Група октаедра

Група октаедра – це група самосуміщень правильного 8-гранника. Його грані є правильними трикутниками. Вона містить 24 елементи. Групи гексаедра і октаедра ізоморфні.

Група додекаедра

Група додекаедра – це група самосуміщень правильного 12-гранника. Його грані є правильними п'ятикутниками. Вона містить 60 елементів.

Група ікосаедра

Група ікосаедра – це група самосуміщень правильного 20-гранника. Його грані є правильними трикутниками. Вона містить 60 елементів. Серед них 25 поворотів навколо діагоналей, які з'єднують протилежні вершини, на кути $0^0, 72^0, 144^0, 216^0, 288^0$, 20 поворотів навколо осей, які з'єднують центри протилежних граней, на кути 120^0 і 240^0 та 15 поворотів навколо медіан, які з'єднують середини протилежних ребер, на 180^0. Групи додекаедра, ікосаедра та знакозмінна група A_5 ізоморфні між собою.

Векторні простори

При розв'язуванні задач з цього і наступного розділів слід пам'ятати, що в різних посібниках матриця переходу T від одного базису до іншого у скінченновимірному просторі визначається по різному. Такі визначення рівносильні, однак вони приводять до різних форм запису.

Автори цього збірника слідують за посібниками, які написані авторами Завало С.Т., Курош О.Г., Мальцев А.І., Кострікін О.І., Ляпін Є.С., Ільїн В.О., Калужнін Л.А. та інші. Зокрема, при визначенні матриці переходу від одного базису до іншого тут координати векторів другого базису у першому базисі записуються у рядки матриці T.

У посібниках авторів Кулікова Л.Я., Фадєєва Д.К., Проскурякова І.В., Ікрамова Х.Д., Шнепермана Л.Б., Гельфанда І.М., Окунева Л.Я. та інших матриця переходу від одного базису до іншого є транспонованою до розглядуваної тут матриці T, тобто координати векторів другого базису у першому базисі записуються у стовпці матриці переходу. В зв'язку з цим видозмінюється формула перетворення координат при зміні базису.

Застосовуючи операцію транспонування до формули перетворення координат при зміні базису (дивись § 2.4)

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)T,$$

ми приходимо до формули

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t = T^t(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^t,$$

в якій координати вектора потрібно записувати у стовпець.

Подібний запис, коли координати вектора записуються у вектор-стовпець, доводиться застосовувати і нам при записі системи лінійних рівнянь у матричній формі.

Лінійні оператори

При визначенні матриці A_f^e лінійного оператора f скінченновимірного векторного простору L_n у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ у нашому посібнику, як і в попередньому розділі, координати образів базисних векторів $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ у цьому самому базисі записуються у рядки матриці A_f^e (дивись § 3.1).

У посібниках авторів Кулікова Л.Я., Фадєєва Д.К., Проскурякова І.В., Ікрамова Х.Д., Шнепермана Л.Б., Гельфанда І.М., Окунева Л.Я. та інших при визначенні матриці A_f^e лінійного оператора f скінченновимірного векторного простору L_n у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ координати образів базисних векторів $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots, f(\vec{e}_n)$ у цьому самому базисі записуються у стовпці матриці A_f^e, тобто вона є транспонованою до нашої. Тому видозмінюються формули, які характеризують зв'язок між кординатами вектора і його образу при лінійному операторі та матрицями лінійного оператора у різних базисах. У них вони мають вигляд

$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^t = A_f^e(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^t$ і $A_f^a = (T_e^a)^{-1} A_f^e T_e^a$.

Зауважимо, що для знаходження власного вектора $\vec{a}$ лінійного оператора f векторного простору L_n, який відповідає власному значенню λ, у наших позначеннях потрібно розв'язувати таку систему лінійних рівнянь:

$$((A_f^e)^t - \lambda E)(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t = \vec{0}.$$

Нерівності

Середні для додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ визначаються так:

- *середнє геометричне* — $C_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{df}{=} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$;
- *середнє арифметичне* — $C_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{df}{=} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$;
- *середнє квадратичне* — $C_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{df}{=} \sqrt[n]{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$;
- *середнє гармонійне* — $C_{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{df}{=} \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$.

Співвідношення між ними характеризуються нерівностями:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Нерівність Коші-Буняковського:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

Алфавіти

Латинський алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
Aa	а	Nn	ен
Bb	бе	Oo	о
Cc	це	Pp	пе
Dd	де	Qq	ку
Ee	е	Rr	ер
Ff	еф	Ss	ес
Gg	ге	Tt	те
Hh	ха	Uu	у
Ii	і	Vv	ве(фау)
Jj	йот(а)	Ww	дубльве
Kk	ка	Xx	ікс
Ll	ель	Yy	іпсілон
Mm	ем	Zz	зета

Грецький алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
$A\alpha$	альфа	$N\nu$	ню
$B\beta$	бета	$\Xi\xi$	ксі
$\Gamma\gamma$	гама	Oo	омікрон
$\Delta\delta$	дельта	$\Pi\pi$	пі
$E\varepsilon$	епсилон	$P\rho$	ро
$Z\zeta$	дзета	$\Sigma\sigma$	сигма
$H\eta$	ета	$T\tau$	тау
$\Theta\theta$	тета	$\Upsilon\upsilon$	іпсилон
$I\iota$	йота	$\Phi\varphi$	фі
$K\kappa$	капа	$X\chi$	хі
$\Lambda\lambda$	ламбда	$\Psi\psi$	псі
$M\mu$	мю	$\Omega\omega$	омега

Основні позначення

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множина всіх натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел;

$\mathbb{Z}^+$ — множина всіх цілих додатних чисел;

$n\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, які діляться на натуральне n;

$\mathbb{Z}_n$ — множина всіх остач від ділення цілих чисел на n;

$\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних чисел;

$\mathbb{Q}^+$ — множина всіх додатних раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел;

$\mathbb{R}^-$ — множина всіх від'ємних дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел;

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — задання множини переліком її елементів;

$A = \{x | f(x)\}$ — задання множини характеристичною властивістю f її елементів;

$\varnothing$ — порожня множина;

$M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множина перших n натуральних чисел;

$\in$ — відношення належності;

$*, \star, +, \cdot, \circ, \triangleleft, \triangleright, \ldots$ — загальні значки для позначення бінарних операцій;

$<, > \leqslant, \geqslant$ — стандартні відношення порядку на числових множинах;

$\subset$ — відношення нестрогого включення;

$\mathfrak{P}(A)$ — множина всіх підмножин множини A;

$\cup$ — операція об'єднання множин;

$\cap$ — операція перетину множин;

$'$ — операція доповнення множини;

$\setminus$ — операція віднімання множин;

$\div$ — операція симетричного віднімання множин;

$\times$ — операція прямого множення множин;

$\oplus$ — операція прямого додавання підпросторів;

$\sim, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$ — основні операції алгебри висловлень;

$\forall, \exists$ — квантори загальності та існування;

$[a, b]$ — відрізок;

(a, b) — впорядкована пара елементів, інтервал;

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — впорядкована n-ка елементів;

A^n — декартів n-ий степінь множини A;

$\rho, \sigma, \varepsilon, \ldots$ — бінарні відношення;

Δ_A — тотожне відношення або діагональ множини A;

$^{-1}$— операція взяття оберненого відношення або оберненого елемента;

$\circ$ — операція композиція бінарних відношень;

G/H — фактор-група групи G за підгрупою H;

$f : A \longrightarrow B$ — відображення множини A в множину B;

$f(a)$ — образ елемента $a \in A$ при відображенні $f : A \longrightarrow B$;

R_o^α — поворот навколо центра O на кут α;

l_g, r_g — лівий, правий зсув, який відповідає елементу g;

$Ker\, f$ — ядро гомоморфізму, лінійного оператора f;

$Im\, f$ — образ лінійного оператора f;

$Aut(G)$ — множина всіх автоморфізмів групи G;

$End(G)$ — множина всіх ендоморфізмів групи G;

$(A; +, \cdot)$ — алгебра з двома операціями;

$(A; +; \leqslant)$ — алгебраїчна система з операцією $+$ і відношенням $\leqslant$;

G — загальне позначення групи;

G_n — група коренів n-го степеня з одиниці;

D_n — група діедра (група самосуміщень правильного n-кутника);

S_n — симетрична група n-го степеня (група всіх підстановок множини M_n);

A_n — знакозмінна група n-го степеня (група всіх парних підстановок множини M_n);

K — загальне позначення кільця;

P — загальне позначення поля;

$\mathbb{Z}[x]$ — множина всіх многочленів від змінної x з цілими коефіцієнтами;

$\mathbb{Z}[i]$ —кільце цілих гауссових чисел;

L — загальне позначення векторного простору над полем P;

L^* — загальне позначення лінійної алгебри лінійних операторів векторного простору L над полем P;

L_n — загальне позначення n-вимірного векторного простору над полем P;

L_n^* — загальне позначення лінійної алгебри лінійних операторів n-вимірного векторного простору над полем P;

$dim\, L$ — розмірність векторного простору;

W_2 — векторний простір всіх радіус-векторів на координатній площині;

W_3 — векторний простір всіх радіус-векторів звичайного тривимірного простору;

$\mathbb{R}^n$ — арифметичний n-вимірний дійсний векторний простір;

$C_{[a,b]}$ — векторний простір всіх функцій, визначених і неперервних на відрізку $[a, b]$;

$\mathbb{R}_n[x]$ — векторний простір всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує n;

$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — n-вимірний вектор з координатами $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — сума елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ — добуток елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ — загальна форма запису системи m лінійних рівнянь з n невідомими;

$\begin{cases} \vec{a}_1\vec{x} = b_1, \\ \vec{a}_2\vec{x} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{a}_m\vec{x} = b_m, \end{cases}$ — векторно-скалярна форма запису системи m лінійних рівнянь з n невідомими;

$x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + \cdots + x_n\vec{p}_n = \vec{b}$ — векторна форма запису системи m лінійних рівнянь з n невідомими;

$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — $m \times n$-матриця;

$M_{m\times n}(P)$ — множина всіх $m \times n$-матриць над полем P;

$M_n(P)$ — множина всіх матриць n-го порядку над полем P;

A^t — матриця, транспонована до матриці A;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ — одинична матриця n-го порядку;

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ — діагональна матриця n-го порядку;

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$ — скалярна матриця n-го порядку;

$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — трикутні матриці;

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — симетрична матриця;

$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ — визначник n-го порядку;

$|A|$ — визначник квадратної матриці;

T_e^a — матриця переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ до базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$;

A_f^e — матриця лінійного оператора у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$;

$U^\perp$ — ортогональне доповнення до підпростору U в евклідовому векторному просторі;

e — тотожний (одиничний) лінійний оператор векторного простору;

o — нульовий лінійний оператор векторного простору;

$pr_{\vec{e}}\vec{a}$ — проекція вектора $\vec{a}$ на напрям $\vec{e}$;

$GL(n, P)$, $GL_n(P)$ — множина всіх оборотних лінійних операторів векторного простору L_n над полем P (повна лінійна група);

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \vee 0$ — загальне позначення лінійної нерівності з n невідомими.

Предметний показчик

Література

[1] Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1974.– Ч.1.– 464 с.

[2] Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1976.–Ч. 2.– 402 с.

[3] Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел.– М.: Высшая школа, 1979.– 559с.

[4] Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.– 400 с.

[5] Кулик В.Т., Рокіцький І.О. Алгебра. Оглядові лекції до державних екзаменів.– Вінниця.: педуніверситет, 1999.– 249 с.

[6] Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум.– К.: Вища школа, 1983.–Ч. 1.– 232 с.

[7] Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. – К.: Вища школа, 1986.– Ч. 2.–264 с.

[8] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре.– М.: Просвещение, 1993.– 288 с.

[9] Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел.– Минск: Высшейшая школа, 1982.– 233 с.

[10] Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре. – М.: Факториал, 1995.– 454 с.

[11] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.– 288 с.

[12] Проскуряков И.В., Сборник задач по линейной алгебре.– М.: Наука, 1974.– 384 с.

[13] Збірник задач з алгебри. За редакцією Рокіцького І.О.– Вінниця.: ВДПУ, 2002.Ч.1.– 176 с.

[14] Збірник задач з теорії чисел. За редакцією Рокіцького І.О.– Вінниця.: ВДПУ, 2001.– 116 с.

[15] Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975.– 320 с.

[16] Ляпин Е.С., Айзенштат А.Я., Лесохин М.М. Упражнения по теории групп. –М.: Наука, 1967.– 264 с.

[17] Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп.–М.: Наука, 1967.– 224 с.

[18] Белоусов В.Д. Элементы теории квазигрупп. –Кишинев: КГУ, 1981.— 116 с.

[19] Варпаховский Ф.Л., Солодовников А.С., Алгебра.–М.: Просвещение, 1974.– 160 с.

[20] David C. Lay Linear Algebra and its Applications, Third edition, Adisson Weskey, 2005. –

[21]

Гарвацький Володимир Сергійович

Кулик Володимир Тихонович

Рокіцький Іван Олександрович

Рокіцький Ростислав Іванович

ЗБІРНИК
задач з алгебри
частина 2

Виготовлено з оригінал-макету в Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського, 21100, м. Вінниця, вул. Острозького, 32.

Замовлення № 30 Тираж 300