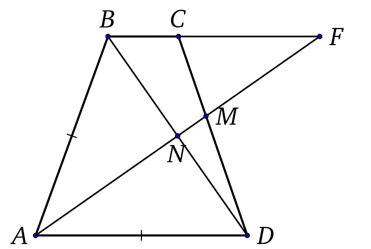
II Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи

II тур

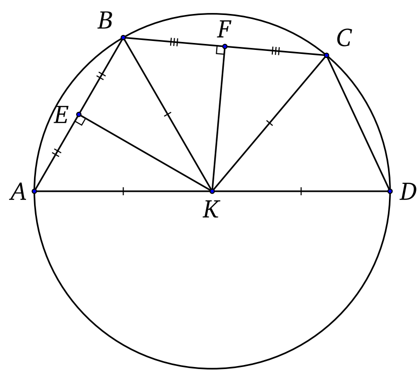
Задача 5. В трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка M лежить на стороні CD, причому $CM : MD = 2 : 3$, $AB = AD$, $BC : AD = 1 : 3$. Доведіть, що $BD \perp AM$.



Розв'язання. Нехай F — точка перетину AM і BC, N — точка перетину AM і BD. Трикутники CMF і DMA подібні, а тому $CF : AD = 2 : 3$. Нехай $BC = x$, тоді $AD = AB = 3x$, $CF = \frac{2}{3}AD = 2x$. Тоді трикутники BNF і DNA рівні за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Тому $BN = ND$. Таким чином, відрізок AN є медіаною рівнобедреного трикутника BAD, яка є і його висотою, тобто $AM \perp BD$, що і потрібно було довести.

Задача 6. У чотирикутнику $ABCD$ точки E, F і K — середини сторін AB, BC, AD відповідно. Відомо, що $KE \perp AB$, $KF \perp BC$, а кут $\angle ABC = 118°$. Знайдіть $\angle ACD$ (у градусах).

Розв'язання.



Оскільки KE — серединний перпендикуляр до відрізка AB, KF — серединний перпендикуляр до відрізка BC, то $KA = KB = KC$. Але $KA = KD$, тому K — центр кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$. $\angle ACD$ вписаний, що спирається на діаметр, тому є прямим.

Відповідь. $90°$.

Примітка. Умова $\angle ABC = 118°$ є зайвою.

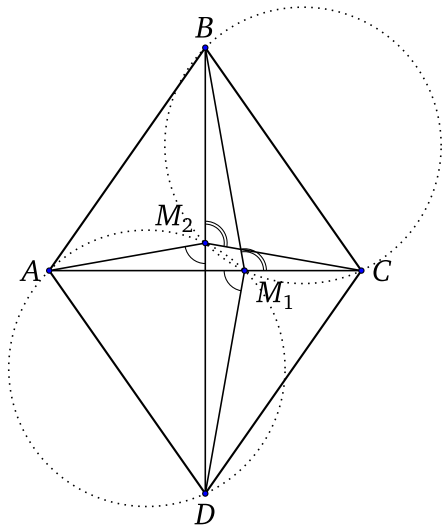
II Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи (поглиблене вивчення математики)

II тур

Задача 5. Точка M лежить всередині ромба $ABCD$. Відомо, що $\angle DAB = 110^\circ$, $\angle AMD = 80^\circ$, $\angle BMC = 100^\circ$. Чому може дорівнювати величина кута AMB?



Розв'язання. Помітимо, що геометричне місце точок M, з яких відрізок AD видно під кутом 80°, і які лежать по ту ж сторону від AD, що і точка B — це дуга кола, що проходить через точки A і D. Також геометричне місце точок M, з яких відрізок BC видно під кутом 100°, і які лежать по ту ж сторону від BC, що і точка A — це дуга кола, що проходить через точки B і C. Шукана точка M повинна лежати на перетині цих дуг. Таким чином, таких точок не може бути більше двох.

Покажемо дві точки, які задовольняють умові задачі. Перша точка M_1 лежить на діагоналі AC, причому $\angle BM_1C = 100^\circ$. Тоді $\angle BM_1A = 180^\circ - \angle BM_1C = 80^\circ$. Із рівності трикутників AM_1B і AM_1D випливає, що $\angle AM_1D = 80^\circ$, що і вимагається в умові.

Аналогічно друга точка M_2 лежить на діагоналі BD, причому $\angle BM_2C = 100^\circ$. В цьому випадку знаходимо: $\angle AM_2D = 80^\circ$, $\angle AM_2B = 100^\circ$.

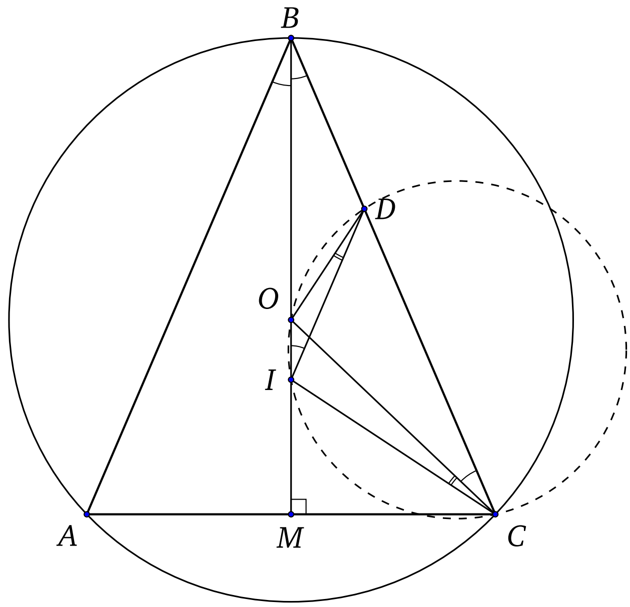
Залишається відмітити, що точки M_1 і M_2 є різними (вони лежать на різних діагоналях ромба і не співпадають із точкою перетину діагоналей) і лежать всередині ромба $ABCD$.

Відповідь. 80° або 100°.

Задача 6. Дано трикутник ABC, в якому $AB = BC$. Точка O — центр описаного кола, точка I — центр вписаного кола трикутника. Точка D лежить на стороні BC, причому прямі DI та AB паралельні. Доведіть, що прямі DO і CI перпендикулярні.

(*В'ячеслав Ясінський*)

Розв'язання. Нехай $\angle A = \angle C = \alpha$, тоді $\angle OBC = \angle ABO = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. З паралельності AB і DI випливає, що $\angle DIB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Крім того, з рівнобедреного трикутника BOC знаходимо, що $\angle BCO = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Таким чином, точки I, O, D, C лежать на одному колі.



Далі, $\angle BCI = \frac{\alpha}{2}$, тому $\angle OCI = \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}\alpha - 90^\circ$, а з циклічності точок I, O, D, C випливає, що і $\angle ODI = \frac{3}{2}\alpha - 90^\circ$. Також $\angle IDC = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\alpha$ (як зовнішній кут трикутника BDI). Маємо:

$$\angle ODC + \angle ICD = (\frac{3}{2}\alpha - 90^\circ) + (180^\circ - 2\alpha) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ,$$

а це і означає, що прямі DO і CI перпендикулярні.

Примітка. У випадку іншого розміщення точок O та I на прямій BM доведення проводиться аналогічними міркуваннями.

II Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

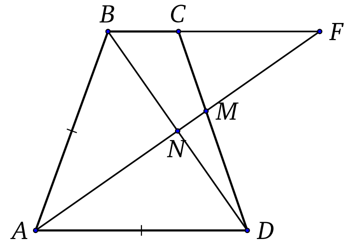
Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи

II тур

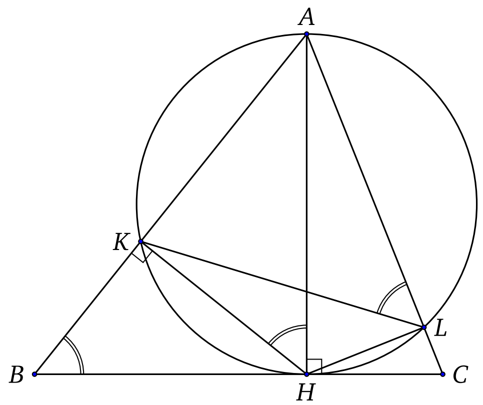
Задача 5. В трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка M лежить на стороні CD, причому $CM : MD = 2 : 3$, $AB = AD$, $BC : AD = 1 : 3$. Доведіть, що $BD \perp AM$.

Розв'язання. Нехай F — точка перетину AM і BC, N — точка перетину AM і BD. Трикутники CMF і DMA подібні, а тому $CF : AD = 2 : 3$. Нехай $BC = x$, тоді $AD = AB = 3x$, $CF = \frac{2}{3}AD = 2x$. Тоді трикутники BNF і DNA рівні за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Тому $BN = ND$. Таким чином, відрізок AN є медіаною рівнобедреного трикутника BAD, яка є і його висотою, тобто $AM \perp BD$, що і потрібно було довести.



Задача 6. AH — висота гострокутного трикутника ABC, K і L — основи перпендикулярів, опущених відповідно на сторони AB і AC з точки H. Доведіть, що кути BKC і BLC рівні.

Розв'язання. Точки A, K, H, L належать одному колу, оскільки $\angle AKH = \angle ALH = 90^\circ$, причому AH — діаметр цього кола, а BC — дотична до нього. Отже, $\angle ABH = \angle AHK = \angle KLA$. Тому $\angle KBC + \angle KLC = 180^\circ$, тобто точки B, K, L, C лежать на одному колі. Звідси і випливає, що $\angle BKC = \angle BLC$.



II Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

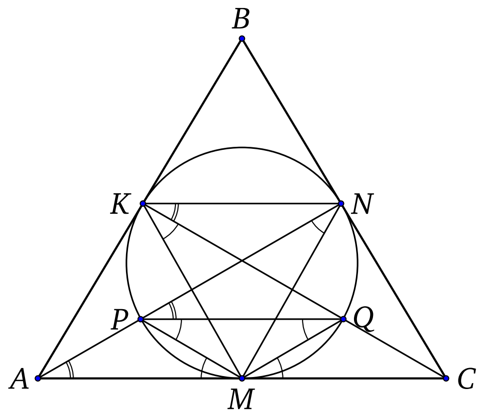
10–11 класи (поглиблене вивчення математики)

II тур

Задача 5. Вписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін AB, BC, CA відповідно в точках K, N, M. Відомо, що $\angle ANM = \angle CKM$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

(*В'ячеслав Ясінський*)

Розв'язання. Нехай прямі AN і CK перетинають вдруге вписане коло трикутника ABC у точках P і Q відповідно. Тоді, за теоремою про вписаний кут та кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, одержуємо:



$$\angle PNM = \angle PQM = \angle PMA,$$

$$\angle QKM = \angle QPM = \angle QMC.$$

За умовою задачі $\angle PNM = \angle QKM$, тому $PQ \parallel AC$. Звідси випливає, що

$$\angle CAN = \angle QPN = \angle QKN = \angle CKN,$$

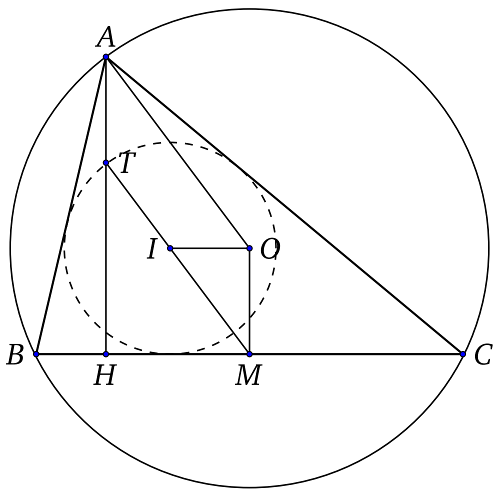
тобто $\angle CAN = \angle CKN$. Це означає, що чотирикутник $AKNC$ — вписаний, тобто $\angle CAK = \angle BNK$ і $\angle ACN = \angle BKN$. За теоремою про дотичні, трикутник KBN — рівнобедрений, тобто $\angle BNK = \angle BKN$, тоді $\angle CAK = \angle ACN$.

Таким чином, $\angle CAB = \angle ACB$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений.

Задача 6. Нехай O та I — відповідно центри описаного та вписаного кіл гострокутного трикутника ABC. Відомо, що пряма OI паралельна до сторони BC цього трикутника. Пряма MI, де M — середина BC, перетинає висоту AH в точці T. Знайдіть довжину відрізка IT, якщо радіус кола, вписаного в трикутник ABC, дорівнює r.

(*Григорій Філіпповський*)

Розв'язання. Оскільки OI паралельно BC, то, $OM = r$. З формули Ейлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Тоді за теоремою Піфагора для трикутника IOM: $MI^2 = OI^2 + OM^2 = R^2 - 2Rr + r^2 = (R-r)^2$, тобто $MI = R - r$.



Для подальшого доведення використаємо той факт, що якщо у довільному трикутнику ABC точка M — середина BC, I — центр вписаного кола, то пряма MI відтинає на висоті AH відрізок AT, довжина якого дорівнює радіусу кола, вписаного в трикутник ABC. Тоді чотирикутник $ATMO$ є паралелограмом, і, отже, $TM = AO = R$. Тоді $IT = MT - MI = R - (R - r) = r$.

Відповідь. r.

Доведення допоміжного факту. Проведемо дотичну EF до вписаного кола, яка паралельна стороні BC і позначимо через D — точку дотику, KD — діаметр вписаного кола. Тоді точка D є центром зовнівписаного кола трикутника AEF. Продовживши пряму AD до перетину із стороною BC одержимо точку N. Оскільки трикутники ABC і AEF гомотетичні з центром гомотетії в точці A, то точка N — точка дотику зовнівписаного кола трикутника ABC. Але точки K і N симетричні відносно точки M ($BK = CN = p - b$), тому MI — середня лінія в трикутнику KDN, тому $MI \parallel AD$. Отже, чотирикутник $ATID$ — паралелограм і $AT = ID = r$.