Вінницький державний педагогічний університет
ім. Михайла Коцюбинського

ЗБІРНИК
задач з теорії многочленів

посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів

Вінниця
2004

УДК 512 + 511
З – 41
Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів спеціальності "Педагогіка і методика середньої освіти. Математика ". (Лист Міністерства освіти і науки України № 14/18.2–2516 від 01.12.2004 р.)

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Кузенний М.Ф. (Інститут математики НАН України), кандидат фізико-математичних наук, доцент Требенко Д.Я. (НПУ імені М.П.Драгоманова) і кандидат фізико-математичних наук, доцент Дереч В.Д. (ВНТУ)

Пропонований навчальний посібник є збірником задач з теорії многочленів. Він містить більше 1000 задач та вправ і охоплює повністю програму четвертого семестру з названої дисципліни для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету ім.М.Коцюбинського, протокол № 4 від 24 грудня 2003 року.

КОЛЕКТИВ АВТОРІВ: В.С.Гарвацький, В.Т.Кулик, І.О.Рокіцький, Р.І.Рокіцький

Збірник задач з теорії многочленів. [Навчальний посібник для студентів фізико-математичного факультету] За редакцією І.О.Рокіцького, Вінниця, 2004 – 139 с.

ISBN 966-527-124-5 Вінниця: ДОВ "Вінниця"

Зміст

Передмова

Пропонована книга завершує цикл збірників задач [12,17,18] з курсу "Алгебра і теорія чисел", написаних одним колективом авторів для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

При написанні цього збірника автори зберегли ідею розподілу задач кожного з основних параграфів розділів за рубриками: задачі на ілюстрацію основних понять, задачі на техніку обчислень і перетворень, задачі на доведення, творчі задачі та олімпіадні задачі. Такий розподіл дозволить студенту при самостійній роботі поступово переходити від простих до складніших задач, керуючись самостійною оцінкою свого рівня підготовки. До більшості задач з перших двох рубрик у збірнику є відповіді. До задач з інших трьох рубрик іноді даються вказівки або розв'язки. Для їх розв'язування студент повинен добре володіти основними поняттями і теоремами теорії, проявити творче мислення, винахідливість та логічну стрункість в математичних доведеннях і перетвореннях. В окремих випадках такі задачі на дослідження можуть стати темами курсових робіт.

Кожен параграф розпочинається з посилання на літературу, в якій читач може знайти всі поняття і теореми з відповідного теоретичного матеріалу. Дано також скорочений виклад теоретичного матеріалу, необхідного для розв'язування задач цього параграфу.

У кожному з трьох розділів є параграф "Вибрані задачі". До них включено задачі з різних математичних олімпіад і конкурсів для учнів шкіл і студентів вищих навчальних закладів. Вони призначені для тих студентів, які хочуть зробити свої перші кроки в наукових дослідженнях. Тому до цих задач не дано вказівок і відповідей. У різних рубриках збірника також є задачі з різноманітних учнівських математичних олімпіад. Це допоможе вчителю математики в роботі з учнями в шкільному математичному гуртку.

У збірнику вміщено список основних позначень, які використовуються в книзі, предметний показчик та додатки "Степеневі суми" , "Моногенні многочлени "Канонічний розклад над полем $\mathbb{R}$ многочленів $f(x) = x^n - 1$" і "Алфавіти".

Автори висловлюють вдячність професорам Кузенному М.Ф., Панкову О.А., Томусяку А.А., Корольському В.В., Яковцю В.П. і доцентам Деречу В.Д., Требенко Д.Я., Шевченко К.М., Курнишу А.В., Мельнику І.І., Дідківській Т.В., Єпішову В.В., Марачу В.С. за цінні зауваження і поради, висловлені при підготовці всіх чотирьох збірників до видання.

Розділ 1

Многочлени від однієї змінної

§ 1.1 Кільце многочленів над областю цілісності

Література: [2] стор. 211 -227; [3] стор. 459 – 468.

Теоретичні відомості

Нехай $K[x]$ – кільце многочленів від однієї змінної x над областю цілісності K. Елементи цього кільця називають *многочленами від змінної x над K* і позначають символами $f(x), g(x)$ і т.д. Нуль кільця називають *нулевим многочленом або нуль-многочленом* і позначають символом 0.

Будь-який ненульовий многочлен над областю цілісності K можна єдиним чином записати у вигляді

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ і $a_n \neq 0$. Цей вираз називають *канонічною формою ненульового многочлена*. Канонічною формою нуль-многочлена є запис 0.

Доданок $a_k x^k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ канонічної форми ненульового многочлена $f(x)$ називається його *k-м членом (членом k-го степеня), a_k – k-м коефіцієнтом (коефіцієнтом k-го члена), a_0 називають також вільним членом многочлена $f(x)$*. Якщо $a_k = 0$, то такий член у записі канонічної форми не пишуть і кажуть, що k-й член дорівнює нулю або його немає. Член n-го (найбільшого) степеня називається *старшим членом*, його коефіцієнт a_n – *старшим коефіцієнтом*, а його степінь – *степенем многочлена* $f(x)$ і позначають $\deg f$. Нуль-многочлену не приписують ніякого степеня. Разом з тим, розглядаючи множину всіх многочленів, степінь яких менший (не перевищує) натурального числа n, будемо вважати, що нуль-многочлен належить до такої множини.

Два многочлени з кільця $K[x]$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий степінь і попарно рівні відповідні коефіцієнти (*алгебраїчна рівність многочленів*).

Кільце многочленів $K[x]$ над областю цілісності є областю цілісності.

Нехай $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ є многочленом з кільця $K[x]$ і $b \in K$. Тоді елемент $f(b) = a_nb^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0$ кільця K називають *значенням многочлена* $f(x)$ *при* $x = b$. Кожен многочлен $f(x)$ з кільця $K[x]$ визначає відображення $\varphi_f : K \longrightarrow K$ таке, що $\varphi_f(b) = f(b)$. Існує гомоморфізм кільця $K[x]$ на кільце $\overline{K}$ всіх таких відображень області цілісності K з традиційними операціями додавання і множення функцій.

Якщо область цілісності K має характеристику 0, то многочлени $f(x), g(x) \in K[x]$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні відображення φ_f та φ_g, які вони визначають (*функціональна рівність многочленів*).

Над областю цілісності характеристики 0 кільця $K[x]$ та $\overline{K}$ є ізоморфними, тобто алгебраїчне і функціональне тлумачення многочленів в цьому випадку є рівносильними.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи є многочленом від змінної x або y вираз:
   а) $\log_3 2 \cdot x^3 + 5x^2 - 3x + \cos\frac{\pi}{3}$; в) $7y^3 + bxy - 1$;
   б) $6x^4 - 2x^3 + x + a$; г) $ay^2 + \ln x - 5$

   над певною областю цілісності? Якщо це так, то назвіть область цілісності та степінь многочлена.

2. Чи записаний в канонічній формі многочлен:
   а) $(1+\sqrt{2})x^4 + ax^2 - x\cos\frac{\pi}{12} - 1$ над полем $\mathbb{R}$;
   б) $(1-i^{2002})x^3 + (1+i)^{2000}x^2 + (1-i)^{2002}x + i$ над полем $\mathbb{C}$;
   в) $(x^2-3)(x^2+3) + 18$ над кільцем $\mathbb{Z}$;
   г) $\overline{6}x^5 + \overline{4}x^3 + \overline{2}x$ над полем $\mathbb{Z}_7$?

3. Скільки існує многочленів у кільці $\mathbb{Z}_2[x]$ та відображень скінченного поля $\mathbb{Z}_2$ у $\mathbb{Z}_2$?

4. Чи можна кожне з відображень кільця $\mathbb{Z}_2$ у $\mathbb{Z}_2$ задати аналітично за допомогою многочлена?

5. Скільки існує многочленів з коефіцієнтами 1, 0 та - 1, степінь яких:
   а) не перевищує 2; в) менший натурального числа n;
   б) рівний 2004; г) рівний n?

6. Чи існує многочлен з коефіцієнтами з множини перших дев'яти натуральних чисел такий, що $f(10) = 24568$?

7. Які з наступних многочленів є рівними:
   а) $f_1(x) = 5^{-\log_5 2}x^3 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}x^2 + 2x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;
   б) $f_2(x) = (1 - \sin\frac{\pi}{6})x^3 + (i-1)^2x^2 + 2 - i$;
   в) $f_3(x) = (\overline{2}x + \overline{3})^3$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$;
   г) $f_4(x) = \frac{1}{2}x^3 + (\sqrt{3} - 1)x^2 - 2i^2x - i^4$;
   д) $f_5(x) = \overline{3}x^3 - \overline{4}x^2 + \overline{4}x - \overline{3}$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$;
   е) $f_6(x) = (\cos\frac{\pi}{3})x^3 + 2i^3x^2 + i^7 + 2$;
   є) $f_7(x) = (\frac{1}{6} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6})x^3 + (\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 1)x^2 - (4\cos^2\frac{\pi}{3})x - 2^0$;
   ж) $f_8(x) = -\overline{2}x^3 + x^2 - x + \overline{2}$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$?

8. Скільки многочленів над областю цілісності $\mathbb{Z}_7$ мають:
   а) нульовий степінь; в) другий степінь;
   б) перший степінь; г) степінь не вище другого?

9. Які з наступних множин многочленів є кільцями відносно операцій додавання і множення над відповідними областями цілісності:
   а) $\{a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_2x^2 + a_0 | a_0, a_2, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$;
   б) $\{a_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots + a_3x^3 + a_1x | a_1, a_3, \ldots, a_{2n+1} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$;
   в) $\{a_nx^n + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 | a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$;
   г) $\{a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x | a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_5, n \in \mathbb{N}\}$?

10. Нехай $f(x) = \overline{2}x^2 + \overline{3}x + \overline{6}$ – многочлен з кільця $\mathbb{Z}_7[x]$. Яким є графік відображення $\varphi_f : \mathbb{Z}_7 \to \mathbb{Z}_7$ такого, що $\varphi_f(a) = f(a)$ для кожного $a \in \mathbb{Z}_7$?

11. Яка характеристика кілець: а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $\mathbb{Q}[x]$; в) $\mathbb{R}[x]$; г) $\mathbb{Z}_2[x]$; д) $\mathbb{Z}_5[x]$; е) $K[x]$, де K є область цілісності характеристики n?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

12. Перевірити, що відношення ε між многочленами з кільця $K[x]$ над областю цілісності K, яке визначається умовою

$$f(x)\varepsilon g(x) \longleftrightarrow (\forall a \in K)(f(a) = g(a)),$$

є відношенням еквівалентності. При цьому многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називають *еквівалентними* над областю цілісності K.

13. Над якими областями цілісності K відношення ε (задача № 12) між многочленами з кільця $K[x]$ є тотожним?

14. Знайти число різних многочленів:
    а) степеня n у кільці $\mathbb{Z}_7[x]$ $(n > 0)$;
    б) степеня n у кільці $\mathbb{Z}_p[x]$ $(n > 0, p$ - просте число);
    в) степеня не вище n у кільці $\mathbb{Z}_7[x]$ $(n > 0)$;
    г) степеня не вище n у кільці $\mathbb{Z}_p[x]$ $(n > 0, p$ - просте число).

15. При яких a, b і c наступні многочлени з кільця $\mathbb{Z}[x]$ рівні між собою:
    а) $f(x) = ax^2(x+1) + b(x^2+1)(x-6) + cx(x^2+1)$ та $g(x) = x^2 - 4x + 3$;
    б) $f(x) = ax(x^2+3) + bx(x-1) + c(x+1)$ та $g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 8x + 7$?

16. Знайти всі значення a і b, при яких многочлен $f(x)$ є квадратом деякого многочлена $g(x)$ з того самого кільця, і знайти його, якщо:
    а) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$;
    б) $f(x) = \overline{4}x^4 + \overline{a}x^2 - \overline{b}x + \overline{b}$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$;
    в) $f(x) = \overline{a}x^6 - \overline{a}x^3 + \overline{b}x^2$ з кільця $\mathbb{Z}_7[x]$;
    г) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$.

17. Знайти всі значення a і b, при яких многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + 12x + b$ є кубом деякого многочлена $g(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$.

18. Чи може многочлен з дійсними коефіцієнтами

$$f(x) = 4x^4 - 4ax^3 + 4bx^2 + 2a(c+1)x + (c+1)^2$$

бути квадратом деякого многочлена з цілими коефіцієнтами?

19. Чи може многочлен з дійсними коефіцієнтами

$$f(x) = 8x^6 - 36ax^5 + 66a^2x^4 - 63a^3x^3 + 33a^4x^2 - 9a^5x + a^6$$

бути кубом многочлена з цілими коефіцієнтами?

20. Задати кожне відображення поля $\mathbb{Z}_3$ в себе за допомогою многочлена з кільця $\mathbb{Z}_3[x]$.

21. Знайти суму коефіцієнтів многочлена:
   а) $f(x) = (x+3)^3$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$;
   б) $f(x) = (x-1+i)^4$ з кільця $\mathbb{C}[x]$;
   в) $f(x) = (\overline{2}x-\overline{3})^2(x+\overline{4})^3$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$;
   г) $f(x) = (x+\overline{2})^3(x-\overline{3}) + (\overline{2}x-\overline{1})^2(x+\overline{1})^2$ з кільця $\mathbb{Z}_7[x]$.

22. Многочлен $g(x)$ над областю цілісності K має однакові суми коефіцієнтів членів парного і непарного степенів, рівні a. Знайти суму коефіцієнтів членів парного степеня многочлена $f(x) = [g(x)]^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

23. Знайти многочлен найменшого степеня, який еквівалентний (задача № 12) даному многочлену:
   а) $f(x) = (1+\sqrt{2})x^4 + (1-\sqrt{2})x^2 + 1$ з кільця $\mathbb{R}[x]$;
   б) $f(x) = \overline{2}x^4 - \overline{2}x^3 + x^2 + \overline{2}x$ з кільця $\mathbb{Z}_3[x]$;
   в) $f(x) = \overline{2}x^5 - \overline{2}x^3 + x^2 + \overline{3}x$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$;
   г) $f(x) = ix^5 - 2ix^3 + (1-i)x^2 + 3ix - 1$ з кільця $\mathbb{C}[x]$.

Задачі на доведення

24. Довести, що в кільці $\mathbb{Z}_7[x]$ многочлени $f(x) = (x-\overline{5})^7$ і $g(x) = x^7 + \overline{2}$ рівні.

25. Довести, що для будь-якого простого числа p і цілого a такого, що $1 \leqslant a \leqslant p-1$ многочлени $f(x) = (x+\overline{a})^p$ і $g(x) = x^p + \overline{a}$ рівні в кільці $\mathbb{Z}_p[x]$.

26. Довести, що з функціональної точки зору наступні многочлени з кільця $\mathbb{Z}_7[x]$ рівні:
   а) $f(x) = \overline{5}x^{21} + x^{18} + \overline{2}x^{10} - \overline{3}x^8 - x^4 - x - \overline{1}$
   та $g(x) = \overline{4}x^{15} - \overline{6}x^4 - \overline{2}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{5}x$;
   б) $f(x) = \overline{2}x^{16} + x^{11} + \overline{3}x^{10} - x^5 + \overline{2}x^4$
   та $g(x) = x^{18} + \overline{3}x^{12} - x^6 + \overline{4}$.

27. Довести, що для будь-якої області цілісності K в кільці $K[x]$ не існує двох многочленів першого степеня, які різні в алгебраїчному і рівні у функціональному розумінні.

28. Довести, що для будь-якої скінченної області цілісності K в кільці $K[x]$ існує ненульовий многочлен $g(x)$ такий, що $g(a) = 0$ для всіх $a \in K$.

29. Довести, що кожне відображення скінченної області цілісності K в себе можна задати деяким многочленом з кільця $K[x]$.

30. Довести, що многочлен

$$f(x) = (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3)^3$$

містить тільки члени парного степеня.

31. Довести, що многочлен $f(x) = \frac{1}{2002!}x(x-1)\cdots(x-2001)$ набуває цілих значень при будь-яких цілих значеннях змінної x.

Творчі задачі

32. Знайти всі натуральні числа n і дійсні числа a та b, для яких відображення, яке задано формулою $f(x) = \sqrt[n]{ax + b}$, можна задати за допомогою многочлена над полем $\mathbb{R}$.

33. Встановити зв'язки між кільцями:
   а) $\mathbb{Z}_p[x]$ і $\mathbb{Z}_q[x]$, де p і q – прості числа;
   б) $\mathbb{Z}_p[x]$ і $(p\mathbb{Z})[x]$, де p – просте число;
   в) $\mathbb{Z}_p[x]$ і $\mathbb{Z}[x]$, де p – просте число;
   г) $(n\mathbb{Z})[x]$ і $\mathbb{Z}[x]$, де $n \in \mathbb{N}$.

34. Який зв'язок між кільцями $(m\mathbb{Z})[x]$ і $(n\mathbb{Z})[x]$ для різних натуральних чисел m і n?

35. *Автоморфізмом кільця* K називають кожний ізоморфізм кільця K на себе. Знайти всі автоморфізми кільця $K[x]$ над областю цілісності K.

Задачі з олімпіад

36. При яких натуральних n многочлен $f(x) = \frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+1)$ може набувати цілих від'ємних значень?

37. Нехай φ – деякий гомоморфізм області цілісності K на себе та $f(x)$ – довільний многочлен з кільця $K[x]$. Довести, що існує єдиний гомоморфізм θ кільця $K[x]$ на себе, який продовжує гомоморфізм φ (тобто такий, що $\theta(a) = \varphi(a)$ для кожного $a \in K$) і такий, що $\theta(x) = f(x)$.

38. Знайти всі автоморфізми кільця: а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $\mathbb{Q}[x]$; в) $\mathbb{R}[x]$; г) $\mathbb{C}[x]$.

§ 1.2 Відношення подільності многочленів. Ділення з остачею

Література: [2] стор. 227 – 238; [3] стор. 469 – 470.

Теоретичні відомості

У кільці многочленів $P[x]$ над полем P відношення подільності визначається так: *многочлен $f(x)$ ділиться на $g(x)$ (записують $f(x) \vdots g(x)$), якщо у кільці $P[x]$ існує многочлен $s(x)$ такий, що $f(x) = g(x) \cdot s(x)$.*

Відношення подільності многочленів у кільці $P[x]$ має такі властивості:

1. $f(x) \vdots g(x) \wedge g(x) \vdots h(x) \longrightarrow f(x) \vdots h(x)$;
2. $f(x) \vdots h(x) \wedge g(x) \vdots h(x) \longrightarrow (f(x) \pm g(x)) \vdots h(x)$;
3. $f(x) \vdots h(x) \longrightarrow (f(x) \cdot g(x)) \vdots h(x)$;
4. $c \in P \setminus \{0\} \longrightarrow f(x) \vdots c$;
5. $c \in P \setminus \{0\} \wedge f(x) \vdots g(x) \longrightarrow f(x) \vdots (c \cdot g(x))$;
6. $f(x) \vdots g(x) \wedge g(x) \vdots f(x) \longrightarrow (\exists c \in P)(f(x) = c \cdot g(x))$.

Аналогічно визначається відношення подільності в кільці $K[x]$ над областю цілісності K, але не всі перелічені вище властивості мають місце в кільці $K[x]$.

Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ з кільця $P[x]$ називають *асоційованими*, якщо $f(x) = c \cdot g(x)$ для деякого $c \in P$.

Говорять, що многочлен $f(x) \in P[x]$ *ділиться з остачею на многочлен $g(x) \neq 0$ з кільця $P[x]$*, якщо в кільці $P[x]$ існують многочлени $s(x)$ і $r(x)$ такі, що:

1. $f(x) = g(x) \cdot s(x) + r(x)$;
2. $r(x) = 0 \quad$ або $\quad \deg r(x) < \deg g(x)$.

При цьому $f(x)$ називають *діленим*, $g(x)$ – *дільником*, $s(x)$ – *часткою*, $r(x)$ – *остачею*.

Довільний многочлен $f(x)$ з кільця $P[x]$ ділиться з остачею на будь-який ненульовий многочлен $g(x)$ з цього кільця, причому частка і остача визначаються однозначно.

Для знаходження частки і остачі від ділення многочлена $f(x)$ на $g(x)$ в кільці $P[x]$ (а при певних умовах і в кільці $K[x]$ над областю цілісності K) застосовують методи: *ділення кутом, невизначених коефіцієнтів* та окремі *табличні схеми*.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Як перевірити подільність одного многочлена на інший у кільці многочленів $P[x]$ над полем P?

2. Перевірити, чи ділиться многочлен:
   а) $f(x) = (5x^2 + 4x - 1)(10x^3 + 10x - 20) + 3x^4 - 3$ на $g(x) = 5x^2 - 5$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
   б) $f(x) = x^{2002} + x^{2000} + \cdots + x^4 + x^2 + 1$ на $g(x) = x^2 + 1$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
   в) $f(x) = x^{2002} - x^{2000} + \cdots - x^4 + x^2 - 1$ на $g(x) = x^2 - 1$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   г) $f(x) = x^{2003} + x^{2000} + \cdots + x^4 + x^2 + 1$ на $g(x) = x^2 + 1$ у кільці $\mathbb{R}[x]$.

3. Знайти мультиплікативну групу кільця:
   а) $\mathbb{Z}[x]$; в) $\mathbb{Z}_7[x]$; д) $\mathbb{Q}[x]$; є) $\mathbb{R}[x]$;
   б) $\mathbb{Z}_2[x]$; г) $(n\mathbb{Z})[x]$; е) $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}])[x]$; ж) $\mathbb{C}[x]$.

4. Опишіть відомі вам методи ділення многочленів з остачею.

5. Чому у кільці $\mathbb{Z}[x]$ не завжди можна виконати ділення многочленів з остачею?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

6. Методом невизначених коефіцієнтів встановити, чи ділиться многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$, якщо:
   а) $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 6x - 1$ і $g(x) = x^2 - 3x + 1$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$;
   б) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ і $g(x) = 2x^3 + 5x - 6$ з кільця $\mathbb{Q}[x]$;
   в) $f(x) = \sqrt{2}x^3 - (1 + \sqrt{2})x + 2 - \sqrt{2}$ і $g(x) = x^2 + 1$ з кільця $\mathbb{R}[x]$;
   г) $f(x) = ix^5 - x^4 + x^2 - 2 + i$ та $g(x) = x^4 - 2i$ з кільця $\mathbb{C}[x]$.

7. Перевірити подільність многочленів:
   а) $f(x) = 4x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 2x + 5$ та $g(x) = x^2 + 6x + 5$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
   б) $f(x) = \overline{4}x^5 + \overline{6}x^4 + \overline{5}x^3 + \overline{2}x + \overline{5}$ та $g(x) = x^3 + \overline{6}x + \overline{5}$ у кільці $\mathbb{Z}_7[x]$;
   в) $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 2x - 3$ та $g(x) = 2x^3 + 1$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
   г) $f(x) = \overline{2}x^5 + \overline{5}x^4 - \overline{5}x^3 - x^2 + \overline{4}x - \overline{3}$ та $g(x) = x^2 + \overline{6}x + \overline{5}$ у кільці $\mathbb{Z}_7[x]$.

8. Встановити, які многочлени є асоційованими у кільці:
   а) $\mathbb{Z}[x]$; в) $\mathbb{Z}_7[x]$; д) $\mathbb{Q}[x]$; є) $\mathbb{R}[x]$;
   б) $\mathbb{Z}_2[x]$; г) $(n\mathbb{Z})[x]$; е) $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}])[x]$; ж) $\mathbb{C}[x]$.

9. При яких значеннях a многочлен $f(x) = 3x^4 + x^2 - 2$ ділиться на многочлен $g(x) = x^2 + a$:
   а) у кільці $\mathbb{Z}[x]$; б) у кільці $\mathbb{Q}[x]$?

10. При яких значеннях a і b многочлен $f(x) = 2x^5 + 4x^4 + x^3 - ax^2 - 4x + b$ ділиться на многочлен $g(x) = x^2 + 2x + 2$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$?

11. Знайти необхідні і достатні умови подільності многочленів:
    а) $f(x) = x^3 - bx + c$ на $g(x) = x^2 + ax + 1$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    б) $f(x) = x^3 + bx - c$ на $g(x) = x^2 - a$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    в) $f(x) = x^4 - bx + c$ на $g(x) = x^2 - ax$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    г) $f(x) = x^4 + bx^2 - c$ на $g(x) = x^2 + ai$ у кільці $\mathbb{C}[x]$.

12. Методом невизначених коефіцієнтів знайти остачу від ділення многочлена:
    а) $f(x) = x^{10} - x^8 - 12x^6 + x^5 + 4x^3 + 3x - 1$ на $g(x) = x^2 - 4$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    б) $f(x) = x^8 + x^6 + x^5 + 4x^3 + 3x - 1$ на $g(x) = x^2 + 1$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    в) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1$ на $g(x) = 2x - 3$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    г) $f(x) = 5x^6 - 4x^4 + 2x^2 - x + 3$ на $g(x) = x^2 + 2$ у кільці $\mathbb{R}[x]$.

13. Шляхом ділення кутом многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ знайти частку і остачу, якщо:
    а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$ та $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$ в кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    б) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^2 - 5x + 7$ та
    $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ в кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    в) $f(x) = x^6 - 7x^5 - 13x^4 + 4x^2 + 11x - 5$ та
    $g(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 3$ в кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    г) $f(x) = \overline{4}x^5 + \overline{3}x^4 - \overline{2}x^3 - x^2 + \overline{2}x - \overline{1}$ та
    $g(x) = \overline{3}x^2 - x - \overline{3}$ в кільці $\mathbb{Z}_5[x]$.

14. При діленні многочлена $f(x)$ на $g(x)$ у кільці $\mathbb{C}[x]$ дістали частку $q(x) = ix + 3 - 2i$ та остачу $r(x) = (-1 + i)x^2 + 2$. Знайти остачу від ділення $f(x)$ на $q(x)$.

Задачі на доведення

15. Довести, що многочлен:
    а) $f(x) = x^3 + 3$ не ділиться на жоден многочлен першого степеня в кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    б) $f(x) = x^3 + \overline{3}$ ділиться на деякий многочлен першого степеня в кільці $\mathbb{Z}_5[x]$.

16. Довести, що многочлен $f(x) = x^{3k} + 1$ при будь-якому непарному натуральному k ділиться на многочлен $g(x) = x^2 - x + 1$ в кільці $\mathbb{Z}[x]$.

17. Довести, що многочлен $f(x) = x^n + a^n$ при будь-якому непарному натуральному n ділиться на многочлен $g(x) = x + a$ над областю цілісності K.

18. Довести, що в кільці $K[x]$ над областю цілісності K можна виконати ділення з остачею кожного многочлена $f(x)$ на будь-який многочлен $g(x)$, старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці (його називають *зведеним многочленом*).

19. Довести, що коли в кільці $K[x]$ над областю цілісності K можна виконати ділення з остачею деякого многочлена $f(x)$ на інший многочлен $g(x)$, то частка і остача визначаються однозначно.

20. Нехай P – деяке скінченне поле. Довести, що існує натуральне $n > 1$ таке, що $(\forall x \in P)(x^n = x)$.

Творчі задачі

21. Нехай многочлени $f(x)$ та $g(x)$ мають такі коефіцієнти, що їх можна вважати належними до кілець $\mathbb{Z}[x]$ і $\mathbb{Z}_p[x]$ для деякого простого числа p. Який зв'язок існує між подільністю цих многочленів у кільцях $\mathbb{Z}[x]$ і $\mathbb{Z}_p[x]$?

22. Нехай K – довільне кільце і $K[x]$ – кільце многочленів над K. Дослідити, які з властивостей многочленів над областю цілісності не мають місця у кільці $K[x]$.

Задачі з олімпіад

23. Знайти остачу від ділення многочлена $f(x) = x^{2004} - 1$ на многочлен $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$.

24. Відомо, що сума коефіцієнтів многочлена $f(x)$ рівна 2 та він має однакові суми коефіцієнтів членів парного і непарного степенів. Знайти остачу від ділення многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x) = x^2 - 1$.

25. Нехай $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ – многочлени з кільця $P[x]$ над полем P степенів $n_1, n_2, \ldots, n_k$ відповідно. Довести, що дані многочлени $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ є лінійно залежними у векторному просторі $P[x]$ над полем P, коли $n_1 + n_2 + \cdots + n_k < \frac{k(k-1)}{2}$.

§ 1.3 Корені многочлена. Розклад многочлена за степенями двочлена $x-a$

Література: [2] стор. 231 – 235, 247 – 249; [3] стор. 481 – 482.

Теоретичні відомості

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ є многочленом з кільця $P[x]$ над полем P.

Розрізняють функціональне і алгебраїчне тлумачення кореня многочлена.

Елемент a поля P називають *коренем многочлена* $f(x)$ з кільця $P[x]$, якщо $f(a) = 0$ (функціональне тлумачення).

Елемент a поля P називають *коренем многочлена* $f(x)$ з кільця $P[x]$, якщо $f(x)$ ділиться на $g(x) = x - a$ (алгебраїчне тлумачення).

На підставі *теореми Безу* про те, що остача від ділення многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ на двочлен $g(x) = x - a$ з цього кільця дорівнює значенню многочлена при $x = a$, тобто $f(a)$, наведені два означення кореня многочлена є рівносильними над будь-яким полем.

Друге означення узагальнюється так:

Елемент a поля P називають *k-кратним коренем многочлена* $f(x)$ з кільця $P[x]$(або *коренем кратності* k), якщо $f(x)$ ділиться на $(x-a)^k$ і не ділиться на $(x-a)^{k+1}$. Корені кратності 1 називають *простими*, а у випадку $k > 1$ – *k-кратними*.

Подання многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ у вигляді

$$f(x) = c_n(x-a)^n + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + c_1(x-a) + c_0,$$

де $c_n, \ldots, c_1, c_0 \in P$, називається *розкладом многочлена за степенями двочлена* $x - a$. Коефіцієнти розкладу $c_n, \ldots, c_1, c_0$ можна знайти шляхом послідовного ділення $f(x)$ на $x - a$, потім знайденої частки на $x - a$ і т.д. При такому діленні зручно застосовувати відому *схему Горнера*.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Многочлен $f(x) = x^3 + x^2 - \overline{2}$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$ ділиться на двочлен $x - \overline{2}$. Чому дорівнює $f(\overline{2})$?

2. Якою є остача при діленні многочлена $f(x) = (x-2)^{100} + (x-1)^{50} - 1$ на $g(x) = x^2 - 3x + 2$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$?

3. Знайти значення многочлена $f(x) = \overline{2}x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{3}x - \overline{4}$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$ для $x \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$. Які з елементів поля $\mathbb{Z}_5$ є коренями цього многочлена?

4. Чи рівносильні алгебраїчне і функціональне поняття кореня многочлена над довільною областю цілісності?

5. Відомо, що многочлен третього степеня $f(x)$ має своїми коренями числа $1+i$, $2-i$ та $3i$. Крім того, $f(0) = -2i$. Знайти цей многочлен.

6. Записати зведений многочлен шостого степеня, який має двократний корінь 3 та чотирикратний корінь – число 5.

7. Відомо, що число 3 є коренем кратності 5 для зведеного многочлена шостого степеня $f(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$. Що можна сказати про розклад даного многочлена за степенями $x - 3$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Знайти всі корені многочлена:
   а) $f(x) = x^4 + \overline{3}x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_3[x]$;
   б) $f(x) = x^4 + \overline{3}x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
   в) $f(x) = x^5 - \overline{5}x^4 + x^3 - \overline{2}x^2 + x - \overline{3}$ у кільці $\mathbb{Z}_7[x]$;
   г) $f(x) = x^p - x$ в кільці $\mathbb{Z}_p[x]$ для простого числа p.

9. Знайти за схемою Горнера частку і остачу від ділення многочлена:
   а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 12x - 7$ на $g(x) = x - 4$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
   б) $f(x) = \overline{2}x^5 - x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x$ на $g(x) = x - \overline{3}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
   в) $f(x) = x^4 - 3\sqrt{3}x^3 + (-11 + \sqrt{3})x^2 + (2 + \sqrt{3})x - \sqrt{3}$ на $g(x) = x + \sqrt{3}$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
   г) $f(x) = x^5 + (1-i)x^4 - (1+3i)x^3 - 2ix^2 + (1+i)x - 2$ на $g(x) = x + 2 + i$ у кільці $\mathbb{C}[x]$.

10. Остачі від ділення многочлена $f(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$ на $g_1(x) = x + 1$ і $g_2(x) = x - 3$ відповідно дорівнюють -1 та 3. Знайти остачу від ділення цього многочлена на $g(x) = (x-3)(x+1)$.

11. Остачі від ділення многочлена $f(x)$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$ на $g_1(x) = x + \overline{1}$, $g_2(x) = x - \overline{2}$ і $g_3(x) = x + \overline{2}$ відповідно дорівнюють $\overline{1}$, $\overline{2}$ та $\overline{4}$. Знайти остачу від ділення цього многочлена на $g(x) = x^3 + x^2 - \overline{4}x + \overline{1}$.

12. Многочлен $f(x)$ з кільця $\mathbb{C}[x]$ ділиться на $g_1(x) = x + i$, при діленні на $g_2(x) = x - 3i$ отримуємо остачу $1 - 2i$, а при діленні на $g_3(x) = x + 3i$

– остачу 4. Знайти остачу від ділення цього многочлена на $g_1(x) = (x+i)(x+3i)(x-3i)$.

13. Визначити цілі числа a і b так, щоб у кільці $\mathbb{Z}[x]$ многочлен:
    а) $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ ділився на $g(x) = (x+1)^2$;
    б) $f(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ ділився на $g(x) = (x-1)^2$;
    в) $f(x) = x^5 + ax^4 + 4x^3 - bx^2 + 2x - 5$ ділився на $g(x) = (x+1)^3$;
    г) $f(x) = x^5 + ax^4 + x^3 - bx^2 + 2x + 1$ ділився на $g(x) = (x+1)^3$.

14. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями двочлена $g(x) = x - a$, якщо:
    а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ і $a = 2$;
    б) $f(x) = x^4 - \overline{3}x^3 + \overline{2}x^2 - \overline{4}x + \overline{2}$ і $a = \overline{3}$;
    в) $f(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1$ і $a = -\frac{1}{2}$;
    г) $f(x) = x^5 - (1+i)x^4 + 2ix^3 + (1-2i)x^2 - 4x + 6$ і $a = i$.

15. Записати в канонічному виді многочлен:
    а) $f(x) = (x-2)^6 - 5(x-2)^3 + 3(x-2)^2 + 2$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    б) $f(x) = (x+\overline{4})^5 - (x+\overline{4})^4 + (x+\overline{4})^3 + (x+\overline{4})^2 - (x+\overline{4}) - \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
    в) $f(x) = (x-\sqrt{2})^4 + 3(x-\sqrt{2})^3 + (x-\sqrt{2})^2 - x$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    г) $f(x) = (x+3i)^5 + 2(x+3i)^4 - (x+3i)^2 - 6(x+3i) + 5 - 3i$ у кільці $\mathbb{C}[x]$.

16. Знайти кратність кореня x_1 многочлена $f(x)$, якщо:
    а) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$ і $x_1 = -1$;
    б) $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ і $x_1 = 1$;
    в) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 40x^2 - 80x + 48$ і $x_1 = 2$;
    г) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + \overline{3}x^2 - x - \overline{3}$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$ і $x_1 = \overline{3}$.

17. Розкласти многочлен:
    а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ за степенями двочлена $g(x) = x^2 + 1$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    б) $f(x) = \overline{3}x^6 + \overline{2}x^5 - x^4 - x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{4}$ за степенями двочлена $g(x) = x^2 + \overline{4}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
    в) $f(x) = \sqrt{2}x^5 - 5x^4 + (5+\sqrt{2})x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + (5+2\sqrt{2})x - 1$ за степенями двочлена $g(x) = x^2 + \sqrt{2}$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    г) $f(x) = x^5 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$ за степенями двочлена $g(x) = x^2 - i$ у кільці $\mathbb{C}[x]$.

18. Нехай $f(x)$ – многочлен з кільця $\mathbb{Z}[x]$ такий, що для трьох різних цілих чисел m, n і k виконується рівність $f(m) = f(n) = f(k) = -1$. Встановити, чи має даний многочлен хоча б один цілий корінь.

Задачі на доведення

19. Довести, що для кожного натурального числа n многочлен:
    а) $f(x) = x^n - a^n$ ділиться на $g(x) = x - a$ у кільці $K[x]$ над областю цілісності K;
    б) $f(x) = x^n + a^n$ ділиться на $g(x) = x + a$ у кільці $\mathbb{Z}_2[x]$;
    в) $f(x) = x^{2n} - a^{2n}$ ділиться на $g(x) = x + a$ у кільці $K[x]$ над областю цілісності K;
    г) $f(x) = (\cos\alpha - x\sin\alpha)^n - \cos n\alpha + x\sin n\alpha$ ділиться на $g_1(x) = x + i$ та $g_2(x) = x - i$ у кільці $\mathbb{C}[x]$ для всіх $\alpha \in \mathbb{R}$.

20. Довести, що для кожного непарного натурального числа n многочлен:
    а) $f(x) = (x + a)^n - x^n - a^n$ ділиться на $g(x) = x + a$ у кільці $K[x]$ над областю цілісності K;
    б) $f(x) = (x + a + b)^n - x^n - a^n - b^n$ ділиться на $g_1(x) = x + a$ і $g_2(x) = x + b$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    в) $f(x) = (x - a)^n + (a - b)^n + (b - x)^n$ ділиться на $g_1(x) = x - a$ і $g_2(x) = x - b$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    г) $f(x) = x^n + a^n$ ділиться на $g(x) = x + a$ у кільці $\mathbb{R}[x]$.

21. Довести, що многочлен:
    а) $f(x) = x^{2004} - x - 2$ не ділиться на $g(x) = x^2 - 1$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    б) $f(x) = (x - 2)^{2004} - (x - 4)^{2002}$ не ділиться на $g(x) = x^2 - 5x + 6$ у кільці $\mathbb{R}[x]$.

22. Довести, що для кожного складеного натурального числа m в кільці $\mathbb{Z}_m[x]$ існують многочлени $f(x)$ та $g(x)$ такі, що $f(x)$ не ділиться з остачею на $g(x)$.

Творчі задачі

23. На які многочлени першого та другого степеня з кільця $\mathbb{Z}_6[x]$ можна виконати ділення з остачею кожного многочлена цього кільця?

Задачі з олімпіад

24. Многочлен $f(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$ приймає значення 2 при чотирьох різних цілих значеннях змінної x. Довести, що для довільного $m \in \mathbb{Z}$ число $f(m)$ не може дорівнювати жодному з чисел $1, 3, 5, 7, 9$.

§ 1.4 Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів

Література: [2] стор. 238 – 243; [3] стор. 470 – 471.

Теоретичні відомості

Нехай $f(x)$ та $g(x)$ – многочлени з кільця $P[x]$ над полем P. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ діляться на многочлен $d(x)$ з кільця $P[x]$, то його називають їхнім *спільним дільником*. Спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, який ділиться на кожний їхній спільний дільник, називають *найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$*.

Найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ визначається однозначно з точністю до множника з поля P, а той з них, який має старший коефіцієнт, рівний одиниці, позначають через (f, g). Для будь-яких многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з кільця $P[x]$, з яких хоча б один відмінний від 0, найбільший спільний дільник існує і дорівнює останній відмінній від нуля остачі в алгоритмі Евкліда.

Найбільший спільний дільник $d(x)$ многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з кільця $P[x]$ завжди можна подати у вигляді

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x),$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – деякі многочлени з кільця $P[x]$. *Таке подання НСД многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називають лінійним.*

Спільним кратним многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з кільця $P[x]$ називають многочлен $s(x) \in P[x]$, який ділиться на $f(x)$ і $g(x)$. Спільне кратне, на яке ділиться кожне спільне кратне цих многочленів, називають їх *найменшим спільним кратним*. Найменше спільне кратне многочленів $f(x)$ і $g(x)$ визначається однозначно з точністю до множника з поля P, а те з них, яке має старший коефіцієнт, рівний одиниці, позначають через $[f, g]$.

Для будь-яких ненульових многочленів $f(x)$ і $g(x)$ з кільця $P[x]$ найменше спільне кратне існує і визначається за формулою $\frac{f(x)g(x)}{(f,g)}$.

Аналогічно визначаються поняття НСД і НСК кількох многочленів з кільця $P[x]$ та многочленів з кільця $K[x]$ над довільною областю цілісності K.

Многочлени $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $P[x]$ називають *взаємно простими*, якщо вони не мають спільних дільників, відмінних від елементів поля P, тобто $(f, g) = 1$. Це означає, що многочлени $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $P[x]$ є взаємно простими тоді і тільки тоді, коли існують многочлени $u(x)$ і $v(x)$ з кільця $P[x]$ такі, що $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.

Для будь-яких ненульових многочленів $f(x)$, $g(x)$ і $h(x)$ з кільця $P[x]$ мають місце властивості:

1. $(f(x), g(x)) = 1 \wedge (f(x), h(x)) = 1 \longrightarrow (f(x), g(x)h(x)) = 1;$
2. $(f(x)g(x)) \vdots h(x) \wedge (f(x), h(x)) = 1 \longrightarrow g(x) \vdots h(x);$
3. $f(x) \vdots g(x) \wedge f(x) \vdots h(x) \wedge (g(x), h(x)) = 1 \longrightarrow f(x) \vdots (g(x)h(x)).$

Задачі на ілюстрацію понять

1. Відомо, що найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P дорівнює $d(x)$. Чому дорівнює найбільший спільний дільник многочленів $\alpha f(x)$ та $\beta g(x)$, якщо $\alpha, \beta \in P$?

2. Який зв'язок існує між найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$ та найбільшим спільним дільником многочленів:
а) $f(x) + g(x)$ та $f(x)$;
б) $f(x) + g(x)$ та $f(x) - g(x)$ у кільці $P[x]$ над полем P?

3. Перевірити, що взаємно простими є такі многочлени:
а) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 2$ і $g(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
б) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$ і $g(x) = x^2 - x + 1$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
в) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ і $g(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
г) $f(x) = x^4 - \overline{4}x^3 + \overline{1}$ і $g(x) = x^3 - \overline{3}x^2 + \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$.

4. Скільки многочленів можуть бути найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ та $g(x)$ в кільці:
а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $\mathbb{Z}_2[x]$; в) $\mathbb{Z}_5[x]$; г) $\mathbb{R}[x]$?

5. Скільки многочленів можуть бути найменшим спільним кратним многочленів $f(x)$ та $g(x)$ в кільці:
а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $\mathbb{Z}_2[x]$; в) $\mathbb{Z}_5[x]$; г) $\mathbb{R}[x]$?

6. Показати, що в кільці $(2\mathbb{Z})[x]$ існують многочлени, які не діляться на жодний многочлен з цього кільця. Навести приклад двох многочленів з кільця $(2\mathbb{Z})[x]$, які не мають найбільшого спільного дільника.

7. Чи для будь-яких многочленів $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$ існує їх найбільший спільний дільник?

8. Чи можна застосувати алгоритм Евкліда для знаходження найбільшого спільного дільника многочленів $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. За допомогою алгоритму Евкліда знайти найбільший спільний дільник таких многочленів:
   а) $f(x) = x^4 + x^3 - 4x + 2$ і $g(x) = x^2 - x + 1$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   б) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ і $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
   в) $f(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$ і $g(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   г) $f(x) = \overline{2}x^4 + x^3 + \overline{3}x^2 + x + \overline{1}$ і $g(x) = x^3 - x - \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$.

10. Знайти лінійне подання найбільшого спільного дільника таких многочленів за допомогою алгоритму Евкліда:
    а) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ і $g(x) = x^2 - x + 1$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    б) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$ і $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    в) $f(x) = x^5 + x^3 + x + \overline{1}$ і $g(x) = x^4 - \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
    г) $f(x) = x^5 + x^4 + \overline{3}x^3 + \overline{2}x + \overline{3}$ і $g(x) = x^3 + \overline{3}x + \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$.

11. Знайти методом невизначених коефіцієнтів лінійне подання найбільшого спільного дільника таких многочленів:
    а) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ і $g(x) = x^2 - x + 1$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    б) $f(x) = x^3 + 2$ і $g(x) = x^3 + x + 1$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    в) $f(x) = x^3 + \overline{3}$ і $g(x) = x^3 + \overline{2}x + \overline{3}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
    г) $f(x) = x^3 - 2ix^2 - ix - 1 - i$ і $g(x) = ix^2 - 2x + 3i$ у кільці $\mathbb{C}[x]$.

12. Знайти лінійне подання многочлена $h(x)$ через многочлени $f(x)$ і $g(x)$, якщо:
    а) $h(x) = x - 2$, $f(x) = x^3 + 2$ і $g(x) = x^3 + x - 1$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    б) $h(x) = 2x - 1$, $f(x) = x^3$ і $g(x) = (x - 1)^2$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    в) $h(x) = \overline{4}x^4 - \overline{3}x^3 - x^2$, $f(x) = x^3 - \overline{1}$ і $g(x) = x^2 + \overline{4}$ кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
    г) $h(x) = x^2 + (1 + i)x + i$, $f(x) = (x^2 + 1)^2$ і $g(x) = x + i$ у кільці $\mathbb{C}[x]$.

13. Знайти найменше спільне кратне таких многочленів:
    а) $f(x) = x^6 + 1$ і $g(x) = x^6 - 1$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$;
    б) $f(x) = x^2 - x + 2$ і $g(x) = x - i$ у кільці $\mathbb{C}[x]$;
    в) $f(x) = x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}$ і $g(x) = x^3 + \overline{3}x^2 + x + \overline{3}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
    г) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ і $g(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$ у кільці $\mathbb{Z}[x]$.

14. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне таких многочленів:
    а) $f(x) = x^4 - 1, \quad g(x) = x^2 - 3ix - 2 \quad$ і $\quad h(x) = x^2 - 2ix - 1$ у кільці $\mathbb{C}[x]$;
    б) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1, \quad g(x) = x^3 - (1+2i)x^2 + (2i-1)x + 1$ і $\quad h(x) = x^2 - (1+i)x + i$ у кільці $\mathbb{C}[x]$.

Задачі на доведення

15. Довести, що коли $d(x)$ є найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P і поле P_1 є розширенням поля P , то $d(x)$ є найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ та $g(x)$ в кільці $P_1[x]$.

16. Довести, що коли $d(x)$ є спільним дільником многочленів $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P і $d(x) = u_1(x)f_1(x) + u_2(x)f_2(x) + \cdots + u_k(x)f_k(x)$ для деяких многочленів $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ з кільця $P[x]$, то $d(x)$ є найбільшим спільним дільником даних многочленів.

17. Довести, що найбільший спільний дільник многочленів $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P є їх спільним дільником найбільшого степеня.

18. Довести, що кожний спільний дільник найбільшого степеня многочленів $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P є їх найбільшим спільним дільником.

19. Довести, що коли $d(x)$ є найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P, то існує його єдине лінійне подання $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$ таке, що $\deg u(x) < \deg g(x)$ і $\deg v(x) < \deg f(x)$.

20. Нехай многочлен $h(x)$ ділиться на найбільший спільний дільник $d(x)$ многочленів $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P і $\deg h(x) < \deg f(x) + deg\, g(x)$. Довести, що в кільці $P[x]$ існує подання $h(x) = f(x)u(x)+g(x)v(x)$ таке, що $\deg u(x) < \deg g(x)$ і $\deg v(x) < \deg f(x)$.

Творчі задачі

21. Як пов'язані між собою питання про існування найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного многочленів $f(x)$ та $g(x)$ в кільці $K[x]$ над областю цілісності K?

22. Вивчити питання про існування найбільшого спільного дільника $d(x)$ многочленів $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $(m\mathbb{Z})[x]$.

23. Нехай $f(x)$ та $g(x)$ — многочлени над полем P, $a, b, c, d \in P$ і $s(x) = af(x) + bg(x)$ та $t(x) = cf(x) + dg(x)$. Знайти всі a, b, c, d при яких виконується рівність $(f(x), g(x)) = (s(x), t(x))$.

24. Для заданих многочленів $h(x)$, $f(x)$ і $g(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P описати можливість існування многочленів $u(x)$ та $v(x)$ таких, що $h(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, та знайти всі такі многочлени.

Задачі з олімпіад

25. Розв'язати рівняння $u(x)f(x) + v(x)g(x) + w(x)h(x) = s(x)$, якщо $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, $h(x) = x^2 + (1 + i)x + i$ та $s(x) = x^2 - (1 - i)x - i$

§ 1.5 Ідеали кільця многочленів над областю цілісності

Література: [2] стор. 230 – 231, 236 – 238; [3] стор. 469 – 470.

Теоретичні відомості

Нехай $K[x]$ є кільцем многочленів над областю цілісності K.

Підмножина I кільця є *ідеалом цього кільця*, якщо:

1. I є підкільцем $K[x]$ кільця;
2. $I \cdot K[x] \subset I$.

Многочлени $f(x), g(x) \in K[x]$ називають *конгруентними за ідеалом* I кільця $K[x]$, якщо $f(x) - g(x) \in I$. Відношення конгруентності за ідеалом I є відношенням еквівалентності на множині $K[x]$. Відповідне йому фактор-кільце позначають через $K[x]/I$, а його елементи називають *класами лишків кільця* $K[x]$ *за ідеалом* I. Кожен елемент фактор-кільця має вид $f(x) + I$, де $f(x) \in K[x]$. Елементи фактор-кільця $f(x) + I$ та $g(x) + I$, відмінні від ідеала I, називають *дільниками нуля*, якщо $(f(x) + I)(g(x) + I) = I$.

Сумою ідеалів I_1 *та* I_2 *кільця* $K[x]$ називають множину

$$I_1 + I_2 = \{f(x) + g(x) | f(x) \in I_1 \wedge g(x) \in I_2\}.$$

Сума ідеалів I_1 та I_2 кільця $K[x]$ є ідеалом цього кільця.

Ідеал I кільця $K[x]$ називають *головним*, якщо існує многочлен $f(x)$ в $K[x]$ такий, що $I = \{g(x) | g(x) \text{ділиться на} f(x)\}$. Його позначають $I = (f(x))$.

Кільце $K[x]$ називають *кільцем головних ідеалів*, якщо всі його ідеали є головними.

Кільце $K[x]$ називають *евклідовим кільцем*, якщо існує відображення $\varphi : K[x] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ таке, що для будь-яких многочленів $f(x)$ та $g(x) \neq 0$ з кільця $K[x]$ існують многочлени $s(x)$ і $r(x)$ в $K[x]$, для яких виконуються умови:

1. $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$;
2. $r(x) = 0$ або $\varphi(r) < \varphi(g)$.

Кожне евклідове кільце є кільцем головних ідеалів.

Кільце $P[x]$ многочленів над полем P є евклідовим.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи є ідеалом в кільці $\mathbb{Z}[x]$ множина I всіх многочленів, у яких вільний член є: а) непарним числом; б) парним числом?

2. Який найменший ідеал в кільці $\mathbb{Z}[x]$ містить:
   а) многочлен $f(x) = x$; б) многочлени $f(x) = x$ і $g(x) = x + 1$?

3. Описати фактор-кільце: а) $\mathbb{Z}[x]/(x)$; б) $\mathbb{Z}[x]/(x, 2)$?

4. Перевірити, який з даних многочленів:
   а) $f(x) = -2x^5 + 3x^3 + x + 1$; в) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$;
   б) $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$; г) $f(x) = x^5 + 3x^3 - x^2 - 2x + 2$
   належить класу лишків $x^3 + x^2 + x + (x^2 - 1)$ з фактор-кільця $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1)$.

5. Які з наступних елементів фактор-кільця $\mathbb{C}[x]/(x^2 + 1)$ дорівнюють нулю:
   а) $x^4 + 2x^2 + 1 + (x^2 + 1)$; в) $-2ix^2 - 2i + (x^2 + 1)$;
   б) $x^3 + (1 - i)x^2 - 4x - 4 + i + (x^2 + 1)$; г) $ix + 1 + (x^2 + 1)$?

6. Чи є дільники нуля у фактор-кільці:
   а) $\mathbb{Z}[x]/(x^3 - 1)$; в) $\mathbb{R}[x]/(x^3 - 2)$;
   б) $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 2)$; г) $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 2)$?
   Якщо дільники нуля є, то навести приклад.

7. Чи є евклідовим кільце: а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $\mathbb{Z}_p[x]$; в) $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}])[x]$;
   г) $K[x]$, якщо K є евклідовим кільцем?

8. Яке з тверджень є істинним:
   а) якщо K є кільцем головних ідеалів, то $K[x]$ також є кільцем головних ідеалів;
   б) якщо K є областю цілісності і $K[x]$ є кільцем головних ідеалів, то K є кільцем головних ідеалів;
   в) якщо $K[x]$ є евклідовим кільцем, то K є евклідовим кільцем;
   г) якщо K є полем, то $K[x]$ є полем?

9. Чи є полем кільце: а) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 4)$; б) $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Знайти ідеал $(x) + (3)$ кільця $\mathbb{Z}[x]$ та фактор-кільце $\mathbb{Z}[x]/((x) + (3))$.

11. Знайти найменший ідеал кільця $\mathbb{Z}[x]$, який містить многочлени:
   а) $f(x) = x^4 - 1$ і $g(x) = x^4 + 3x^2 + 2$;
   б) $f(x) = x^4 - 1$ і $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
   в) $f(x) = x - 1$, $g(x) = x + 2$ і $h(x) = x + 1$;
   г) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$ і $h(x) = x + 1$.

12. У суміжному класі $x^6+x^5-2x^4+x^3+3x^2-1+(x^4+1)$ з фактор-кільця $\mathbb{R}[x]/(x^4+1)$ знайти кілька представників, степінь яких не перевищує числа: а) 5; б) 4; в) 3; г) 2.

13. У фактор-кільці $\mathbb{R}[x]/(x+1)$ знайти клас, обернений до класу з представником:
а) $f(x)=x^2-1$; б) $f(x)=2x-1$; в) $f(x)=x^3-1$; г) $f(x)=x^2+2$.

14. У фактор-кільці $\mathbb{C}[x]/(x^2+i)$ знайти клас, обернений до класу з представником:
а) $f(x)=x^2+1$; в) $f(x)=x+1$;
б) $f(x)=x^2+2ix-1$; г) $f(x)=3ix$.

15. Перевірити, чи є ізоморфними фактор-кільця:
а) $\mathbb{Z}[x]/(x^2-3)$ і $\mathbb{Z}[x]/(x^2-2)$; б)$\mathbb{Z}[x]/(x^2-1)$ і $\mathbb{Z}[x]/(x^4-1)$?

Задачі на доведення

16. Довести, що множина всіх спільних кратних многочленів $g(x)$ і $h(x)$ з кільця $P[x]$ над полем P є головним ідеалом. Яким многочленом породжується цей ідеал?

17. Довести, що в кожному класі лишків фактор-кільця $\mathbb{R}[x]/(x)$ міститься тільки одне дійсне число.

18. Ідеал I області цілісності K називають *простим*, якщо фактор-кільце K/I є областю цілісності. Довести, що ідеал (x) кільця $\mathbb{Z}[x]$ є простим. Чи є простим в кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал (x^3-1)?

19. Довести, що ідеал $(x)+(3)$ в кільці $\mathbb{Z}[x]$ є максимальним, тобто, що кожний ідеал I такий, що $(x)+(3)\subset I\subset\mathbb{Z}[x]$, співпадає з кільцем $\mathbb{Z}[x]$ або $(x)+(3)$.

20. Довести, що ідеал (x) кільця $\mathbb{Z}[x]$ не є максимальним.

21. Нехай I — нетривіальний ідеал області цілісності $\mathbb{Z}[x]$. Довести, що $\mathbb{Z}[x]/I$ є областю цілісності тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(\forall f(x),g(x)\in\mathbb{Z}[x])(f(x)\cdot g(x)\in I\rightarrow f(x)\in I\vee g(x)\in I).$$

22. Нехай P – деяке числове поле і $f(x)\in P[x]$. Довести, що многочлени $g(x)$ і $h(x)$ належать одному і тому ж суміжному класу кільця $P[x]$ за ідеалом $(f(x))$ тоді і тільки тоді, коли їх остачі від ділення на многочлен $f(x)$ однакові.

23. Довести, що фактор-кільце $\mathbb{R}[x]/(x^2+x+1)$ є полем. Знайти в цьому полі обернений елемент до класу лишків:
а) $x-1+(x^2+x+1)$; б) $x^6-1+(x^2+x+1)$.

24. Довести, що будь-який ненульовий елемент $g(x)+(f(x))$ фактор-кільця $P[x]/(f(x))$ многочленів над полем P є дільником нуля або оборотним.

25. Довести, що наступні кільця ізоморфні:

а)	$\mathbb{Z}[x]/(x)$	і	$\mathbb{Z}$;	г)	$\mathbb{R}[x]/(x-3)$	і	$\mathbb{R}$;
б)	$\mathbb{Q}[x]/(x+1)$	і	$\mathbb{Q}$;	д)	$\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$	і	$\mathbb{C}$;
в)	$\mathbb{Q}[x]/(x^2-3)$	і	$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$;	а)	$\mathbb{Z}[x]/(5)$	і	$\mathbb{Z}_5$.

26. Довести, що всі ідеали кільця $P[x]$ над полем P є головними.

27. Довести, що будь-які два ненульові многочлени ненульового ідеала I кільця $P[x]$ над полем P є асоційованими.

28. Довести, що коли область цілісності K не є полем, то кільце $K[x]$ не є кільцем головних ідеалів.

Творчі задачі

29. Знайти фактор-кільце $\mathbb{Z}[x]/((x)+(5))$ і встановити його властивості.

30. Встановити, при яких цілих числах m ідеал (x, m) кільця $\mathbb{Z}[x]$ є головним.

31. Знайти необхідну і достатню умову, при якій ненульовий елемент $g(x)+(f(x))$ фактор-кільця $P[x]/(f(x))$ многочленів над полем P є оборотним елементом.

32. Встановити, чи існують елементи $\overline{a}$ і $\overline{b}$ з кільця $\mathbb{Z}_2$ такі, що фактор-кільця $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+\overline{a}x+\overline{b})$ і $\mathbb{Z}_2[x]/(x+\overline{1})$ є ізоморфними між собою.

Задачі з олімпіад

33. Встановити, чи існує в кільці $\mathbb{Z}[x]$ ідеал I, відмінний від ідеалів (x) та (x^2) і такий, що $(x^2) \subset I \subset (x)$.

34. Знайти фактор-кільце $(2\mathbb{Z})[x]/((2x)+(6))$ і встановити його властивості.

§ 1.6 Незвідні многочлени над полем. Розклад многочленів на незвідні множники

Література: [2] стор. 243 – 247; [3] стор. 471 – 474.

Теоретичні відомості

Нехай $f(x)$ є многочленом над деяким полем P.

Многочлен $f(x)$ називають *незвідним у кільці* $P[x]$ *(або над полем* P*)*, якщо його степінь не менший 1 і дільниками є тільки ненульові елементи поля P та многочлени $c \cdot f(x)$, де $c \in P \setminus \{0\}$.

Многочлен $f(x)$ називають *звідним у кільці* $P[x]$ *(або над полем* P*)*, якщо його степінь не менший 1 і в кільці $P[x]$ існують такі многочлени $g(x), s(x)$, що $f(x) = g(x) \cdot s(x)$, $\deg g(x) \geqslant 1$, $\deg s(x) \geqslant 1$.

Незвідні над полем P многочлени мають такі властивості:

1. многочлен першого степеня над будь-яким полем P є незвідним у кільці $P[x]$;
2. якщо $p(x)$ є незвідним у кільці $P[x]$, то для кожного $c \in P \setminus \{0\}$ многочлен $c \cdot p(x)$ є незвідним у $P[x]$;
3. якщо многочлен $p(x)$ є незвідним над полем P, то для будь-якого многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ виконується одне з двох: $f(x)$ ділиться на $p(x)$ або $f(x)$ і $p(x)$ є взаємно простими;
4. якщо незвідний над полем P многочлен $p(x)$ ділиться на незвідний многочлен $q(x)$ з кільця $P[x]$, то ці многочлени відрізняються тільки сталим множником з поля P.

Будь-який многочлен ненульового степеня з кільця $P[x]$ є незвідним над полем P або його можна подати у вигляді добутку

$$f(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdots p_k(x)$$

незвідних многочленів $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)$ над полем P, причому такий розклад єдиний з точністю до сталих множників і порядку запису співмножників у добутку.

Запис многочлена у вигляді добутку

$$f(x) = [p_1(x)]^{k_1} \cdot [p_2(x)]^{k_2} \cdots [p_m(x)]^{k_m},$$

де $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_m(x)$ – попарно взаємно прості і незвідні над полем P многочлени, називають *канонічним розкладом многочлена* $f(x)$ *над полем* P.

Канонічний розклад для будь-якого многочлена ненульового степеня $f(x)$ з кільця $P[x]$ існує і єдиний з точністю до сталих множників і порядку запису співмножників у добутку.

Число всіх можливих коренів многочлена $f(x)$ над полем P, враховуючи навіть кратність кожного з них, не перевищує його степеня.

Теорема Кронекера. Для будь-якого многочлена ненульового степеня $f(x)$ над полем P існує таке розширення L поля P, в якому $f(x)$ має корінь.

З цієї теореми випливає, що для будь-якого многочлена ненульового степеня $f(x)$ над полем P існує таке розширення L поля P, в якому $f(x)$ розкладається на лінійні множники.

Поле L, в якому многочлен $f(x)$ розкладається на лінійні множники, називають *полем розкладу цього многочлена*.

Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ є коренями многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

над полем P (які можуть не належати P), то мають місце *формули Вієта*:

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n & = & -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n & = & \frac{a_{n-2}}{a_n}; \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & . & \dots\dots\dots \\
\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n & = & (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{array}$$

Якщо знайдено канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над полем P, то їх НСД дорівнює добутку всіх незвідних множників, які входять у обидва розклади у найменшому степені, а НСК дорівнює добутку всіх незвідних множників, які входять у обидва розклади у найбільшому степені. Якщо спільних незвідних множників у многочленів $f(x)$ і $g(x)$ немає, то вони є взаємно простими.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Навести приклад звідного многочлена четвертого степеня у кільці $\mathbb{R}[x]$, який не має дійсних коренів.

2. У кільці $\mathbb{Z}_5[x]$ виконуються рівності:

$$(x + \overline{1})^2 = x^2 + \overline{2}x + \overline{1} = (\overline{2}x - \overline{3})(\overline{3}x - \overline{2}) = (\overline{4}x + \overline{4})^2.$$

   Чи не суперечать вони теоремі про єдиність розкладу многочлена на незвідні множники у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$?

3. Навести приклад незвідного многочлена другого степеня у кільці:
   а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $\mathbb{Z}_5[x]$; в) $\mathbb{Q}[x]$; г) $\mathbb{C}[x]$.

4. Перевірити звідність многочлена $f(x) = x^2 + x + \overline{1}$ у кільцях $\mathbb{Z}_2[x]$ і $\mathbb{Z}_3[x]$.

5. Нехай F є підполем поля P. Перевірити, яке з наступних тверджень є вірним для будь-якого многочлена $f(x)$ з кільця $F[x]$:
   а) якщо $f(x)$ є звідним у кільці $F[x]$, то він є звідним у P;
   б) якщо $f(x)$ є звідним у кільці $P[x]$, то він є звідним у $F[x]$;
   в) якщо $f(x)$ є незвідним у кільці $F[x]$, то він є незвідним у $P[x]$;
   г) якщо $f(x)$ є незвідним у кільці $P[x]$, то він є незвідним у $F[x]$;

6. Яке з наступних тверджень є вірним для будь-якого многочлена $f(x)$ з кільця $\mathbb{Q}[x]$:
   а) якщо $f(x)$ має раціональний корінь, то він звідний у $\mathbb{Q}[x]$;
   б) якщо $f(x)$ звідний у $\mathbb{Q}[x]$, то він має раціональний корінь;
   в) якщо $f(x)$ звідний у $\mathbb{Q}[x]$ і $deg f(x) = 2$, то він має корінь у $\mathbb{Q}$;
   г) якщо $f(x)$ звідний у $\mathbb{Q}[x]$ і $deg f(x) = 4$, то він має корінь у $\mathbb{Q}$?

7. Яким є поле розкладу многочлена:
   а) $f(x) = x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$; в) $f(x) = x^2 + \overline{2}x + \overline{3}$;
   б) $f(x) = x^2 - \overline{3}x - \overline{2}$; г) $f(x) = x^2 + \overline{3}x - \overline{2}$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Записати всі звідні многочлени не вище другого степеня з кільця $\mathbb{Z}_3[x]$.

9. Знайти всі незвідні многочлени степеня:
   а) 2 у кільці $\mathbb{Z}_2[x]$; г) 5 у кільці $\mathbb{Z}_2[x]$;
   б) 3 у кільці $\mathbb{Z}_2[x]$; д) 2 у кільці $\mathbb{Z}_3[x]$;
   в) 4 у кільці $\mathbb{Z}_2[x]$; е) 3 у кільці $\mathbb{Z}_3[x]$.

10. Дослідити на звідність многочлен:
    а) $f(x) = x^2 - x + 1$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    б) $f(x) = x^4 + 1$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    в) $f(x) = \overline{2}x^3 - \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
    г) $f(x) = x^n + 1$ у кільці $\mathbb{C}[x]$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

11. Дослідити, чи є звідним многочлен $f(x) = x^4 + 2x^2 + 4$ над полями: а) $\mathbb{Z}_5$; б) $\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{R}$; г) $\mathbb{C}$.

12. Розкласти на незвідні множники многочлен:
    а) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 27x^2 - 44x + 7$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    б) $f(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
    в) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 169$ у кільці $\mathbb{R}[x]$;
    г) $f(x) = x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 19x - 3$ у кільці $\mathbb{R}[x]$.

13. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів:
   а) $f(x) = (x^4 - 4)(x^2 - 2)$ і $g(x) = x(x^2 + 2)^2(x^3 - 1)$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   б) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^2(x + i)$ і $g(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ у кільці $\mathbb{C}[x]$;
   в) $f(x) = (x^2 - \overline{2}x + \overline{3})^2(x^2 + \overline{4})$ і $g(x) = (x^3 - \overline{1})(x^5 + x^2 - \overline{3}x + \overline{3})$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
   г) $f(x) = x^9 - 1$ і $g(x) = x^{12} - 1$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$.

Задачі на доведення

14. Довести, що многочлен другого або третього степеня з кільця $P[x]$ над полем P є звідним над полем P тоді і тільки тоді, коли він має корінь в P.

15. Довести, що множина незвідних многочленів над будь-яким скінченним полем є нескінченною.

16. Нехай $p(x)$ – незвідний многочлен у кільці $P[x]$ над полем P. Довести, що фактор-кільце $P[x]/(p(x))$ є полем.

17. Довести, що многочлен $f(x) = x^{4k} + x^{2k} + 1$ є звідним над полем $\mathbb{Q}$ при будь-якому $k \in \mathbb{N}$.

18. Довести, що многочлен:
   а) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$ є звідним у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   б) $f(x) = (x^2 - x + 1)^2 + x(x^2 - x + 1) - 2x^2$ є звідним у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   в) $f(x) = x^3 + \overline{2}x^2 + x - \overline{3}$ є звідним у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
   г) $f(x) = x^4 + x^2 + \overline{3}$ є звідним у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$.

19. Довести, що многочлен:
   а) $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ є незвідним у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   б) $f(x) = x^5 - x^2 + 1$ є незвідним у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   в) $f(x) = x^3 + x^2 + x + \overline{3}$ є незвідним у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$;
   г) $f(x) = x^4 + \overline{2}x + \overline{3}$ є незвідним у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$.

20. Довести, що при довільному простому p у кільці $\mathbb{Z}_p[x]$ існують незвідні многочлени будь-якого ненульового степеня.

21. Нехай K є *факторіальним кільцем* (область цілісності, в якій кожний ненульовий необоротний елемент може бути розкладеним на прості множники, причому цей розклад єдиний з точністю до перестановки

співмножників і заміни їх асоційованими елементами).
Довести, що у факторіальному кільці K:
а) прості дільники необоротного елемента a є, з точністю до асоційованості, ті і тільки ті прості елементи, які входять в його розклад на прості множники;
б) якщо добуток $a_1a_2\cdots a_n$ ділиться на простий елемент p, то хоча б один із співмножників $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ділиться на p.

22. Многочлен $f(x) \in K[x]$ над факторіальним кільцем K називають *примітивним*, якщо всі його коефіцієнти взаємно прості, тобто в їх розкладах на прості множники немає спільного (з точністю до асоційованості) множника (ще по іншому: вони не діляться ні на який необоротний елемент кільця K).
Довести, що:
а) добуток двох примітивних многочленів кільця $K[x]$ є примітивним многочленом;
б) кожний многочлен $f(x) \in K[x]$ може бути поданий у виді $f(x) = ag(x)$, де $a \in K$ і $g(x)$ є примітивним многочленом.

23. Нехай P є *полем відношень* факторіального кільця K.
Довести, що:
а) кожний многочлен $f(x) \in P[x]$ може бути поданий у виді $f(x) = ag(x)$, де $a \in P$ і $g(x)$ є примітивним многочленом кільця $K[x]$; б) якщо примітивні многочлени $f(x), g(x) \in K[x]$ асоційовані в кільці $P[x]$, то вони асоційовані в кільці $K[x]$.

Творчі задачі

24. Нехай многочлен $f(x)$ має цілі коефіцієнти. Довести, що існує просте число p таке, що многочлен $f(x)$ можна вважати елементом кільця $\mathbb{Z}_p[x]$. Як пов'язані звідність многочлена $f(x)$ над полем $\mathbb{Z}_p$ із існуванням розкладу його на множники ненульового степеня у кільці $\mathbb{Z}[x]$?

25. Нехай p і q – різні прості числа, та многочлен $f(x)$ має цілі коефіцієнти такі, що його можна вважати елементом кілець $\mathbb{Z}_p[x]$ і $\mathbb{Z}_q[x]$. Як повязані між собою звідність даного многочлена над полями $\mathbb{Z}_p$ і $\mathbb{Z}_q$?

26. Нехай многочлен $f(x)$ є незвідним над полем $\mathbb{Z}_5$. Чи є серед многочленів $f(x), f(x+\overline{1}), f(x+\overline{2}), f(x+\overline{3}), f(x+\overline{4})$ рівні? Вивчіть цю ситуацію для всіх незвідних многочленів першого та другого степеня.

27. Нехай P є полем відношень факторіального кільця K. Встановити:
а) чи може бути так, щоб многочлен ненульового степеня $f(x) \in K[x]$ не розкладався в добуток двох многочленів ненульового степеня у $K[x]$ і був звідним многочленом у кільці $P[x]$;
б) чи є факторіальним кільце $K[x]$?

Задачі з олімпіад

28. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів $f(x) = x^m - 1$ і $f(x) = x^n - 1$.

29. Знайти найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів $f(x) = x^m + 1$ і $f(x) = x^n + 1$.

30. *Многочленом ділення круга* називають добуток $\Phi_n(x) = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_k)$, де $\varepsilon_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ – всі різні можливі первісні корені степеня n з одиниці. Довести, що для кожного простого числа p і всіх дільників d числа $p-1$ многочлени ділення круга $\Phi_d(x)$ розкладаються на лінійні множники у кільці $\mathbb{Z}_p[x]$.

§ 1.7 Похідна многочлена. Відокремлення кратних множників многочлена

Література: [2] стор. 254 – 262; [3] стор. 479 – 484.

Теоретичні відомості

Нехай $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ є многочленом ненульового степеня з кільця $P[x]$ над полем P.

Похідною многочлена ненульового степеня $f(x)$ називають многочлен

$$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 + a_1.$$

Вважають, що похідна многочлена нульового степеня дорівнює нулю (є нуль-многочленом).

Аналогічно визначається поняття похідної многочлена над довільною областю цілісності.

Для многочленів над довільним полем мають місце відомі правила знаходження похідної:

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$; $[cf(x)]' = cf'(x)$;

$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$; $\{[f(x)]^k\}' = kf'(x)[f(x)]^{k-1}, k \in \mathbb{N}$.

Має місце відома з курсу математичного аналізу *формула Тейлора*:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + (x-a)^3\frac{f'''(a)}{3!} + \cdots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Якщо поле P має характеристику 0, то для кожного многочлена ненульового степеня $f(x)$ з кільця $P[x]$ виконується рівність $degf' = degf - 1$.

Для того, щоб елемент a поля P характеристики 0 був k-кратним коренем многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ (або коренем кратності k), необхідно і достатньо, щоб $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$ і $f^{(k)}(x) \neq 0$.

Нехай $f(x) = [p_1(x)]^{k_1}[p_2(x)]^{k_2} \ldots [p_l(x)]^{k_l}$ – канонічний розклад многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$. Незвідний над полем P многочлен $p_i(x)$ називають *множником кратності* k_i *даного многочлена*, якщо $f(x)$ ділиться на $[p_i(x)]^k$ і не ділиться на $[p_i(x)]^{k_i+1}$.

Якщо незвідний над полем P характеристики 0 многочлен $p(x)$ є множником кратності $k \geqslant 2$ многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$, то він є множником кратності $k-1$ для похідної $f'(x)$. Якщо незвідний над полем P характеристики 0 многочлен $p(x)$ є множником першої кратності, то він не міститься в розкладі на незвідні множники $f'(x)$ над полем P.

Для того, щоб многочлен не мав кратних множників, необхідно і достатньо, щоб він був взаємно простим із своєю похідною.

Позначимо через $\varphi_i(x)$ добуток всіх множників кратності i многочлена $f(x)$. Якщо многочлен $f(x)$ не має множників кратності k, то будемо вважати $\varphi_k(x) = 1$. Тоді даний многочлен можна подати у вигляді

$$f(x) = \varphi_1(x)[\varphi_2(x)]^2 \cdots [\varphi_m(x)]^m. \qquad (1)$$

Задача подання многочлена $f(x)$ у вигляді (1) називається *відокремленням кратних множників*.

У будь-якого многочлена над полем P характеристики 0 можна відокремити кратні множники за допомогою скінченного числа раціональних дій над деякими многочленами з кільця $P[x]$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Знайти похідну многочлена:
   а) $f(x) = ix^5 + (1-i)x^3 + (2+i)x + 1 + 2i$;
   б) $f(x) = (x^3 - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{2}) - (3x^2 - 1)(2x^2 + 3)$;
   в) $f(x) = \overline{2}x^{10} + x^3 + \overline{2}x^2 - x - \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_3[x]$;
   г) $f(x) = \overline{2}x^{10} + x^3 + \overline{2}x^2 - x - \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$.

2. Знайти многочлен $f(x)$, якщо $f(2) = -1$ і $f'(x) = 2x^2 + 5x + 1$.

3. Чи може многочлен першого степеня бути похідною деякого многочлена другого степеня у кільці $\mathbb{Z}_2[x]$?

4. Чому дорівнює похідна третього порядку для будь-якого многочлена з кільця $\mathbb{Z}_3[x]$?

5. Чи може многочлен $f(x) = x^3 - 3x + a$ мати кратний корінь над числовим полем?

6. Знайти найбільший спільний дільник многочлена і його похідної:
   а) $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)^2(x + 5)^3$;
   б) $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 - 3)$.

7. Як, не знаючи коренів многочлена $f(x)$, побудувати многочлен, який має ті ж корені, що і $f(x)$, але прості?

8. Відокремити кратні множники у многочлена:
   а) $f(x) = (x - 1)(x^3 - 1)$;
   б) $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 3ix - 2)$;
   в) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4x + 3)$;
   г) $f(x) = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$.

9. Многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ має корені $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Знайти корені многочлена
$g(x) = x^n \frac{f''(a)}{n!} + \cdots + x^3 \frac{f'''(a)}{3!} + x^2 \frac{f''(a)}{2!} + xf'(a) + f(a)$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями двочлена $g(x) = x - a$ і знайти значення похідних $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, $f^{IV}(a)$, якщо:
    а) $f(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 11x^2 + 4$ з $\mathbb{Q}[x]$ і $a = 2$;
    б) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$ з $\mathbb{R}[x]$ і $a = 3$;
    в) $f(x) = x^5 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix + 1$ з $\mathbb{C}[x]$ і $a = i$;
    г) $f(x) = ix^4 + (1-i)x^3 - (2+i)x^2 + 3x - 3 - 4i$ з $\mathbb{C}[x]$ і $a = 2i$.

11. Знайти необхідні і достатні умови, при яких многочлен $f(x)$ з кільця $\mathbb{R}[x]$ має кратні корені, якщо:
    а) $f(x) = x^3 + x^2 + ax + 3$;
    б) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3ax - 4$;
    в) $f(x) = x^5 + ax + b$;
    г) $f(x) = x^5 + ax^3 + b$.

12. Для даного многочлена $f(x)$ знайти кратність кореня x_1, якщо:
    а) $x_1 = 2$ і $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;
    б) $x_1 = -1$ і $f(x) = x^5 - 10x^3 + 20x^2 - 15x - 4$;
    в) $x_1 = i$ і $f(x) = x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;
    г) $x_1 = -\overline{2}$ і $f(x) = x^6 + x^5 + \overline{2}x + \overline{4}$ з кільця $\mathbb{Z}_5[x]$.

13. Знайти найбільший спільний дільник многочлена $f(x)$ і його похідної:
    а) $f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 3x - 18$;
    б) $f(x) = x^{4003} - x^{2002} - x^{2001} + 1$;
    в) $f(x) = x^4 + 8x^3 - x^2 - 68x - 84$;
    г) $f(x) = x^{2668} + x^{2001} + x^{667} + 1$.

    Чи має даний многочлен кратні множники?

14. Знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $f'(x)$, якщо $f(x) = x^{m+n} - x^m - x^n + 1$ і $m, n \in \mathbb{N}$.

15. Знайти необхідну і достатню умову, при якій многочлен $f(x)$ над полем P характеристики 0 ділиться на свою похідну.

16. Відокремити кратні множники многочлена:
    а) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$;
    б) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$;
    в) $f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;
    г) $f(x) = x^5 - ix^4 + 5x^3 - ix^2 + 8x + 4i$.

Задачі на доведення

17. Довести, що для будь-якого простого числа p в кільці $\mathbb{Z}_p[x]$ існує многочлен $f(x)$ такий, що $degf - degf' = 2002$.

18. Довести, що многочлен $f(x)$ з кільця $\mathbb{Z}_p[x]$, степінь якого дорівнює $p-1$, не може бути похідною жодного многочлена з цього кільця.

19. Довести, що похідна p-го порядку від будь-якого многочлена $f(x)$ з кільця $\mathbb{Z}_p[x]$ дорівнює нулю.

20. Довести, що при диференціюванні многочлена над полем нульової характеристики кратність кожного незвідного множника зменшується на одиницю. Де в цьому доведенні використовується те, що характеристика поля дорівнює нулю?

21. Довести, що многочлен $f(x) = \frac{x^n}{n!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + x + 1$ не має кратних коренів.

22. Нехай многочлен $f(x)$ незвідний у кільці $\mathbb{Q}[x]$. Довести, що даний многочлен не має кратних коренів у будь-якому числовому полі.

23. Довести, що для кожного натурального числа $n > 1$ число 1 є коренем кратності 2 многочлена:
    а) $f(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$;
    б) $f(x) = x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$;
    в) $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$;
    г) $f(x) = (n-2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n-2m)$ при $n > m$.

    Для якого з цих многочленів кратність кореня 1 є більшою 2?

Творчі задачі

24. Вивчити, як змінюється кратність незвідного множника даного многочлена $f(x)$ з кільця $\mathbb{Z}_p[x]$ при переході до його похідної.

Задачі з олімпіад

25. У кільці $\mathbb{Z}_p[x]$ знайти всі многочлени степеня $k < p$, які діляться на свою похідну.

§ 1.8 Інтерполяційні многочлени. Поле раціональних дробів.

Література: [2] стор. 251, 262 – 272.

Теоретичні відомості

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ – різні елементи поля P і $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$ – довільні елементи цього поля.

В кільці $P[x]$ існує єдиний многочлен $f(x)$, степінь якого не перевищує n і такий, що $f(a_i) = b_i$ для всіх $1 \leqslant i \leqslant n+1$. Шуканий многочлен має вигляд

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - a_j)}{(a_i - a_j)}.$$

Цей многочлен називають *інтерполяційним многочленом Лагранжа*. Іноді його доцільно записувати у вигляді

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a_1) + \dots + c_n(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n),$$

де коефіцієнти $c_0, c_1, \dots, c_n$ визначаються з системи рівнянь $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2, \dots, f(a_{n+1}) = b_{n+1}$. Останню форму шуканого многочлена називають *інтерполяційним многочленом Ньютона*.

За загальною теорією кілець для кільця многочленів $P[x]$ над полем P існує єдине (з точністю до ізоморфізму) поле часток $P(x)$, яке містить кільце $P[x]$. Його елементи називають *раціональними дробами над полем P* і їх можна розглядати як частки виду

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{де} \quad f(x), g(x) \in P[x] \quad \text{і} \quad g(x) \neq 0.$$

При цьому дві частки $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ і $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ рівні між собою тоді і тільки тоді, коли $f_1(x)g_2(x) = f_2(x)g_1(x)$. Як правило раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ подають тією часткою, для якої $(f, g) = 1$, і його називають *нескоротним*.

Дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називають *правильним*, якщо $\deg f(x) < \deg g(x)$. В протилежному випадку дріб називають *неправильним*.

Дріб $\frac{f(x)}{[g(x)]^k}$ називають *елементарним над полем P*, якщо $g(x)$ – незвідний над полем P многочлен, $\deg f(x) < \deg g(x)$ і $k \in \mathbb{N}$.

Якщо $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)}$ – правильний дріб над полем P і многочлени $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$ – попарно взаємно прості, то в кільці $P[x]$ існують многочлени $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ такі, що

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_m(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{f_m(x)}{g_m(x)}$$

і кожен з дробів у правій частині є правильним.

Правильний дріб над полем P виду $\frac{f(x)}{[g(x)]^k}$, де $g(x)$ – незвідний над полем P многочлен і $k \in \mathbb{N}$, можна подати як суму елементарних дробів над цим полем

$$\frac{f(x)}{[g(x)]^k} = \frac{f_1(x)}{g(x)} + \frac{f_2(x)}{[g(x)]^2} + \cdots + \frac{f_k(x)}{[g(x)]^k}.$$

Правильний дріб над полем P можна подати як суму елементарних дробів над цим полем і до того єдиним способом.

Неправильний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ над полем P можна подати як суму многочлена і правильного дробу.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Задати всі відображення поля $\mathbb{Z}_2$ в себе многочленами з кільця $\mathbb{Z}_2[x]$.

2. В чому полягає *задача інтерполяції*? Навести проклади.

3. Записати інтерполяційні многочлени Лагранжа і Ньютона за їх значеннями:
   а) в двох різних точках $f(a_1) = b_1$ і $f(a_2) = b_2$ поля P;
   б) в трьох різних точках $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$ і $f(a_3) = b_3$ поля P.

4. Чи може пряма $y = 2x + 1$ перетинати графік многочлена третього степеня у чотирьох точках?

5. Який з наступних дробів є правильним, неправильним і елементарним:
   а) $\frac{2x^2+1}{(x^3+2)^3}$ над полями $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$;
   б) $\frac{3x+1}{(x-1)^2}$ над полями $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$;
   в) $\frac{2x-1}{x^2+2}$ над полями $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$;
   г) $\frac{x^2-1}{x^2+3}$ над полями $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$;
   д) $\frac{4}{(x+1)^2}$ над полями $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$;
   е) $\frac{\bar{1}}{(x^2+x+\bar{1})^3}$ над полями $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ та $\mathbb{Z}_5$?

6. В кільці цілих чисел сума двох правильних дробів може бути як правильним, так і неправильним дробом. Якою є сума правильних дробів в полі $P(x)$ над полем P?

7. Якою є сума елементарних дробів в полі $P(x)$ над полем P?

8. Навести приклади задач математичного аналізу, при розв'язуванні яких потрібно розкладати дроби з поля $P(x)$ на суму многочлена і елементарних дробів.

9. Знайти цілі числа a, b і c такі, що:
   а) $\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$;
   б) $\frac{3x^3+9x^2-44x-24}{(x+1)(x+2)} = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

10. Чи існує многочлен другого степеня, який приймає значення:
   а) $f(1) = 1,\ f(-1) = 1,\ f(2) = 3$ і $f(3) = 4$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   б) $f(0) = 1,\ f(1) = -2,\ f(2) = -3$ і $f(5) = 6$ у кільці $\mathbb{Q}[x]$;
   в) $f(0) = i,\ f(1) = -i,\ f(2) = 4 - 6i$ і $f(-1) = 0$ у кільці $\mathbb{C}[x]$;
   г) $f(\overline{0}) = \overline{1},\ f(\overline{1}) = -\overline{2},\ f(\overline{2}) = -\overline{3}$ і $f(\overline{4}) = \overline{1}$ у кільці $\mathbb{Z}_5[x]$?

11. Знайти многочлен найменшого степеня у формі Лагранжа за такими його значеннями:

а)

x	-3	0	2
$f(x)$	4	-1	3

;

Обчислити $f(-1)$ та $f(1)$.

в)

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

;

Обчислити $f(0)$ та $f(5)$.

б)

x	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{7}{4}$

;

г)

x	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	4	13

.

12. Знайти многочлен найменшого степеня у формі Ньютона за такими його значеннями:

а)

x	-3	-2	-1
$f(x)$	1	2	4

;

в)

x	1	4	9	16
$f(x)$	1	2	$\frac{17}{6}$	4

;

б)

x	0	1	4
$f(x)$	1	5	25

;

г)

x	1	i	-1	$-i$
$f(x)$	i	1	$-i$	-1

.

13. У кільці $\mathbb{Z}_5[x]$ знайти многочлен найменшого степеня за такими його значеннями:

а)

x	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$f(x)$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

;

Обчислити $f(\overline{0})$ та $f(\overline{4})$.

б)

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$f(x)$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

.

Обчислити $f(\overline{3})$.

14. У полі $\mathbb{R}(x)$ знайти нескоротний дріб, який дорівнює даному, і подати його у виді суми многочлена та правильного дробу:

а) $f(x) = \frac{x^3+5}{(x-1)(x^2+4)}$; в) $f(x) = \frac{2x^4-2x^3+3x^2-8x+5}{(x^2+x+1)(x-2)}$;

б) $f(x) = \frac{4x^4-3x^3+2x-3}{3x^3-2x^2-1}$; г) $f(x) = \frac{x^4-6x^3+12x^2-16}{x^3-6x^2+12x-8}$.

15. Встановити, який з дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ є елементарним:

а) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{(x+2)^2}$ над полем $\mathbb{Q}$; в) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x^2+4}$ над полем $\mathbb{C}$;

б) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x}{x^2+3}$ над полем $\mathbb{R}$; г) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^3+x+\overline{1}}$ над полем $\mathbb{Z}_5$.

16. Розкласти дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ на елементарні дроби над полем $\mathbb{Q}$, якщо:

а) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{x^3+3x^2-4x-12}$; д) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-1}{x^3+3x}$;

б) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2+1}{(x-1)^3}$; е) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{(x^2+x+2)^2}$;

в) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3+2x^2+5x+1}{x^2(x+2)^2}$; є) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^5-x^4-2x^3+4x^2+6}{(x^3+1)^2}$;

г) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3-1}{x^4-1}$; ж) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x^3+2x^2+2x-3}{x^4-3x^2+2}$.

17. Розкласти дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ на елементарні дроби над полем $\mathbb{R}$, якщо:

а) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-x-6}{(2x-1)(x^2+2x)}$; г) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x^3+x^2+x}$;

б) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-x-2}{x^4-5x^2+4}$; д) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2+5x+12}{(x^2+3)(x^2+1)}$;

в) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3-1}{x^4-1}$; е) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

18. Розкласти дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ на елементарні дроби над полем $\mathbb{C}$, якщо:

а) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2+1}$; в) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3-1}{x^4-1}$;

б) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x^3+x^2+x}$; г) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{(x^2+1)^2}$.

19. Розкласти дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ на елементарні дроби над полем $\mathbb{Z}_5$, якщо:

а) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overline{1}}{x^3+x}$; г) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overline{1}}{x^5-x}$;

б) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overline{1}}{(x+\overline{1})(x^2+\overline{3}x+\overline{4})}$; д) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+\overline{1}}{(x^2-\overline{2})(x^2+\overline{2})}$;

в) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overline{3}x+\overline{3}}{(x+\overline{2})^2(x^2+\overline{2})}$; е) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x^2+\overline{3})(x^3+x+\overline{1})}$.

Задачі на доведення

20. Довести тотожність над полем $\mathbb{R}$:

а) $a^3\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^3\frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)(b-c)} + c^3\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^3$;

б) $\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-a)(x-d)}{(c-b)(c-a)(c-d)} +$
$+\frac{(x-b)(x-c)(x-a)}{(d-b)(d-c)(d-a)} = 1$.

21. Нехай многочлен $f(x)$ степеня меншого за n приймає цілі значення при n послідовних цілих значеннях змінної. Довести, що він приймає цілі значення при всіх цілих значеннях змінної.

22. Довести, що для будь-якого простого числа p кожне відображення поля $\mathbb{Z}_p$ в себе можна задати многочленом з кільця $\mathbb{Z}_p[x]$, степінь якого не перевищує $p-1$.

23. Довести, що графік многочлена степеня n з дійсними коефіцієнтами перетинає будь-яку пряму не більше ніж в n точках.

Задачі з олімпіад

24. Нехай $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ – корені кубічні з одиниці і значення многочлена $f(x)$ для цих чисел відповідно дорівнюють y_1, y_2, y_3. Знайти $f(0)$.

25. Відомо, що для комплексних чисел $1, -1, i, -i$ многочлен $f(x)$ приймає значення $1, 2, 3, 4$ відповідно. Знайти $f(0)$. Як зміниться відповідь, якщо виконати перестановку у відповідних значеннях функції (наприклад, $4, 3, 2, 1$)?

26. Знайти многочлен найменшого степеня за даною таблицею його значень:

а)

x	0	1	2	...	n
$f(x)$	1	2	4	...	2^n

;

б)

x	1	2	3	...	n
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{n}$

.

§ 1.9 Вибрані задачі

1. Довести, що многочлен $f(x) = x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3k+1}$ ділиться на многочлен $g(x) = x^2 + x + 1$ при будь-яких натуральних n, m, k.

2. Знайти всі натуральні n, m, k, при яких многочлен $f(x) = x^{3n} + x^{3m+1} + x^{3k+1}$ ділиться на $g(x) = x^2 - x + 1$.

3. При яких a і b многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ділиться на $g(x) = x^2 + x + 1$, якщо:
   а) $f(x) = x^4 + ax^2 + b$; в) $f(x) = x^4 + ax + b$;
   б) $f(x) = x^5 + ax^2 + b$; г) $f(x) = x^5 + ax + b$?

4. Нехай многочлен $f(x)$ є незвідним над полем $\mathbb{Z}_p$. Довести, що многочлени $f(x), f(x+\overline{1}), \ldots, f(x+\overline{p-1})$ є попарно різними або всі рівними.

5. Довести, що многочлен $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$ є незвідним над полем $\mathbb{Z}_2$ тоді і тільки тоді, коли $n = 3^k$ для деякого $k \geqslant 0$.

6. Довести, що не існує многочлена ненульового степеня з цілими коефіцієнтами, значеннями якого для цілих чисел були б тільки прості числа.

7. Довести, що многочлен $f(x) = x^{4n} + x^n + 1$ є незвідним над полем $\mathbb{Z}_2$ тоді і тільки тоді, коли $n = 3^k 5^m$ для деяких $k, m \geqslant 0$.

8. Нехай $f(x)$ – деякий многочлен кільця $P[x]$ над полем P. Знайти кратність кореня многочлена $h(x) = \frac{x-a}{2}[f'(x) + f'(a)] - f(x) + f(a)$.

9. Знайти многочлен найменшого степеня за даною таблицею його значень:

а)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	0	3	2

;

б)

x	1	2	3	4	6
$f(x)$	5	6	1	-4	10

.

10. Нехай $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$. Довести, що многочлен $h(x)$, степінь якого менший n і такий, що при $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_n$ приймає значення $y_1, y_2, \ldots, y_n$ відповідно, дорівнює $f(x) \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i}{(x-a_i)f'(a_i)}$.

11. Многочлен $h(x)$, степінь якого менший n, приймає значення $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в коренях степеня n з 1. Знайти $h(0)$.

12. Знайти многочлен найменшого степеня над полем $\mathbb{Z}_p$ такий, що $f(\overline{k}) = \overline{k}^{-1}$ для $k = \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}$.

13. Розкласти дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ на елементарні дроби над полем $\mathbb{R}$, якщо:
   а) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\cos(n \arccos x)}$; б) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{h(x)}$,
   де многочлен $h(x)$ степеня n має n різних дійсних коренів.

14. Розкласти дріб $\frac{1}{x^p - x}$ на елементарні дроби над полем $\mathbb{Z}_p$.

15. Нехай $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$. Довести, що $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a_1} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}$.

Розділ 2

Многочлени від кількох змінних

§ 2.1 Кільце многочленів від кількох змінних над областю цілісності. Розклад многочлена в добуток незвідних множників

Література: [2] стор. 272 – 288; [3] стор. 485 – 493.

Теоретичні відомості

Нехай $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ – кільце многочленів від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над областю цілісності K. Елементи цього кільця називають *многочленами від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над областю цілісності K* і позначають $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$.

Кільце многочленів $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над областю цілісності K є областю цілісності, причому кожен його елемент $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна записати як скінченну суму:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} \ldots x_n^{k_{ni}}, \qquad (1)$$

де $a_i \in K$, $k_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ та $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Будь-який вираз такого виду є елементом кільця $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Кожен доданок $a_i x_1^{k_{1i}} x_2^{k_{2i}} \ldots x_n^{k_{ni}}$ в сумі називають *членом многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, *елемент $a_i \in K$ – коефіцієнтом цього члена*. Два члени називаються *подібними*, якщо вони відрізняються тільки коефіцієнтами.

Запис многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у вигляді суми (1), де немає подібних членів, називається його *канонічною формою*. Кожен многочлен з кільця $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ можна записати у канонічній формі єдиним чином з точністю до порядку доданків.

Степенем члена $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n1^{k_n}$ *з ненулевим коефіцієнтом* a *многочлена* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають суму $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Число $k_i(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ називають *степенем даного члена відносно* x_i. Найбільший із степенів членів називають *степенем многочлена*, а член з найбільшим степенем – *старшим членом многочлена*. Якщо всі члени мають однаковий степінь m, то його називають *однорідним многочленом степеня* m.

Нехай $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ і $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ – два члени многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, записаного в канонічній формі. Говорять, що *перший член вищий від другого*, якщо $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ldots, k_{s-1} = l_{s-1}$ і $k_s > l_s$ та $s \leqslant n$. Відношення "бути вищим" на множині членів многочлена є лінійним строгим порядком і його називають *лексикографічним*.

Нехай члени многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ упорядковані лексикографічно. Тоді перший по порядку член називають *вищим членом даного многочлена*.

Вищий член добутку многочленів дорівнює добутку вищих членів цих многочленів.

Означення подільності многочленів, всі властивості, поняття звідного і незвідного многочленів у кільці $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P залишаються тими самими, що і в кільці $P[x]$ над полем P (див. §§ 1.2, 1.6).

Будь-який многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ненульового степеня з кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P є незвідним над полем P або його можна подати у вигляді добутку незвідних многочленів над полем P, причому таке подання єдине з точністю до сталих множників і порядку запису співмножників у добутку.

Кільце $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ при $n > 1$ не є кільцем головних ідеалів, а тому не є евклідовим кільцем.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Знайти канонічну форму многочлена:
   а) $f(x, y) = (x + y)^2(x^2 - xy + y^2) - (x - 2y)(y^2 + 1)$ над полем $\mathbb{Q}$;
   б) $f(x, y, z) = (2ix)^2(y - z) - 4i^3yz + 3i(x - z)^3$ над полем $\mathbb{C}$;
   в) $f(x, y) = (\overline{2}x + \overline{3}y)^3 - \overline{4}(x - \overline{2}y)(\overline{3}x + \overline{4}y^2)$ над полем $\mathbb{Z}_5$;
   г) $f(x, y, z) = (\overline{2}x - \overline{3}y)^2 + (x - z)(y + \overline{2}z)$ над полем $\mathbb{Z}_5$.

2. Скільки членів може мати канонічна форма однорідного многочлена:
   а) другого степеня від двох змінних;
   б) другого степеня від трьох змінних;
   в) третього степеня від двох змінних;
   г) третього степеня від трьох змінних?

3. Скільки існує однорідних многочленів другого степеня від трьох змінних над полем: а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{Z}_2$?

4. Записати множину всіх однорідних многочленів третього степеня від трьох змінних над:
   а) кільцем $\mathbb{Z}$; б) полем $\mathbb{Q}$; в) полем $\mathbb{Z}_3$; г) полем $\mathbb{Z}_p$.

5. Записати многочлен у вигляді суми однорідних многочленів:
   а) $f(x,y) = (x^2 - y)(xy + y^2 - 1)$;
   б) $f(x,y,z) = (x^3 - yz + 2x)^2$;
   в) $f(x,y,z) = (x-y)^2 + y^2 - z^2 + xz$;
   г) $f(x,y,z) = (x+2y)^2(x-z-1) - (x+z+1)^3$.

6. Чи утворює підкільце кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P множина:
   а) всіх однорідних многочленів другого степеня;
   б) всіх однорідних многочленів від однієї змінної;
   в) всіх однорідних многочленів;
   г) всіх многочленів від двох змінних?

7. Чи може бути так, щоб добуток двох многочленів з кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P був однорідним многочленом, а хоча б один із співмножників не був однорідним многочленом?

8. Якою є мультиплікативна група кільця многочленів:
   а) $\mathbb{R}[x,y]$; в) $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$;
   б) $\mathbb{Z}_5[x,y,z]$; г) $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P?

9. Навести приклад многочлена другого степеня з кільця $\mathbb{R}[x,y]$, який є незвідним над полем $\mathbb{R}$.

10. Які многочлени містить ідеал $(x) - (y)$ кільця $\mathbb{R}[x,y]$?

11. Встановити, чи є кільце $\mathbb{R}[x,y]$:
    а) полем; в) евклідовим;
    б) факторіальним; г) кільцем головних ідеалів.

12. Навести приклад ідеала з кільця $\mathbb{Q}[x,y]$, який не є головним.

13. Навести приклад многочлена четвертого степеня від трьох змінних, у якому вищий член:
    а) є одночасно його старшим членом;
    б) не є його старшим членом.

14. Яким є вищий член многочлена:
    а) $f(x, y) = y^3 + 3y^2x + yx^2$;
    б) $f(x, y, z) = (x^2 - y)(y - xz)(z^3 - xy)$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

15. Упорядкувати лексикографічно і знайти вищий член многочлена:
    а) $f(x, y) = (x - 2)(y^2 + 3x)$;
    б) $f(x, y) = x^2y - 3x^3 + 2x^4 - xy^3$;
    в) $f(x, y, z) = xy^2z^2 - x^2 + z^4 - 3x^2yz$;
    г) $f(x, y, z) = (x^2 - yz)(y^2 - xz)(z^2 - xy)$.

16. Упорядкувати многочлен за степенями кожної із змінних, які входять до нього:
    а) $f(x, y) = (x + y - 2)^2$;
    б) $f(x, y) = x^2 - (x - y)^3 + 2xy$;
    в) $f(x, y, z) = (x - y + z - 1)^2$;
    г) $f(x, y, z) = (x + z)^2(y - z) + 2xyz - 3z^2$.

17. Перевірити, чи ділиться многочлен $f(x, y)$ на $g(x, y)$, якщо:
    а) $f(x, y) = x^3 - y^3, \quad g(x, y) = x^2 + xy + y^2$;
    б) $f(x, y) = x^3 - y^3, \quad g(x, y) = x + 2y$;
    в) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - 2y^2 - xy + x + 2y, \quad g(x, y) = x + 2y$;
    г) $f(x, y) = x^4 + y^4, \quad g(x, y) = x + y$.

18. Знайти два різних многочлени від двох змінних над полем $\mathbb{Z}_2$, яким відповідає те ж саме відображення множини $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ в $\mathbb{Z}_2$, задане таблицею:

а)

(x, y)	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$f(x, y)$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

;

б)

(x, y)	$(\bar{1}, \bar{0})$	$(\bar{1}, \bar{1})$	$(\bar{0}, \bar{0})$	$(\bar{0}, \bar{1})$
$f(x, y)$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

.

19. Шляхом введення заміни $x = ty$ розкласти на незвідні над полем P множники многочлен $f(x, y)$, якщо:
    а) $f(x, y) = 4x^4 + 4x^3y + 13x^2y^2 + 6xy^3 + 9y^4$ і $P = \mathbb{Q}$;
    б) $f(x, y) = (x^2 - xy)^2 + 2x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$ і $P = \mathbb{Q}$;
    в) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ і $P = \mathbb{Z}_2$;
    г) $f(x, y) = x^4 + \overline{4}y^4$ і $P = \mathbb{Z}_5$.

20. Розкласти на незвідні над полем $\mathbb{Q}$ множники многочлен:
    а) $f(x, y, z) = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;
    б) $f(x, y, z) = (x - y)(x + y)^2 + (y - z)(y + z)^2 + (z - x)(z + x)^2$;
    в) $f(x, y, z) = x(y - z)^2 + y(x - z)^2 + z(x - y)^2 + 9xyz$;
    г) $f(x, y, z) = (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$.

Задачі на доведення

21. Довести, що коли добуток двох многочленів від n змінних є однорідним многочленом, то кожний з співмножників також є однорідним многочленом.

22. Довести, що всі незвідні множники кожного однорідного многочлена з кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P також є однорідними многочленами.

23. Довести, що однорідний многочлен степеня m від n змінних при $m > 0$ має в загальному виді $\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$ членів.

24. Довести, що канонічна форма многочлена m-го степеня від n змінних має в загальному виді $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ членів.

25. Довести, що в кільці $\mathbb{Z}_p[x, y, z]$ існує $p^6 - 1$ однорідних многочленів другого степеня від трьох змінних.

26. Довести, що в кільці $\mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ існує $p^{\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}} - 1$ однорідних многочленів m-го степеня від n змінних.

27. Довести, що многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над областю цілісності K ділиться на многочлен $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_n - s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ з цього самого кільця тоді і тільки тоді, коли $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, s(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))$ є нульовим многочленом.

28. Довести, що многочлен $f(x, y, z) = (x + y + z)^n - x^n - y^n - z^n$ ділиться на многочлен $g(x, y, z) = (x + y)(y + z)(x + z)$ в кільці $\mathbb{Z}[x, y, z]$ при будь-якому непарному натуральному n.

29. Довести, що многочлен $f(x,y,z) = (x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$ ділиться на многочлен $g(x,y,z) = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ в кільці $\mathbb{Z}[x,y,z]$ при будь-якому натуральному n.

30. Довести, що будь-який однорідний многочлен k-го степеня від двох змінних $f(x,y)$ над полем P за допомогою введення нової змінної можна подати у вигляді добутку двох многочленів, кожен з яких містить тільки одну змінну.

31. Довести, що фактор-кільце $\mathbb{Q}[x,y]/(x+y)$ ізоморфне кільцю $\mathbb{Q}[x,y]/(x)$.

32. Довести, що кільце $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P не є кільцем головним ідеалів тоді і тільки тоді, коли $n > 1$.

Творчі задачі

33. Встановити, які зв'язки існують між кільцями $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}[x,y]/(x+y)$, $\mathbb{R}[x,y]/(x-y)$, $\mathbb{R}[x,y]/(x)$ і $\mathbb{R}[x,y]/(y)$.

34. Встановити, які зв'язки існують між кільцями $\mathbb{Z}_p[x]$, $\mathbb{Z}_p[x]/(x+y)$, $\mathbb{Z}_p[x]/(x-y)$, $\mathbb{Z}_p[x]/(x)$ і $\mathbb{Z}_p[x]/(y)$.

35. Нехай p – просте число і $k \in \mathbb{N}$. Встановити, для яких p і k кожне відображення множини $\mathbb{Z}_p^k$ у множину $\mathbb{Z}_p$ можна задати за допомогою многочлена з кільця $\mathbb{Z}_p[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Задачі з олімпіад

36. Знайти умови, при яких многочлен $f(x,y) = ax^2 + bxy + c$ з кільця $\mathbb{Q}[x,y]$ ділиться на лінійний двочлен $g(x,y) = 2x + 3y + 1$.

§ 2.2 Симетричні многочлени

Література: [2] стор. 288 – 295; [3] стор. 493 – 500.

Теоретичні відомості

Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P називають *симетричним відносно змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, якщо після виконання довільної перестановки змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ утворюється многочлен, який дорівнює даному.

Симетричні многочлени мають такі властивості:

1. Множина всіх симетричних многочленів від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P утворює область цілісності.

2. Якщо симетричний многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ містить деякий член $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, то він містить і член, утворений з заданого, в результаті будь-якої перестановки показників $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

3. Якщо $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ є вищим членом симетричного многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$.

Симетричні многочлени

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$,

$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n$

називають *елементарними (або основними) симетричними многочленами*.

Будь-який симетричний многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P можна подати у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ цих змінних, коефіцієнти якого належать полю P. Таке подання є єдиним.

Якщо $f(x)$ – многочлен від однієї змінної над полем P з коренями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (які можуть не належати P), то будь-який симетричний многочлен $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ при $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $\ldots, x_n = \alpha_n$ набуває значення, яке є елементом поля P.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи є симетричними такі многочлени над полем $\mathbb{R}$:
   а) $f(x, y) = 2x + 2y + 3xy - x^2 - 3y^2$;
   б) $f(x, y) = x + 2ixy + y$;
   в) $f(x, y, z) = (x + y + z)(x - y - z)(x + y - z)$;
   г) $f(x, y, z, t) = (x + y - z - t)(x - y - z + t)(x - y + z - t)$?

2. Доповнити заданий многочлен найменшим числом членів з відповідного кільця так, щоб він став симетричним:
   а) $f(x,y) = 2x + 3y - x^2 - y^2 - 5$;
   б) $f(x,y) = -4x + (x-y)^2 + 3xy + \sqrt{2}$;
   в) $f(x,y,z) = \frac{1}{3}(x+y+z)(x-y-z)$;
   г) $f(x,y,z,t) = xy + zt - 2it$.

3. Подати даний многочлен у виді суми однорідних симетричних многочленів:
   а) $f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2 + 2x + 2y - 4$;
   б) $f(x,y,z) = \sigma_1^3 - 2\sigma_2 + 3\sigma_3 - 4\sigma_1 + 5$;
   в) $f(x,y,z) = xy + xz + yz - 2x - 2y - 2z + 3$;
   г) $f(x,y,z,t) = \sigma_1^3 - 2\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma_4$.

4. Знайти вищий член многочлена:
   а) $f(x,y) = xy^2 - 3x^2y + 2x^3$;
   б) $f(x,y) = (y^3 - x^2 + 2xy)(xy + x^3 - 3x)$;
   в) $f(x,y,z) = \sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - \sigma_3^2$;
   г) $f(x,y,z,t) = 5(x^2 + y + z)(x + y^2 + z)(x + y + z^2)$.

5. Чи утворює підкільце кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P множина:
   а) всіх однорідних симетричних многочленів;
   б) всіх симетричних многочленів ненульового степеня;
   в) всіх симетричних многочленів не вище нульового степеня;
   г)всіх неоднорідних симетричних многочленів?

6. Серед наступних одночленів вказати ті, які не можуть бути вищим членом деякого симетричного многочлена, та вказати причину:
   а) $x_1^4x_2^2x_3$; б) $x_1^2x_2^3x_3^2$; в) $x_2^2x_3^2x_4^2$; г) $x_1^4x_3^2x_4$.

7. Якими можуть бути вищі члени однорідного симетричного многочлена шостого степеня від трьох змінних з коефіцієнтом, рівним одиниці?

8. Виразити через елементарні симетричні многочлени даний многочлен:
   а) $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 2$;
   б) $f(x,y) = -2x^3 - 2y^3 + 5x + 5y - 1$;
   в) $f(x,y,z) = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 3xyz$;
   г) $f(x,y,z) = (xy+1)(xz+1)(yz+1)$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

9. Нехай $s_n(x,y) = x^n + y^n$, де $n \in \mathbb{N}$. Перевірити виконання рекурентного співвідношення $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}$ для всіх $k > 2$.

10. При позначеннях попередньої задачі перевірити справедливість таких рівностей:
   а) $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$;
   б) $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$;
   в) $s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$;
   г) $s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$.

11. Нехай $s_n(x,y,z) = x^n + y^n + z^n$, де $n \in \mathbb{N}$. Перевірити виконання рекурентного співвідношення $s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}$ для всіх $k > 3$.

12. При позначеннях попередньої задачі перевірити справедливість таких рівностей:
   а) $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$;
   б) $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$;
   в) $s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3$;
   г) $s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 5\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$.

13. Виразити через елементарні симетричні многочлени даний многочлен:
   а) $f(x,y,z) = (x - 2y + z)(y - 2x + z)(x - 2z + y)$;
   б) $f(x,y,z) = (x^2 + yz)(y^2 + xz)(z^2 + xy)$;
   в) $f(x,y,z) = (x + y - 5z)(y + z - 5x)(z + x - 5y)$;
   г) $f(x,y,z) = x^4y^2 + y^4x^2 + z^4y^2 + z^4x^2 + x^4z^2 + y^4z^2$;
   д) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 3(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(x^2 - z^2)$;
   е) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \ldots + x_n^2x_{n-1}$.

14. Знайти суму чисел, обернених до всіх коренів рівняння:
   а) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;
   в) $x^4 - 5x^2 + 2x + 6 = 0$;
   б) $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$;
   г) $x^5 + x + 1 = 0$.

15. Симетричний многочлен від n змінних з найменшим числом членів, який містить одночлен $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, називають *орбітою* $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ *або моногенним многочленом, породженим членом* $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, і позначають $o(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n})$. Виразити через елементарні симетричні многочлени орбіти таких одночленів:
   а) $o(x_1^2x_2^2)$ в кільці $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$;
   б) $o(x_1x_2^2)$ в кільці $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$;
   в) $o(x_1x_2)$ в кільці $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$;
   г) $o(x_1^3x_4)$ в кільці $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

16. Знайти значення многочлена $f(x,y,z) = (x^2 - yz)(y^2 - xz)(z^2 - xy)$ від коренів рівняння $2t^3 - 4t^2 + 6t - 1 = 0$.

17. Знайти всі цілі значення змінних x, y, z, при яких многочлени
 $f_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,
 $f_2(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$,
 $f_3(x,y,z) = xy + xz + yz$
 приймають значення 6, -4 та -3 відповідно.

18. Знайти всі дійсні значення змінних x, y, z, при яких многочлени
 $f_1(x,y,z) = xy + xz + yz + x + y + z$,
 $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z)$,
 $f_3(x,y,z) = x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y)$
 приймають значення -3, 5 та 8 відповідно.

19. Знайти всі значення a, при яких корені x_1, x_2, x_3 многочлена $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + a$ задовольняють рівність $(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$.

20. Знайти суму кубів коренів n-го степеня з одиниці.

21. Знайти площу трикутника і радіус описаного навколо нього кола, якщо його сторони є коренями рівняння $x^3 - ax^2 + bx - c$.

Задачі на доведення

22. Довести, що для будь-якого симетричного многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з цілими коефіцієнтами число $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ є цілим, якщо всі ε_i є коренями n-го степеня з одиниці.

23. Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який змінює тільки знак на протилежний при перестановці будь-яких двох змінних, називається *антисиметричним*. Довести, що квадрат антисиметричного многочлена є симетричним многочленом.

24. Довести, що добуток симетричного і антисиметричного многочленів є антисиметричним многочленом.

25. Довести, що будь-який антисиметричний многочлен від двох змінних $f(x_1, x_2)$ можна подати у вигляді добутку $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)g(x_1, x_2)$, де $g(x_1, x_2)$ є симетричним многочленом.

26. Довести, що для будь-якого антисиметричного многочлена від трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3)$ виконуються рівності $f(x_1, x_2, x_2) = f(x_1, x_1, x_3) = f(x_1, x_2, x_1) = 0$.

27. Довести, що будь-який антисиметричний многочлен від трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3)$ можна подати у вигляді добутку $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)g(x_1, x_2, x_3)$, де $g(x_1, x_2, x_3)$ є симетричним многочленом.

28. Довести, що коли симетричний многочлен від двох змінних $f(x_1, x_2)$ ділиться на $x_1 - x_2$, то він ділиться також на $(x_1 - x_2)^2$.

29. Довести, що коли симетричний многочлен від трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3)$ ділиться на $x_1 - x_2$, то він ділиться також на многочлен $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

30. Многочлен від трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3)$ називають *парносиметричним*, якщо він є сумою симетричного і антисиметричного многочленів від цих змінних. Довести, що парносиметричні многочлени і тільки вони не змінюються при парних перестановках змінних x_1, x_2, x_3.

31. Довести, що будь-який парносиметричний многочлен від трьох змінних $f(x_1, x_2, x_3)$ може бути поданий у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів σ_1, σ_2, σ_3 та многочлена $t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$.

32. Довести, що будь-який многочлен від двох змінних $f(x_1, x_2)$ є сумою деяких симетричного і антисиметричного многочленів.

Творчі задачі

33. Встановити, чи існує многочлен n-го степеня від однієї змінної такий, щоб суми $s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (дивись задачі № 9,11) від його коренів були рівні 0 для всіх $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

34. Вивчити властивості антисиметричних многочленів від чотирьох змінних.

35. Вивчити властивості парносиметричних многочленів від чотирьох змінних.

36. Вивчити властивості антисиметричних многочленів від довільного числа змінних.

37. Вивчити властивості парносиметричних многочленів від довільного числа змінних.

Задачі з олімпіад

38. Обчислити значення симетричних многочленів $s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від коренів n-го степеня з одиниці.

39. Обчислити значення симетричних многочленів $s_1, s_2, \ldots, s_k$ від коренів многочлена

$$f(x) = x^n + \frac{x^{n-1}}{1!} + \frac{x^{n-2}}{2!} + \cdots + \frac{x}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}.$$

40. Довести, що елементані симетричні многочлени $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ можна виразити через суми $s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

41. Довести, що:

а) $$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \ldots & 0 \\ 3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \ldots & \sigma_1 \end{vmatrix};$$

б) $$\sigma_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots & s_1 \end{vmatrix}.$$

§ 2.3 Симетричні многочлени та елементарна алгебра

Література: [2] стор. 305 – 309; [13] стор. 19 – 46, 62 – 89.

Теоретичні відомості

Близько 40 років на теренах країн бувшого Радянського Союзу книга Болтянского В.Г. та Віленкіна Н.Я. "Симметрия в алгебре" найбільш повно висвітлює застосування теорії симетричних многочленів до розв'язання задач шкільної (елементарної) алгебри. В цьому окремому параграфі ми намітимо основні напрями таких застосувань і для розгляду більшого числа подібних задач відсилаємо зацікавленого читача до названого посібника.

З першими проявами симетрії в алгебрі учні зустрічаються ще в молодших класах, коли встановлюють, що результати виконання додавання і множення чисел не залежать від порядку запису доданків у сумі та множників у добутку. Для таких властивостей дій над числами вводяться спеціальні назви. Пізніше при вивченні многочленів з'являються "красиві" многочлени $x+y$ і xy та багато інших, які не змінюються при заміні місцями невідомих у цих многочленах. Їх назвали симетричними. Виявилося, що загальна теорія симетричних многочленів дозволяє спростити розв'язання багатьох задач шкільної алгебри. До таких відносяться значна частина задач на розв'язування систем рівнянь, ірраціональних рівнянь та їх систем, доведення тотожностей і нерівностей, розкладання на множники та тих, які пов'язані з теоремою Вієта. Такі задачі часто пропонуються учням на математичних олімпіадах та вступних екзаменах з математики у різних вищих навчальних закладах.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Знайти x та y, якщо $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} & = & \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} & = & \frac{5}{4}. \end{cases}$

2. Знайти найменше значення добутку xy, якщо $\begin{cases} x+y-xy & = & 1, \\ x^2+y^2 & = & 3. \end{cases}$

3. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2-ax+1=0$, де $a\in\mathbb{N}$. Обчислити, при якому найменшому значенні a вираз $x_1^5+x_2^5$ ділиться на 25.

4. Обчислити значення виразу $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{yx}$, якщо $x+y+z=0$.

5. Не розв'язуючи рівняння $3x^2 + 17x - 14 = 0$, знайти величину виразу
$$\frac{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2 + \frac{173}{3}}{4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2},$$
де x_1, x_2 – корені рівняння.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

6. Знайти найменше значення xy, якщо x і y є розв'язками системи рівнянь
$$\begin{cases} x+y &= 3a-1, \\ x^2+y^2 &= 4a^2-2a+2. \end{cases}$$

7. Знайти всі дійсні розв'язки системи рівнянь:
   а) $\begin{cases} x+3xy+y &= 3+10\sqrt{2}, \\ x^2+y^2 &= 11; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^3+y^3 &= 9, \\ x^2+y^2 &= 6; \end{cases}$
   б) $\begin{cases} 5x+xy+5y &= 11+7\sqrt{3}, \\ x^2+y^2 &= 7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x-3y &= 4, \\ 16x^4+81y^4 &= 82; \end{cases}$
   в) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) &= 3, \\ (x+y)(x^2+y^2) &= 15; \end{cases}$ є) $\begin{cases} x^4+y^4 &= 3x^2y^2, \\ x^2+y^2 &= axy; \end{cases}$
   г) $\begin{cases} \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3} &= \frac{71}{7}, \\ x^2+xy+y^2 &= 3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} x-y+z &= 4, \\ x^2+y^2+z^7 &= 14, \\ x^3-y^3+z^3 &= 36. \end{cases}$

8. Розв'язати рівняння:
   а) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$;
   б) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{19-x} = 3;$
   в) $x + \sqrt{57-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9;$
   г) $x\frac{19-x}{x+3}(x + \frac{19-x}{x+1}) = 84$.

9. Розв'язати систему ірраціональних рівнянь:
   а) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x} &= 6, \\ x^2y+y^2x &= 20; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5} &= 5, \\ x^2+y^2 &= 13; \end{cases}$
   б) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x} &= 1, \\ \frac{x^2}{\sqrt{y}}+\frac{y^2}{\sqrt{x}} &= 11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+\sqrt{xy}+y &= 2, \\ x^3+2xy\sqrt{xy}+y^3 &= 4. \end{cases}$

10. Розкласти на множники найменшого степеня з раціональними коефіцієнтами многочлени:
   а) $f(x,y) = x^4 + 8x^3y + 2x^2y^2 + 8xy^3 + y^4;$
   б) $f(x,y) = 7x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4;$
   в) $f(x,y) = 6x^2 + 41x^3y + 75x^2y^2 + 41xy^3 + 6y^4;$
   г) $f(x,y) = 18x^4 - 11x^3y - 94x^2y^2 - 21xy^3 + 48y^4.$

11. Подати у вигляді добутку многочлен:
   а) $f(x,y,z)=(x-y)^3-(x-z)^3+(y-z)^3$;
   б) $f(x,y)=(x+y)^4+x^4+y^4$;
   в) $f(x,y)=(x+y)^5-x^5-y^5$;
   г) $f(x,y)=(x+y)^7-x^7-y^7$.

12. Розв'язати систему рівнянь у невід'ємних дійсних числах:
$$\begin{cases} x_1^{2003}+x_2^{2009}+\cdots+x_{2002}^{2803} &= 1, \\ (1+x_8)(1+x_2)\cdots(1+x_{2002}) &= 0. \end{cases}$$

Задаqі на доведення

13. Довести тотожності:
   а) $(x+y)(x+z)(y+z)+xyz=(x+y+z)(xy+xz+yz)$;
   б) $xyz(x+y+z)^3-(xy+xz+yz)^3=(x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)$;
   в) $x^4+y^4=2(x^9+xy+y^2)^2-(x+y)^4$;
   г) $\frac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^3-x^3-y^3}=\frac{1}{6}[(x+y)^4+x^2+y^4]$.

14. Довести, що коли $x+y+z=0$, то:
   а) $3xyz=x^3+y^3+z^3$;
   б) $x^3+y^3+z^3=-3(x+y)(x+z)(y+z)$;
   в) $x^4+y^4+z^4=2(xy+yz+xz)^2$;
   г) $2(x^5+y^5+z^5)=5xyz(x^2+y^2+z^2)$.

15. Довести, що коли $x+y+z=0$, то $xy+xz+yz\leqslant 0$.

16. Довести, що коли x_1, x_2 є коренями квадратного рівняння $x^2-6x+1=0$, то сума $x_1^n+x_2^n$ не ділиться на 5 при жодному натуральному n.

17. Довести нерівності:
   а) $x^4+y^4\geqslant\frac{1}{8}(x+y)^4$;   в) $x^2+y^2+1\geqslant xy+x+y$;
   б) $x^4+y^4\geqslant x^3y+xy^3$;   г) $(x+y+z)^2\geqslant 9(xy+xz+yz)$.

18. Довести, що для будь-яких невід'ємних чисел x, y, z виконуються нерівності:
   а) $x^4+8x^8y+5xy^3+y^4\geqslant 6x^2y^2$;
   б) $(x+y)(x+z)(y+z)\geqslant 8xyz$;
   в) $x^4+y^4+z^4\geqslant xyz(x+y+z)$;
   г) $(x+y+z)^3\leqslant 9(x^3+z^3+y^3)$.

Задачі з олімпіад

19. Розв'язати рівняння $\sqrt{17-x^2}=(3-\sqrt{x})^2$.

20. Відомо, що довжини сторін даного трикутника є коренями рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ з дійсними коефіцієнтами. Обчислити площу цього трикутника.

21. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^3 + y^3 = z, \\ x^3 + z^3 = y, \\ y^3 + z^3 = x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = a^2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y = a, \\ x^3 + y^3 = b(x^2 + y^2); \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y + z = 2b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz - b^3. \end{cases}$

22. Довести, що корені x_1, x_2 многочлена $f(x) = x^2 + ax - \frac{1}{2a^2}$ з дійсними коефіцієнтами задовольняють нерівність $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}$.

23. Відомо, що $t + \frac{1}{t} = 2\cos\alpha$. Довести, що $t^n + \frac{1}{t^n} = 2\cos n\alpha$ для всіх натуральних чисел n.

24. Довести, що для всіх невід'ємних чисел a, b виконується нерівність $\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.

25. Довести, що коли добуток кількох додатних чисел рівний 1, а їх сума більша від суми їх обернених значень, то тільки одно з цих чисел більше за одиницю.

§ 2.4 Результант двох многочленів і його застосування

Література: [2] стор. 296 – 311; [3] стор. 500 – 504.

Теоретичні відомості

Нехай

$$f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \quad \text{та} \quad g(x) = b_mx^m + \dots + b_1x + b_0$$

– многочлени над полем P, $a_n \cdot b_m \neq 0$ і $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є коренями многочлена $f(x)$, які можуть і не належати полю P.

Результантом многочленів $f(x)$ *і* $g(x)$ називається вираз

$$R(f,g) = a_n^m g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n).$$

Результант $R(f,g)$ є симетричним многочленом від $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а тому результант довільних двох многочленів над полем P є елементом цього поля.

Нехай $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ – корені многочлена $g(x)$. Тоді:

1) $R(f,g) = a_n^m b_m^n \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant j\leqslant m} (\alpha_i - \gamma_j)$;

2) $R(f,g) = (-1)^{nm}R(g,f)$.

Для того щоб многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мали спільний корінь, необхідно і достатньо, щоб іхній результант дорівнював нулю.

Результант многочленів $f(x)$ і $g(x)$ можна подати у формі Сільвестра:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_n & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & & & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & b_1 & b_0 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_m & & & \dots & b_0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m \quad \text{рядків} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n \quad \text{рядків} \end{array}$$

Дискримінантом $D(f)$ *многочлена* $f(x)$ називається вираз

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{-1} R(f, f'),$$

де $R(f,f')$ – результант многочлена $f(x)$ і його похідної $f'(x)$.

Має місце рівність $D(f) = a_n^{2n-2} \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Многочлен $f(x)$ має кратний корінь тоді і тільки тоді, коли його дискримінант дорівнює нулю.

Нехай задано систему двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими, коефіцієнти яких належать полю P:

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

Схема виключення невідомих з цієї системи така:

1) упорядковуємо многочлени $f(x,y)$ і $g(x,y)$ за спадними степенями однієї із змінних, наприклад x;

2) складаємо результант $R(f,g)=\varphi(y)$, розглядаючи змінну y як параметр;

3) знаходимо всі корені $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ результанта $\varphi(y)$;

4) підставляємо в задану систему замість змінної y значення $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$; дістаємо сукупність m систем двох рівнянь з одним невідомим x;

5) розв'язуємо цю сукупність систем рівнянь і складаємо відповідні пари розв'язків.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Які задачі приводять до поняття результанту двох многочленів?

2. Чому рівні результанти $R(f,g)$ і $R(g,f)$ многочленів:
   а) $f(x)=2x+3$ і $g(x)=3x-2$;
   б) $f(x)=ax+b$ і $g(x)=cx+d$;
   в) $f(x)=2x+1$ і $g(x)=3x^2-x-2$;
   г) $f(x)=mx+n$ і $g(x)=ax^2+bx+c$?
   Порівняйте їх.

3. Обчислити результант $R(f,g)$ для таких многочленів:
   а) $f(x)=x^2-5x+6$ і $g(x)=3x^2+2x-7$;
   б) $f(x)=\sqrt{3}x^2-6x+4\sqrt{3}$ і $g(x)=x^2+7x+12$;
   в) $f(x)=2x^2+x-2\sqrt{3}$ і $g(x)=x^4+5x^2+4$;
   г) $f(x)=x^4-1$ і $g(x)=x^3-4x^2-7x-2$.

4. Знайти дискримінант многочленів:
   а) $f(x)=(1+i)x+(2-i)$;
   б) $f(x)=ax+b$;
   в) $f(x)=3ix^2-(1-i)x+1$;
   г) $f(x)=ax^2+bx+c$.

5. При якій умові многочлен $f(x)=ax^2+bx+c$ має кратний корінь?

6. Чи може многочлен $f(x) = ax^2 + (3a+4)x + a - 2$ мати кратний корінь?

7. Нехай $f(x)$ – многочлен ненульового степеня з кільця $\mathbb{C}[x]$. Що можна сказати про дискримінант $D(f^3)$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Обчислити результант $R(f, g)$ для таких многочленів:
   а) $f(x) = x^2 + 2x + 5$ і $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$;
   б) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ і $g(x) = x^2 - x + 1$;
   в) $f(x) = 3x^3 + x - 1$ і $g(x) = x^2 - 2x + 4$;
   г) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ і $g(x) = 3x^2 + 4x + 4$.

9. Обчислити дискримінант таких многочленів:
   а) $f(x) = x^3 + 6x + 2$;
   б) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 21x - 5$;
   в) $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$;
   г) $f(x) = x^4 - (1+2i)x^3 - (4-2i)x^2 + (1+6i)x + 3$;
   д) $f(x) = x^5 - 2$;
   е) $f(x) = x^5 + 1$;
   є) $f(x) = x^{2002} + x^{2001} + \cdots + x + 1$;
   ж) $f(x) = \frac{x^{2002}}{2002!} + \frac{x^{2001}}{2001!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + x + 1$.

10. Встановити, чи існує зв'язок між дискримінантами многочленів $f(x) = x^4 - 1$, $f_1(x) = x^2 - 1$, $f_2(x) = x^2 + 1$ і результантом $R(f_1, f_2)$.

11. Вивести формулу для обчислення дискримінанта многочлена:
   а) $f(x) = x^3 + bx + c$; б)$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$;
   в) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

12. Порівняйте дискримінанти многочленів $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ та $g(x) = 8x^3 - 4ax^2 - 8cx - (b^2 - 4ac)$.

13. Знайти всі раціональні значення λ, при яких мають спільний корінь такі многочлени:
   а) $f(x) = x^2 + \lambda x + 1$ і $g(x) = x^2 + x + \lambda$;
   б) $f(x) = 2x^2 + \lambda x - 3$ і $g(x) = \lambda x^2 + x - 2$;
   в) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4\lambda x - 4$ і $g(x) = 3x^2 - 5\lambda x + 8$;
   г) $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 2$ і $g(x) = x^3 + 2\lambda x - 1$.
   Якими є ці корені у відповідних випадках?

14. Перевірити одним з відомих способів (обчислення результанта або знаходження НСД многочленів $f(x)$ та $f'(x)$), що многочлен $f(x)$ з кільця

$\mathbb{C}[x]$ має кратні корені, якщо:

а) $f(x) = 12x^3 - 40x^2 + 21x - 9$;
б) $f(x) = a^2x^3 + (2a^3 - 3a^2 + 2a)x^2 + (4a^2 - 2a + 1)x + 2a - 1$;
в) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 16x - 12$;
г) $f(x) = x^4 - 2x^3 + (a+1)x^2 - 2ax + a$.

15. Знайти всі цілі значення λ, при яких мають кратні корені такі многочлени з кільця $\mathbb{R}[x]$:
а) $f(x) = x^3 - \lambda x + 1$; в) $f(x) = x^3 + (\lambda - 2)x^2 + (1 - \lambda)x$;
б) $f(x) = x^4 - 4x + \lambda$; г) $f(x) = x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x^2 + 2x - 2$.
Якими є ці корені у відповідних випадках?

16. Розв'язати систему рівнянь в полі $\mathbb{C}$:

а) $\begin{cases} xy^2 + y^2 + 2 = 0, \\ x^2y - y + x - 1 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^2 - 5y + 4x - 4 = 0, \\ 2y^2 + y - x^2 + 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x^2 - 5y^2 - 3x + 9y = 0, \\ 5x^3 + 5y^3 - 15x^2 - 13xy - y^2 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 7xy + 13x - 2y - 3 = 0, \\ 9x^2 + y^2 - 14xy + 28x - 4y - 5 = 0. \end{cases}$

Задачі на доведення

17. Нехай $f(x), g(x), f_1(x), g_1(x), f_2(x), g_2(x) \in \mathbb{C}[x]$. Довести, що:
а) $R(f, g_1 \pm g_2) = R(f, g_1) \pm R(f, g_2)$, коли $deg f = 1$;
б) $R(f, g_1 \cdot g_2) = R(f, g_1) \cdot R(f, g_2)$;
в) $R(f_1 \cdot f_2, g_1 \cdot g_2) = R(f_1, g_1) \cdot R(f_1, g_2) \cdot R(f_2, g_1) \cdot R(f_2, g_2)$;
г) $R(f^n, g^m) = [R(f, g)]^{nm}$.

18. Нехай $f(x), g(x), a \in \mathbb{C}[x]$. Довести, що:
а) $D((x - a) \cdot f(x)) = D(f(x)[f(a)]^2)$;
б) $D(f \cdot g) = D(f) \cdot D(g) \cdot [R(f, g)]^2$.

19. Нехай $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ є многочленом третього степеня з кільця $\mathbb{C}[x]$ і x_1, x_2, x_3 – його корені. Довести, що

$D(f) = a_3^4 \cdot \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$, де $s_i = x_1^i + x_2^i + x_3^i$ для всіх $0 \leqslant i \leqslant 4$.

20. Довести, що квадратні рівняння $ax^2+bx+c=0$ і $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ мають спільний корінь тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

21. Довести, що мають місце формули:
   а) $D(x^4+ax^3+b)=b^2(256b-27a^4)$;
   б) $D(x^4+ax^2+b)=b(16b-4a^2)$;
   в) $D(x^4+ax+b)=256b^3-27a^4$.

Творчі задачі

22. Нехай $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ та $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ – многочлени над полем P і $a_n\cdot a_0\neq 0$. Дослідити, які зв'язки існують між дискримінантами $D(f)$ і $D(g)$ даних многочленів.

23. Вивести формулу для обчислення дискримінанта многочлена $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+g$.

Задачі з олімпіад

24. Нехай $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ – многочлен над полем P, $a_n\neq 0$ і $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ є коренями многочлена $f(x)$, які можуть і не належати полю P. Довести, що

$$D(f)=a_n^{2n-2}\cdot\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix},$$

де $s_i=\alpha_1^i+\alpha_2^i+\cdots+\alpha_n^i$ для всіх $0\leqslant i\leqslant 2n-2$.

25. Нехай $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – його корені і $g(x)=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$. Довести, що

$$D(f(g(x)))=(D(f(x)))^m\prod_{i=1}^{n}D(g(x)-\alpha_i).$$

§ 2.5 Вибрані задачі

1. Довести, що для будь-якого поля P кільце многочленів $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ є факторіальним.

2. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – корені многочлена $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Довести, що будь-який симетричний многочлен від змінних $x_2, x_3, \ldots, x_n$ можна подати у вигляді многочлена від x_1.

3. Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – антисиметричний многочлен від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Довести, що виконується рівність
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) g(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
де $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – визначник Вандермонда, а $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – симетричний многочлен.

4. Нехай $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – симетричний многочлен від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $h(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n)$. Довести, що виконується рівність
$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2 u(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
де $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – визначник Вандермонда, а $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – симетричний многочлен.

5. Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – симетричний многочлен від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з кільця $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Довести, що значення цього многочлена від коренів n-го степеня з одиниці є цілим числом.

6. Нехай $\overline{P}$ – поле часток кільця всіх симетричних многочленів від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з кільця $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Довести, що поле $\overline{P}$ співпадає з підполем поля $\mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яке складається зі всіх симетричних раціональних дробів від цих змінних.

7. Довести, що многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з кільця $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем P характеристики нуль ділиться на лінійний многочлен
$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + b$$
тоді і тільки тоді, коли він перетворюється в нуль у кожній точці арифметичного простору P^n, в якій перетворюється в нуль многочлен $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

8. Обчислити значення всіх елементарних симетричних многочленів від коренів n-го степеня з одиниці.

9. Розкласти на множники найменшого степеня з раціональними коефіцієнтами многочлен

$$f(x, y, z) = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4.$$

10. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y + z & = & a, \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 & = & a^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + y + z)^3 & = & t, \\ (x + z + t)^3 & = & y, \\ (y + z + t)^3 & = & x, \\ (x + y + t)^3 & = & z. \end{cases}$

11. Знайти результант кругових многочленів $\Phi_n(x)$ та $\Phi_m(x)$ в залежності від співвідношень між n і m.

12. Знайти результант кругового многочлена $\Phi_n(x)$ та $f(x) = x^m - 1$ в залежності від співвідношень між n і m.

13. Нехай $s, t \in \mathbb{N}, \quad d = (s, t), \quad m = [s, t]$ та $a, b \in \mathbb{C}$. Довести, що

$$R(x^s - a^s, x^t - b^t) = (-1)^s(a^m - b^m)^d.$$

14. Обчислити дискримінант таких многочленів:
   а) $f(x) = x^{2002} + 2002$;
   б) $f(x) = x^{2n+1} + 1$;
   в) $f(x) = x^{2n} - 1$;
   г) $f(x) = x^n + a$;
   д) $f(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots - x + 1$;
   е) $f(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x + 1$;
   є) $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$;
   ж) $f(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{n-1!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + x + 1$.

Розділ 3

Многочлени над числовими полями

§ 3.1 Многочлени над полем комплексних чисел

Література: [2] стор. 311 – 319; [3] стор. 505 – 512.

Теоретичні відомості

Нехай $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ – многочлен ненульового степеня над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Введемо позначення: $A = \max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$, $N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$, $N_1 = 1 + \frac{2A}{|a_n|}$ і M – як завгодно велике додатне дійсне число. Тоді:

1. Многочлен $f(z)$ має тільки ті корені, модуль яких менший за число N_0;
2. Як тільки $|z| > N_0$, то модуль старшого члена многочлена $f(z)$ більший за модуль суми решти членів цього многочлена;
3. $(\forall z \in \mathbb{C}) \left(|z| > max \left\{ N_1, \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_n|}} \right\} \longrightarrow |f(z)| > M \right)$.

Основна теорема алгебри многочленів. Кожен многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами має хоча б один комплексний корінь.

З цієї теореми слідує, що незвідними над полем комплексних чисел є тільки многочлени першого степеня, а кожен многочлен вищого степеня єдиним способом розкладається над цим полем на лінійні множники:

$$f(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

де $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – корені многочлена $f(z)$.

Поле P називають *алгебраїчно замкненим*, якщо всі корені будь-якого многочлена $f(x)$ ненульового степеня з кільця $P[x]$ є елементами поля P.

Поле комплексних чисел є алгебраїчно замкненим і для коренів многочлена $f(z)$ мають місце формули Вієта:

$$\begin{cases} z_1 + x_2 + \ldots + z_n & = & -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ z_1z_2 + z_1z_3 + \ldots + z_{n-1}z_n & = & \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & \ldots\ldots\ldots \\ z_1z_2\cdots z_n & = & (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Задачі на ілюстрацію понять

1. Для довільних комплексних чисел z_1 і z_2 перевірити виконання подвійної нерівності $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

2. Яким є поле розкладу многочлена:
   а) $f(x) = x^2 - 9$; в) $f(x) = x^3 - 2x + 1$;
   б) $f(x) = x^2 - 5$; г) $f(x) = x^4 - 1$?

3. Чи для кожного многочлена $f(x)$ над числовим полем P існує його поле розкладу?

4. Чи є коренем многочлена $f(x) = 4x^5 + 2ix^4 - (4 - 5i)x^3 + 6x - 3$ число: а) $1 - i$; б) 3; в) $2 + i$; г) $1 - 3i$?

5. Зобразити на координатній площині коло, всередині якого знаходяться всі корені многочлена:
   а) $f(x) = x^5 + 2ix^4 - 5x^3 + 3x - 3$;
   б) $f(x) = 3x^4 + 12x^3 - 5ix^2 + 6$;
   в) $f(x) = 4x^5 + 8x^4 - (2 + 3i)x^3 + x - 1$;
   г) $f(x) = x^6 - 7x^4 + (4 + 5i)x^3 + x^2 + 2x + 1$.

6. Скільки полів розкладу існує для многочлена $f(x) = x^2 - 3$?

7. Чи є алгебраїчно замкненим поле:
   а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$; в) $\mathbb{R}[\sqrt{2}]$; г) $\mathbb{C}[\sqrt{2i}]$?

8. Чи є звідним над полем комплексних чисел многочлен $f(x) = x^2 + i$?

9. Знайти многочлен найменшого степеня, коренями якого є:
   а) $1,\quad 2i,\quad 1 - i$;
   б) $-i$ – двократний корінь та $3 - i$ – простий;
   в) $2 + i$ – трикратний, 3 – простий і -5 – двократний корінь;
   г) $3i,\quad -2$ – трикратні корені.

10. Запишіть формули Вієта для многочлена:
   а) $f(x) = x^3 - 9$; в) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x - 3$;
   б) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$; г) $f(x) = 5x^5 + 3x + 1$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

11. Знайти додатне число m таке, що з нерівності $|z| > m$ випливає нерівність:
   а) $|z^3 - 5z^2 + 6z - 1| > 1000$;
   б) $|2z^3 + 4z^2 - 5z + 6| > 864$;
   в) $|4z^4 + z^3 - 2z^2 + 1 + i| > 512$;
   г) $|z^5 - 2iz^3 + z| > 750$.

12. Розкласти на незвідні над полем $\mathbb{C}$ множники многочлен:
   а) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$; д) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;
   б) $f(x) = x^2 + (1 + i)x + i$; е) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$;
   в) $f(x) = x^4 + 3$; є) $f(x) = x^{m+n} - x^n - x^m + 1$;
   г) $f(x) = x^6 - 8$; ж) $f(x) = x^{2n} - (2^n + 3^n)x^n + 6^n$.

13. Знайти найбільший спільний дільник многочленів:
   а) $f(x) = (x - i)^2(x + i)^3$; і $g(x) = x^4 - 1$;
   б) $f(x) = (x + 1)(x + i)(x - 2i)^2$; $g(x) = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$;
   в) $f(x) = x^m + 1$; $g(x) = x^n - 1$;
   г) $f(x) = x^m - 1$; $g(x) = x^n - 1$;

14. Знайти суму квадратів коренів многочлена $f(x) = x^3 - (1 + 2i)x^2 - 3$.

15. Знайти суму кубів коренів многочлена $f(x) = x^4 - (2 - i)x^2 + 3ix - 4$.

16. Розв'язати рівняння:
   а) $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$, якщо його корені задовольняють умову $x_1 - x_2 = \sqrt{2}$;
   б) $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15 = 0$, якщо його корені задовольняють умову $2x_1 - 4x_2 = 1$;
   в) $x^3 - 6x^2 + px + q = 0$, якщо його корені задовольняють умову $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : 3$;
   г) $x^3 - 7ix^2 - 14x + 8i = 0$, якщо його корені утворюють геометричну прогресію.

17. Знайти зведений многочлен $f(x)$ найменшого степеня, якщо його похідна $f'(x)$ має:
   а) прості корені 1, -3 та i, а $f(-i) = 1$;
   б) прості корені 2 та $1 - i$, двократний корінь i, а $f(1) = 0$.

Задачі на доведення

18. Довести *лему про модуль старшого члена*: для будь-якого многочлена ненульового степеня $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ над полем $\mathbb{C}$ і додатного числа k існують достатньо великі за модулем значення змінної z такі, що модуль старшого члена буде більший модуля суми решти членів у k разів, тобто виконується нерівність
$$|a_n z^n| > k \cdot |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0|.$$

19. Довести, що всі корені многочлена ненульового степеня $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел менші за абсолютною величиною від числа $N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$, де $A = \max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}$.

20. Довести *лему про зростання модуля многочлена*: для кожного многочлена ненульового степеня $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ з комплексними коефіцієнтами і довільного додатного числа M можна знайти число m таке, що при $|z| > m$ виконується нерівність $|f(z)| > M$.

21. Довести, що кожний многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має хоча б один дійсний корінь.

22. Нехай степінь n многочлена $f(z)$ з комплексними коефіцієнтами є парним числом і $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – його корені у полі розкладу $\overline{\mathbb{C}}$. Довести, що:
    а) для довільного дійсного числа λ серед елементів $\beta_{ij} = \alpha_i \alpha_j + \lambda(\alpha_i + \alpha_j)$, де $i < j$, є комплексне число;
    б) для різних дійсних чисел λ_1 і λ_2 існує однакова пара індексів (i, j) така, що елементи $\alpha_i \alpha_j + \lambda_1(\alpha_i + \alpha_j)$ і $\alpha_i \alpha_j + \lambda_2(\alpha_i + \alpha_j)$ є комплекснимичислами;
    в) серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є комплексне число.

23. Нехай $1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ – корені рівняння $x^n - 1 = 0$. Довести, що:
а) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i = -1$; б) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2 = -1$; в) $\prod\limits_{i=1}^{n-1} (x_i + 1) = \left[\begin{array}{ll} 0, & \text{n – парне,} \\ 1, & \text{n – непарне.} \end{array}\right.$

24. Довести, що $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 3)$ є полем розкладу многочлена $f(x) = x^2 - 3$.

25. Довести, що поля $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 3)$ і $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ізоморфні.

26. Довести, що поле $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ є алгебраїчно замкненим.

27. Довести, що коли комплексні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ задовольняють умови $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n & = & -a_{n-1}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n & = & a_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n & = & (-1)^n a_0, \end{cases}$
то ці числа є коренями многочлена $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.

28. Довести, що не всі корені многочлена з дійсними коефіцієнтами є дійсними числами, якщо:
   а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$;
   б) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 25x - 1$;
   в) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - x - 1$;
   г) $f(x) = x^{2003} + 2x^{2002} + \cdots + 2002x + 2003$.

29. Довести, що рівність $ab = c$ є необхідною і достатньою умовою для того, щоб серед коренів рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, де $c \neq 0$, були два протилежні числа.

30. Довести, що ненульові многочлени $f(z)$ і $g(z)$ з комплексними коефіцієнтами мають однакові корені однакової кратності тоді і тільки тоді, коли функція $h(z) = |f(z)| - |g(z)|$ має постійний знак у всіх точках $z \in \mathbb{C}$, при яких вона відмінна від нуля.

Творчі задачі

31. Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$ – многочлен з кільця $\mathbb{R}[x]$. Знайти умови, при яких кільця $\mathbb{R}[x]/(ax^2 + bx + c)$ і $\mathbb{C}$ ізоморфні.

Задачі з олімпіад

32. Нехай $f(z)$ і $g(z)$ – многочлени ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами. Довести, що коли виконується умова
$$(\forall w)((f(w) = 0 \leftrightarrow g(w) = 0) \wedge (f(w) = 1 \leftrightarrow g(w) = 1)),$$
то многочлени $f(z)$ і $g(z)$ рівні.

33. Знайти корені многочлена $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ степеня $n \geqslant 3$, якщо вони утворюють арифметичну прогресію.

34. Рівняння $x^{12} - abx + a^2 = 0$ має корінь $x_0 > 2$. Довести, що $|b| > 64$.

§ 3.2 Многочлени над полем дійсних чисел

Література: [2] стор. 320 – 323; [3] стор. 512 – 514.

Теоретичні відомості

Нехай $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами. Якщо комплексне число z_0 є коренем многочлена $f(z)$, то спряжене до нього комплексне число $\overline{z_0}$ також є коренем цього многочлена. Крім того, якщо комплексне число z_0 є коренем k-ї кратності, то спряжене комплексне число $\overline{z_0}$ також є коренем цього многочлена кратності k.

Кожен многочлен з дійсними коефіцієнтами, степінь якого більший 2, є звідним над полем дійсних чисел.

Кожен многочлен $f(z)$ з дійсними коефіцієнтами єдиним способом розкладається над полем $\mathbb{R}$ у добуток лінійних множників і квадратних тричленів:

$$f(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_i)^{k_i} (z^2 + p_{i+1} z + q_{i+1})^{k_{i+1}} \cdots (z^2 + p_m z + q_m)^{k_m},$$

де квадратні тричлени не мають дійсних коренів.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи існує у кільці $\mathbb{R}[x]/I$ ідеал I такий, що фактор-кільце $\mathbb{R}[x]/I$ і поле $\mathbb{R}$ ізоморфні? Якщо так, то задайте відповідний ізоморфізм.

2. Чи існує у кільці $\mathbb{R}[x]/I$ ідеал I такий, що фактор-кільце $\mathbb{R}[x]/I$ і поле $\mathbb{Q}$ ізоморфні? Якщо так, то задайте відповідний ізоморфізм.

3. Знайти многочлен найменшого степеня у кільці $\mathbb{R}[x]$, який має:
   а) прості корені 1 і -2 та подвійний корінь 3;
   б) простий корінь $1 - i$ та подвійний корінь $1 - \sqrt{3}$;
   в) прості корені 2 і 3 та подвійний корінь i;
   г) потрійний корінь $-2i$.

4. Встановити, чи має дійсні корені многочлен:
   а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$;
   б) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$;
   в) $f(x) = x^5 - 3x^2 - 1$;
   г) $f(x) = x^6 + x^4 - 2x^3 - x + 1$.

5. Які дійсні корені може мати многочлен з дійсними коефіцієнтами $f(x) = x^8 + a^2 x^6 + b^4 x^4 + c^6 x^2$?

6. При якій умові коренями многочлена $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ з дійсними коефіцієнтами є тільки уявні числа?

7. Розкласти на незвідні над полем $\mathbb{R}$ множники многочлен:
   а) $f(x) = x^4 + 4$; б) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ з кільця $\mathbb{R}[x]$.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Знайти всі дійсні числа a і b такі, що рівняння $x^4 + ax^2 + b = 0$ має чотири дійсних корені, які утворюють арифметичну прогресію. Які ці корені?

9. Знайти всі дійсні числа a такі, що рівняння $x^3 + ax^2 - 6x + 8 = 0$ має три дійсних корені, які утворюють геометричну прогресію. Які ці корені?

10. Розв'язати рівняння:
    а) $x^4 + x^3 - x^2 - 10x - 12 = 0$, якщо $x_1 = -1 - i\sqrt{3}$;
    б) $x^4 - x^3 + x^2 + 4x + 10 = 0$, якщо $x_1 = -1 - i$;
    в) $x^4 - x^3 - 11x^2 + 31x - 20 = 0$, якщо $x_1 = 2 - i$;
    г) $x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10 = 0$, якщо $x_1 = 1 + 2i$.

11. Розкласти на незвідні над полем $\mathbb{R}$ множники многочлен:
    а) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 20x + 25$;
    б) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 3$;
    в) $f(x) = x^6 - 8$;
    г) $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$.

12. Знайти необхідну і достатню умову, при якій многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ з дійсними коефіцієнтами має суто уявний корінь.

13. Чи має суто уявні корені многочлен:
    а) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2$;
    б) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 11x + 3$;
    в) $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x - 21$;
    г) $f(x) = x^5 + 3x^3 - x^2 + 4x + 4$?

14. Многочлен $f(x)$ має суто уявний корінь. Знайти дійсне число a і всі корені многочлена, якщо:
    а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 18x + a$;
    б) $f(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 - 8x + 4$;
    в) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3x + a$;
    г) $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 8x + 8$.

15. Яким умовам повинні задовольняти дійсні коефіцієнти многочлена:
    а) $f(x) = (3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2$, щоб він мав два різних дійсних корені;
    б) $f(x) = (2a-1)x^2 + ax + 2a - 3$, щоб він мав не більше одного дійсного кореня;
    в) $f(x) = (2a-1)x^2 + (\frac{1}{2} - 4a)x + 2a + 1$, щоб він мав один дійсний корінь;
    г) $f(x) = (a^3(1-\sqrt{2})a^2 - (3+\sqrt{2})a + 3\sqrt{2})x^2 + 2(a^2-2)x + a + \sqrt{2}$, щоб він приймав додатні значення для всіх $x > 0$?

16. В квадратному рівнянні $x^2 + px + q = 0$ коефіцієнти p, q незалежно пробігають всі значення з відрізка $[-1, 1]$. Знайти множину значень, які при цьому можуть приймати дійсні корені даного тричлена.

Задачі на доведення

17. Всі коефіцієнти многочлена належать множині $\{-1, 0, 1\}$. Довести, що всі дійсні корені даного многочлена, якщо вони існують, належать відрізку $[-2, 2]$.

18. Нехай у многочлена $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ всі коефіцієнти є додатними дійсними числами. Довести, що рівняння $x^{n+1} = f(x)$ має єдиний додатний корінь.

19. Довести, що коли всі корені многочлена n-го степеня $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами є дійсними числами, то всі його послідовні похідні $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ також мають тільки дійсні корені.

20. Нехай всі корені многочлена n-го степеня $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ є дійсними числами. Довести, що коли число a є кратним коренем многочлена $f'(x)$, то воно також є коренем даного многочлена $f(x)$.

21. Нехай у многочлена $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами старший коефіцієнт і вільний член мають різні знаки, тобто $a_n a_0 < 0$. Довести, що даний многочлен має хоча б один дійсний корінь.

22. Многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами має властивість, що рівняння $f(x) = x$ не має дійсних коренів. Довести, що рівняння $f(f(x)) = x$ також не має дійсних коренів.

23. Многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами приймає невід'ємні значення при всіх дійсних значеннях змінної. Довести, що існують многочлени з дійсними коефіцієнтами $u(x)$ і $v(x)$ такі, що $f(x) = u^2(x) + v^2(x)$.

24. Многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ з дійсними коефіцієнтами має n дійсних коренів. Довести, що $f(2) \geqslant 3^n$.

25. Нехай всі корені многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами є чисто уявними, тобто мають вид ai, де $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Довести, що всі корені многочлена $f'(x)$, крім одного, також є чисто уявними.

26. Довести, що всі корені многочлена з дійсними коефіцієнтами $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ є суто уявними тоді і тільки тоді, коли многочлени $g_1(y) = a_0 - a_2 y^2 + a_4 y^4 - \cdots$ і $g_2(y) = a_1 - a_3 y^2 + a_5 y^4 - \cdots$ мають спільний дійсний корінь.

27. Довести, що зведений многочлен четвертого степеня з дійсними коефіцієнтами, всі корені якого є суто уявними, можна подати у вигляді суми квадратів зведеного квадратного тричлена і многочлена першого степеня з дійсними коефіцієнтами.

Творчі задачі

28. Відомо, що кільця $\mathbb{R}[x]/I$ і $\mathbb{C}$ ізоморфні. Опишіть всі ідеали, для яких має місце такий ізоморфізм.

Задачі з олімпіад

29. Знайти всі многочлени $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами такі, що для всіх дійсних x виконується рівність $(1 + 2x)f(2x) = (1 + 2^{1999}x)f(x)$.

30. Знайти всі дійсні значення a і b такі, щоб рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ мало не більше двох додатних коренів для будь-якого дійсного c.

31. Нехай многочлени з дійсними коефіцієнтами $f(x)$ і $g(x)$ приймають цілочислові значення при однакових значеннях змінної x. Довести, що хоча б один з многочленів $f(x) - g(x)$ або $f(x) + g(x)$ є константою.

32. Довести, що рівняння $x^5 + ax^4 + bx^3 + c = 0$ з дійсними коефіцієнтами і $c \neq 0$ має не менше двох уявних коренів.

33. Для заданого натурального числа n знайти в множині дійсних чисел найдовший інтервал (c_n, b_n) такий, щоб для довільних чисел $a_{2n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ з цього інтервалу многочлен $f(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ не мав дійсних коренів.

34. Нехай для дійсних чисел $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ виконується рівність
$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0.$$
Довести, що многочлен $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ має хоча б один дійсний корінь.

35. Знайти дійсні числа p і q такі, щоб многочлен $f(x) = x^4 + px^2 + q$ мав 4 дійсні корені, які утворюють арифметичну прогресію.

36. Довести, що многочлен $f(x) = \frac{x^n}{n!} + \cdots + \frac{x^2}{2!} + x + 1$ не може мати більше одного дійсного кореня.

37. Нехай квадратні тричлени $f(x) = a_1x^2 + 2b_1x + c_1$, $f_2(x) = a_2x^2 + 2b_2x + c_2$ з кільця $\mathbb{R}[x]$ приймають тільки додатні значення. Довести, що тричлен $f(x) = a_1a_2x^2 + 2b_1b_2x + c_1c_2$ також додатний для всіх $x \in \mathbb{R}$.

38. Нехай маємо многочлен $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + a_8x^8 + \cdots + a_1x + 1$. Два студенти грають у таку гру: кожен по черзі замінює один з невизначених коефіцієнтів $a_9, a_8, \ldots, a_1$ деяким дійсним числом (всього 9 ходів). Якщо в результаті отримають многочлен, який не має дійсних коренів, то виграє той, хто зробив перший хід. Якщо многочлен має дійсний корінь, то виграє той, хто зробив другий хід. Чи може другий гравець завжди виграти?

39. Нехай у многочлена $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами додатний старший коефіцієнт a_n. За допомогою формул Вієта довести, що:
    а) при парному n і $a_0 > 0$ число додатних і число від'ємних коренів парне;
    б) при парному n і $a_0 < 0$ число додатних і число від'ємних коренів непарне(з врахуванням їх кратності).

    Дослідити число парних і непарних коренів при непарному n.

40. Довести, що многочлен $f(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ не має дійсних коренів.

41. Знайти всі ненульові многочлени $f(x)$ з кільця $\mathbb{R}[x]$, для яких виконується рівність: а) $f(x^2) = f^2(x)$; б) $f(x^2 - 2x) = f^2(x - 2)$; в) $f(x) \cdot f(2x^2) = f(2x^3 + x)$.

§ 3.3 Рівняння третього і четвертого степеня

Література: [2] стор. 337 – 348; [3] стор. 515 – 521.

Теоретичні відомості

Рівняння третього степеня $z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$ за допомогою заміни $z=x-\frac{a_2}{3}$ зводиться до виду

$$x^3+px+q=0.$$

Число $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ називається *дискримінантом отриманого кубічного рівняння*. Корені цього рівняння знаходять за *формулою Кардано*

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}.$$

Зауважимо, що ця формула дає також 6 чисел, які не є коренями рівняння.

Нехай $u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$, $u_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$ та $u_1u_2=-\frac{p}{3}$. Тоді $x_1=u_1+u_2$ є коренем цього кубічного рівняння, а решта його коренів обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)+\tfrac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-u_2),\\ x_3 &= -\tfrac{1}{2}(u_1+u_2)-\tfrac{i\sqrt{3}}{2}(u_1-u_2). \end{aligned}$$

Якщо коефіцієнти рівняння p і q є дійсними числами, то:

а) при $D>0$ рівняння має один дійсний і два комплексних спряжених корені;

б) при $D=0$ рівняння має три дійсних корені, два з яких рівні між собою;

в) при $D<0$ рівняння має три дійсних різних корені.

Рівняння четвертого степеня $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ після введення допоміжної змінної t запишемо у вигляді

$$\left(x^2+\tfrac{a_3x}{2}+\tfrac{t}{2}\right)^2=\left(\tfrac{a_3^2}{4}-a_2+t\right)x^2+\left(\tfrac{a_3t}{2}-a_1\right)x+\tfrac{t^2}{4}-a_0.$$

Значення змінної t вибирають так, щоб у правій частині останнього рівняння утворювався квадрат деякого двочлена $ax+b$. Це буде при умові, що дискримінант цього квадратного тричлена рівний нулю. Звідси отримують допоміжне кубічне рівняння

$$t^3-a_2t^2+(a_3a_1-4a_0)t-(a_3^2a_0-4a_2a_0+a_0^2)=0,$$

яке називають *кубічною резольвентою даного рівняння четвертого степеня*.

Якщо t_0 – один з коренів резольвенти (знайдений, як правило, без формули Кардано), то дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{array}{lcr} x^2+\frac{a_3}{2}x+\frac{t_0}{2} & = & ax+b, \\ x^2+\frac{a_3}{2}x+\frac{t_0}{2} & = & -(ax+b). \end{array}\right.$$

Такий спосіб розв'язування рівняння четвертого степеня називають *методом Феррарі*.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Звести наступне кубічне рівняння до виду, у якому відсутній доданок з невідомим у другому степені:
   а) $x^3+9x^2+18x+28=0$; в) $x^3-2x^2+x-3=0$;
   б) $x^3-6x^2+4x-1=0$; г) $x^3+6ix^2+2x-4=0$.

2. Як узгоджуються поняття дискримінанта многочлена третього степеня $f(x)=x^3+px+q$ і кубічного рівняння $x^3+px+q=0$?

3. Знайти дискримінант рівняння:
   а) $x^3+2x+3=0$; в) $x^3-6x+4=0$;
   б) $x^3-3x-2=0$; г) $x^3-3ix^2+2x-4=0$.

4. Скласти резольвенту для рівняння:
   а) $x^4-12x-3=0$; в) $x^4-6x^2+3x-1=0$;
   б) $x^4+4x^2-2=0$; г) $x^4+2x^3+2x^2+x-7=0$.

5. Знайти добуток суми коренів рівняння $x^3+ax^2+bx+1=0$ на суму їх обернених величин.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

6. Розв'язати рівняння:
   а) $x^3-6x+4=0$; д) $x^3+6x^2+30x+25=0$;
   б) $x^3+3x+2i=0$; е) $x^3+9x^2+18x+28=0$;
   в) $x^3+6ix+4+4i=0$; є) $2x^3+3x^2-3x-9=0$;
   г) $x^3+3\sqrt[3]{6}x+7i=0$; ж) $3x^3-10x^2+13x+14=0$.

7. Розв'язати рівняння $12x^3+4x^2-17x+6=0$, коли відомо, що серед його коренів є два числа, обернених за абсолютною величиною і протилежних за знаком.

8. Розв'язати рівняння $3x^3 + 2\sqrt{3}x^2 - 21x + 6\sqrt{3} = 0$, коли відомо, що добуток двох його коренів дорівнює 1.

9. Знайти всі корені кубічного рівняння $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, коли відомо, що виконується рівність $a_3a_0 = a_2a_1$.

10. Розв'язати кубічне рівняння $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = 0$, коли відомо, що його коефіцієнти в порядку спадання степенів утворюють геометричну прогресію з знаменником 2.

11. Скільки існує многочленів виду $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ з комплексними коефіцієнтами таких, що їх коренями є числа a, b, c?

12. Комплексні числа a, b, c є трьома з чотирьох коренів рівняння $x^4 - ax^3 - bx + c = 0$. Знайти всі такі трійки чисел a, b, c.

13. Розв'язати рівняння:

а)	$x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0;$	д)	$9x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$
б)	$x^4 + 4x^3 + 4x - 1 = 0;$	е)	$x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5 = 0;$
в)	$x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0;$	є)	$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0;$
г)	$x^4 + x^3 + 6x^2 + 2x + 8 = 0;$	ж)	$x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 12x + 12 = 0.$

Задачі на доведення

14. Довести, що коли корені рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ утворюють геометричну прогресію, то один з коренів рівний $-\sqrt[3]{c}$.

15. Довести, що коли коефіцієнти рівняння $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ в порядку спадання степенів утворюють геометричну прогресію, то його корені також утворюють геометричну прогресію.

16. Довести, що корені рівняння $x^3 + 3ax^2 - 3a^3 = 0$ є дійсними при будь-яких дійсних значеннях числа a.

17. Довести, що при $a \geqslant 0$ і довільному дійсному b рівняння $x^3+ax+b = 0$ має тільки один дійсний корінь.

18. Довести, що для довільного дійсного числа c рівняння $x^3-x^2+x+c = 0$ має тільки один дійсний корінь.

19. Довести, що будь-яке кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами і від'ємним дискримінантом можна за допомогою заміни $x = my + n$ звести до вигляду $ay^3 - 3by^2 - 3ay + b = 0$, де a, b – дійсні числа.

20. Довести, що кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами
$$ay^3 - 3by^2 - 3ay + b = 0$$
має корені $y_1 = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3}$, $y_2 = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 2\pi}{3}$, $y_3 = \operatorname{tg} \frac{\varphi + 4\pi}{3}$, де кут φ визначається з системи рівнянь
$$\begin{cases} \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

21. Нехай координати точок $A(b, a)$ і $D(d, c)$, які лежать в першій чверті, є коефіцієнтами рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. На осях координат побудовані точки C і B так, що фігура $ABCD$ є прямокутною трапецією. Довести, що число $x_0 = \frac{x_B - b}{a}$, де x_B – абсциса точки B, є дійсним коренем цього рівняння.

22. Довести, що многочлен з дійсними коефіцієнтами
$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
можна подати у вигляді $f(x) = (x^2 + px + q)^2 + r^2$ тоді і тільки тоді, коли
$$a_3^3 - 4a_2a_3 + 8a_1 = 0.$$

23. Довести, що многочлен з дійсними коефіцієнтами
$$f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
можна подати у вигляді $f(x) = (x^2 + px + q)^2 + (rx)^2$ тоді і тільки тоді, коли
$$a_1^2 - a_0a_3^2 = 0.$$

24. Довести, що рівність $a_2a_1 = a_0$ є необхідною і достатньою умовою для того, щоб серед коренів рівняння $z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ було два числа, сума яких дорівнює нулю.

Задачі з олімпіад

25. Чи може рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ мати лише від'ємні корені, якщо відомо, що $a + 2b + 4c = -\frac{1}{2}$?

26. Дано рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Знайти всі дійсні значення a і b такі, щоб дане рівняння мало не більше двох додатних коренів при всіх дійсних значеннях c.

§ 3.4 Відокремлення дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами

Література: [2] стор. 323 – 336; [3] стор. 521 – 525.

Теоретичні відомості

Задача відокремлення дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами полягає в знаходженні тих інтервалів, у кожному з яких знаходиться тільки один корінь. На підставі властивостей многочленів з комплексними коефіцієнтами знаходять верхню і нижню межі дійсних коренів.

Якщо многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ має дійсні корені, то вони знаходяться в інтервалі $(-N_0, N_0)$, де $N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$ і $A = \max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$.

Метод Ньютона для знаходження верхньої межі додатних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами грунтується на теоремі:

Якщо при $x = m > 0$ многочлен $f(x)$ має додатне значення, а всі його похідні приймають невід'ємні значення, то число m є верхньою межею його додатних коренів.

Вміння знаходити верхню межу додатних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами дозволяє визначити межі його додатних і від'ємних коренів. Якщо m_0, m_1, m_2, m_3 – верхні межі додатних коренів многочленів з дійсними коефіцієнтами $f(x)$, $y^n f(\frac{1}{y})$, $f(-y)$ і $y^n f(-\frac{1}{y})$ відповідно, то від'ємні корені многочлена $f(x)$ знаходяться в інтервалі $(-m_2, -\frac{1}{m_3})$, а додатні – в інтервалі $(\frac{1}{m_1}, m_0)$.

Нехай $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – деяка послідовність дійсних чисел. Кількість пар сусідніх чисел цієї послідовності, які мають протилежні знаки, називають *кількістю змін знаків даної послідовності*. Оцінити число додатних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами дозволяє *правило Декарта*: число додатних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ дорівнює або на парне число менше кількості змін знаків у послідовності його коефіцієнтів. За допомогою заміни $x = -y$ можна оцінити число від'ємних коренів цього многочлена.

Відокремити корені многочлена $f(x)$, який не має кратних коренів, можна *методом Штурма*. При цьому для многочлена $f(x)$ будують насамперед *ряд многочленів Штурма*:

$$f(x), f'(x), F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{m-1}(x), F_m(x).$$

Щоб знайти многочлени $F_i(x)$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ застосовують алгоритм, аналогічний до алгоритму Евкліда:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) & = & f'(x)g_1(x) - F_1(x), \\
f'(x) & = & F_1(x)g_2(x) - F_2(x), \\
F_1(x) & = & F_2(x)g_3(x) - F_3(x), \\
\dots\dots\dots & . & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_{m-2}(x) & = & F_{m-1}(x)g_m(x) - F_m, \\
F_{m-1}(x) & = & F_m g_{m+1}(x).
\end{array}$$

Відмінність цього алгоритму від алгоритму Евкліда полягає тільки в тому, що всі остачі $r_k(x)$ беруть з протилежними знаками, тобто $F_k(x) = -r_k(x)$. Після цього застосовують *теорему Штурма*:

Якщо a і b – довільні різні дійсні числа ($a < b$), які не є коренями многочлена $f(x)$, то число p дійсних кооренів многочлена в інтервалі (a, b) дорівнює $s(a) - s(b)$, де $s(a)$ і $s(b)$ – кількість змін знаків у ряді Штурма при $x = a$ і $x = b$ відповідно.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Знайти проміжок, у якому знаходяться всі дійсні корені многочлена:
   а) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$;
   б) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 8x + 9$;
   в) $f(x) = 6x^5 - 14x^4 + 41x^3 - 22x^2 + 7x + 8$;
   г) $f(x) = x^{2003} + 2x^{2002} + \ldots + 2002x + 2003$.

2. Знайти число змін знаків у коефіцієнтах многочлена:
   а) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 8x + 9$;
   б) $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 - 8x + 9$;
   в) $f(x) = -x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1$;
   г) $f(x) = x^{2003} - 2x^{2002} + 3x^{2001} - \ldots - 2002x^2 + 2003x - 2004$.

3. Яке найбільше число змін знаків може мати многочлен n-го степеня?

4. Порівняйте кількість змін знаків у послідовностях дійсних чисел:
   а) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ та $c_n, \ldots, c_2, c_1$;
   б) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ та $c_1, c_2 - c_1, c_3 - c_2, \ldots, c_n - c_{n-1}, c_n$.

5. Оцінити за правилом Декарта число додатних і число від'ємних коренів многочлена:
   а) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 8x + 7$;
   б) $f(x) = 7x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$;
   в) $f(x) = x^8 + 7x^6 - 9x^5 + x^4 - 3$;
   г) $f(x) = x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

6. Скласти ряд Штурма для многочлена:
   а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; в) $f(x) = x^3 + 3x - 1$;
   б) $f(x) = 2x^2 - 5x - 8$; г) $f(x) = x^3 - x + 5$.

7. Яким умовам повинні задовольняти коефіцієнти квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, щоб він мав:
   а) два різних додатних корені;
   б) два різних від'ємних корені;
   в) додатний і від'ємний корені;
   г) два різних корені у проміжку $[-1, 1]$;
   д) два корені, розміщені по різні сторони від числа m;
   е) два корені, між якими лежить відрізок $[m, n]$;
   є) два корені, розміщені по одному на кожному з двох відрізків $[m, n]$ і $[p, q]$, які не мають спільних точок;
   ж) єдиний корінь в інтервалі (m, n)?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

8. Знайти методом Ньютона верхню межу додатних коренів многочлена:
   а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$; в) $f(x) = (x - 2)^6 + (x - 1)^3$;
   б) $f(x) = x^4 - 8x + 1$; г) $f(x) = x^8 + 7x^6 - 9x^5 - x^4 - 3$.

9. Знайти методом Ньютона нижню межу додатних коренів многочлена:
   а) $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + x^2 + 1$;
   б) $f(x) = 4x^4 - 12x^2 + 8x - 1$;
   в) $f(x) = x^5 + 6x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 6x + 1$;
   г) $f(x) = x^8 + 7x^6 - 9x^5 - x^4 - 3$.

10. Знайти межі додатних та від'ємних коренів многочлена:
    а) $f(x) = x^3 + 12x - 4$; в) $f(x) = x^8 + 7x^6 - 9x^5 - x^4 - 3$;
    б) $f(x) = x^5 + 5x^3 - 7x + 2$; г) $f(x) = -2x^7 + 3x^5 - x^3 + x - 1$.

11. Знайти число дійсних коренів многочлена:
    а) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4$ на проміжку $[2; 4]$;
    б) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x - 1$ на проміжку $[0; 2]$;
    в) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4$ на проміжку $[-3; 5]$;
    г) $f(x) = x^5 + 5x^2 - 10$ на проміжку $[1; 3]$.

12. Скласти ряд Штурма і визначити число дійсних коренів многочлена:
    а) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 9$; в) $f(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$;
    б) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$; г) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$.

13. Відокремити дійсні корені многочлена:
    а) $f(x) = x^3 + 6x - 2$;
    б) $f(x) = -8x^3 + 16x - 2$;
    в) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x + 9$;
    г) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4x - 1$;
    д) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2$;
    е) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x + 5$;
    є) $f(x) = 2x^5 - 10x^3 + 10x^2 - 2$;
    ж) $f(x) = 2x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.

Задачі на доведення

14. Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами і $v(f(x))$ – число змін знаків у послідовності його коефіцієнтів. Довести, що для будь-яких додатних чисел і ненульових многочленів $f(x)$ число $v((a-x)f(x)) - v(f(x))$ є додатним непарним.

15. Многочлен n-го степеня з дійсними коефіцієнтами є сумою $k \leqslant n + 1$ одночленів. Довести, що число ненульових дійсних коренів цього многочлена не перевищує $2(k-1)$.

16. Нехай многочлен не має кратних коренів. Довести, шо ніякі два сусудніх многочлени з ряду Штурма для многочлена $f(x)$ не мають спільних коренів.

17. Довести, що коли число α є коренем одного з проміжних многочленів з ряду Штурма для многочлена $f(x)$, то сусідні з ним многочлени при $x = \alpha$ з ряду Штурма для многочлена $f(x)$ приймають протилежні за знаком значення.

18. Довести, що коли при зростанні x відбувається перехід через корінь проміжного многочлена з ряду Штурма для многочлена $f(x)$, який не є коренем многочлена $f(x)$, то число змін знаків у ряді Штурма при цьому не змінюється.

19. Довести, що коли при зростанні x відбувається перехід через корінь многочлена $f(x)$, то число змін знаків у ряді Штурма для многочлена $f(x)$ зменшується на одиницю.

Творчі задачі

20. Знайти умови, яким повинні задовольняти коефіцієнти квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ для того, щоб він не мав:
    а) коренів, більших від числа m;
    б) коренів, менших від числа m;
    в) коренів в інтервалі (m, n);
    г) коренів на відрізку $[m, n]$.

§ 3.5 Многочлени з раціональними та цілими коефіцієнтами

Література: [2] стор. 337 – 343; [3] стор. 526 – 528.

Теоретичні відомості

Нехай $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ – многочлен з цілими коефіцієнтами.

Якщо нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$, то p є дільником вільного члена a_0, а q – дільником старшого коефіцієнта a_n цього многочлена.

Якщо $a_n = 1$, то всі раціональні корені многочлена $f(x)$ є цілими числами.

Оскільки многочлени $f(x)$ і $a_n^{n-1}f(x)$ мають однакові корені, то знаходження раціональних коренів многочлена $f(x)$ можна за допомогою заміни $a_nx = y$ звести до відшукання цілих коренів многочлена

$$a_n^{n-1}f(x) = g(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}a_ny^{n-2} + \ldots + a_1a_n^{n-2}y + a_0a_n^{n-1}.$$

Існують інші необхідні умови для того, щоб раціональне число було коренем многочлена з цілими коефіцієнтами. Зокрема, щоб нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ був раціональним коренем многочлена $f(x)$, необхідно, щоб при довільному цілому k число $f(k)$ ділилося на $p - qk \neq 0$.

Така умова на практиці найчастіше використовується для $k = \pm 1$. При цьому числа $\frac{f(1)}{p-q}$ і $\frac{f(-1)}{p+q}$ мають бути цілими.

Многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами є звідним над полем $\mathbb{Q}$ тоді і тільки тоді, коли існують многочлени $f_1(x)$ і $f_2(x)$ ненульового степеня з цілими коефіцієнтами такі, що $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, тобто коли многочлен $f(x)$ є звідним у кільці $\mathbb{Z}[x]$.

Одну з достатніх умов незвідності многочлена з цілими коефіцієнтами дає *критерій Ейзенштейна*:

Якщо коефіцієнти $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ многочлена $f(x)$ з кільця $\mathbb{Z}[x]$ діляться на деяке просте число p, вільний член a_0 не ділиться на p^2 і старший коефіцієнт a_n не ділиться на p, то многочлен $f(x)$ є незвідним над полем раціональних чисел.

З критерію Ейзенштейна слідує, що у кільці многочленів $\mathbb{Z}[x]$ існують незвідні над полем $\mathbb{Q}$ многочлени будь-якого степеня.

Спосіб Кронекера дозволяє принципіально встановити звідність чи незвідність будь-якого многочлена з кільця $\mathbb{Z}[x]$ над полем $\mathbb{Q}$. Суть його така.

Нехай $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ – многочлен з цілими коефіцієнтами степеня n, який не має цілих коренів і розкладається в добуток двох многочленів меншого степеня з цілими коефіцієнтами $f(x) = f_1(x)f_2(x)$. Можна вважати, наприклад, що $\deg f_1(x) \leqslant m = [\frac{n}{2}]$. Надамо тоді змінній x різних цілих значень $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$. При цьому ми отримаємо $n+1$ рівність між цілими числами $f(c_i) = f_1(c_i)f_2(c_i)$, тобто $f(c_i)$ ділиться на $f_1(c_i)$ для $i = 1, 2, \dots, m+1$. Многочлен $f_1(x)$ однозначно визначається своїми значеннями в точках $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$.

Для цілих чисел $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{m+1})$ складемо всі можливі набори дільників $d_1, d_2, \dots, d_n, d_{n+1}$ таких, що $f(c_i)$ ділиться на d_i для кожного $1 \leqslant i \leqslant m+1$. Для кожного такого набору дільників знайдемо відповідний інтерполяційний многочлен $g(x)$, степінь якого не перевищує m. Таких многочленів скінченна множина. А тому серед них повинен бути многочлен $f_1(x)$. Перевіривши подільність многочлена $f(x)$ на всі ці многочлени в кільці $\mathbb{Z}[x]$, ми отримаємо відповідь на питання про звідність даного многочлена над полем $\mathbb{Q}$.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Якими способами можна знайти значення многочлена для довільного цілого або раціонального числа?

2. Що можна сказати про раціональні корені многочлена $f(x) = x^4 + 4$ та його звідність у кільці $\mathbb{Q}[x]$?

3. Многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами такий, що $f(0)$ і $f(1)$ є непарними числами. Встановити, чи має даний многочлен цілі корені.

4. Для яких цілих a і b многочлен $f(x) = ax^3 + b$ є звідним у кільці $\mathbb{Z}[x]$?

5. Для яких цілих a і b многочлен $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ є звідним у кільці $\mathbb{Q}[x]$?

6. Навести приклад незвідного у кільці $\mathbb{Q}[x]$ многочлена:
   а) другого степеня; в) шостого степеня;
   б) третього степеня; г) 2003-го степеня.

7. Перевірте, що многочлен $f(x) = x^3 + x^2 + x + \overline{2}$ є незвідним у кільці $\mathbb{Z}_3[x]$. Як це впливає на звідність чи незвідність у кільці $\mathbb{Q}[x]$ многочлена:
   а) $f(x) = 4x^3 + 10x^2 - 8x - 1$;
   б) $f(x) = 6x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x + 5$;
   в) $f(x) = 2002x^3 - 1901x^2 + 3001x + 4001$;
   г) $f(x) = 2001x^5 + x^3 + 7x^2 + 4x + 2003$?

8. Який зв'язок між звідністю многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами у кільці $\mathbb{Z}[x]$ та у кільці $\mathbb{Z}_n[x]$?

9. Що можна сказати про звідність даного многочлена у кільці $\mathbb{Z}[x]$:
   а) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$; в) $f(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 2$;
   б) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 6$; г) $f(x) = x^5 + 5$?

10. Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ з кільця $\mathbb{Q}[x]$ є взаємно простими. Чи можуть вони мати спільний комплексний корінь $a + bi$, де $b \neq 0$?

11. Чи може незвідний у кільці $\mathbb{Q}[x]$ многочлен:
   а) не мати комплексних коренів $a + bi$, де $b \neq 0$;
   б) мати кратні комплексні корені $a + bi$, де $b \neq 0$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

12. Знайти всі цілі корені многочлена:
   а) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;
   б) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;
   в) $f(x) = x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96$;
   г) $f(x) = 10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$.

13. Знайти всі раціональні корені многочлена:
   а) $f(x) = 30x^3 + 11x^2 - 9x - 2$;
   б) $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;
   в) $f(x) = 10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;
   г) $f(x) = 12x^5 + x^4 + x^3 - x - 165$.

14. Розв'язати рівняння:
   а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$;
   б) $12x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$;
   в) $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0$;
   г) $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6 = 0$.

15. Розв'язати рівняння незалежно від значень параметрів, які входять до рівняння:
   а) $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc = 0$;
   б) $x^3 - (3a - 1)x^2 + (2a^2 - 3a)x + 2a^2 = 0$;
   в) $x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + (a^2 - a) = 0$;
   г) $x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + 2a - b^2)x + (b^2 - a^2) = 0$.

16. Розкласти на незвідні множники у кільці $\mathbb{Z}[x]$ многочлен:
   а) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$; в) $f(x) = x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 16x - 4$;
   б) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$; г) $f(x) = x^4 + 3x^3 + -15x^2 - 37x - 60$.

17. Розкласти на незвідні множники у кільці $\mathbb{Q}[x]$ многочлен:
   а) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 6$;
   б) $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 7x - 7$;
   в) $f(x) = 12x^4 + 32x^3 + 23x^2 + 15x + 18$;
   г) $f(x) = 225x^5 - 165x^4 - 401x^3 + 145x^2 + 192x + 36$.

18. Многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами приймає значення 1 при трьох різних цілих числах. Що можна сказати про існування цілих коренів у цього многочлена?

19. Дослідити на звідність у кільці $\mathbb{Q}[x]$ многочлен:
   а) $f(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1$; в) $f(x) = x^3 + x^2 - 1$;
   б) $f(x) = (5 - x)^4 + (2 - x)^4 - 17$; г) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 3$.

Задачі на доведення

20. Довести, що коли нескоротний дріб є коренем многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами, то для будь-якого цілого k число $f(k)$ ділиться на $p - qk \neq 0$.

21. Довести, що в кільці $\mathbb{Z}[x]$ немає многочлена $f(x)$ такого, щоб:
   а) $f(7) = 11$ і $f(11) = 13$; б) $f(7) = 5$ і $f(15) = 9$.

22. Довести, що многочлен $f(x) = x^p + x^{p-1} + \cdots + x + 1$ незвідний над полем $\mathbb{Q}$ для будь-якого простого числа p.

23. Довести, що коли многочлен $f(x)$ з кільця $\mathbb{Q}[x]$ незвідний над полем $\mathbb{Q}$, то незвідним також є кожний многочлен $f(ax+b)$, де $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$.

24. Довести, що для будь-яких цілих чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ незвідним над полем $\mathbb{Q}$ є многочлен:
   а) $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_i) - 1$; б) $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_i)^2 + 1$.

25. Многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами називається *примітивним*, якщо НСД всіх його коефіцієнтів дорівнює 1. Довести, що добуток двох примітивних многочленів є примітивним многочленом.

26. Довести, що коли $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, причому $g(x)$ – примітивний многочлен, і $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ – такий многочлен, що $f(x) = g(x)h(x)$, то $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Покажіть на прикладі, що без умови примітивності многочлена $g(x)$ висновок буде невірним.

27. Довести, що множина простих елементів кільця $\mathbb{Z}[x]$ є обєднанням множини простих чисел і множини примітивних многочленів, які незвідні в кільці $\mathbb{Q}[x]$.

28. Довести, що кільце $\mathbb{Z}[x]$ факторіальне.

29. Довести, що елементи 2 і x кільця $\mathbb{Z}[x]$ взаємно прості.

30. Многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами приймає значення 1 більше ніж при трьох цілих значеннях змінної. Довести, що $f(a) \neq -1$ для всіх $a \in \mathbb{Z}$.

31. Дано многочлен з цілими коефіцієнтами, який при трьох різних цілих значеннях змінної приймає значення 2. Довести, що не існує цілого числа, для якого цей многочлен приймає значення 3.

32. Нехай многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами приймає значення 1,2 і 3. Довести, що існує не більше одного цілого числа, при якому значення цього многочлена рівно 5.

33. Довести, що коли многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ з цілими коефіцієнтами має корінь $p + qi \in \mathbb{Z}[i]$, $q \neq 0$, то вільний член ділиться на число $p^2 + q^2$.

34. Нехай многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами приймає значення ± 1 при двох різних цілих числах x_1 і x_2. Довести, що многочлен $f(x)$ не має раціональних коренів, якщо $|x_1 - x_2| > 2$. Якщо ж $|x_1 - x_2| \leqslant 2$, то його раціональним коренем може бути тільки $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

35. Нехай $f(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами такий, що для кожного натурального n виконується нерівність $f(n) > n$. Побудуємо послідовність чисел $x_1 = 1, x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$. Відомо, що для будь-якого натурального s існує член цієї послідовності, який ділиться на s. Довести, що має місце рівність $f(x) = x + 1$.

Творчі задачі

36. Дослідити на звідність в кільці $\mathbb{Q}[x]$ многочлени ділення кола.

Задачі з олімпіад

37. Встановити, чи існує многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ такий, щоб $f(20) = f(3) = 2003$, а $f(2003)$ дорівнює 20 або 3?

38. Знайти прості числа p, q такі, щоб многочлен $f(x) = x^4 - px^3 + q$ мав цілий корінь.

39. Нехай $f(x) = x^2 - x + 1$. Довести, що числа $n, f(n), f(f(n)), \ldots$ є попарно взаємно простими для всіх натуральних $n > 1$.

40. Для заданого натурального n знайти число всіх многочленів, коефіцієнти яких належать множині $\{0, 1, 2, 3\}$ і таких, що $f(2) = n$.

41. Довести, що многочлен $f(x) = x^{2003} + x^{2002} + \cdots + x^3 + x^2 + ax + b$ не має цілих коренів для всіх $a > b > 0$.

42. Нехай $f(x)$ – многочлен з цілими коефіцієнтами, який незвідний в кільці $\mathbb{Q}[x]$. Чи може рівняння $f(x) = 0$ мати кратні уявні корені?

43. Многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ з цілими коефіцієнтами такий, що $f(0)$ і $f(1)$ є непарними числами. Довести, що $f(x)$ не має цілих коренів.

44. Многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ з цілими коефіцієнтами такий, що приймає значення рівне 5 при п'яти різних цілих значеннях змінної. Довести, що $f(x)$ не має цілих коренів.

45. Довести, що коли многочлен з цілими коефіцієнтами n-го степеня набуває цілі значення при $n+1$ послідовному цілому значенні змінної, то він набуває цілі значення при будь-якому цілому значенні змінної.

46. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ степеня n задовольняє рівність $f(k) = \frac{k}{k+1}$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Знайти $f(n+1)$.

47. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ степеня n задовольняє рівність $f(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}$ для всіх $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Знайти $f(n+1)$.

§ 3.6 Алгебраїчні і трансцендентні числа

Література: [2] стор. 344 – 360; [3] стор. 528 – 531.

Теоретичні відомості

Нехай P – деяке числове поле. Число α називають *алгебраїчним відносно поля P*, якщо воно є коренем деякого многочлена над полем P. Число, яке не є алгебраїчним відносно поля P, називають *трансцендентним відносно P*. Алгебраїчні і трансцендентні числа відносно поля раціональних чисел $\mathbb{Q}$ називають просто *алгебраїчними і трансцендентними відповідно*.

Якщо число α є алгебраїчним відносно поля P, то в кільці $P[x]$ існує єдиний незвідний зведений многочлен $f(x)$ (старший коефіцієнт якого дорівнює 1), який має α своїм коренем, а його степінь n є найменшим серед степенів усіх многочленів з коренем α. При цьому многочлен $f(x)$ називають *мінімальним многочленом числа α*, а його степінь n – *степенем алгебраїчного числа α відносно поля P*. Всі корені многочлена $f(x)$ при цьому називають *спряженими алгебраїчними числами до числа α*.

Мінімальне розширення поля P, яке містить число $\alpha \notin P$, називають *простим розширенням поля P, утвореним приєднанням числа α*, і позначають через $P(\alpha)$. Якщо α є алгебраїчним (трансцендентним) відносно поля P, то $P(\alpha)$ називають *простим алгебраїчним (трансцендентним) розширенням*.

Поле $P(\alpha)$, утворене з поля P приєднанням кореня α незвідного у полі P многочлена n-го степеня

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

складається з усіх чисел виду

$$\beta = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1},$$

де $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in P$.

Якщо α є коренем незвідного у полі P многочлена другого степеня $f(x) = x^2 + px + q$, то просте алгебраїчне розширення $P(\alpha)$ називають *квадратичним* і $P(\alpha) = \{a + b\alpha | a, b \in P\}$.

Нехай F – деяке підполе поля P. Тоді P можна розглядати як векторний простір над полем F. При цьому розширення P поля F називають *скінченним*, якщо P є скінченно-вимірним векторним простором над F. При цьому розмірність простору P називають *степенем розширення P над полем F*.

Просте алгебраїчне розширення $P(\alpha)$ є скінченним розширенням поля P, а степінь розширення $P(\alpha)$ над полем P дорівнює степеню числа α відносно поля P.

Розширення P поля F, утворене за допомогою кількох послідовно виконаних простих алгебраїчних розширень, називають *складеним алгебраїчним розширенням*. Розширення P поля F називають *алгебраїчним*, якщо всі його елементи є алгебраїчними числами відносно поля F.

Будь-яке скінченне розширення поля P є його алгебраїчним та складеним розширенням. Кожне складене алгебраїчне розширення поля P є простим розширенням цього поля.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи є алгебраїчним число:
   а) $\sqrt[3]{5}$; б) $1+\pi$; в) $\frac{1-\sqrt{13}}{5}$; г) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{1+2i}{1-i}$; е) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$?

2. Яким є мінімальний многочлен алгебраїчних чисел з задачі № 1?

3. Знайти всі спряжені числа до числа:
   а) 2003; б) $\sqrt[4]{2}$; в) $1-i$; г) $1+i\sqrt{5}$.

4. Говорять, що множина A є *зчисленною*, якщо існує взаємно однозначне відображення множини A на множину всіх натуральних чисел $\mathbb{N}$. Чи є множина всіх алгебраїчних чисел:
   а) скінченною; б) зчисленною?

5. Говорять, що множина A є *незчисленною*, якщо існує взаємно однозначне відображення множини A на множину всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$. Чи є множина всіх трансцендентних чисел:
   а) скінченною; б) зчисленною; в) незчисленною?

6. Яка будова простих алгебраїчних розширень поля $\mathbb{Q}$ за допомогою алгебраїчних чисел з задачі № 1?

7. Нехай поле P є квадратичним розширенням поля $\mathbb{Q}$. Чи існує підполе поля P, яке відмінне від $\mathbb{Q}$ і P?

8. Який степінь може мати скінченне алгебраїчне розширення:
   а) поля всіх дійсних чисел;
   б) поля раціональних чисел;
   в) поля всіх дійсних чисел виду $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$;
   г) поля всіх комплексних чисел?

9. Нехай a є відмінним від нуля алгебраїчним числом. Чи є алгебраїчним число a^{-1}, обернене до a?

10. Нехай β є відмінним від нуля трансцендентним числом. Чи може бути алгебраїчним число β^{-1}?

11. Нехай a – алгебраїчне, β – трансцендентне і n – натуральне число. Якими є числа: а) a^n; б) $\sqrt[n]{a}$; в) β^n; г) $\sqrt[n]{\beta}$?

12. Яким числом є сума довільних раціонального і трансцендентного чисел?

13. Нехай маємо числові поля $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ і $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{5})$. Якими є степені цих розширень поля $\mathbb{Q}$?

14. Нехай поле P є алгебраїчним розширенням поля $\mathbb{Q}$ степеня 10.

    а) Якого степеня алгебраїчні числа містяться в полі P?

    б) Чи містяться в полі P окремі трансцендентні числа?

15. Які з наступних числових полів є алгебраїчно замкненими:
$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}(i)$, поле алгебраїчних чисел?

16. Яке число є оберненим до числа:
а) $1-\sqrt[3]{3}$ в полі $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$; б) $1+2i$ в полі $\mathbb{Q}[i]$?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

17. Знайти многочлен з цілими коефіцієнтами, коренем якого є число:
а) $a=\sqrt{5}+\sqrt{2}$; в) $a=\sqrt{\sqrt{3}-1}$;
б) $a=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}$; г) $a=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

18. Знайти мінімальний многочлен алгебраїчного числа:
а) $a=\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$; в) $a=\sqrt[3]{2}+\sqrt{8}$; д) $a=\sqrt[4]{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
б) $a=\sqrt{5}-\sqrt[4]{7}$; г) $a=1+\sqrt{1+\sqrt{3}}$; е) $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

19. Число λ є коренем многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами. Знайти решту коренів цього многочлена (спряжених чисел до λ), якщо:
а) $f(x)=2x^3-17x^2+36x-15$ і $\lambda=3+\sqrt{6}$;
б) $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-14x-4$ і $\lambda=2-\sqrt{5}$;
в) $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+6x+2$ і $\lambda=1+\sqrt{3}$;
г) $f(x)=x^5+ax^3+bx^2+5x+2$ і $\lambda=1+\sqrt{2}$.

20. Нехай $a+b\sqrt{c}$ – число з поля $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$, де $c \notin \mathbb{Q}$. Встановити, чи для кожного многочлена $f(x)$ з кільця $\mathbb{Q}[x]$ рівносильні рівності
$f(a+b\sqrt{c})=0 \quad \text{і} \quad f(a-b\sqrt{c})=0.$

21. Нехай a і b – алгебраїчні числа та $f(x)$ і $g(x)$ – їх мінімальні многочлени відповідно. Побудувати многочлен з раціональними коефіцієнтами, коренем якого є число: а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$.

22. Встановити, яку алгебраїчну структуру відносно операцій додавання і множення утворюють:
а) алгебраїчні числа; б) трансцендентні числа?

23. Алгебраїчне число називають *цілим*, якщо воно є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами. Встановити, яку алгебраїчну структуру утворює множина всіх цілих алгебраїчних чисел відносно операцій додавання і множення?

24. Знайти розмірність і базис векторного простору на полем:
а) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; в) $\mathbb{Q}(1-i)$;
б) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$; г) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

25. Знайти алгебраїчне число, приєднанням якого до поля $\mathbb{Q}$ можна отримати складне алгебраїчне розширення як просте:
а) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})$; в) $\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$, де p,q – прості числа;
б) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6})$; г) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$.

Задачі на доведення

26. Довести, що незвідний над числовим полем P многочлен $f(x)$ не може мати кратних коренів у полі $\mathbb{C}$.

27. Нехай $\mathbb{Q}(\alpha)$ – просте алгебраїчне розширення поля $\mathbb{Q}$ за допомогою ірраціонального кореня α многочлена $f(x)=x^4+x^3-2x^2+6x-6$. Довести, що $(1+\alpha)^{-1}=\frac{1}{7}(1-\alpha-\alpha^2)$.

28. Довести, що коли α – алгебраїчне число, то кожне число з поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ також є алгебраїчним.

29. Довести, що всяке число, яке зображується у вигляді як завгодно складної комбінації радикалів над полем раціональних чисел, є алгебраїчним числом.

30. Довести, що множина всіх алгебраїхних чисел, які записуються за допомогою радикалів, є полем.

31. Довести, що поле дійсних чисел $\mathbb{R}$ не є скінченним розширенням поля раціональних чисел $\mathbb{Q}$.

32. Довести, що розширення P поля $\mathbb{Q}$, яке має третій степінь, не має інших підполів, крім $\mathbb{Q}$ і P.

33. Довести, що розширення P поля $\mathbb{Q}$, яке має простий степінь, не має інших підполів, крім $\mathbb{Q}$ і P.

34. Довести, що кожне з наступних полів може бути одержано з поля раціональних чисел за допомогою кількох квадратичних розширень:
    а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} - i\sqrt{7})$; в) $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + i\sqrt[4]{5})$;
    б) $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{7} + i\sqrt{5}})$; г) $\mathbb{Q}(\sqrt{2\sqrt{3} + i\sqrt{7}} + \sqrt{5})$.

35. Довести, що коли степінь незвідного у кільці $\mathbb{Q}[x]$ многочлена не є степенем двійки, то його корені не можна отримати з раціональних чисел за допомогою опеацій додавання, віднімання, множення, ділення і добування квадратного кореня.

36. Нехай α – трансцендентне число над полем P. Довести, що:
    а) кожне число з $P(\alpha)$ можна єдиним чином подати у виді $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$, де $f(x), g(x)$ – взаємно прості многочлени з кільця $P[x]$, причому старший коефіцієнт у $g(x)$ дорівнює одиниці;
    б) будь-які два простих трансцендентних розширення поля $P(\alpha)$ і $P(\beta)$ ізоморфні;
    в) кожне число $\beta \in P(\alpha) \setminus P$ є трансцендентним;
    г) якщо $\beta \in P(\alpha) \setminus P$, то $P(\alpha)$ є простим алгебраїчним розширенням поля $P(\beta)$.

Творчі задачі

37. Нехай α і β – алгебраїчні числа над числовим полем P. При яких умовах:
    а) прості алгебраїчні розширення $P(\alpha)$ і $P(\beta)$ ізоморфні;
    б) адитивні групи полів $P(\alpha)$ і $P(\beta)$ ізоморфні?

Задачі з олімпіад

38. Відомо, що число $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ є коренем многочлена $f(x)$ з цілими коефіцієнтами. Довести, що число $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ також є його коренем.

§ 3.7 Задачі на звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу

Література: [2] стор. 294, 347 – 348; [3] стор. 532.

Теоретичні відомості

Нехай маємо дріб $\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{g(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ з поля часток $\mathbb{Q}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ області цілісності $\mathbb{Q}[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ і числа $m_i \in \mathbb{N}$, $r_i \in \mathbb{Q}$, $\lambda_i = \sqrt[m_i]{r_i}$ та $1 \leqslant i \leqslant n$.

Заміна дробу $\frac{f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}{g(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$ на рівний йому дріб, знаменник якого є раціональним числом, називають *задачею на звільнення (позбавлення) від ірраціональності в знаменнику дробу*. Такі задачі мають різний рівень складності і розв'язуються різними способами в залежності від кількості і виду чисел λ_i.

Теоретичною базою для розв'язування задач на звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу є наступні дві теореми.

1. Якщо $f(x)$ – многочлен від однієї змінної над полем P з коренями $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ (які можуть не належати P), то будь-який симетричний многочлен $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ з кільця $P[x_1,x_2,\ldots,x_n]$ при $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, $\ldots,x_n=\alpha_n$ набуває значення, яке є елементом поля P.

2. Поле $P(\alpha)$, утворене з поля P приєднанням кореня α незвідного у полі P многочлена n-го степеня

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

складається з усіх чисел виду

$$\beta = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1},$$

де $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in P$.

Крім цього, при розвязуванні таких задач застосовуються теорема Вієта та формули скороченого множення для різних натуральних чисел n:

$$\begin{array}{lcl} x^n - y^n & = & (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}), \\ x^{2n+1} + y^{2n+1} & = & (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + \cdots + y^{2n}). \end{array}$$

Задачі на ілюстрацію понять

1. Як розв'язуються задачі на звільнення від ірраціональності у знаменнику дробу в шкільній математиці? Навести приклади.

2. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу шляхом застосування формул скороченого множення:
   а) $\frac{22}{3+\sqrt[3]{5}}$; в) $\frac{4}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$; д) $\frac{29}{2-\sqrt[5]{3}}$; є) $\frac{31}{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}$;
   б) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$; г) $\frac{6}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}$; е) $\frac{49}{3+\sqrt[5]{2}}$; ж) $\frac{23}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}$.

3. Чи можна у будь-якого дробу $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$, де $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ і $\lambda = \sqrt{2}$, позбавитися від ірраціональності у знаменнику?

4. Як зміниться відповідь на запитання попередньої задачі, якщо число $\lambda = \sqrt[3]{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}$?

5. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{1}{\omega_1}$, де ω_1 – один з коренів рівняння $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

6. Нехай маємо дріб $\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}}$. Як можна позбавитися від ірраціональності у знаменнику цього дробу? Який отримаємо результат?

Задачі на техніку обчислень та перетворень

7. Позбавитися від ірраціональності у знаменнику дробу:
   а) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt[4]{5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt[4]{5}}$; д) $\frac{1}{\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}}$;
   б) $-\frac{256}{\sqrt[5]{2}-\sqrt[3]{4}}$; г) $\frac{258}{\sqrt[5]{2}-\sqrt[3]{4}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{1-2\sqrt{1-\sqrt{2}}}}$.

8. Позбавитися від ірраціональності у знаменнику дробу з застосуванням теореми Вієта:
   а) $\frac{1}{1-\omega}$, де ω – корінь рівняння $\omega^3 - \omega - 1 = 0$;
   б) $\frac{1}{\omega^2-\omega+2}$, де ω – корінь рівняння $\omega^4 - 5 = 0$;
   в) $\frac{\omega}{\omega^2+1}$, де ω – корінь рівняння $\omega^4 - 4\omega - 2 = 0$;
   г) $\frac{\omega^2-3\omega-1}{\omega^2+2\omega+1}$, де ω – корінь рівняння $\omega^3 + \omega^2 + 3\omega + 4 = 0$.

9. Позбавитися від ірраціональності у знаменнику дробу шляхом застосування теореми про симетричні многочлени:
   а) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; д) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$;
   б) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.

10. Позбавитися від ірраціональності у знаменнику дробу шляхом застосування теореми про будову простого алгебраїчного розширення поля:
   а) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}+1}$; в) $\frac{2}{\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+3}$;
   б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}}$; г) $\frac{1}{3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$.

11. Позбавитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$; д) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{4}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}}$; г) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}$; е) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{4}}$.

12. Позбавитися від ірраціональності в таких співвідношеннях:

а) $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}+b=0$; в) $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}+c=0$;

б) $p\sqrt[3]{a^2}+q\sqrt[3]{a}+r=0$; г) $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt[4]{a^2+b^2}=0$.

13. Встановити, раціональним чи ірраціональним є число:

а) $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{|40\sqrt{2}+57|}$;

б) $\sqrt{2\sqrt{2}+3}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

в) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

г) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{4}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

14. Спростити вираз:

а) $3\frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}-\frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}}\sqrt{2}$; в) $2\left(\frac{1+\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4-\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}$;

б) $5\frac{\sqrt{7-2\sqrt{6}}}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}+2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3-\sqrt{6}}}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$.

15. Знайти мінімальне числове поле, якому належить число:

а) $\sqrt{12-2\sqrt{35}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{2}$;

б) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

в) $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}$;

г) $\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$.

Задачі на доведення

16. Довести, що для невід'ємних дійсних чисел a і b та $a^2 \geqslant b$ виконується рівність:

а) $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}+\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$;

б) $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}-\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$;

17. Нехай α є коренем незвідного над полем $\mathbb{Q}$ многочлена $\varphi(x)$ з раціональними коефіцієнтами. Довести, що для кожного многочлена $f(x) = a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ з кільця $\mathbb{Q}[x]$ існує многочлен $g(x) = b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$ цього кільця такий, що $f(\alpha)g(\alpha)$ є раціональним числом.

Творчі задачі

18. В умовах задачі № 17 встановити для заданого раціонального числа $\frac{p}{q}$ можливість існування многочлена $g(x)$ такого, що $f(\alpha)g(\alpha) = \frac{p}{q}$.

19. Вивчити можливість звільнення від ірраціональності для різних натуральних чисел n у знаменнику дробу $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}$.

20. Вивчити можливість звільнення від ірраціональності для різних натуральних чисел n, m у знаменнику дробу $\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[m]{b}}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$.

21. Вивчити можливість звільнення від ірраціональності для різних натуральних чисел n у знаменнику дробу $\frac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$.

Задачі з олімпіад

22. Довести, що при будь-якому натуральному n рівняння

$$(x + y\sqrt{3})^n = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$$

не має розв'язків в полі раціональних чисел.

§ 3.8 Розв'язність алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах та побудовність за допомогою циркуля і лінійки

Література: [2] стор. 294, 347 – 348; [3] стор. 532.

Теоретичні відомості

Нехай P – числове поле. Говорять, що *число* $\alpha \in P$ *можна подати у радикалах над* P, якщо воно виражається через елементи поля P за допомогою скінченного числа дій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня будь-якого степеня.

Рівняння

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

з коефіцієнтами з поля P називається *розв'язним у радикалах над* P, якщо всі його корені можна подати у радикалах через його коефіцієнти. Якщо при цьому обмежуються добуванням квадратного кореня, то говорять про *розв'язність алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах*.

Теорема Руффіні-Абеля. Рівняння n-го степеня з довільними числовими коефіцієнтами при $n \geqslant 5$ є нерозв'язним у радикалах.

В той же час існують окремі класи рівнянь вищих степенів, які можна розв'язати у радикалах над окремими полями. Наприклад, можна розв'язати у радикалах над полем $\mathbb{Q}$ рівняння виду $x^n - a = 0 \quad (a \in \mathbb{Q})$.

Еваріст Галуа довів, що для будь-якого $n \geqslant 5$ існують рівняння n-го степеня з раціональними коефіцієнтами, які не можна розв'язати у радикалах над полем $\mathbb{Q}$. Ця теорема доводиться в теорії Галуа, де з кожним рівнянням пов'язується скінченна група, яку називають *групою Галуа даного рівняння*.

Якщо корінь незвідного у полі P многочлена $f(x) \in P[x]$ можна подати у квадратних радикалах через його коефіцієнти, то степінь n многочлена $f(x)$ є числом виду $n = 2^m$, де m – ціле невід'ємне число.

Корені незвідного у полі P многочлена $f(x) \in P[x]$, степінь якого не є степенем числа 2, не виражаються в квадратних радикалах через числа цього поля.

Для того щоб усі корені кубічного многочлена над полем P виражалися в квадратних радикалах через числа цього поля, необхідно і достатньо, щоб цей многочлен був звідним у полі P.

Говорять, що *число α побудовне циркулем і лінійкою, виходячи з множини чисел M*, якщо побудовна циркулем і лінійкою, виходячи з множини точок площини, обидві координати яких належать множині M, хоч одна точка площини, для якої α є однією з координат.

Для того щоб число α було побудовним циркулем і лінійкою, виходячи з поля $P \subseteq \mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб число α виражалося в квадратних радикалах через числа цього поля.

Задачі на ілюстрацію понять

1. Чи можна розв'язати у квадратних радикалах рівняння:
   а) $2x^3 + x^2 + 1 = 0$; б) $x^3 + x^2 + 1 = 0$?

2. Чи можна розв'язати рівняння $x^6 + x^3 + 1 = 0$:
   а) у квадратних радикалах; б) у радикалах?

3. Пояснити, чому рівняння $x^4 + bx^3 + cx^2 + d = 0$ з дійсними коефіцієнтами можна розв'язати у радикалах.

4. Пояснити, чому не можна розв'язати за допомогою циркуля і лінійки задачу квадратури круга, тобто побудови квадрата, площа якого рівна площі даного круга.

5. Пояснити, чому не можна розв'язати за допомогою циркуля і лінійки задачу подвоєння куба, тобто побудови куба, об'єм якого у два рази більший за об'єм даного куба.

6. Чи можна за допомогою циркуля і лінійки побудувати відрізок, рівний довжині даного кола?

7. Пояснити, чому коли побудовний циркулем і лінійкою будь-який правильний n-кутник, то таким є і всякий многокутник з числом сторін $2^k \cdot n$.

8. Пояснити, чому коли побудовний циркулем і лінійкою будь-який правильний многокутник з числом сторін $n = m \cdot k, (m, k \geqslant 3)$, то такими є правильні многокутники з числом сторін m та k.

9. Пояснити, чому можна поділити коло циркулем і лінійкою на 3 і 4 рівні частини з алгебраїчної точки зору.

10. Встановити, який зв'язок існує між задачами трисекції кута, тобто поділу кута на три рівні частини, і побудовою правильного дев'ятикутника за допомогою циркуля і лінійки.

Задачі на техніку обчислень та перетворень

11. Встановити, чи можна побудувати циркулем і лінійкою точки перетину:

а)	прямої $y = 2x - 1$	і	еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$;
б)	прямої $y = 3x - 2$	і	параболи $y = x^3$;
в)	прямої $y = 2x - 5$	і	параболи $y = x^3$;
г)	параболи $y = 3x^2 - 7x - 2$	і	параболи $y = x^3$;
д)	параболи $y = 2x^2 - 7x - 10$	і	параболи $y = 3x^3$;
е)	гіперболи $xy = 1$	і	еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;
є)	параболи $y = 2x^2 - 3x + 2$	і	гіперболи $2xy = 1$;
ж)	параболи $y = x^2$	і	лінії $y^2 + 5xy + 9y + 5x - 4 = 0$.

12. Встановити алгебраїчно можливість поділу кола циркулем і лінійкою на 5 і 6 рівних частин.

13. Встановити алгебраїчно можливість поділу кола циркулем і лінійкою на 7 рівних частин.

14. Знайти рівняння, яке відповідає задачі поділу кола циркулем і лінійкою на 10 рівних частин.

15. Встановити алгебраїчно можливість поділу кола циркулем і лінійкою на 11 рівних частин.

16. Знайти рівняння, яке відповідає задачі поділу кола циркулем і лінійкою на 12 рівних частин.

17. Встановити алгебраїчно можливість поділу кола циркулем і лінійкою на 13 рівних частин.

18. Встановити алгебраїчно можливість поділу кола циркулем і лінійкою на 17 рівних частин.

19. Встановити алгебраїчно можливість поділу кола циркулем і лінійкою на 19 рівних частин.

20. Знайти рівняння, яке відповідає задачі поділу кола циркулем і лінійкою на 20 рівних частин.

Задачі на доведення

21. Довести, що коли один з коренів незвідного многочлена $f(x)$ над числовим полем P можна подати у квадратних радикалах над P, то рівняння $f(x) = 0$ можна розв'язати у квадратних радикалах.

22. Довести, що коли один з коренів незвідного многочлена $f(x)$ над числовим полем P можна подати у радикалах над P, то рівняння $f(x) = 0$ можна розв'язати у радикалах.

23. Довести, що рівняння четвертого степеня можна розв'язати у квадратних радикалах тоді і тільки тоді, коли цю властивість має його кубічна резольвента.

24. Довести, що можна поділити на три рівні частини циркулем і лінійкою кут:
а) $\alpha = 45^0$; б) $\alpha = 225^0$; в) $\alpha = \frac{\pi}{8}$; г) $\alpha = \frac{90^0}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

25. Довести, що для будь-яких взаємно простих натуральних чисел m і n таких, що $\cos\alpha = \frac{m(m^2-3n^2)}{2m^3}$, кут α можна поділити на три рівні частини циркулем і лінійкою.

26. Довести, що не можна поділити на три рівні частини циркулем і лінійкою кут:
а) $\alpha = 60^0$; б) $\alpha = 120^0$; в) $\alpha = 210^0$; г) $\alpha = \frac{5}{7}\pi$.

27. Довести, що не можна побудувати циркулем і лінійкою правильний дев'ятикутник.

28. Довести, що для будь-якого простого числа p не можна поділити на три рівні частини циркулем і лінійкою кут $\arccos \frac{1}{2p}$.

29. Довести, що коли побудовні циркулем і лінійкою правильні многокутники з числом сторін m та k, причому числа m та k взаємно прості, то побудовним є правильний многокутник з числом сторін $n = m \cdot k$.

30. Нехай $p \geqslant 3$ – просте число. Довести, що коли правильний p-кутник побудовний циркулем і лінійкою, то число p має вигляд $p = 2^m + 1$.

31. Довести, що коли просте число має вигляд $p = 2^m + 1$, то правильний p-кутник побудовний циркулем і лінійкою.

32. Довести, що не можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки правильний n-кутник, якщо $n = p^k$, де $p \geqslant 3$ – просте число і $k \geqslant 2$ натуральне число.

Творчі задачі

33. Дослідити, якими можуть бути координати точки $M_0(x_0, y_0)$, щоб за допомогою циркуля і лінійки можна було через цю точку провести пряму, на якій осі Ox і Oy прямокутної системи координат відтинали би відрізок заданої довжини d.

Задачі з олімпіад

34. Відомо, що бісектриса, проведена з вершини рівнобедреного трикутника до його основи, в k раз менша бісектриси, проведеної до бічної сторони цього трикутника. Дослідити, при якому k можна побудувати такий трикутник за допомогою циркуля і лінійки. Відомо, що при $k = 4$ такий трикутник побудувати не можна.

§ 3.9 Вибрані задачі

1. Нехай $f(x) = x^4 + px + q \in \mathbb{R}[x]$. Знайти умови, при яких:
   а) всі корені дійсні;
   б) всі корені не дійсні;
   в) всі корені містяться в інтервалі (a, b);
   г) всі корені містяться поза інтервалом (a, b);
   д) всі корені містяться в другій чверті;
   е) два корені містяться в інтервалі (a, b), а інші – в третій чверті.

2. Нехай $f(z)$ – довільний многочлен з комплексними коефіцієнтами. Довести, що існує число c таке, що для будь-якого многочлена $g(x)$ з цілими коефіцієнтами число різних цілих коренів многочлена $f(g(x))$ не перевищує $degg(x) + c$.

3. Довести, що коли всі корені многочлена $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ лежать у верхній півплощині, то і всі корені його похідної також знаходяться у верхній півплощині.

4. Многочлени $f(x)$ та $g(x)$ такі, що $f(x^3) + g(x^3)$ ділиться на $x^2 + x + 1$. Довести, що $f(x) + g(x)$ ділиться на $x - 1$.

5. Рівняння $x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ має шість дійсних коренів. Знайти коефіцієнти a, b, c, d.

6. Довести, що для будь-якого простого числа p многочлен $f(x) = x^p + \ldots + x^2 + x + 1$ не можна подати у вигляді добутку двох многочленів, степінь яких не менший 1 та з додатними дійсними коефіцієнтами.

7. Довести, що коли $x + y + z + t = x^7 + y^7 + z^7 + t^7 = 0$, то $t(t + x)(t + y)(t + z) = 0$.

8. Довести, що многочлен $f(x) = x^{9999} + \ldots + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1$ ділиться на многочлен $g(x) = x^9 + \ldots + x^3 + x^2 + x + 1$.

9. Знайти всі натуральні числа n, для кожного з яких існує многочлен $f(x)$ степеня n, що многочлен $f(x^2 + x + 1)$ ділиться на многочлен $f(x)$.

10. Доведіть, що для будь-якого многочлена $f(x)$ четвертого степеня з цілими коефіцієнтами знайдеться таке дійсне число λ із проміжка $[0; 1]$, що $|f(\lambda)| \geqslant \frac{1}{16}$.

11. Знайти кількість коефіцієнтів многочлена $f(x) = (1+x)^n$, які не діляться на 3.

12. Нехай $f(x)$, $g(x)$ та $h(x)$ – такі многочлени з дійсними коефіцієнтами, що $f^4(x) + g^4(x) = h^2(x)$. Довести, що існують дійсні числа p, q, r та многочлен $s(x)$ такі, що $f(x) = p \cdot s(x)$, $g(x) = q \cdot s(x)$, $h(x) = r \cdot s^2(x)$.

13. Нехай $f(x, y)$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами від двох змінних x та y. Відомо, що $f(x, y) = 0$ для всіх дійсних x та y таких, що $x^2 + y^2 = 1$. Доведіть, що існує такий многочлен $g(x, y)$, що $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \cdot g(x, y)$ для всіх дійсних x та y.

14. Многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, де $a_0 \neq 0$ і $n \geqslant 3$, має n дійсних коренів. Відомо, що $a_2 = 0$ *і* $\dfrac{a_1}{a_0} > n+1$. Доведіть, що хоча би один корінь цього многочлена належить інтервалу $(-\frac{1}{2}; 0)$.

15. Нехай $f(x) = x^4 - 18x^3 + ax^2 + 200x - 1984$. Які значення може приймати параметр a, якщо відомо, що многочлен $f(x)$ має два дійсних корені, добуток яких дорівнює -32?

16. Доведіть, що для будь-якого натурального n існує многочлен $f(x)$ степеня n з цілими коефіцієнтами такий, що для будь-якого многочлена $g(x)$ з цілими коефіцієнтами, степінь якого менший n, многочлен $f(x) \cdot g(x) + 1$ не можна подати у вигляді добутку многочленів $f_1(x)$ та $g_1(x)$ з цілими коефіцієнтами, якщо тільки $f_1(x) \neq 1$ та $g_1(x) \neq 1$.

17. Нехай $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) - 2$, де $n \geqslant 3$ і $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – різні цілі числа. Доведіть, що коли $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, де $g(x)$ та $h(x)$ – многочлени з цілими коефіцієнтами, $g(x) \neq 1$, $h(x) \neq 1$, то $n = 3$.

18. Знайти кількість непарних коефіцієнтів многочлена
$f(x) = (1 + x + x^2)^n$.

19. Дійсні числа x та y такі, що виконуються рівності

$$x + x^2 + \ldots + x^{1990} + 1992x^{1991} = 1990,$$

$$y + y^2 + \ldots + y^{1992} + 1992y^{1993} = 1990.$$

З'ясуйте, яке з чисел більше: x чи y.

20. Невід'ємні цілі числа b_1, b_2, ..., b_{32} такі, що справедлива тотожність

$$(1-x)^{b_1}(1-x^2)^{b_2}\dots(1-x^{32})^{b_{32}} = 1 - 2x + x^{33} \cdot f(x),$$

де $f(x)$ – деякий многочлен. Знайти b_{32}.

Відповіді. Вказівки. Розв'язки

Розділ 1: Многочлени від однієї змінної

§ 1.1. Кільце многочленів над областю цілісності

1. а) Є многочленом третього степеня над полем $\mathbb{R}$; б) якщо a є елементом числового кільця K, то є многочленом четвертого степеня від змінної x над кільцем K; в) якщо $b = 0$, то многочлен третього степеня з кільця $\mathbb{Z}[y]$; якщо $b \neq 0$, то не є многочленом від однієї змінної; г) не є многочленом. **2.** а) Так; б) так; в) ні; г) так. **3.** Безліч многочленів і 4 відображення. **4.** Так. Наприклад, $f_1(x) = x, f_2(x) = x + 1, f_3(x) = 0, f_4(x) = 1$. **5.** а) 27; б) $2 \cdot 3^{2004}$; в) 3^n; г) $2 \cdot 3^n$. **6.** Так, наприклад, $f(x) = 2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 8$. **7.** $f_1(x) = f_4(x), f_2(x) = f_6(x), f_3(x) = f_5(x) = f_8(x)$. **8.** а) 6; б) 42; в) 294; г) 343. **9.** а) Так; б) ні; в) так; г) так. **10.** $f(\overline{0}) = f(\overline{2}) = \overline{6}, f(\overline{1}) = \overline{4}, f(\overline{3}) = f(\overline{6}) = \overline{5}, f(\overline{4}) = f(\overline{5}) = \overline{1}$. **11.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 2; д) 5; е) n.

13. Кільце K повинно мати характеристику 0. **14.** а) $6 \cdot 7^n$; б) $(p-1)p^n$; в) 7^{n+1}; г) p^{n+1}. **15.** а) Ні при яких ; б) при $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$.

16. а) якщо $a \in 2\mathbb{Z}$, то $b = \frac{a^2}{4} + 2$ і $g(x) = x^2 + \frac{a}{2}x + 1$; б) якщо $a = b = \overline{0}$, то $g(x) = \overline{2}x^2$ або $g(x) = \overline{3}x^2$; в) якщо $a = b = \overline{0}$, то $g(x) = \overline{0}$; якщо $a = \overline{0}$, $b = \overline{1}$, то $g(x) = x$ або $g(x) = \overline{6}x$; якщо $a = \overline{0}$, $b = \overline{2}$, то $g(x) = \overline{3}x$ або $g(x) = \overline{4}x$; якщо $a = \overline{0}$, $b = \overline{4}$, то $g(x) = \overline{2}x$ або $g(x) = \overline{5}x$; г) якщо $a = -8$, $b = 18$, то $g(x) = x^2 - 4x + 1$ та якщо $a = 8$, $b = 14$, то $g(x) = x^2 + 4x - 1$. **17.** $a = 6, b = 8$; $a = -6, b = -8$. **18.** Так, якщо $a = 0$ і $b = c + 1$ або $a \neq 0, c = -1$ і $4b = a^2$. **19.** Так, якщо $a \in \mathbb{Z}$ і ні – якщо $a \notin \mathbb{Z}$.

20. Таких відображень є 27. Крім того у кільці $\mathbb{Z}_3[x]$ є 27 многочленів, степінь яких не перевищує 2. Залишається показати, що всі вони визначають різні відображення. **21.** а) 64; б) 1; в) $\overline{0}$; г) $\overline{6}$. **22.** $2^{n-1}a$.

23. а) $f(x)$; б) нуль-многочлен $g(x) = \overline{0}$; в) $g(x) = \overline{3}x^3 + x^2$; г) $f(x)$. **24.** а), б) – застосуйте малу теорему Ферма. На її основі у полі $\mathbb{Z}_7$ для кожного ненульового елемента виконується рівність $x^6 = \overline{1}$.

§ 1.2. Відношення подільності многочленів. Ділення з остачею

2. а) Ні; б) так; в) так; г) ні. **3.** а) $\{-1, 1\}$; б) $\{\overline{1}\}$; в) $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$; г) не існує; д) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$; е) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$; є) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; ж) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6. а) Так; б) ні; в) ні; г) ні. **7.** а) Не ділиться; б) не ділиться; в) не ділиться; г) ділиться.

8. а) Ті, що відрізняються тільки знаком; б) рівні; в) ті, що відрізняються тільки множником з мультиплікативної групи цього кільця; г) таких многочленів немає; д), е), є), ж) — ті, що відрізняються тільки множником з мультиплікативної групи відповідного кільця. **9.** а) $a = 1$; б) $a \in \{-\frac{2}{3}, 1\}$.

10. $a=5, b=2$. **11.** а) $a^2=b+1, a=-c$; б) $b=-a, c=0$; в) $b=a^3, c=0$; г) $a^2+c+abi=0$. **12.** а) $r(x)=34x-1$; б) $r(x)=-1$; в) остачі не існує; г) $r(x)=-x-57$. **13.** а) $q(x)=\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}; r(x)=-\frac{13}{9}x-\frac{4}{9}$. б) $q(x)=2x^2-x+8; r(x)=-27x^2+20x-1$. в) $q(x)=x^3-2x^2-27x-124; r(x)=-514x^2+426x-377$. г) $q(x)=\overline{3}x^3+\overline{2}x^2+\overline{3}x+\overline{1}; r(x)=\overline{2}x+\overline{2}$. **14.** $-5-17i$.

25. Якщо серед даних многочленів є нуль-многочлен, то множина $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ є лінійно залежною.

Припустимо, що $0 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Тоді $n_1+n_2+\cdots+n_k \geqslant 1+2+\cdots+(k-1)=\frac{k(k-1)}{2}$, що протирічить умові. Тому серед степенів $n_1, n_2, \ldots, n_k$ є однакові. Нехай, наприклад, $n_1=n_2=m$ і $f_1(x)=a_m x^m+\cdots+a_1x+a_0$ та $f_2(x)=b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0$. Розглянемо многочлен $f(x)=b_m f_1(x)-a_m f_2(x)$. Його степінь менший за число m і він є лінійною комбінацією многочленів $f_1(x)$ та $f_2(x)$. Крім того, множина $f(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ має той самий ранг, що і множина даних многочленів.

Продовжуючи аналогічні міркування з побудованою множиною, після скінченного числа кроків, прийдемо до того, що в множині многочленів буде міститися нуль-многочлен, тобто вона буде лінійно залежною. Отже, лінійно залежною є і дана множина.

§ 1.3. Корені многочлена. Розклад многочлена за степенями двочлена $x-a$

1. $\overline{0}$. **2.** $r=0$. **3.** $f(\overline{0})=f(\overline{2})=\overline{1}, f(\overline{1})=f(\overline{4})=\overline{3}, f(\overline{3})=\overline{2}$. Многочлен коренів не має. **4.** Ні. **5.** Такого многочлена не існує. **6.** $(x-3)^2(x-5)^4$. **7.** $f(x)=(x-3)^6+a(x-3)^5$, де $a\in\mathbb{Z}$. **8.** а) $\overline{2}$; б) $\overline{4}$; в) $\overline{1}$; г) $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}$. **9.** а) $q(x)=x^3+x^2+10x+52$, $r=201$; б) $q(x)=\overline{2}x^3+\overline{3}x+\overline{3}$, $r=\overline{4}$; в) $q(x)=x^3-4\sqrt{3}x^2+(1+\sqrt{3})x-1$, $r=0$; г) $q(x)=x^4-(1+2i)x^3+(-1+2i)x^2+(4-5i)x-12+7i$, $r=29-2i$. **10.** $r(x)=x$. **11.** $r(x)=\overline{2}x+\overline{3}$. **12.** $r(x)=(-\frac{3}{8}+\frac{1}{12}i)x^2+\frac{1}{6}(-2+3i)x-\frac{7}{8}-\frac{1}{4}i$. **13.** а) $a=-5$; б) $a=-n, b=-n-1$; в) Таких a і b не існує; г) $a=2, b=-1$.

14. а) $f(x)=(x-2)^4+5(x-2)^3+12(x-2)^2+10(x-2)+12$;

б) $f(x)=(x-\overline{3})^4+\overline{4}(x-\overline{3})^3+\overline{4}(x-\overline{3})^2+\overline{3}$; в) $f(x)=(x+\frac{1}{2})^6-3(x+\frac{1}{2})^5+\frac{7}{4}(x+\frac{1}{2})^4+\frac{3}{2}(x+\frac{1}{2})^3+\frac{15}{16}(x+\frac{1}{2})^2-\frac{70}{32}(x+\frac{1}{2})-\frac{23}{64}$; г) $f(x)=(x-i)^5+(-1+4i)(x-i)^4-(6+2i)(x-i)^3+(1-6i)(x-i)^2+(x-i)+6-2i$.

15. а) $f(x)=x^6-12x^5+60x^4-165x^3+273x^2-264x+118$;

б) $f(x)=x^5+\overline{4}x^4+\overline{2}x^2+\overline{4}x+\overline{3}$;

в) $f(x)=x^4+(3-4\sqrt{2})x^3+(13-9\sqrt{2})x^2+(17-10\sqrt{2})x+6-5\sqrt{2}$; г) $f(x)=x^5+(2+15i)x^4+(-90+21i)x^3-(91+270i)x^2+(399-201i)x+176+222i$.

16. а) 2; б) 3; г) 4; д) 1.

17. а) $f(x)=(x^2+1)^2+(-2x+1)(x^2+1)-3x-1$;

б) $f(x) = \overline{3}(x^2 + \overline{4})^3 + (\overline{2}x + \overline{3})(x^2 + \overline{4})^2 + (\overline{3}x + \overline{4})(x^2 + \overline{4}) + \overline{3}x + \overline{4}$;

в) $f(x) = (\sqrt{2}x - 5)(x^2 + \sqrt{2})^2 + ((1 + \sqrt{2})x + 8\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2})x - 7$; г) $f(x) = x(x^2 - i)^2 - (4 + ix)(x^2 - i) + (2 + 5i)x - 1 - 4i$.

18. Многочлен не має цілих коренів.

§ 1.4. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів

1. Якщо $\alpha\beta \neq 0$, то $(f(x), g(x)) = (\alpha f(x), \beta g(x))$. Якщо $\alpha = 0, \beta \neq 0$, то $(\alpha f(x), \beta g(x)) = g(x)$. Якщо $\alpha \neq 0, \beta = 0$, то $(\alpha f(x), \beta g(x)) = f(x)$. Якщо $\alpha = \beta = 0$, то найбільшого спільного дільника многочленів $\alpha f(x)$ та $\beta g(x)$ не існує. **2.** а) $(f(x), g(x)) = (f(x) + g(x), f(x))$; б) $(f(x), g(x)) = (f(x) + g(x), f(x) - g(x))$. **3.** Використайте попередню задачу. **4.** а) 2; б) 1; в) 4; г) безліч. **5.** а) 2; б) 1; в) 4; г) безліч.

6. Наприклад, многочлен $f(x) = 2x$ не ділиться на жодний многочлен з кільця $2\mathbb{Z}[x]$. **7.** Так. **8.** Так. **9.** а) 1; б) 1; в) $x + 2$; г) $x + \overline{3}$.

10. а) $1 = xf(x) + (-3x^2 - x + 1)g(x)$; б) $x - 1 = \frac{1-x}{3}f(x) + \frac{2x^2-2x-3}{3}g(x)$; в) $\overline{4} = (\overline{3}x^3 + x + \overline{2})f(x) + (\overline{2}x^4 + x^2 + \overline{3}x + \overline{3})g(x)$; г) $x + \overline{4} = (\overline{4}x + \overline{1})f(x) + (x^3 + \overline{4}x + \overline{1})g(x)$. **11.** а) $1 = xf(x) + (-3x^2 - x + 1)g(x)$; б) дані многочлени є взаємно простими і лінійного подання для 1 в кільці $\mathbb{Z}[x]$ не існує; в) $\overline{1} = (x^2 + \overline{2})f(x) + \overline{4}x^2 g(x)$; г) $x - i = (\frac{18+7i}{27+38i}x + \frac{-17+72i}{27+38i})f(x) + (\frac{-7+18i}{27+38i}x^2 + \frac{11i}{27+38i}x + \frac{15-7i}{27+38i})g(x)$.

12. а) $29h(x) = (x^2+3x+10)(x-2)f(x) - (x^2+3x+9)(x-2)g(x)$; б) $h(x) = (-6x^2+11x-4)f(x) + (6x^3+x^2-1)g(x)$; в) $h(x) = (x^2+\overline{4}x)f(x) + (\overline{4}x^3+x)g(x)$;

г) $h(x) = 0f(x) + (x+1)g(x)$. **13.** а) $f(x)g(x)$; б) $f(x)g(x)$; в) $f(x)(x^2+\overline{1})$; г) $f(x)g(x)$. **14.** а) $(f(x), g(x), h(x)) = x - i$; [f(x),g(x),h(x)]=f(x)g(x); б) $(f(x), g(x), h(x)) = h(x)$; [f(x),g(x),h(x)]=f(x)(x+i).

§ 1.5. Ідеали кільця многочленів над областю цілісності

1. а) Ні; б) так. **2.** а) (x); б) $\mathbb{Z}[x]$. **3.** а) Класами лишків є множини всіх многочленів, у яких однаковий вільний член; б) фактор-кільце $\mathbb{Z}[x]/(x, 2)$ містить 2 класи – це множини всіх многочленів, у яких вільний член є парним та всіх многочленів, у яких вільний член є непарним цілим числом. **4.** а) Так; б) ні; в) так; г) так. **5.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **6.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **7.** а) Ні; б) так; в) так; г) не обов'язково. **8.** а) Ні; б) так; в) так; г) ні. **9.** а) Ні; б) так. **10.** $(x) + (3) = \{f(x) | a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \wedge a_0 \div 3\}$. **11.** а) (x^2+1); б) $(x-1)$; в) $\mathbb{Z}[x]$; г) $(x+1)$. **12.** а) $f_1(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 1$; $f_2(x) = -2x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 1$; $f_3(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$; б) $f_2(x) = -2x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 1$; $f_3(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$; в) $f_3(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$; г) немає. **13.** а) Не існує; б) $-\frac{1}{3} + (x + 1)$; в)

$-\frac{1}{2}+(x+1)$; г) $\frac{1}{3}+(x+1)$. **14.** а) $\frac{1+i}{2}+(x^2+i)$; б) $\frac{10-2i}{26}x+\frac{1+5i}{26}(x^2+i)$; в) $\frac{-1+i}{2}x+\frac{1-i}{2}+(x^2+i)$; г) $\frac{1}{3}x+(x^2+i)$.

15. а) Так; б) ні.

§ 1.6. Незвідні многочлени над полем. Розклад многочленів на незвідні множники

1. $x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$. **2.** Ні, многочлени у розкладах відрізняються тільки сталим множником. **3.** а) x^2-3; б) $x^2+\overline{2}$; в) x^2-3; г) не існує. **4.** Незвідний у $\mathbb{Z}_2[x]$ і звідний у $\mathbb{Z}_3[x]: f(x)=(x+\overline{2})^2$. **5.** а) Так; б) ні; в) ні; г) так. **6.** а) Ні; б) ні; в) так; г) ні. **7.** а) $\mathbb{Z}_5$; б) $\mathbb{Z}_{19}$; в) $\mathbb{Z}_{11}$; г) $\mathbb{Z}_{19}$. **8.** $x^2,\overline{2}x^2,x^2+x,\overline{2}x^2+\overline{2}x,x^2+\overline{2},\overline{2}x^2+\overline{1},x^2+x+\overline{1},\overline{2}x^2+\overline{2}x+\overline{2}$. **9.** а) $x^2+x+\overline{1}$; б) $x^3+x^2+\overline{1}$ і $x^3+x+\overline{1}$; в) $x^4+x^3+\overline{1}$, $x^4+x+\overline{1}$ і $x^4+x^3+x^2+x+\overline{1}$; г) таких многочленів 6: ; д) $x^2+\overline{1},x^2+x+\overline{2},x^2+\overline{2}x+\overline{2},\overline{2}x^2+\overline{2},\overline{2}x^2+\overline{2}x+\overline{1},\overline{2}x^2+x+\overline{1}$; е) всіх 16, а серед них зведених – 8: $x^3+x^2+\overline{2},x^3+\overline{2}x^2+\overline{1},x^3+\overline{2}x+\overline{1},x^3+\overline{2}x+\overline{2},x^3+\overline{2}x^2+x+\overline{1},x^3+x^2+\overline{2}x+\overline{1},x^3+x^2++x+\overline{2}$. **10.** а) Незвідний; б) звідний; в) незвідний; г) якщо $n=1$, то незвідний; у всіх інших випадках – звідний. **11.** а) Незвідний; б) незвідний; в) звідний: $f(x)=(x^2-\sqrt{2}x+2)(x^2+\sqrt{2}x+2)$; г) звідний. **12.** а) $f(x)=(x^2-7x+1)(x^2+5x+7)$; б) застосуйте заміну $y=x^2+10x+16$; $f(x)=(x^2+10x+20)^2$; в) подайте даний многочлен у виді різниці квадратів; $f(x)=(x^2+6x+13)(x^2-6x+13)$; г) $f(x)=(x^2-6x+1)(x^2+x-3)=(x-\frac{3\pm4\sqrt{2}}{2})(x-\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2})$.

13. а) $(f,g)=x^2+2$, $[f,g]=(x^2-2)^2g(x)$; б) $(f,g)=(x-1)(x+i)$, $[f,g]=(x-2)^2g(x)$; в) $(f,g)=x+\overline{4}$, $[f,g]=(x^2-\overline{2}x+\overline{3})^2(x+\overline{1})g(x)$; г) $(f,g)=x-1$, $[f,g]=(x^6+x^3+1)g(x)$.

28. $(f,g)=x^{(m,n)-1}$, $[f,g]=\frac{f(x)g(x)}{x^{(m,n)}-1}$. **29.** Якщо $\frac{m}{(m,n)}$ і $\frac{n}{(m,n)}$ – непарні числа, то $(f,g)=x^{(m,n)}+1$, $[f,g]=\frac{f(x)g(x)}{x^{(m,n)}+1}$. В решті випадків $(f,g)=1$, $[f,g]=f(x)g(x)$.

§ 1.7. Похідна многочлена. Кратні корені многочлена. Виділення кратних множників многочлена

1. а) $f'(x)=5ix^4+3(1-i)x^2+2+i$; б) $f'(x)=7x^4-24x^3+3\sqrt{3}x^2-(2\sqrt{3}+14)x$; в) $f'(x)=\overline{2}x^9+x-\overline{1}$; г) $f'(x)=\overline{3}x^2+\overline{4}x-\overline{1}$. **2.** $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+x-\frac{55}{3}$. **3.** Ні. **4.** 0. **5.** Так. Якщо $a=2$, то двократним коренем є число $x=1$. При $a=-2$ двократним коренем є число $x=-1$. **6.** а) $(f,f')=(x+2)(x+5)^2$; б) $(f,f')=1$. **7.** Слід відокремити кратні множники у даного многочлена і многочлен $\varphi_1(x)$ буде шуканим. **8.** а) $f_1(x)=x^2+x+1, f_2(x)=x-1, f(x)=f_1(x)(f_2(x))^2$; б) $f_1(x)=x^2-$

$ix+2, f_2(x)=x-i, f(x)=f_1(x)(f_2(x))^2$; в) $f_1(x)=x^2-3x+2, f_2(x)=x-3, f(x)=f_1(x)(f_2(x))^2$; г) $f(x)=f_1(x)=x^6-1$. **9.** $x_1-a, x_2-a, \ldots, x_n-a$. **10.** а) $f(x)=(x-2)^5+14(x-2)^4+65(x-2)^3+123(x-2)^2+80(x-2)$, $f'(2)=80, f''(2)=246, f'''(2)=390, f^4(2)=336$; б) $f(x)=(x-3)^4+6(x-3)^3+10(x-3)^2+12(x-3)+36$, $f'(3)=12, f''(3)=20, f'''(3)=60, f^4(3)=24$; в) $f(x)=(x-i)^5+5i(x-i)^4-(9+2i)(x-i)^3+(2-7i)(x-i)^2+(3+3i)(x-i)-2$, $f'(i)=3+3i, f''(i)=4-14i, f'''(i)=-54-12i, f^4(i)=120i$; г) $f(x)=i(x-2i)^4-(7+i)(x-2i)^3+(4-19i)(x-2i)^2+(27+4i)(x-2i)-3+14i$, $f'(2i)=27+4i, f''(2i)=8-38i, f'''(2i)=-42-6i, f^4(2i)=24i$. **11.** а) $a=-5$; б) $a\in\{-\frac{14}{27}, 18\}$; в) $256a^5+3125b^4=0$; г) $3125b^2+198a^5=0$. **12.** а) 3; б) 0; в) 2; г) 5. **13.** а) $(f,f')=1$; ні; б) $(f,f')=x-1$; так; в) $(f,f')=x+2$; так; г) $(f,f')=x^{667}+1$; так. **14.** $(f(x),f'(x))=x^k$, де $k=(m,n)$. **15.** $f(x)=a(x+b)^n$, де $a,b\in P, a\neq 0$ і $n\in\mathbb{N}$. **16.** а) $f(x)=(x^2-x-6)(x-1)^2$; б) $f(x)=(x-2)(x^2-2x+2)^2$; в) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^4$; г) $f(x)=(x-2i)^2(x+i)^3$.

§ 1.8. Інтерполяційні многочлени. Поле раціональних дробів

1. $f(x)=x$, $f(x)=x+\overline{1}$, $f(x)=\overline{1}$, $f(x)=\overline{0}$. **2.** *Інтерполяція в класичному смислі* – це конструктивне відновлення (можливо наближене) функції певного класу за відомими її значеннями або значеннями її похідних в даних точках. Приклад такої задачі.

Нехай задано $n+1$ різна точка $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ деякого відрізка $[a,b]$ (їх називають *вузлами* або *полюсами інтерполяції*) і набір $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ відповідних значень функції $f(x)$. Задача інтерполяції полягає в тому, як, маючи ці дані відносно f, можна з певною точністю отримати інформацію про поведінку функції:

1) на інтервалах (x_k, x_{k+1}) між полюсами (інтерполяція);

2) поза відрізком $[a,b]$ (екстраполяція).

Ця задача має єдиний розв'язок у класі всіх многочленів над полем дійсних чисел (це поліном Лагранжа). В інших класах функцій задача інтерполяції, взагалі кажучи, не має єдиного розв'язку. В різних розділах математики у багатьох випадках спочатку розв'язують задачу інтерполяції у класі многочленів, а потім, за допомогою граничного переходу, у класі потрібних функцій.

3. а) $f(x)=b_1\frac{x-a_2}{a_1-a_2}+b_2\frac{x-a_1}{a_2-a_1}$, $f(x)=b_1+\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_1)$;

б) $f(x)=b_1\frac{(x-a_2)(x-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+b_2\frac{(x-a_1)(x-a_3)}{(a_2=a_1)(a_2-a_3)}+b_3\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_1)}$,

$f(x)=b_1+\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_1)+\left(\frac{b_3-b_1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}-\frac{(b_2-b_1)}{(a_2-a_1)(a_3-a_2)}\right)(x-a_1)(x-a_2)$.

4. Ні, оскільки існує єдиний многочлен не вище третього степеня в кільці $\mathbb{R}[x]$, який приймає задані значення у чотирьох різних точках. **5.**

а) Правильний, елементарний над $\mathbb{Q}$, не елементарний над $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$; б) правильний, не елементарний над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$; в) правильний, елементарний над $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, та не елементарний над $\mathbb{C}$; г) неправильний і тому не елементарний над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$; д) правильний і елементарний над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$; е) правильний і елементарний над $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$ та не елементарний над $\mathbb{Z}_3$. **6.** Є правильним дробом. **7.** Є правильним дробом. **8.** Наприклад, обчислити інтеграл $\int \frac{3x^6+1}{x(1+x^2)^2}dx$. **9.** а) $a=3$, $b=-7$, $c=4$; б) $a=3$, $b=-54$, $c=84$.

10. а) Ні; б) так, $f(x)=x^2-4x+1$; в) ні; г) так, $f(x)=x^2+x+\overline{1}$. **11.** а) $f(x)=\frac{11}{15}x^2+\frac{8}{15}x-1$, $f(-1)=-\frac{4}{5}, f(1)=\frac{4}{15}$; б) $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x-1$; в) $f(x)=\frac{1}{24}(-x^3+10x^2-35x+50)$, $f(0)=\frac{25}{12}, f(5)=0$; г) $f(x)=x^3-3x^2+5x-2$. **12.** а) $f(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+2)+x+4$; б) $f(x)=\frac{2}{3}x(x-1)+4x+1$; в) $f(x)=\frac{1}{720}(x-1)(x-4)(x-9)-\frac{1}{48}(x-1)(x-4)+\frac{1}{3}(x-1)+1$; г) $f(x)=i(x^2-1)(x-i)-(x-1)(x-i)-(x-1)+i$. **13.** а) $f(x)=x^2+\overline{4}x+\overline{4}$, $f(\overline{0})=\overline{4}$, $f(\overline{4})=\overline{1}$; б) $f(x)=x^3+\overline{4}x+\overline{1}$, $f(\overline{3})=\overline{0}$.

14. а) $1+\frac{x^2-4x+9}{x^3-x^2+4x-4}$; б) $\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}\cdot\frac{x-14}{3x^2+x+1}$; в) $2x+\frac{5x^2-4x+5}{(x-2)(x^2+x+1)}$; г) $x+\frac{8}{(x-2)^2}$. **15.** а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **16.** а) $\frac{1}{5(x-2)}-\frac{1}{x+2}+\frac{9}{5(x+3)}$; б) $\frac{2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}$; в) $\frac{1}{4x^2}+\frac{2}{x+2}+\frac{7}{4(x+2)^2}$; г) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)}$; д) $-\frac{1}{3x}+\frac{4x}{3(x^2+3)}$; е) $\frac{1}{x^2+x+2}-\frac{x+2}{(x^2+x+2)^2}$; є) $\frac{2}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2x-3}{3(x^2-x+1)^2}$; ж) $-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-2}$. **17.** а) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2x-1}$; б) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-\sqrt{2})}-\frac{1}{2(x+\sqrt{2})}$; в) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)}$; г) $-\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2+x+1}$; д) $-\frac{5x+3}{2(x^2+3)}+\frac{5x+9}{2(x^2+1)}$; е) $\frac{1}{x^2+1}-\frac{2}{(x^2+1)^2}$.

18. а) $\frac{1}{2(x+i)}+\frac{1}{2(x-i)}$; б) $-\frac{1}{x}+\frac{1+i\sqrt{3}}{2x+1+i\sqrt{3}}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2x+1-i\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1-i}{4(x-i)}+\frac{1+i}{4(x+i)}$; г) $\frac{1}{2i(x-i)}-\frac{1}{2i(x+i)}-\frac{1}{2(x-i)^2}-\frac{1}{2(x+i)^2}$.

19. а) $\frac{\overline{1}}{x}+\frac{\overline{2}}{x+\overline{2}}+\frac{\overline{2}}{x+\overline{3}}$; б) $\frac{\overline{3}}{x+\overline{1}}+\frac{\overline{2}x+\overline{4}}{x^2+\overline{3}x+\overline{4}}$; в) $\frac{\overline{1}}{x+\overline{2}}+\frac{\overline{2}}{(x+\overline{2})^2}+\frac{\overline{4}x}{x^2+\overline{2}}$;
г) $\frac{\overline{4}}{x}+\frac{\overline{4}}{x+\overline{1}}+\frac{\overline{4}}{x+\overline{2}}+\frac{\overline{4}}{x+\overline{3}}+\frac{\overline{4}}{x+\overline{4}}$; д) $\frac{\overline{4}}{x^2+\overline{2}}+\frac{\overline{2}}{x^2+\overline{3}}$; е) $\frac{\overline{4}x+\overline{2}}{x^2+\overline{3}}+\frac{x^2+\overline{3}x+\overline{3}}{x^3+x+\overline{1}}$.

24. $f(0)=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$. **25.** $f(0)=\frac{5}{2}$. Не зміниться.

26. а) $f(x)=1+x+\frac{x(x-1)}{2!}+\dots+\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$; б) $f(x)=1-\frac{x-1}{2!}+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}-\dots+(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$.

Розділ 2: Многочлени від кількох змінних

§ 2.1. Кільце многочленів від кількох змінних над областю цілісності. Розклад многочлена в добуток незвідних множників

1. а) $x^4+x^3y+xy^3-xy^2-x+2y+2y^3+y^4$; б) $3ix^3-4x^2y+(4-9i)x^2z+9ixz^2+4iyz-3iz^3$; в) $\overline{3}x^3+x^2y+\overline{3}x^2+\overline{3}xy^2+\overline{4}xy+\overline{4}y^3$; г) $\overline{4}x^2+\overline{4}xy+\overline{2}xz+\overline{4}y^2+\overline{4}yz+\overline{3}z^2$. **2.** а) Від одного до трьох членів; б) від одного до шести членів; в) від одного до чотирьох членів; г) від одного до десяти членів. **3.** а) Нескінчення множина; б) 63. **4.** У всіх випадках множина має вид $\{ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ex^2z + ky^2x + ly^2z + mz^2x + nz^2y + pxyz | a, b, c, d, e, k, l, m, n, p \in K\}$, де K – одне з кілець заданих в умові. **5.** а) $(x^3y + x^2y^2) - (xy^2 + y^3) - x^2 + y$; б) $x^6 - 2x^3yz + (4x^4 + y^2z^2) - 4xyz + 4x^2$; в) $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + xz$; г) $[(x+2y)^2(x-z) - (x+z)^3] - [(x+2y)^2 + 3(x+z)^2] - 3(x+z) - 1$. **6.** а) Ні, оскільки добуток однорідних многочленів другого степеня є многочленом четвертого степеня; б) ні; в) ні; г) так. **7.** Ні. **8.** а) $\mathbb{R}^*[x, y] = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$; б) $\mathbb{Z}_5^*[x, y, z] = \mathbb{Z}_5^*$; в) $\mathbb{Q}^*[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \mathbb{Q}^*$; г) $P^*[x_1, x_2, \ldots, x_n] = P^*$. **9.** $x^2 + y^2, x + y^3, \ldots$. **10.** Всі многочлени, які не містять вільного члена. **11.** а) Ні; б) так; в) ні; г) ні.

12. Всі многочлени, які не містять вільного члена. **13.** а) $f(x, y, z) = x^2yz - xyz$; б) $f(x, y, z) = xyz - y^2z^2$. **14.** а) x^2y; б) x^4yz.

15. а) $3x^2 + xy^2 - 6x - 2y^2$; перший член є вищим членом; б) $2x^4 - 3x^3 + x^2y - xy^3$; $2x^4$; в) $-3x^2yz - x^2 + xy^2z^2 + z^4$; $-3x^2yz$; г) $x^4yz - x^3y^3 - x^3z^3 + xy^4z + xyz^4 - x^3y^3$ x^4yz. **16.** а) $f(x, y) = x^2 + 2(y-2)x + (y^2 - 4y + 4) = y^2 + 2(x-2)y + (x^2 - 4x + 4)$; б) $f(x, y) = -x^3 + (1+3y)x^2 + (-3y^2 + 2y)x + y^3 = y^3 - 3xy^2 + (3x^2 + 2x)y + x^2$; в) $f(x, y, z) = x^2 + 2(-y + z - 1)x + (y - z + 1)^2 = y^2 + 2(x + z - 1)y + (x + z - 1)^2 = z^2 + 2(x - y - 1)z + (x - y - 1)^2$; г) $f(x, y, z) = (y - z)x^2 + 2(2yz - z^2)x - z^3 + z^2y - 3z^2 = (x^2 + 4xz + z^2)y - x^2z - 2xz^2 - 3z^2 - z^3 = -z^3 + (y - 2x - 3)z^2 + (4xy - x^2)z + x^2y$.

17. а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **18.** а) $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = y^2 + y + x$; б) $f_1(x, y) = y + \overline{1}$, $f_(x, y) = x^2 + x + y + \overline{1}$. **19.** а) $f(x, y) = (2x^2 + xy + 3y^2)^2$; б) $f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)^2$; в) многочлен незвідний; г) $f(x, y) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$. **20.** а) $f(x, y, z) = 3(x + y)(x + z)(y + z)$; б) $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(x - z)$; в) $(x + y + z)(xy + xz + yz)$; г) $f(x, y, z) = 5(x - y)(y - z)(z - x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

§ 2.2.Симетричні многочлени

1. а) Ні; б) ні; в) ні; г) так. **2.** а) Додати x; б) додати $-4y$; в) помножити на $(y - x - z)(z - x - y)$; г) додати $xz + xt + yz + yt - 2i(x + y + z)$. **3.** а) $f(x, y) = (3xy - x^2 - y^2) + (2x + 2y) - 4$; б) $f(x, y, z) = (\sigma_1^3 + 3\sigma_3) - 2\sigma_2 - 4\sigma_1 + 5$; в) $f(x, y, z) = (xy + xz + yz) - (2x + 2y + 2z) + 3$; г) $f(x, y, z, t) = -2\sigma_4 + (\sigma_1^3 + \sigma_3) - 2\sigma_2$. **4.** а) $2x^3$; б) $-x^5$; в) x^4y^3z; г) $5x^4$. **5.** а) Ні; б) ні; в) так; г) ні.

6. а) Може бути; б) не може бути вищим членом, оскільки степінь x_2 більший степеня x_1; в) не може бути вищим членом, оскільки немає x_1; г) не може бути вищим членом, оскільки степінь x_2 менший степеня x_3. **7.** $x^6; x^5y; x^4y^2; x^4yz; x^3y^3; x^3y^2z; x^2y^2z^2$.

8. а) $f(x, y) = 3\sigma_1^2 - 6\sigma_2 - \sigma_1 + 2$; б) $f(x, y) = -2\sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) + 5\sigma_1 - 1$; в) $f(x, y, z) = 4\sigma_1^2 - 8\sigma_2 - 3\sigma_3$; г) $f(x, y, z) = \sigma_3^2 + \sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + 1$.

9. Застосувати метод математичної індукції. **10.** Всі рівності вірні.

11. Застосувати метод математичної індукції. **12.** Всі рівності вірні. **13.** а) $f(x,y,z)=-2\sigma_1^3+9\sigma_1\sigma_2-27\sigma_3$; б) $f(x,y,z)=\sigma_1^3\sigma_3-\frac{5}{2}\sigma_1\sigma_2\sigma_3+\frac{7}{2}\sigma_3^2$; в) $f(x,y,z)=-5\sigma_1^3+36\sigma_1\sigma_2-216\sigma_3$; г) $f(x,y,z)=\sigma_1^2\sigma_2^2+\frac{16}{3}\sigma_1\sigma_2\sigma_3-3\sigma_3^2-\frac{2}{3}\sigma_1^3\sigma_3-2\sigma_2^2$; д) $f(x,y,z)=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-3(\sigma_1^2\sigma_2^2+17\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2-5\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3)$; е) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$. **14.** а) $\frac{3}{5}$; б) 2; в) $-\frac{1}{3}$; г) -1.

15. а) $o(x_1^2x_2^2)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3$; б) $o(x_1x_2^2)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$; в) $o(x_1x_2)=\sigma_2$; г) $o(x_1^3x_4)=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3+4\sigma_4$. **16.** $f(t_1,t_2,t_3)=-5\sigma_1^3+6\sigma_1\sigma_2-216\sigma_3=-112$.

17. $(x,y,z)\in\{(1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1)\}$. **18.** $(x,y,z)\in\{(1,2,-2),(1,-2,2),(-2,2,1),(-2,1,2),(2,1,-2),(2,-2,1)\}$. **19.** $a=-9$.

§ 2.3. Симетричні многочлени та елементарна алгебра

1. $(x,y)\in\{(\frac{3-\sqrt5}{3},\frac{3+\sqrt5}{3}),(\frac{3+\sqrt5}{3},\frac{3-\sqrt5}{3})\}$. **2.** $xy=-\sqrt2$. **3.** $a=5$. **4.** 3. **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** $-\frac{1}{2}$.

7. а) $(x,y)\in\{(3,\sqrt2),(\sqrt2,3)\}$; б) $(x,y)\in\{(\sqrt3,2),(2,\sqrt3)\}$; в) $(x,y)\in\{(1,2),(2,1)\}$; г) $(x,y)\in\{(-1,2),(2,-1),(1,-2),(-2,1)\}$; д) $(x,y)\in\{(1,2),(2,1),$
$(\frac{3-\sqrt{33}-\sqrt{6\sqrt{33}-2}}{4},\frac{3-\sqrt{33}+\sqrt{6\sqrt{33}-2}}{4}),(\frac{3-\sqrt{33}+\sqrt{6\sqrt{33}-2}}{4},\frac{3-\sqrt{33}-\sqrt{6\sqrt{33}-2}}{4})\}$; е) $(x,y)\in\{(1,3),(3,1)\}$; є) якщо $a\neq-1\pm\sqrt5$, то $x=y=0$; якщо $a=-1+\sqrt5$, то $(x,y)\in\{(0,0),(\frac{\sqrt5+2}{2},\frac{\sqrt5-2}{2}),(\frac{\sqrt5-2}{2},\frac{\sqrt5+2}{2})\}$; якщо $a=-1-\sqrt5$, то $(x,y)\in\{(0,0),(\frac{-\sqrt5+2}{2},\frac{-\sqrt5-2}{2}),(\frac{-\sqrt5-2}{2},\frac{-\sqrt5+2}{2})\}$; ж) $(x,y,z)\in\{(1,-3,2),(1,-2,3),(2,-3,1),(2,-1,3),(3,-1,2),(3,-2,1)\}$. . **8.** а) $x=0$; б) $x\in\{3,18\}$; в) $x\in\{1,4\}$; г) $x\in\{3,4,6\pm\sqrt{29}\}$. **9.** а) $(x,y)\in\{(1,43),(4,1)\}$; б) ; в) $(x,y)\in\{(2,3),(-2,-3),(2,-3),(-2,3)\}$; г) .

10. а) $(x^2+y^2)(x^2+8xy+y^2)$; б) $(x^2-xy+y^2)(x-2y)(2x-y)$; в) $(3x^2+7xy+3y^2)(2x^2+9xy+2y^2)$; г) $(x-3y)(3x-y)(2x+3y)(3x+2y)$.

12. З другого рівняння маємо $1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{2002}=2$. Якщо $x_1,x_2,\ldots,x_{2002}$ – невід'ємний розв'язок системи рівнянь, то з першого рівняння робимо висновок про те, що $0\leqslant x_1^{2003},x_2^{2003},\ldots,x_{2002}^{2003}\leqslant1$. Тоді $x_1^{2003}\leqslant x_1$, $x_2^{2003}\leqslant x_2$, $\ldots,x_{2002}^{2003}\leqslant x_{2002}$ і $1=x_1^{2003}+x_2^{2003}+\cdots+x_{2002}^{2003}\leqslant x_1+x_2+\cdots+x_{2002}=\sigma_1$. Таким чином, $\sigma_1=1,\sigma_2=\sigma_3=\ldots=\sigma_{2002}=0$. Отже, невід'ємний розв'язок системи рівнянь є коренями рівняння $x^{2002}-x^{2001}=0$, тобто $x_1=1,x_2=x_3=\ldots=x_{2002}=0$.

13. а), б), в) – подайте ліву і праву частини рівності у виді многочленів від елементарних симетричних многочленів. г) Для доведення цієї тотожності позначимо $z=-x-y$. Тоді $x+y+z=0$ і при цій умові слід довести виконання рівності $\frac{x^7+y^7+z^7}{x^3+y^3+z^3}=\frac{7}{6}(x^4+y^4+z^4)$, що не викликає труднощів.

19. $\{1,4\}$. Застосуйте заміну $u=\sqrt{x}$, $v=3-\sqrt{x}$

§ 2.4. Результант двох многочленів і його застосування

1. Розвязування систем нелінійних рівнянь. **2.** а) $R(f,g) = -13$, $R(g,f) = 13$; б) якщо $ab = 0$, то результантів не існує; якщо ж $ab \neq 0$, то $R(f,g) = ad - bc$, $R(g,f) = bc - ad$; в) $R(f,g) = -7$, $R(g,f) = -7$; г) якщо $am = 0$, то результантів не існує; якщо ж $am \neq 0$, то $R(f,g) =$, $R(g,f) = an^2 - bmn + cn^2$. **3.** а) 234; б) $(18+13\sqrt{3})(24+20\sqrt{3})$; в) $(17+8\sqrt{3})(80+32\sqrt{3})$; г) 0. **4.** а) $D(f) = 1+i$; б) якщо $a = 0$, то дискримінанта не існує; якщо ж $a \neq 0$, то $D(f) = a$; в) $D(f) = -14i$; г) якщо $a = b = 0$, то дискримінанта не існує; якщо ж $a = 0$, $b \neq 0$, то $D(f) = b$; якщо ж $a \neq 0$, то $D(f) = b^2 - 4ac$. **5.** $D(f) = b^2 - 4ac = 0$. **6.** Якщо $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, то многочлен не має кратних коренів. Якщо $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, то многочлен має кратні корені при $a = \frac{-16\pm 8i}{5}$. **7.** Рівний нулю.

8. а) 243; б) 19; в) 579; г) 107. **9.** а) -972; б) 432; в) 725; г) 0; д) 50000; е) 5^5; є) 1; ж) $-\frac{1}{(n!)^n}$.

10. $D(f) = -64$, $D(f_1) = 4$, $D(f_2) = -4$, $R(f_1,f_2) = 4$. Тому тут $D(f) = D(f_1)\cdot D(f_2)\cdot R(f_1,f_2)$. **11.** а) $-27c^2-4b^3$; б) $-27c^2+18abc-4a^3c-4b^3+a^2b^2$; в) $b^2c^2 - 4c^3a - 4db^3 - 27a^2d^2 + 18abcd$.

12. Вони рівні. **13.** а) Якщо $\lambda = 1$, то $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$; якщо $\lambda = -2$, то $x = 1$; б) якщо $\lambda = 1$, то $x = 1$; в) якщо $\lambda = 2$, то $x = 2$; г) якщо $\lambda = -1$, то $x = -1$. **15.** а) Не існує; б) $\lambda = 3$, $x = 1$; в) $\lambda = 0$, $x = 1$; г) $\lambda = -1$, $x = 1$. **16.** а) $(1,i)(1,-i)(-\frac{3}{2},2)$; б) $(1,0)(2,1)(-\frac{19+\sqrt{177}}{2}, \frac{9+\sqrt{177}}{2})(\frac{-19+\sqrt{177}}{2}, \frac{9-\sqrt{177}}{2})$; в) $(0,0)(1,2)(2,-1)$; г) $(1,2)(2,3)(0,-1)(-2,1)$.

Розділ: Многочлени над числовими полями

§ 3.1. Многочлени над полем комплексних чисел

2. а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{R}$; в) $\mathbb{R}$; г) $\mathbb{C}$. **3.** Так, зокрема, ним є поле комплексних чисел. **4.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **6.** Безліч. Наприклад, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}], \mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}], \mathbb{R}, \mathbb{C}$. **7.** а) Ні; б) ні; в) ні; г) так. **8.** Так. **9.** а) $f(x) = (x-1)(x-2i)(x-1+i)$; б) $f(x) = (x+i)^2(x-3+i)$; в) $f(x) = (x-2-i)^3(x-3)(x+5)^2$; г) $f(x) = (x-3i)^3(x+2)^3$. **10.** а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 0, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= 0, \\ x_1x_2x_3 &= 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= -2, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= -3, \\ x_1x_2x_3 &= 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 & = & 5, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 & = & 4, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 & = & 2, \\ x_1x_2x_3x_4 & = & -3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 & = & 0, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_4x_5 & = & 0, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_2x_5+x_2x_3x_4+x_2x_4x_5++x_3x_4x_5 & = & 0, \\ x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_3x_5+x_2x_3x_4x_5 & = & \frac{3}{5}, \\ x_1x_2x_3x_4x_5 & = & -\frac{1}{5}; \end{cases}$

11. а) $m=13$; б) $m=12$; в) $m=4$; г) $m=5$. **12.** а) $f(x)=2(x-\frac{2-\sqrt{2}i}{2})(x-\frac{2+\sqrt{2}i}{2})$; б) $f(x)=(x+1)(x+i)$; в) $f(x)=(x-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}(1+i))(x-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}(1-i))(x-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}(-1+i))(x+\frac{\sqrt[4]{12}}{2}(1+i))$; г) $f(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{-1+i\sqrt{3}})(x+\sqrt{-1+i\sqrt{3}})(x-\sqrt{-1-i\sqrt{3}})(x+\sqrt{-1-i\sqrt{3}})$; д) $(x-1)(x-2)(x-3)$; е) $f(x)=(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2$; є) $f(x)=(x^m-1)(x^n-1)=(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)\cdots(x-\varepsilon_{m-1})(x-\varepsilon_0')(x-\varepsilon_1')\cdots(x-\varepsilon_{n-1}')$, де ε_i – всі корені m-го степеня з одиниці та ε_i' – всі корені n-го степеня з одиниці; ж) $f(x)=(x-2\varepsilon_0)(x-3\varepsilon_0)(x-2\varepsilon_1)(x-3\varepsilon_1)\cdots(x-2\varepsilon_{n-1})(x-3\varepsilon_{n-1})$.

13. а) x^2+1; б) $(x+1)(x-2i)$; в) якщо m – непарне і n – парне, то $x+1$; в інших випадках многочлени взаємно прості; г) $x^{(m,n)}-1$. **14.** $-3+4i$. **15.** $11-11i$.

16. а) $\{\sqrt{3},\sqrt{3}-\sqrt{2},\sqrt{3}+\sqrt{2}\}$; б) $\{-\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\}$; в) $\{1,2,3\}$; г) $\{i,2i,4i\}$. **17.** а) $f(x)=x^3+(2-i)x^2-(3+2i)x+5-5i$; б) $f(x)=x^5-\frac{5}{4}(3+i)x^4+\frac{5}{3}(3+4i)x^3-\frac{5}{2}(1+5i)x^2+(-10+10i)x-\frac{49}{4}+\frac{5}{4}i$.

30. Якщо многочлени $f(z)$ і $g(z)$ з комплексними коефіцієнтами мають однакові корені однакової кратності, то $f(z)=\lambda g(z)$ і $h(z)=|f(z)|-|g(z)|=(|\lambda|-1)|g(z)|$ має постійний знак у всіх точках $z\in\mathbb{C}$, при яких вона відмінна від нуля.

Навпаки, нехай для визначеності $h(z)\geqslant 0$ у всіх точках $z\in\mathbb{C}$. Тоді $\deg f(z)\geqslant \deg g(z)$. В противному випадку при достатньо великих за модулем числах z ми отримаємо нерівність $|g(z)|>|f(z)|$, тобто $h(z)<0$.

Нехай m_i і n_i – кратності кореня z_i многочленів $f(z)$ і $g(z)$ відповідно. Якщо $m_i>n_i$, то $h(z)=|f(z)|-|g(z)|=|(z-z_i)^{m_i}f_i(z)|-|(z-z_i)^{n_i}g_i(z)|=|(z-z_i)^{n_i}|(|(z-z_i)^{m_i-n_i}||f_i(z)|-|g_i(z)|)$ приймає від'ємні значення при z близьких до z_i. Тому $m_i\leqslant n_i$ для всіх коренів z_i.

Нехай тепер $z_1,z_2,\ldots,z_k$ – всі корені многочлена $f(z)$ з кратностями $m_1,m_2,\ldots,m_k$ відповідно. Тоді такі ж корені з кратностями $n_1,n_2,\ldots,n_k$ має многочлен $g(z)$. Далі
$\deg f(z)=m_1+m_2+\cdots+m_k\leqslant n_1+n_2+\cdots+n_k\leqslant \deg g(z)\leqslant \deg f(z)$. З отриманого протиріччя маємо, що $m_1=n_1,\ldots,m_k=n_k$ та інших коренів

многочлен $g(z)$ не має.

§ 3.2. Многочлени над полем дійсних чисел

1. Так. Таким ідеалом є множина I всіх многочленів без вільного члена. Шуканим ізоморфізмом є відображення, яке кожному класу лишків $f(x)+I$ ставить у відповідність вільний член многочлена $f(x)$. **2.** Такого ідеала не існує. **3.** а) $f(x)=(x-1)(x+2)(x-3)^2$; б) $f(x)=(x^2+2x+2)(x-1+\sqrt{3})^2$; в) $f(x)=(x-2)(x+3)(x^2+1)^2$; г) $f(x)=(x^2+4)^3$. **4.** а) Так; б) так; в) так; г) так. **5.** Тільки рівні нулю. **6.** $a=c=0$, $b,d>0$, $b^2-4d>0$.

8. Шукані коефіцієнти мають вид $a=-10\lambda^2, b=9\lambda^4$, де λ – довільне дійсне число. Коренями таких рівнянь є числа $-3\lambda,-\lambda,\lambda,3\lambda$. **9.** $a=-3$, $x_1=1, x_2=-2, x_3=4$. **10.** а) $x_{1,2}=-1\pm i\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$; б) $x_{1,2}=-1\pm i$, $x_{3,4}=\frac{3\pm i\sqrt{11}}{2}$; в) $x_{1,2}=2\pm i$, $x_3=-4$, $x_4=1$; г) $x_{1,2}=2\pm i$, $x_{3,4}=3\pm i\sqrt{2}$.

11. а) $f(x)=(x+1)(x+5)(x^2-2x+5)$; б) $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-3x+3)$; в) $f(x)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x+2)(x^2+\sqrt{2}x+2)$; г) $f(x)=(x+1)^2(x^2+1)(x^2-x+1)$.

12. $ac>0$, $\frac{c}{a}+\frac{da}{c}=b$ або $a=c=0, b^2-4d\geqslant 0$. **13.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **14.** а) $a=-27$, $x_{1,2}=\pm 3i$, $x_3=-1$, $x_4=3$; б) $a=4$, $x_{1,2}=\pm i\sqrt{2}$, $x_{3,4}=2\pm\sqrt{2}$; в) $a=-12$, $x_{1,2}=\pm i\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$; г) $a=6$, $x_{1,2}=\pm 2i$, $x_{3,4}=-1\pm i$.

15. а) $a\in(\frac{9-\sqrt{17}}{16};\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};\frac{9+\sqrt{17}}{16})$; б) $a\in(-\infty;\frac{16-3\sqrt{14}}{15})\cup\{\frac{1}{2}\}\cup(\frac{16+3\sqrt{14}}{15};\infty)$; в) $a\in\{\frac{1}{2},\frac{17}{16}\}$; г) $a\in(-\sqrt{2};1)\cup(\sqrt{2};\infty)$. **16.** $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

21. Для достатньо великого x_0 числа $f(x_0)$ і $f(0)=a_0$ мають різні знаки. Оскільки многочлен $f(x)$ є неперервною функцією, то на відрізку $[0,x_0]$ він має хоча б один дійсний корінь.

22. З неперервності функції f випливає, що для будь-якого x виконується одне з двох: $f(x)<x$ або $f(x)>x$. В першому випадку $f(f(x))<f(x)<x$, а в другому – $f(f(x))>f(x)>x$. Це означає, що у всіх випадках рівняння $f(f(x))=0$ не має дійсних коренів.

23. Многочлен $f(x)$ не має дійсних коренів непарної кратності, оскільки в протилежному випадку він повинен змінювати свій знак. Тому він має вид $f(x)=g^2(x)h(x)$, де многочлен $h(x)$ не має дійсних коренів і має парний степінь $2k$. Комплексні корені $z_1,z_2,\ldots,z_{2k}$ многочлена $h(x)$ розділимо на дві групи так, щоб комплексно спряжені корені ввійшли у різні групи. Нехай, наприклад першу групу складають числа $z_1,z_2,\ldots,z_k$, а всі інші є спряженими до них. Розглянемо многочлени $\varphi(x)=(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_k)$ і $\psi(x)=(x-z_{k+1})(x-z_{k+2})\cdots(x-z_{2k})$. З властивостей спряжених комплексних чисел отримуємо, що коефіцієнти многочлена $\psi(x)$ є спряженими числами до коефіцієнтів $\varphi(x)$, тобто ці многочлени можна записати у виді $\varphi(x) = s(x)+it(x)$, $\psi(x) = s(x)-it(x)$, де $s(x), t(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами. Тоді $h(x) = s^2(x) + t^2(x)$ і $f(x) = (gs)^2(x) + (gt)^2(x)$.

24. Оскільки всі коефіцієнти даного многочлена невід'ємні, то ні один з його коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не може бути додатним числом. Отже, многочлен має вид $f(x) = (x + \beta_1)(x + \beta_2)\cdots(x + \beta_n)$, де $\beta_i = -\alpha_i > 0$ для всіх $1 \leqslant i \leqslant n$. Тоді $f(2) = (2 + \beta_1)(2 + \beta_2)\cdots(2 + \beta_n)$. З нерівності Коші про зв'язок між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних чисел маємо нерівності: $1+1+\beta_1 \geqslant 3\sqrt[3]{\beta_1}, 1+1+\beta_2 \geqslant 3\sqrt[3]{\beta_2}, \ldots, 1+1+\beta_n \geqslant 3\sqrt[3]{\beta_n}$. Але, за теоремою Вієта, $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_n = (-1)^n \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n = 1$. Тому, перемноживши всі нерівності почленно, отримаємо:

$$f(2) = (2 + \beta_1)(2 + \beta_2)\cdots(2 + \beta_n) \geqslant 3^n \sqrt[3]{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_n} = 3^n.$$

25. З умови випливає, що многочлен має вид $f(x) = a(x^2 + a_1^2)(x^2 + a_2^2)\cdots(x^2 + a_k^2)$, де $a, a_1, a_2, \ldots, a_k$ – відмінні від нуля додатні дійсні числа. Многочлен $f'(x) = 2ax[(x^2 + a_2^2)\cdots(x^2 + a_k^2) + (x^2 + a_1^2)(x^2 + a_3^2)\cdots(x^2 + a_k^2)] + \cdots + (x^2 + a_1^2)(x^2 + a_3^2)\cdots(x^2 + a_{k-1}^2) = 2axg(x)$ ділиться на x, але не ділиться на x^2. Отже, число 0 є однократним коренем похідної $f'(x)$. Всі інші корені похідної $f'(x)$ є коренями многочлена $g(x)$. Серед них немає дійсних чисел. Нехай $c + di \neq 0$ і $g(c + di) = 0$. Якщо $f(c + di) = 0$, то за умовою цей корінь є чисто уявним числом. Нехай $f(c + di) \neq 0$. Тоді $\frac{f'(c+di)}{f(c+di)} = 0$. Але $f'(x) = \sum_{n=1}^{2k} \frac{f(x)}{x-\alpha_n}$, де α_n – суто уявний корінь даного многочлена. Тому $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{x-\alpha_n}$ і $\frac{f'(c+di)}{f(c+di)} = \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{c+di-\alpha_n} = 0$. Отже, $\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{c+di-\alpha_n} = \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{c+(d+i\alpha_n)i} = \sum_{n=1}^{2k} \frac{c-(d+i\alpha_n)i}{c^2+(d+i\alpha_n)^2} = 0$. Таким чином, дійсна частина і коефіцієнт при уявній частині цього числа також рівні нулю, тобто $\sum_{n=1}^{2k} \frac{c}{c^2+(d+i\alpha_n)^2} = 0$ і $c = 0$.

§ 3.3. Рівняння третього і четвертого степеня

1. а) $y^3 - 9y + 28 = 0$; б) $y^3 - 8y - 9 = 0$; в) $y^3 - \frac{1}{3}y - \frac{55}{27} = 0$; г) $y^3 + 14y - 4 - 20i = 0$. **2.** $D(f) = -108$. **3.** а) $\frac{275}{128}$; б) 0; в) -4; г) $\frac{125}{27} - 8i$. **4.** а) $t^3 + 12t - 0 = 0$; б) $t^3 - 4t^2 + 8t + 36 = 0$; в) $t^3 + 6t^2 + 4t + 23 = 0$; г) $t^3 - 2t^2 + 30t + 21 = 0$. **5.** ab.

6. а) $\{2, -1 \pm \sqrt{3}\}$; б) $\{-i, 2i\}$; в) $\{-1+i, 3-i\}$; г) $\{(1+\sqrt[3]{6})i, \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt[3]{6})}{2} - \frac{1+\sqrt[3]{6}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt[3]{6})}{2} - \frac{1+\sqrt[3]{6}}{2}i\}$; д) $\{-1, \frac{-5\pm5i\sqrt{3}}{2}\}$; е) $\{-7, -1 \pm i\sqrt{3}\}$; є) $\{\frac{3}{2}, \frac{-3\pm i\sqrt{3}}{3}\}$; ж) $\{-\frac{2}{3}, 2 \pm i\sqrt{3}\}$. **7.** $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. **8.** $\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -2\sqrt{3}$.

9. $\{-\frac{a_2}{a_3}, \pm\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}\}$. **10.** $\{-2, -2i, 2i\}$. **11.** Існує 6 таких многочленів: $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^3 + x^2 - 2x$, $f_3(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $f_{4,5,6}(x) =$

$x^3+bx^2-\frac{1}{b}x+\frac{2-b}{b^2}$, де є b одним з коренів рівняння $b^3-2b+2=0$ (тут дискримінант $D>0$ і рівняння має 3 різних розв'язки). **12.** $\{(a,0,0)|a\in\mathbb{C}\}\cup\{(\varepsilon,1,\varepsilon),(\varepsilon^2,1,\varepsilon^2),(\varepsilon^2,-1,\varepsilon+1),(\varepsilon,-1,\varepsilon+1)|\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

13. а) $\{\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\frac{1\pm i\sqrt{11}}{2}\}$; б) $\{\pm i,\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}\}$; в) $\{\pm\sqrt{2},\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\}$; г) $\{\pm i\sqrt{2},\frac{-1\pm i\sqrt{15}}{2}\}$; д) $\{\frac{1\pm i\sqrt{11}}{6},\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}\}$; е) $\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\}$; є) $\{\frac{1+\sqrt{2}\pm i\sqrt{1+6\sqrt{2}}}{2},\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{-1+10\sqrt{2}}}{2}\}$; ж) $\{1\pm i,\pm i\sqrt{6}\}$.

§ 3.4. Відокремлення дійсних коренів многочлена з дійсними коефіцієнтами

1. а) $(-4;4)$; б) $(-4;4)$; в) $(-8;8)$; г) $(-2004;2004)$. **2.** а) 2; б) 4; в) 5; г) 2003. **3.** n. **4.** а) Однакова; б) у другій послідовності на непарне число змін знаків більше або менше.

5. а) Многочлен додатних коренів не має, а від'ємних може мати два або ні одного; б) додатних коренів коренів многочлен може мати чотири, два або ні одного, а від'ємних може мати один; в) додатних коренів коренів многочлен може мати три, один або ні одного, а від'ємних може мати один або ні одного; г) додатних коренів коренів многочлен може мати шість, чотири, два або ні одного, а від'ємних може мати один або ні одного. **6.** а) f,f'; б) $f,f',\frac{89}{8}$; в) $f,f',-2x+1,-\frac{15}{4}$; г) $f,f',\frac{2}{3}x-5,-\frac{671}{4}$. **7.** а) $\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ ac>0,\\ ab<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ ac>0,\\ ab>0;\end{cases}$ в) $\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ ac<0;\end{cases}$
г) $\begin{cases}b^2-4ac>0, a>0,\\ -1<-\frac{b}{2a}<1,\\ a-b+c\geqslant 0,\\ a+b+c\geqslant 0,\end{cases}$ або $\begin{cases}b^2-4ac>0, a<0,\\ -1<-\frac{b}{2a}<1,\\ a-b+c\leqslant 0,\\ a+b+c\leqslant 0;\end{cases}$ д) $\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ af(m)<0;\end{cases}$
е) $\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ f(m)f(n)>0;\end{cases}$ є) $\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ f(m)f(n)<0,\\ f(p)f(q)<0;\end{cases}$ ж) $\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ f(m)f(n)<0,\end{cases}$ або
$\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ f(m)=0,\\ af(n)>0,\end{cases}$ або $\begin{cases}b^2-4ac>0,\\ f(n)=0,\\ af(m)>0.\end{cases}$

8. а) 2; б) 2; в) 3; г) 2. **9.** а) 1; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 1. **10.** а) $(-13,-\frac{1}{5})$, $(\frac{1}{5},13)$; б) $(-2,-1)$, $(\frac{2}{9},1)$; в) $(-10,-\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4},10)$; г) $(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4})$, $\frac{5}{2}$. **11.** а) 1; б) 1; в) 2; г) 1. **12.** а) $f,f',6x^2+12x+4,\frac{32}{3}(x+1)$; 2 дійсних корені; б) $f,f',-\frac{1}{2}x^2+1,-10x,-1$; 2 дійсних корені; в) $f,f',3x^2-9,-12x-36,36$; многочлен не має дійсних коренів; г) $f,f',-\frac{3}{4}(x^2+x+9),8x+4,\frac{33}{16}$; многочлен не має дійсних коренів. **13.** а) Один дійсний корінь в інтервалі $x\in(0,1)$; б) $x_1\in(-2,-1)$,

$x_2 \in (0,1)$, $x_3 \in (1,2)$; в) $x_1 \in (1,2)$, $x_2 \in (3,4)$; г) $x_1 \in (-1,0)$, $x_2 \in (2,3)$; д) $x_1 \in (-2,-1)$, $x_2 \in (0,1)$; е) $x_1 \in (-3,-2)$, $x_2 \in (-2,-1)$, $x_3 \in (0,1)$, $x_4 \in (1,2)$; є) $x_1 \in (-3,-2)$, $x_2 \in (-2,-1)$, $x_3 = 1$; ж) многочлен не має дійсних коренів.

§ 3.5. Многочлени з раціональними та цілими коефіцієнтами

1. Простим обчисленням, діленням многочлена на двочлен $x-a$ за схемою Горнера або кутом. **2.** Він не має раціональних коренів та звідний у кільці $\mathbb{Q}[x]$. **3.** Ні. **4.** $a \neq 0$ і $\frac{b}{a}$ є кубом раціонального числа. **5.** Многочлен $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ є звідним у кільці $\mathbb{Q}[x]$ тоді і тільки тоді, коли рівняння має раціональні корені або існують раціональні числа c і d, для яких $c^2 = b$, $d^2 = 2c - a$.

7. Всі многочлени є незвідними у кільці $\mathbb{Q}[x]$. **8.** Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами звідний у кільці $\mathbb{Z}[x]$, то він звідний у кільці $\mathbb{Z}_n[x]$ для будь-якого натурального $n > 1$. **9.** а) Звідний: $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2+2)$; б) звідний: $f(x) = (x^2+2)(x^2+3)$; в) незвідний; г) незвідний.

10. Ні. **11.** а) Так; б) ні.

12. а) $\{-2,-1\}$; б) -3; в) $\{-4,-2,3,4\}$; г) цілих коренів немає. **13.** а) $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}$; б) $-3, \frac{1}{2}$; в) раціональних коренів немає; г) $\frac{5}{3}$. Для зменшення числа кандидатів у раціональні корені застосуйте необхідну умову про подільність числа $f(2)$ на $p-2q$. **14.** а) $\{2 \pm i\sqrt{3}\}$; б) $\{\frac{1}{3}, \frac{-1-i\sqrt{15}}{8}, \frac{-1+i\sqrt{15}}{8}\}$; в) $\{-3, 2, \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}\}$; г) $\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$. **15.** а) $\{a,b,c\}$; б) $\{-1,a,2a\}$; в) $\{1,a,1-a\}$; г) $\{1,b-a,b+a\}$. **16.** а) $f(x) = (x^2-2)(x^2-3)$; б) $f(x) = (x^2-2x+3)(x^2+2x+3)$; в) многочлен незвідний у кільці $\mathbb{Z}[x]$; г) $f(x) = (x-4)(x+5)(x^2+2x+3)$. **17.** а) Многочлен незвідний; б) $f(x) = (x^2+x+1)(x^2-7)$; в) $f(x) = (x+\frac{3}{2})^2(12x^2-4x+8)$; г) $f(x) = 225(x-\frac{6}{5})^2(x+\frac{1}{3})^2(x+1)$.

18. Многочлен цілих коренів не має. **19.** а) Раціональних коренів многочлен не має, але є звідним: $f(x) = (x^2+4x+1)(x^2-3x+1)$; б) многочлен незвідний у кільці $\mathbb{Q}[x]$; в) многочлен незвідний у кільці $\mathbb{Q}[x]$; г) після заміни $x = y-1$ видно, що многочлен незвідний у кільці $\mathbb{Q}[x]$ за критерієм Ейзенштейна.

§ 3.6. Алгебраїчні і трансцендентні числа

1. а) Так; б) ні; в) так; г) так; д) так; е) так. **2.** а) $f(x) = x^3 - 5$; в) $f(x) = 25x^2 - 10x - 12$; г) $f(x) = x^4 + 1$; д) $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$; е) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. **3.** а) 2003; б) $\pm\sqrt[4]{2}, \pm i\sqrt[4]{2}$; в) $1 \pm i$; г) $1 \pm i\sqrt{5}$. **4.** а) Ні; б) так. **5.** а) Ні; б) ні; в) так. **6.** а) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) = \{\sqrt[3]{25}c_2 + \sqrt[3]{5}c_1 + c_0 | c_i \in \mathbb{Q}\}$; в) $\mathbb{Q}(\frac{1-\sqrt{13}}{5}) = \{\frac{1-\sqrt{13}}{5}c_1 + c_0 | c_i \in \mathbb{Q}\}$;

г) $\mathbb{Q}(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)) = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))^3c_3+(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))^2c_2+(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))c_1+c_0|c_i\in\mathbb{Q}\}$;
д) $\mathbb{Q}(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i) = \{(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i)c_1+c_0|c_i\in\mathbb{Q}\}$;
е) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3c_3+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2c_2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})c_1+c_0|c_i\in\mathbb{Q}\}$.
7. Ні. **8.** а) 1,2; б) будь-яку натуральну; в) будь-яку натуральну; г) 1. **9.** Так. Якщо число a є коренем многочлена $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, то число a^{-1} є коренем многочлена $g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + 1$. **10.** Ні. **11.** а),б) — алгебраїчні; в),г) — трансцендентні. **12.** Трансцендентним числом. **13.** 3 і 6. **14.** а) 1,2,5,10; б) ні. **15.** $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}(i)$, поле алгебраїчних чисел. **16.** а) $-\frac{1}{2}(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$; б) $\frac{1}{5}(1-2i)$.

17. а) $f(x) = x^4-14x^2+9$; б) $f(x) = x^9+9x^6+432x^3+27$; в) $f(x) = x^4+2x^2-2$; г) $f(x) = x^4-4x^3+6x^2-14x+12$. **18.** а) $f(x) = x^6-4x^3+1$; б) $f(x) = (x^4+30x^2+18x)^2-80(x^3+5x)^2$; в) $f(x) = (x^3+24x-2)^2-8(3x^2+8)^2$; г) $f(x) = x^4-4x^3+4x^2-3$; д) $f(x) = x^2-\sqrt{2}$; е) $f(x) = x^2+x+1$.

19. а) $3-\sqrt{6}$, $\frac{5}{2}$; б) $2+\sqrt{5}$, $1\pm i\sqrt{3}$; в) $1-\sqrt{3}$, $1\pm\sqrt{2}$; г) $-2, -1, 1, 1-\sqrt{2}$. **20.** Так.

21. а) $f(x-b), g(x-a)$; б) $f(x+b), g(a-x)$; в) $f(\frac{x}{b}), g(\frac{x}{a})$; г) $f(xb), g(x\frac{b^2}{a})$.

22. а) Поле; б) поле, якщо приєднати нуль і одиницю. **23.** Кільце. **24.** а) Розмірність рівна 3, базис: $1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$; б) розмірність рівна 4, базис: $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$; в) розмірність рівна 2, базис: $1, i$; г) розмірність рівна 8, базис: $1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{8}, i, i\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{4}, i\sqrt[4]{8}$. **25.** а) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$. Покажемо це. Як відомо $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{3}|a,b\in\mathbb{Q}\}$ та $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}) = \{c+d\sqrt{5}|c = a_1+b_1\sqrt{3}, d = a_2+b_2\sqrt{3}, a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Q}\}$. Тоді $c+d\sqrt{5} = a_1+b_1\sqrt{3}+(a_2+b_2\sqrt{3})\sqrt{5} = a_1+b_1\sqrt{3}+a_2\sqrt{5}+b_2\sqrt{3}\sqrt{5}$. Але $\sqrt{15} = \frac{1}{2}((\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-8)$, $\sqrt{5} = \frac{1}{2}((\sqrt{3}+\sqrt{5})^3-3(\sqrt{3}+\sqrt{5})-3\sqrt{15}(\sqrt{3}+\sqrt{5}))$ і $\sqrt{3} = -\frac{1}{2}((\sqrt{3}+\sqrt{5})^3-5(\sqrt{3}+\sqrt{5})-3\sqrt{15}(\sqrt{3}+\sqrt{5})))$.

Тому після всіх підстановок і перетворень ми отримаємо, що $c+d\sqrt{5} = x(\sqrt{3}+\sqrt{5})^3+y(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2+z(\sqrt{3}+\sqrt{5})+t$, де $x,y,z,t\in\mathbb{Q}$. б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; в) $\sqrt{p}+\sqrt{q}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

§ 3.7. Задачі на звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу

2. а) $\frac{11}{16}(\sqrt[3]{25}-3\sqrt[3]{5}+9)$; б) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$; в) $\sqrt{11}-\sqrt{7}$; г) $\sqrt[3]{5}+1$; д) $\sqrt[5]{81}+2\sqrt[5]{27}+4\sqrt[5]{9}+8\sqrt[5]{3}+16$; е) $\frac{1}{5}(\sqrt[5]{16}-3\sqrt[5]{8}+9\sqrt[5]{4}-27\sqrt[5]{2}+81)$; є) $(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+9)$; ж) $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+9)$. **3.** Так. Для цього слід розглянути многочлени $g(x)$ і $h(x) = x^2-2$. Вони взаємно прості. Тому існують многочлени з раціональними коефіцієнтами $u(x)$ і $v(x)$ такі, що $1 = g(x)u(x)+h(x)v(x)$. Підставимо у цю рівність $x = \sqrt{2}$. Отримаємо $1 = g(\sqrt{2})u(\sqrt{2})$ і $\frac{1}{g(\sqrt{2})} = u(\sqrt{2})\in\mathbb{Q}$. Таким чином, у виразі $\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{f(\sqrt{2})}{g(\sqrt{2})} = f(\sqrt{2})u(\sqrt{2})$ немає ірраціональності у знаменнику. **4.** Відповідь не зміниться і схема звільнення залишиться такою ж самою.

5. $-1-\omega_1$. **6.** $-(\sqrt[4]{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+2)$. **7.** а) $\frac{1}{44}(\sqrt{7}+\sqrt[4]{5})(7+\sqrt{5})$; б) $\frac{1}{4}(\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})(\sqrt[5]{8^4}+4\sqrt[5]{8^3}+16\sqrt[5]{8^2}+64\sqrt[5]{8}+256)$; в) $\frac{1}{44}(\sqrt{7}-\sqrt[4]{5})(7+\sqrt{5})$; г) $\frac{1}{4}(\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{2}\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})(\sqrt[5]{8^4}-4\sqrt[5]{8^3}+16\sqrt[5]{8^2}-64\sqrt[5]{8}+256)$; д) $\sqrt[3]{(5-2\sqrt{6})^2(5+2\sqrt{6})}$; е) $\frac{1}{23}\sqrt{1+2\sqrt{1-\sqrt{2}}}(3+4\sqrt{2})$.

8. а) Нехай ω_1,ω_2 – інші корені цього рівняння. Тоді $\frac{1}{1-\omega}=$ $=\frac{(1-\omega_1)(1-\omega_2)}{(1-\omega)(1-\omega_1)(1-\omega_2)}=\frac{1-\omega_1-\omega_2+\omega_1\omega_2}{1-\omega-\omega_1-\omega_2+\omega\omega_1+\omega\omega_2+\omega_1\omega_2-\omega\omega_1\omega_2}$. Але, за теоремою Вієта для даного рівняння, маємо $\omega+\omega_1+\omega_2=0$, $\omega\omega_1+\omega\omega_2+\omega_1\omega_2=-1$ та $\omega\omega_1\omega_2=1$. Тому $\frac{1}{1-\omega}=-1+(\omega_1+\omega_2)-\omega_1\omega_2$, причому ω_1,ω_2 є коренями рівняння $\frac{x^3-x-1}{x-\omega}=0$. Після виконання ділення рівняння має вид $x^2+\omega x+(\omega^2-1)=0$. За теоремою Вієта для цього рівняння отримуємо $\omega_1+\omega_2=-\omega$, $\omega_1\omega_2=\omega^2-1$. Таким чином, $\frac{1}{1-\omega}=-1-\omega-(\omega^2-1)=\omega^2-\omega$.

б) $-\frac{1}{4}(2\omega^3-3\omega^2+4\omega-7)$; в) $\frac{1}{255}\omega(\omega^2-1)(64\omega^3-16\omega^2+4\omega-257)$; г) $17\omega^2-3\omega+55$.

9. а) $\frac{1}{12}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30})$; б) $\frac{1}{12}(-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30})$; в) $\frac{1}{12}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30})$; г) $-\frac{1}{12}(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{30})$; д) $\frac{(a-b-c)\sqrt{a}+(b-a-c)\sqrt{b}+(c-a-b)\sqrt{c}+2\sqrt{abc}}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac}$; е) $\frac{(a-b-c)\sqrt{a}+(b-a-c)\sqrt{b}+(c-a-b)\sqrt{c}-2\sqrt{abc}}{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac}$. **10.** а) $-\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4}+3\sqrt[4]{2}+1$; б) $\frac{1}{6}(\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+4)$; в) $\frac{1}{33}(-\sqrt[3]{49}+5\sqrt[3]{7}+8)$; г) $\frac{1}{93}(-2\sqrt[3]{4}+17\sqrt[3]{2}-5)$.

11. а) $\frac{1}{9}(\sigma_1^2-3\sigma_2)(4\sqrt[3]{9}+6\sqrt[3]{3}+9)$, де $\sigma_1=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4},\sigma_2=\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}+2$; б) $\frac{1}{649}(\sigma_1^2-3\sigma_2)(36\sqrt[3]{9}-6\sqrt[3]{3}+9)$, де $\sigma_1=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4},\sigma_2=\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{12}-2$; в) $\frac{(\sigma_1^2-3\sigma_2)((a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2})}{(a+b+c)^3-27abc}$, де $\sigma_1=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c},\sigma_2=\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ac}$; г) $\frac{(\sigma_1^2-3\sigma_2)((a+b-c)^2-3(a+b-c)\sqrt[3]{abc}-9\sqrt[3]{(abc)^2})}{(a+b+c)^3+27abc}$, де $\sigma_1=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c},\sigma_2=\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ac}$. **12.** а) $a+a^2+b^3-3ab=0$; б) $a^2p^3+aq^3+r^3-3apqr=0$; в) Позбавимося спочатку від квадратного кореня. Для цього помножимо обидві частини на вираз $\sqrt[3]{a}-\sqrt{b}+c=0$. Отримаємо $(\sqrt[3]{a}+c)^2-b=0,b>0$ або $(c^2-b)+2c\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2},b>0$. Покладемо тепер $x=c^2-b,y=2c\sqrt[3]{a},z=\sqrt[3]{a^2}$. З відомої формули для $s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$, з врахуванням того, що $\sigma_1=0$, отримаємо $s_3=3\sigma_3$. Повертаючись до старих змінних, маємо $(c^2-b)^3+2ac^3+a^2+6abc=0,b>0$; г) $ab=0$.

13. а) -10; б) 3; в) 4; г) $\sqrt{2}$. **14.** а) 1; б) 13; в) $(3+2\sqrt[4]{5})^2(9+4\sqrt{5})$; г) $\frac{1}{2}$. **15.** а) $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$; б) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; в) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; г) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$.

§ 3.8. Розв'язність алгебраїчних рівнянь у квадратних радикалах та побудовність за допомогою циркуля і лінійки

1. а) Так; б) ні. **2.** а) Ні; б) так. **3.** Тому, що кубічна резольвента і квадратні рівняння розв'язуються у радикалах. **4.** Нехай x – сторона шуканого квадрата і $r = 1$ – радіус даного круга. Тоді має виконуватися рівність $x^2 = \pi$. Але число π є трансцендентним і не виражається через раціональні числа у квадратних радикалах. Тому число $x = \sqrt{\pi}$ також не виражається через раціональні числа у квадратних радикалах і не може бути побудовним циркулем і лінійкою. **5.** Нехай $a = 1$ – ребро даного куба і x – ребро шуканого куба. Тоді має виконуватися рівність $x^3 = 2$. Але многочлен $f(x) = x^3 - 2$ незвідний у полі $\mathbb{Q}$. Отже, корені цього многочлена не виражаються через раціональні числа у квадратних радикалах і не можуть бути побудовними циркулем і лінійкою. **6.** Поясненя аналогічне поясненню до задачі № 1. **7.** Нехай побудовний правильний n-кутник. Якщо $k = 1$, то задача побудови правильного $(2n)$-кутника циркулем і лінійкою зводиться до задачі поділу кута на дві рівні частини, яка завжди розв'язується. Перехід від $(2^m \cdot n)$-кутника до $(2^{m+1}n)$-кутника здійснюється аналогічно. Тому, на підставі принципу математичної індукції, побудовним є будь-який правильний $(2^k \cdot n)$-кутник, якщо побудовний правильний n-кутник. **8.** Якщо побудовний правильний $(m \cdot k)$-кутник, то візьмемо одну з його вершин і з'єднаємо її через $m - 1$ вершину послідовно. Отримаємо правильний k-кутник. Якщо з'єднати цю вершину через $k - 1$ вершин послідовно, то отримаємо правильний m-кутник. **9.** Задача поділу кола на 3 і 4 рівні частини рівносильна побудові циркулем і лінійкою коренів рівнянь $x^3 - 1 = 0$ і $x^4 - 1 = 0$ відповідно. Оскільки корені цих рівнянь виражаються у квадратних радикалах через раціональні числа, то їх можна побудувати циркулем і лінійкою. **10.** Відомо, що правильний трикутник можна побудувати циркулем і лінійкою. Таким чином, задача побудови правильного дев'ятикутника рівносильна задачі поділу кута 120^0 на три рівні частини. **11.** а) Так; б) так; в) ні; г) так; д) ні; е) так; є) так; ж) так.

12. Задача поділу кола на 5 рівних частин рівносильна побудові циркулем і лінійкою коренів рівняння $x^5 - 1 = 0$. Одним з цих коренів є число 1, а решта коренів є коренями рівняння $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Останнє рівняння перетворимо так: $(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1) = 0$. Всі корені останнього рівняння виражаються у квадратних радикалах і є побудовними циркулем і лінійкою. Аналогічно розглядається задача поділу кола на 6 рівних частин. **13.** Задача поділу кола на 7 рівних частин рівносильна побудові циркулем і лінійкою коренів рівняння $x^7 - 1 = 0$. Одним з цих коренів є число 1, а решта коренів є коренями рівняння $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Введемо заміну $x + \frac{1}{x} = y$. Отримаємо рівняння $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$. Це рівняння не має раціональних коренів і не розв'язується у квадратних радикалах. Тому і вихідне рівняння не розв'язується у квадратних радикалах. Таким чином, коло не можна поділити циркулем і лінійкою на 7 рівних частин. **14.** Шуканим рівнянням є $x^{10} - 1 = 0$.

15. Задача поділу кола на 11 рівних частин рівносильна побудові циркулем і лінійкою коренів рівняння $x^{11}-1=0$. Одним з цих коренів є число 1, а решта коренів є коренями рівняння $x^{10}+x^9+\cdots+x^3+x^2+x+1=0$. Запишемо ліву частину цього рівняння як суму членів геометричної прогресії: $x^{10}+x^9+\cdots+x^3+x^2+x+1=\frac{x^{11}-1}{x-1}$. Введемо заміну $x=y+1$. Отримаємо послідовно рівняння $\frac{(y+1)^{11}-1}{y}=0$, $y^{10}+11y^9+C_{11}^2y^8+\cdots+C_{11}^9y+C_{11}^{10}=0$ та $y^{10}+11y^9+55y^8+\cdots+55y+11=0$. За критерієм Єйзенштейна многочлен, який стоїть у лівій частині рівняння є незвідним у полі раціональних чисел. Тому таким є і многочлен $f(x)=x^{10}+x^9+\cdots+x^3+x^2+x+1$. Оскільки степінь 10 цього многочлена не можна записати у виді 2^m, то його корені не виражаються у квадратних радикалах. Таким чином, коло не можна поділити циркулем і лінійкою на 11 рівних частин.

24. Задача поділу кута α на три рівні частини зводиться до задачі про можливість вираження у квадратних радикалах через раціональні числа коренів рівняння $4x^3-3x-a=0$, де $a=\cos\alpha$. а) В цьому випадку згадане вище рівняння набуває вигляду $4x^3-3x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$, а його корені виражаються у квадратних радикалах через раціональні числа (одним з них є число $-\frac{\sqrt{2}}{2}$) і їх можна побудувати циркулем і лінійкою. Випадки б), в) і г) розглядаються аналогічно. **26.** а) Для кута 60^0 відповідне рівняння є таким $4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$. Його корені не виражаються у квадратних радикалах через раціональні числа і їх не можна побудувати циркулем і лінійкою. Випадки б), в) і г) розглядаються аналогічно.

Основні позначення

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множина всіх натуральних чисел

$\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел

$\mathbb{Z}^+$ — множина всіх цілих додатних чисел

$n\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, які діляться на натуральне n

$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$ — множина всіх цілих гауссових чисел

$\mathbb{Z}[\sqrt[m]{n}] = \{a + b\sqrt[m]{n} | a, b, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/n$ — кільце класів лишків за модулем n

$\mathbb{Q}$ — множина всіх раціональних чисел

$\mathbb{Q}^+$ — множина всіх додатних раціональних чисел

$\mathbb{Q}_p = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, (p, n) = 1\}$

$\mathbb{Q}[\sqrt[m]{n}] = \{a + b\sqrt[m]{n} | a, b \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел

$D_k = \{a_1 \cdot k^{r_1} + a_2 \cdot k^{r_2} + \cdots + a_n \cdot k^{r_n} | k, n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in \mathbb{Z} \wedge r_i \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\}$

$\mathbb{C}$ — множина всіх комплексних чисел

K — кільце

P — поле

$K \times L$ — прямий добуток кілець K і L

$K[x]$ — кільце многочленів від однієї змінної над областю цілісності K

$P[x]$ — кільце многочленів від однієї змінної над полем P

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in K$ – канонічна форма запису многочлена від однієї змінної над областю цілісності K

$N_0 = 1 + \frac{A}{|a_n|}$, де $A = max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$ і a_i – коефіцієнти многочлена

$N_1 = 1 + \frac{2A}{|a_n|}$, де $A = max\{|a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$ і a_i – коефіцієнти многочлена

$\deg f(x)$ — степінь многочлена $f(x)$

$K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — кільце многочленів від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над областю цілісності K

$P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — кільце многочленів від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P

$K(x)$ — поле часток області цілісності $K[x]$

$K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — поле часток області цілісності $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

K^* — мультиплікативна група кільця K (множина всіх дільників одиниці кільця K)

$M(n, \mathbb{R})$ — множина всіх матриць n-го порядку над полем $\mathbb{R}$

K/I — фактор-кільце кільця K за ідеалом I

$f(x) + I$ — клас лишків кільця $K[x]$ з представником $f(x)$ за ідеалом I

$C_{[a,b]}$ — множина всіх функцій від однієї змінної, неперервних на відрізку $[a,b]$

(a) — головний ідеал кільця K, породжений елементом $a \in K$

$(\{a,b\}) = (a,b)$ — найменший ідеал кільця K, який містить елементи $a, b \in K$

$a \equiv b \pmod{I}$ — елементи a і b кільця K, конгруентні за ідеалом I

$f(x) \vdots g(x)$ — многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$

НСД$(f(x), g(x)) = (f(x), g(x))$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$

НСК$(f(x), g(x)) = [f(x), g(x)]$ — найменше спільне кратне многочленів $f(x)$ і $g(x)$

$\mathrm{Ker} f$ — ядро гомоморфізму f

$f'(x)$ — похідна многочлена $f(x)$

$\Phi_n(x)$ — многочлен ділення кола

$\frac{f(x)}{g(x)}$ — раціональний дріб з поля часток $P(x)$

$\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{g(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ — раціональний дріб з поля часток $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — основні (елементарні) симетричні многочлени від n змінних

$o(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \ldots, x_n^{k_n})$ — моногенний многочлен (орбіта), породжений членом $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ у кільці $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

$R(f, g)$ — результант многочленів $f(x)$ і $g(x)$

$D(f)$ — дискримінант многочлена $f(x)$

$f, f', F_1, F_2, \ldots, F_m$ — ряд многочленів Штурма

$P(\alpha)$ — просте розширення поля P за допомогою числа α

$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — складене розширення поля P за допомогою чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ – сума n членів геометричної прогресії з першим членом a_1 і знаменником q

Предметний показчик

Степеневі суми

Нехай $s_n(x,y) = x^n + y^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

Для всіх $k > 2$ має місце рекурентне співвідношення

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}.$$

Крім того, ці степеневі суми виражаються через елементарні симетричні многочлени $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$ так:

$$\begin{aligned}
s_0 &= 2;\\
s_1 &= \sigma_1;\\
s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2;\\
s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2;\\
s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2;\\
s_5 &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2;\\
s_6 &= \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3.\\
s_7 &= \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3;\\
s_8 &= \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4;\\
s_9 &= \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4;\\
s_{10} &= \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5.
\end{aligned}$$

Нехай $s_n(x,y,z) = x^n + y^n + z^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

Для всіх $k > 3$ має місце рекурентне співвідношення

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

Крім того, ці степеневі суми виражаються через елементарні симетричні многочлени $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$ так:

$$\begin{aligned}
s_0 &= 3;\\
s_1 &= \sigma_1;\\
s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2;\\
s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3;\\
s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3;\\
s_5 &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3;\\
s_6 &= \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 5\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2.\\
s_7 &= \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_1^4\sigma_2 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3;\\
s_8 &= \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 + 8\sigma_1^5\sigma_3 - 32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_1^2\sigma_3^2 +\\
&\quad +24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2;\\
s_9 &= \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4 + 9\sigma_1^6\sigma_3 - 45\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 +\\
&\quad +54\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 + 18\sigma_1^3\sigma_3^2 - 9\sigma_2^3\sigma_3 - 27\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 3\sigma_3^3;\\
s_{10} &= \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5 + 10\sigma_1^7\sigma_3 -\\
&\quad -60\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3 + 100\sigma_1^3\sigma_2^2\sigma_3 + 25\sigma_1^4\sigma_3^2 - 40\sigma_1\sigma_2^3\sigma_3 - 60\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 +\\
&\quad +10\sigma_1\sigma_3^3 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2.
\end{aligned}$$

Моногенні многочлени

У кільці $K[x,y]$:

$$
\begin{aligned}
o(x) &= \sigma_1;\\
o(x^2) &= s_2(x,y);\\
o(x^3) &= s_3(x,y);\\
\ldots & \ldots \quad \ldots\\
o(x^n) &= s_n(x,y), \quad n \in \mathbb{N};\\
o(xy) &= \sigma_2;\\
o(x^2y) &= \sigma_1\sigma_2;\\
o(x^3y) &= \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2;\\
o(x^2y^2) &= \sigma_2^2;\\
o(x^4y) &= \sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2;\\
o(x^3y^2) &= \sigma_1\sigma_2^2;\\
o(x^5y) &= \sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2;\\
o(x^4y^2) &= \sigma_1^2\sigma_2^2\ ;\\
o(x^3y^3) &= \sigma_2^3.
\end{aligned}
$$

У кільці $K[x,y,z]$:

$$
\begin{aligned}
o(x) &= \sigma_1;\\
o(x^2) &= s_2(x,y,z);\\
o(x^3) &= s_3(x,y,z);\\
\ldots & \ldots \quad \ldots\\
o(x^n) &= s_n(x,y,z), \quad n \in \mathbb{N};\\
o(xy) &= \sigma_2;\\
o(x^2y) &= \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3;\\
o(x^3y) &= \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3;\\
o(x^2y^2) &= \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3;\\
o(x^4y) &= \sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3;\\
o(x^3y^2) &= \sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3;\\
o(x^5y) &= \sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2_2^3 - 3\sigma_3^2;\\
o(x^4y^2) &= \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_2^3 - 3\sigma_3^2;\\
o(x^3y^3) &= \sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3;\\
o(xyz) &= \sigma_3 + 3\sigma_3^2;\\
o(x^2yz) &= \sigma_1\sigma_3;\\
o(x^2y^2z) &= \sigma_1\sigma_2;\\
o(x^2y^2z^2) &= \sigma_3^2.
\end{aligned}
$$

Канонічний розклад над полем $\mathbb{R}$ многочленів $f(x) = x^n - 1$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1).\\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1).\\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1).\\
x^5 - 1 &= (x-1)(x^2+\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1)(x^2+\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1).\\
x^6 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).\\
x^7 - 1 &= (x-1)(x^2-2\cos\tfrac{2\pi}{7}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{4\pi}{7}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{6\pi}{7}x+1).\\
x^8 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).\\
x^9 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)(x^2-2\cos\tfrac{2\pi}{9}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{4\pi}{9}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{8\pi}{9}x+1).\\
x^{10} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1)(x^2+\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1)(x^2-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1).\\
x^{11} - 1 &= (x-1)(x^2-2\cos\tfrac{2\pi}{11}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{4\pi}{11}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{6\pi}{11}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{8\pi}{11}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{10\pi}{11}x+1).\\
x^{12} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+1)\cdot\\
&\quad (x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1).\\
x^{13} - 1 &= (x-1)(x^2-2\cos\tfrac{2\pi}{13}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{4\pi}{13}x+1)\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{4\pi}{13}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{8\pi}{13}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{10\pi}{13}x+1)\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{12\pi}{13}x+1).\\
x^{14} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2-2\cos\tfrac{\pi}{7}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{2\pi}{7}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{3\pi}{7}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{4\pi}{7}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{5\pi}{7}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{6\pi}{7}x+1).\\
x^{15} - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)(x^2+\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1)(x^2+\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{2\pi}{15}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{4\pi}{15}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{8\pi}{15}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{14\pi}{15}x+1).\\
x^{16} - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2+2\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}}x+\sqrt{2})(x^2-2\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}}x+\sqrt{2})\cdot\\
&\quad (x^2+2\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}}x-1)(x^2-2\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}}x-1).\\
x^{17} - 1 &= (x-1)(x^2-2\cos\tfrac{2\pi}{17}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{4\pi}{17}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{6\pi}{17}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{8\pi}{17}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{10\pi}{17}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{12\pi}{17}x+1)\cdot\\
&\quad (x^2-2\cos\tfrac{12\pi}{17}x+1)(x^2-2\cos\tfrac{14\pi}{17}x+1).
\end{aligned}
$$

Алфавіти

Латинський алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
Aa	а	Nn	ен
Bb	бе	Oo	о
Cc	це	Pp	пе
Dd	де	Qq	ку
Ee	е	Rr	ер
Ff	еф	Ss	ес
Gg	же	Tt	те
Hh	аш	Uu	у
Ii	і	Vv	ве(фау)
Jj	йот	Ww	ве
Kk	ка	Xx	ікс
Ll	ель	Yy	ігрек
Mm	ем	Zz	зет(цет)

Грецький алфавіт

Букви	Назви букв	Букви	Назви букв
$A\alpha$	альфа	$N\nu$	ні
$B\beta$	бета	$\Xi\xi$	ксі
$\Gamma\gamma$	гама	Oo	омікрон
$\Delta\delta$	дельта	$\Pi\pi$	пі
$E\varepsilon$	епсилон	$P\rho$	ро
$Z\zeta$	дзета	$\Sigma\sigma$	сигма
$H\eta$	ета	$T\tau$	тау
$\Theta\theta$	тета	$\Upsilon\upsilon$	іпсилон
$I\iota$	йота	$\Phi\varphi$	фі
$K\kappa$	капа	$X\chi$	хі
$\Lambda\lambda$	ламбда	$\Psi\psi$	псі
$M\mu$	мі	$\Omega\omega$	омега

Література

[1] Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1974.– Ч.1.– 464 с.

[2] Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – К.: Вища школа, 1976.–Ч. 2.– 402 с.

[3] Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел.– М.: Высшая школа, 1979.– 559 с.

[4] Кулик В.Т., Рокіцький І.О. Алгебра. Оглядові лекції до державних екзаменів.– Вінниця.: педуніверситет, 1999.– 249 с.

[5] Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум.– К.: Вища школа, 1983.–Ч. 1.– 232 с.

[6] Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. – К.: Вища школа, 1986.– Ч. 2.–264 с.

[7] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре.– М.: Просвещение, 1993.– 288 с.

[8] Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел.– Минск: Высшейшая школа, 1982.– 233 с.

[9] Кострикин А.И. Сборник задач по алгебре.– М.: Факториал, 1995.– 454 с.

[10] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.– 288 с.

[11] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.– М.: Наука, 1974.– 384 с.

[12] Збірник задач з теорії чисел. За редакцією Рокіцького І.О..– Вінниця.: ВДПУ, 2001.– 116 с.

[13] Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. – М.: Наука, 1967.– 283 с.

[14] Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Задачі міжнародних математичних олімпіад.– Л.: Євросвіт, 1999.– 128 с.

[15] Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. – М.: Просвещение, 1980.– 174 с.

[16] Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады.– М.: Просвещение, 1986.–302 с.

[17] Збірник задач з алгебри. За редакцією Рокіцького І.О.– Вінниця.: ВДПУ, 2002.–Ч.1.– 176 с.

[18] Збірник задач з алгебри. За редакцією Рокіцького І.О.– Вінниця.: ВДПУ, 2003.–Ч.2.– 200 с.

Гарвацький Володимир Сергійович

Кулик Володимир Тихонович

Рокіцький Іван Олександрович

Рокіцький Ростислав Іванович

ЗБІРНИК
задач з теорії многочленів

Виготовлено з оригінал-макету в Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського, 21100, м. Вінниця, вул. Острозького, 32.

Зам. _________Тираж_________ ______________________

Друк: ТОВ фірма "Планер"
21050, м. Вінниця, вул. Визволення, 2/18
тел.52-08-64,52-08-65,35-73-06