Задачі для студентів з курсу «Теорія і практика математичних олімпіад»

Тема 1. «Доведення від супротивного і принцип Діріхле. Узагальнений принцип Діріхле».

Задача 1. а) В класі 35 учнів. Доведіть, що серед них знайдуться хоча б двоє, у яких прізвище починається з однієї літери.

б) При якій найменшій кількості учнів в школі серед них обов'язково знайдуться двоє, у яких день і місяць народження співпадають?

Задача 2. На 25 сторінках книжки 102 помилки. Доведіть, що на одній з них не менше п'яти помилок.

Задача 3. В мішку лежать 4 червоні і 2 сині кульки. Яку найменшу кількість кульок потрібно витягнути не дивлячись, щоб серед них точно були такі кульки: а) 1 червона; б) 1 синя; в) 1 синя і 1 червона; г) дві однокольорові?

Задача 4. У людини на голові не більше ніж 500 000 волосин, а в Києві більше 2 500 000 жителів. Доведіть, що знайдуться 5 киян з однаковою кількістю волосин на голові.

Задача 5. В школі 65 восьмикласників, і всі вони складають по три іспити, за кожний з яких можна одержати 2, 3, 4 або 5. Чи правда, що знайдуться два школярі, які отримали однакові оцінки на всіх іспитах?

Задача 6. 34 пасажири їдуть в автобусі, який робить 9 зупинок і на цих зупинках нові пасажири не заходять. Доведіть, що на якихось двох зупинках вийде однакова кількість пасажирів (можливо, жодного).

Тема 2. «Пошук інваріанту як метод розв'язування задач. Парність як інваріант. Розфарбування як інструмент знаходження інваріанту».

Задача 7. З шахової дошки вирізали дві клітинки — $a1$ і $h8$. Чи можна решту частину дошки покрити 31-єю доміношкою так, щоб кожна покривала рівно дві клітинки дошки?

Задача 8. Чи можна ходом коня пройти всі клітини шахівниці, почавши з клітинки $a1$, закінчивши в клітинці $h8$ і побувавши на кожній клітинці рівно по одному разу?

Задача 9. У Васі в колекції 20 дисків з фільмами, а у Маші — 40. Вони обмінюються між собою деякими дисками. Чи могло через деякий час трапитися так, що в колекції у Васі 28 дисків, а у Маші — 34 диска?

Задача 10. В прямокутній таблиці $m \times n$ розставлено числа так, що суми чисел в кожному рядочку і кожному стовпчику однакові і не дорівнюють нулю. Доведіть, що $m = n$.

Задача 11. Хулігани Костя і Максим рвуть газету, причому Костя рве кожний шматок, що йому трапляється на 4 частини, а Максим — на 7 частин. На наступний день знайшли 2013 шматків. Чи усі шматки були знайдені?

Задача 12. В квадраті 3×3 розставлено плюси та мінуси. За 1 крок можна змінити всі знаки в будь-якому рядочку чи в будь-якому стовпчику на протилежні. Чи можна за кілька кроків отримати таблицю з одних плюсів, якщо початкове розташування знаків таке:

+	−	−
−	−	−
−	−	−

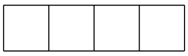
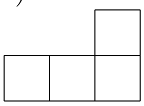
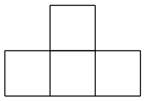
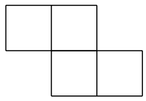
−	+	−
+	−	+
−	+	−

+	−	+
−	+	−
+	+	+

Задача 13. В таблиці 8×9 в чорний колір пофарбовано рівно одну клітину, решта — білі. За один крок дозволяється перефарбувати усі клітини в одному «хресті» (об'єднанні одного рядка і одного стовпця) в протилежний колір. Чи можна досягнути того, щоб через кілька кроків усі клітини стали білими?

Задача 14. Круг розділено на 6 секторів, в кожному з яких стоїть фішка. Дозволяється за один хід зсунути будь-які дві фішки в сусідні з ними сектори. Чи можна з допомогою таких дій зібрати усі фішки в одному секторі?

Задача 15. Доведіть, що шахову дошку 8×8 не можна замостити 15 фігурками виду а) і однією фігуркою виду б).

а)  б)  в)  г) 

Задача 16. Доведіть, що дошку 10×10 не можна замостити фігурками виду в) (див. попередню задачу).

Задача 17. Доведіть, що фігурками виду а) не можна замостити дошку: а) 10×10; б) 102×102.

Задача 18. Дно прямокутної коробки вимощено плитками 1×4 і 2×2. Плитки висипали з коробки і одна плитка 2×2 загубилась. Її замінили плиткою 1×4. Чи вдасться тепер замостити дно коробки?

Задача 19. Чи можна розрізати дошку 10×10 на 25 фігурок виду б)?

Задача 20. Чи можна розрізати дошку 10×10 на 25 фігурок виду г)?

Задача 21. З квадратної дошки вирізали одну клітинку. Чи можна решту частину дошки розрізати на кутики з трьох клітинок, якщо сторона квадрата: а) 24 б) 4; в) 8; г) 2^n?

Задача 22. В кожній клітинці дошки 7×7 сидить жук. В деякий момент часу всі жуки одночасно переповзають на сусідні (по горизонталі чи вертикалі) клітини. Доведіть, що після цього залишиться хоча б одна порожня клітинка. Чи може така клітинка бути рівно одна?

Тема 3. «Методи розв'язування задач комбінаторного характеру. Пошук бієкції. Принцип включень-виключень. Прийом «Кулі і перегородки»».

Задача 23. Скількома способами можна розставити на шаховій дошці білого і чорного королів так, щоб вони не били один одного?

Задача 24. В країні є 20 міст. Кожне місто з кожним з'єднане авіалінією. Скільки всього авіаліній в цій країні?

Задача 25. Скільки існує п'ятицифрових чисел, у яких усі цифри — парні?

Задача 26. Скільки існує п'ятицифрових чисел, в запису яких є хоча б одна парна цифра?

Задача 27. Скількома способами можна переставити букви в слові «математика»?

Задача 28. Скільки існує найкоротших шляхів з точки $(0;0)$ в точку $(4;3)$, якщо рухатись можна лише вздовж ліній координатної сітки?

Задача 29. Розглядаються усі прямокутники, довжини сторін яких виражено натуральними числами. Яких прямокутників більше: з периметром, який дорівнює 1000, чи з периметром, який дорівнює 1002?

Задача 30. Є шість коробок, занумерованих числами від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цим коробкам 10 однакових куль так, щоб жодна з коробок не була порожньою.?

Задача 31. Є шість коробок, занумерованих числами від 1 до 6. Скількома способами можна розкласти по цим коробкам 10 однакових куль (деякі коробки можуть бути порожніми)?

Задача 32. В кіоску продаються листівки 10 видів. Скількома способами можна в цьому кіоску придбати: а) 12 листівок; б) 8 листівок; в) 8 різних листівок?

Тема 4. «Оцінка плюс приклад».

Задача 33. Яку найбільшу кількість n тур можна розставити на шахівниці 8×8 так, щоб вони не знаходились під боєм одна одної?

- Наведіть приклад розташування n тур.
- Доведіть, що приклада розташування для $n+1$ тури не існує.
- (Bonus) Скільки існує прикладів розташування n тур, що не б'ють одна одну, на дошці 8×8?

Задача 34. Яку найбільшу кількість n королів можна розставити на шахівниці 8×8 так, щоб вони не знаходились під боєм одна одної?

- Наведіть приклад розташування n королів.
- Доведіть, що приклада розташування для $n+1$ короля не існує.
- (Bonus) Чи існують кілька різних прикладів розташування n королів, що не б'ють один одного, на дошці 8×8?

Задача 35. Яку найбільшу кількість n слонів можна розставити на шахівниці 8×8 так, щоб вони не знаходились під боєм одна одної?

- Наведіть приклад розташування n слонів.
- Доведіть, що приклада розташування для $n+1$ слона не існує.
- (Bonus) Наведіть три різні приклади розташування n слонів на дошці 8×8, що не б'ють один одного.

Задача 36. Яку найбільшу кількість n коней можна розставити на шахівниці 8×8 так, щоб вони не знаходились під боєм однин одного?

- Наведіть приклад розташування n коней.
- Доведіть, що прикладу розташування для $n + 1$ коня не існує.
- (Bonus) Наведіть два різні приклади розташування n коней на дошці 8×8, що не б'ють один одного.

Задача 37. Яку найбільшу кількість n королев (ферзів) можна розставити на шахівниці 8×8 так, щоб вони не знаходились під боєм одна одної?

- Наведіть приклад розташування n королев.
- Доведіть, що приклада розташування для $n + 1$ королев не існує.
- (Bonus) Наведіть два різні приклади розташування n королев на дошці 8×8, що не б'ють одна одну.

Задача 38. В класі 25 учнів. Відомо, що у будь-яких двох дівчаток класу кількість друзів-хлопчиків з цього класу не співпадає. Яка найбільша кількість дівчат може бути в цьому класі?

Задача 39. Новорічна гірлянда, яка висить вздовж шкільного коридору, складається з червоних і синіх лампочок. Поряд з кожною червоною лампочкою обов'язково є синя. Яка найбільша кількість лампочок може бути в гірлянді, якщо всього лампочок 50?

Задача 40. Клітчастий прямокутник 19×20 клітин розрізаний на кілька квадратів (всі розрізи йдуть по лініям сітки). Яка найменша кількість квадратів з непарною стороною може виявитись серед них?

Тема 5. Задачі на пошук стратегій в математичних іграх.

Задача 41. Двоє гравців грають в таку гру. Перший гравець називає натуральне число, яке не перевищує 10, потім другий гравець додає до нього натуральне число, яке не перевищує 10, потім те ж саме робить перший гравець і т. д. Виграє той, хто після свого ходу дістане число 100. У кого з гравців є виграшна стратегія?

Задача 42. Є поле у вигляді квадрата 3×3. Два гравці по черзі записують в порожні клітини натуральні числа від 1 до 9. Числа в таблиці не повинні повторюватися. Той гравець, після ходу якого в рядку, стовпчику або одній з двох діагоналей сума усіх трьох записаних чисел дорівнює 15, виграє. Якщо після заповнення всієї таблиці немає гравця, який виграв, то фіксується нічия. Чим закінчиться гра при правильній грі супротивників?

Задача 43. Є дві купки камінців: в одній 20, а в іншій — 30. За один хід дозволяється взяти довільну кількість камінців, але лише з однієї купки. Програє той, хто не може зробити хід. У кого з гравців є виграшна стратегія? В чому вона полягає?

Задача 44. Двоє гравців по черзі ставлять шахових королів в клітини дошки 5×5 так, щоб вони не знаходилися під боєм один одного (колір королів неважливий). Хто не зможе зробити хід — той програє. Хто і як може виграти в цій грі: перший чи другий гравець?

Задача 45. Двоє гравців по черзі ставлять шахових слонів в клітини дошки 8×8 так, щоб вони не знаходилися під боєм один одного (колір слонів неважливий). Хто не зможе зробити хід — той програє. Хто і як може виграти в цій грі: перший чи другий гравець?

Задача 46. Двоє гравців по черзі ставлять шахових коней в клітини дошки 8×8 так, щоб вони не знаходилися під боєм один одного (колір коней неважливий). Хто не зможе зробити хід — той програє. Хто і як може виграти в цій грі: перший чи другий гравець?

Задача 47. Дана клітчаста дошка 10×10. За один хід дозволяється покрити довільні дві сусідні клітини доміношкою 2×1 так, щоб доміношки не перекривалися. Програє той гравець, який не може зробити хід. Хто з гравців виграє при правильній грі: той, хто розпочинає, чи його партнер?

Задача 48. Двоє гравців по черзі ламають шоколадку 6×8. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розлом будь-якого шматка вздовж заглиблень. Програє той гравець, який не може зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу?

Задача 49. Двоє хлопчиків по черзі записують цифри k-цифрового числа: першу цифру пише перший, другу — другий, третю — знову перший і т.д. Чи може другий хлопчик досягнути того, щоб отримане число ділилось на 9, якщо перший гравець заважає йому це зробити?

Задача 50. У рядок записано числа 1, 2, 3, …, 20, 21. Два гравці — Михайлик і Андрійко — грають у таку гру. Гравець своїм ходом викреслює будь-яке із ще не викреслених чисел. Гра триває доти, доки не залишаться два числа. Якщо сума цих чисел ділиться на 5, то перемагає Михайлик, за інших умов — Андрійко. Розпочинає Михайлик. Хто переможе при правильній грі?

Тема 6. Принцип крайнього

Задача 51. Чи можна розставити в усіх вершинах куба натуральні числа так, щоб число в кожній з вершин дорівнювало сумі чисел в трьох вершинах, які з'єднано з нею ребрами?

Задача 52. Вздовж кола розставили 10 чисел так, що кожне число виявилось рівним середньому арифметичному своїх сусідів. Доведіть, що усі ці 10 чисел однакові.

Задача 53. На площині розташовано 10 різних точок. Доведіть, що можна нарисувати п'ять відрізків з кінцями в даних точках так, щоб одержані відрізки не мали спільних точок.

Задача 54. На кожній з 15 планет, відстані між якими попарно різні, знаходиться по астроному, який спостерігає найближчу до нього планету. Доведіть, що за деякою планетою ніхто не спостерігає.

Задача 55. На столі лежать монети. Чи обов'язково можна зняти якусь монету зі столу, не зачепивши при цьому інші монети?

Задача 56. Доведіть, що круги, які побудовані на сторонах опуклого чотирикутника як на діаметрах, повністю покривають цей чотирикутник.

Задача 57. Всередині круга радіуса 1 обрано вісім точок. Доведіть, що деякі дві точки знаходяться на відстані меншій за 1.

Тема 7. Методи розв'язування арифметичних задач і задач з теорії чисел.

Задача 58. Цифру 9, із якої починається трицифрове число, перенесли на кінець числа. Нове число на 216 менше, ніж попереднє. Яким було початкове число?

Задача 59. До деякого числа праворуч дописали 6, і воно збільшилося у 13 разів. Яке це число?

Задача 60. До деякого числа ліворуч приписали 3, і воно збільшилося у 9 разів. Яке це число?

Задача 61. Деяке шестицифрове число починається цифрою 1. Якщо цю цифру закреслити і дописати одиницю праворуч, то одержимо втричі більше число. Знайдіть початкове число.

Задача 62. Знайдіть усі числа, які не перевищують 1000, і кожне з яких у 12 разів більше від суми своїх цифр.

Задача 63. Множення на 9 змінює порядок цифр деякого чотирицифрового числа на протилежний. Яке це число?

Задача 64. Знайдіть дві останні цифри числа 2^{2000}.

Тема 8. Евристичні прийоми доведення нерівностей. Використання нерівності Коші; нерівності Коші–Буняковського–Шварца; реверсного методу.

Задача 65. Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $a + b = 1$. Доведіть, що

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

Задача 66. Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^4}{a^3} \geqslant -a + 2b + 2c.$$

Задача 67. Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Доведіть нерівність

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Задача 68. Доведіть, що коли $a + b + c = 3$, то

$$\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1} \leqslant 6.$$

Задача 69. Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, причому $a + b = 1$. Доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+a} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Задача 70. Доведіть нерівність для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$\text{а)}\ \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c.$$

$$\text{б)}\ \frac{a^4}{b^3} + \frac{b^4}{c^3} + \frac{c^4}{a^3} \geqslant a + b + c.$$

$$\text{в)}\ \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Задача 71. Доведіть нерівність для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$\frac{a^2}{b + 2c} + \frac{b^2}{c + 2a} + \frac{c^2}{a + 2b} \geqslant \frac{a + b + c}{3}.$$

Задача 72. Доведіть нерівність для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$\frac{a^3}{b + c} + \frac{b^3}{c + a} + \frac{c^3}{a + b} \geqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Задача 73. Доведіть нерівність для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a + b + c = 3$:

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задача 74. Доведіть нерівність для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geqslant \frac{a + b + c}{3}.$$

Тема 9. Базові відомості з теорії графів в задачах математичних олімпіад.

Задача 75. Чи можна на площині намалювати 9 відрізків так, щоб кожний відрізок перетинався рівно з трьома іншими?

Задача 76. В класі 30 учнів. Чи може бути так, що 9 з них мають по 3 друга (в ьому класі), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзів?

Задача 77. В деякій країні 15 міст, причому кожний з них з'єднано дорогами не менше як із сімома іншими містами. Доведіть, що з будь-якого міста можна дістатись до будь-якого іншого (можливо, проїжджаючи повз інші міста), тобто доведіть, що граф доріг є зв'язним.

Задача 78. В деякій країні 30 міст, причому кожний з них з'єднано дорогою з кожним іншим. Яку найбільшу кількість доріг можна закрити на ремонт так, щоб з кожного міста можна було проїхати до кожного міста (можливо, проїжджаючи повз інші міста)?

Задача 79. В квадраті відмітили 20 точок і з'єднали їх відрізками, що не перетинаються, між собою і з вершинами квадрата так, що квадрат розбився на трикутники. Скільки стало цих трикутників?

Задача 80. Запишіть в рядок цифри від 1 до 9 так, щоб будь-яке число, яке складене із двох сусідніх цифр, ділилось або на 7, або на 13.